VI 1974

2 8 8

ТУ 19—32—73

6

1

ДИАФИЛЬМ

07—3—271

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \ldots$ $17, 17, 17, 17, 17, 17, \ldots$

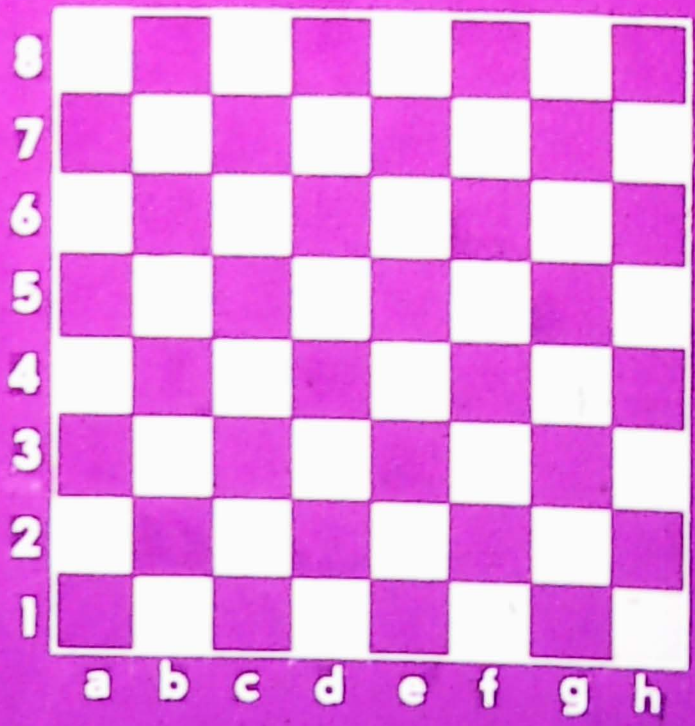
$1, -3, -9, -27, 81, -243, 729, \ldots$ $19, -19, -19, -19, -19, \ldots$

$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \ldots$ $3, 3, -3, -3, 3, 3, -3, -3, \ldots$

Диафильм по математике для 8 класса

I. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

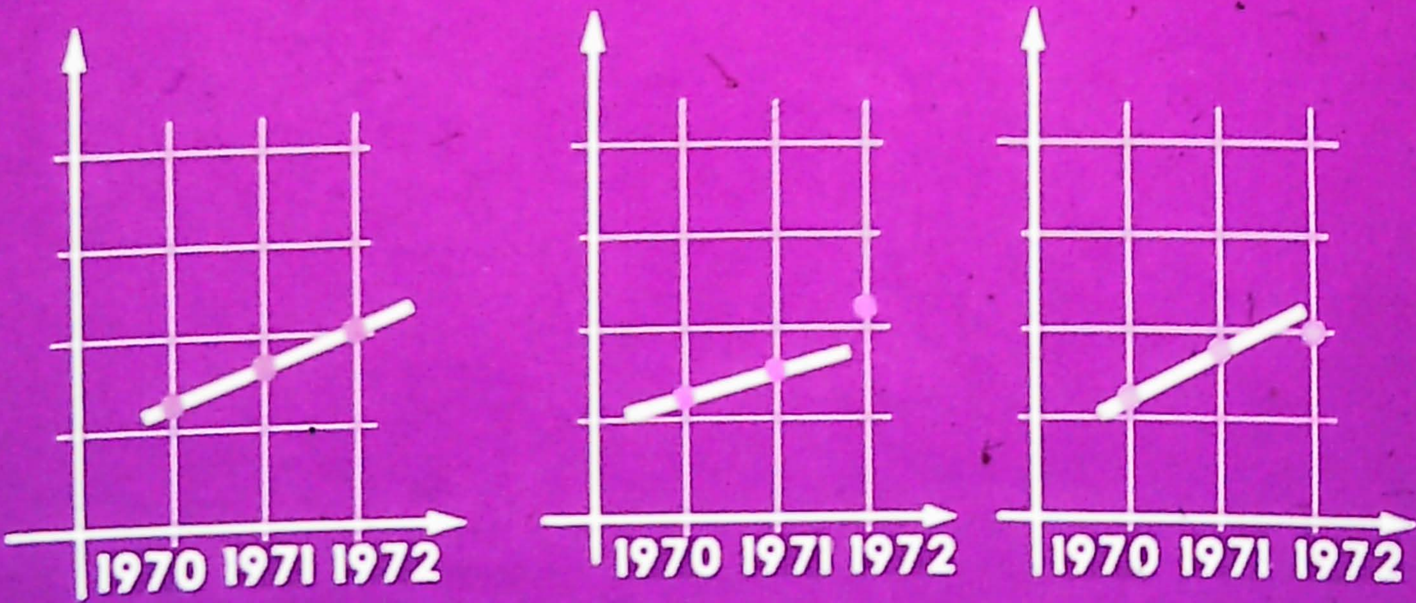
Старинная легенда рассказывает, что изобретатель шахматной игры потребовал в награду за первую клетку одно зерно, за вторую—два, за третью—четыре и так далее, каждый раз удваивая их количество. Запишите рекуррентную формулу этой последовательности.



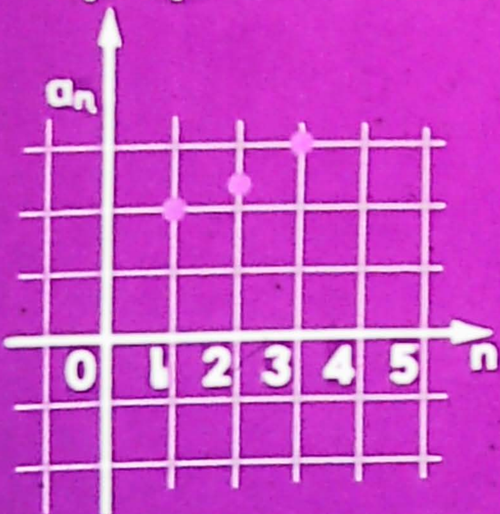
$a_{n+1} =$

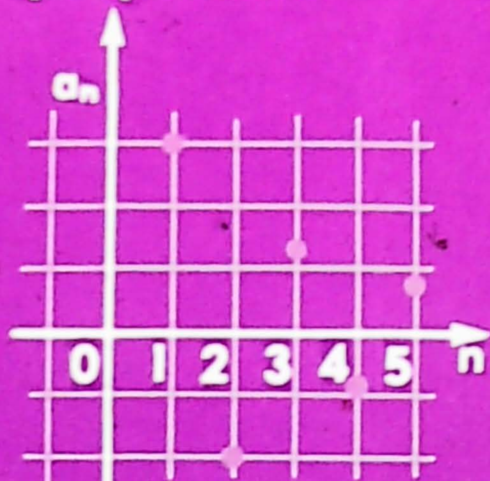
$a_1 =$

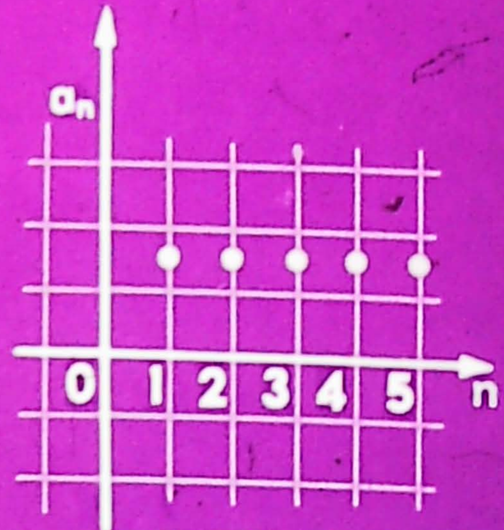
Сберкасса платит 2% годовых. Укажите рекуррентную формулу последовательности сумм, получающихся от вклада в 100 р. в конце каждого года. За первый или за второй год приращение вклада больше? Выберите подходящий график.



Числовая последовательность, задаваемая рекуррентной формулой $a_{n+1}=a_nq$, где a_1 и q—некоторые числа, называется геометрической прогрессией и обозначается значком $∺$. Сравните с определением арифметической прогрессии.







$∺ 2,\ 2\sqrt[3]{2},\ 2\sqrt[3]{4},\ 4 \ldots$

$a_1=2$

$q=\sqrt[3]{2}$

$∺ 3, -2, \frac{4}{3}, -\frac{8}{9}, \ldots$

$a_1=3$

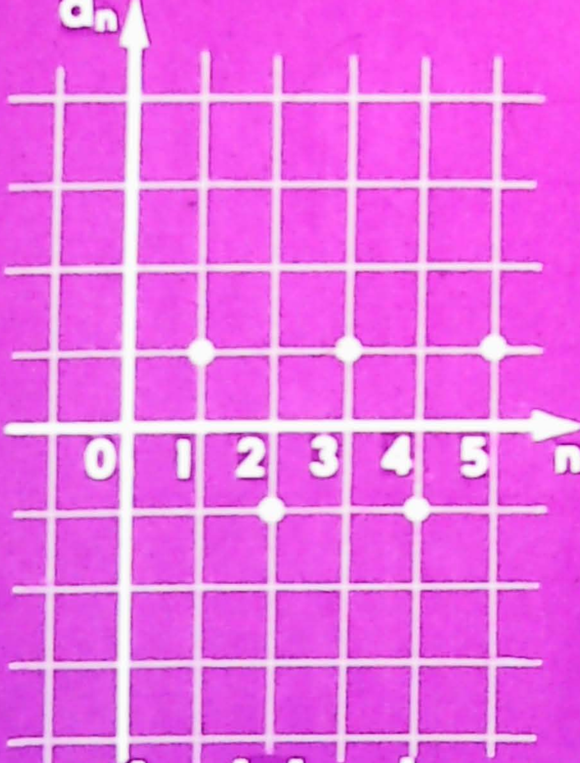
$q=-\frac{2}{3}$

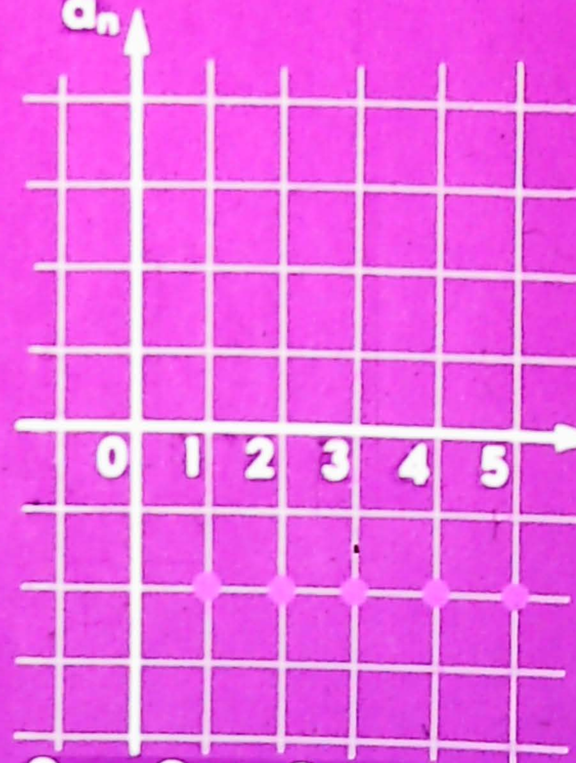
$∺ \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$

$a_1=\frac{3}{2}$

$q=1$

Это тоже геометрические прогрессии.





÷÷ 1, −1, 1, −1,...

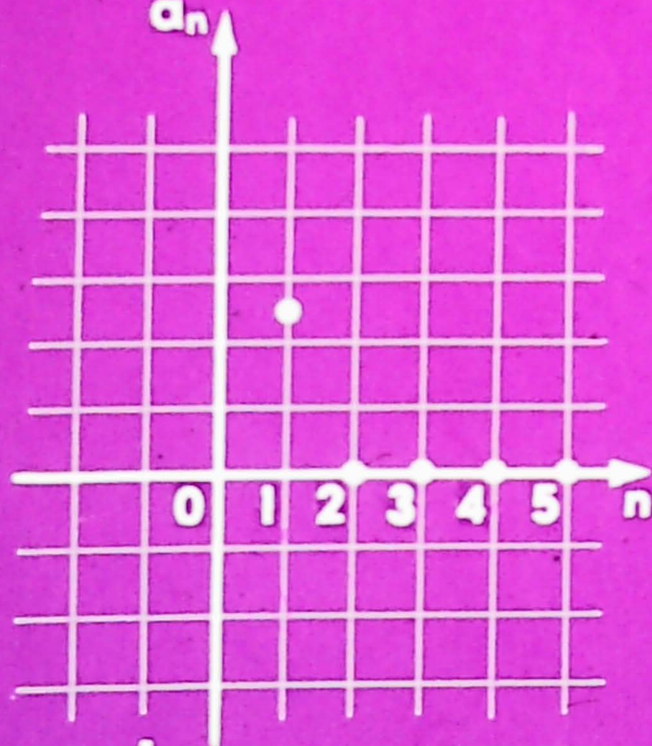
$a_1 = 1$

$q = -1$

÷÷ −2, −2, −2, −2, −2,...

$a_1 = -2$

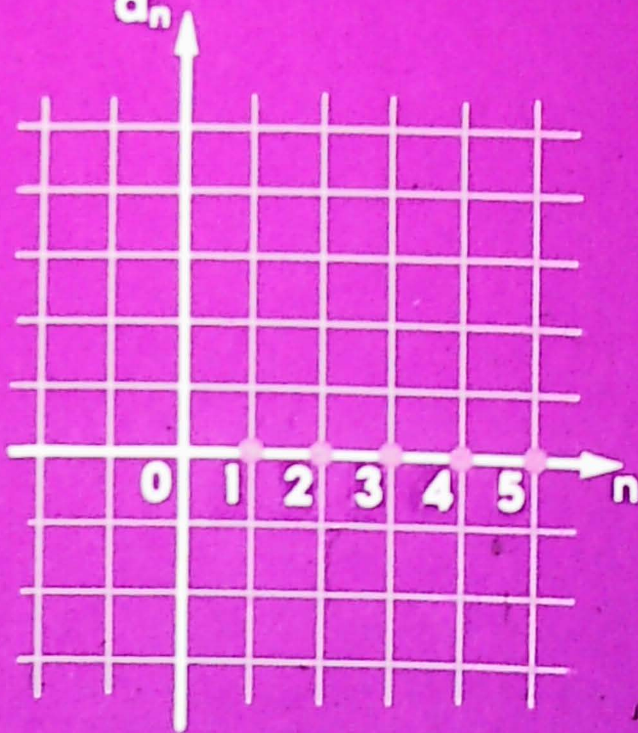
$q = 1$



$\div\div\, 2\frac{1}{2},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0, \ldots$

$a_1 = 2\frac{1}{2}$

$q = 0$

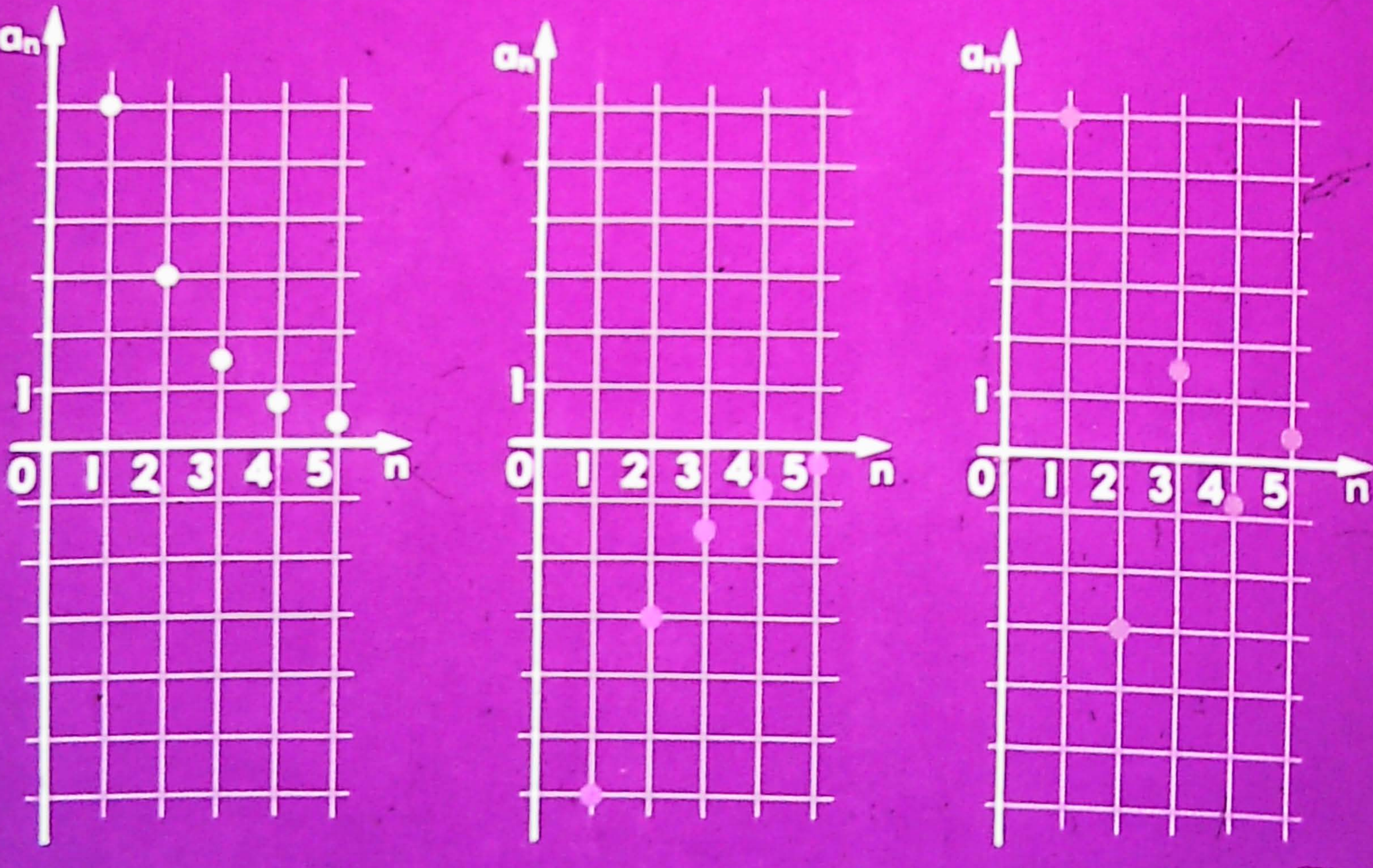


$\div\div\, 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,$

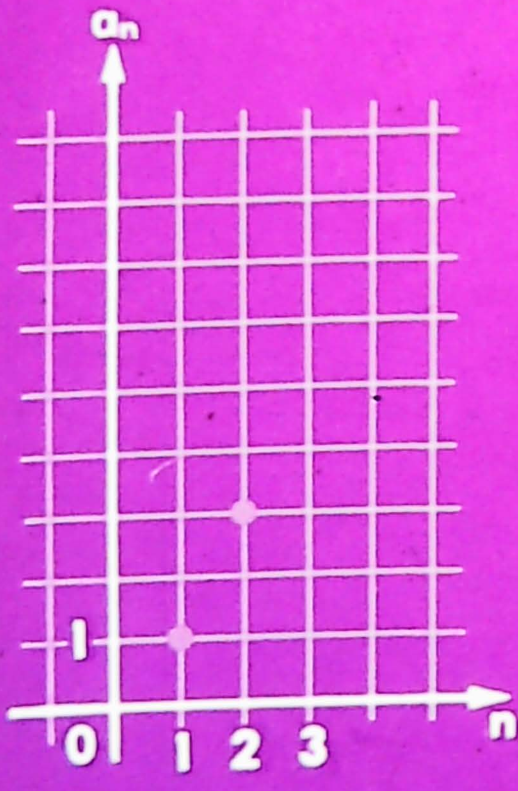
$a_1 = 0$

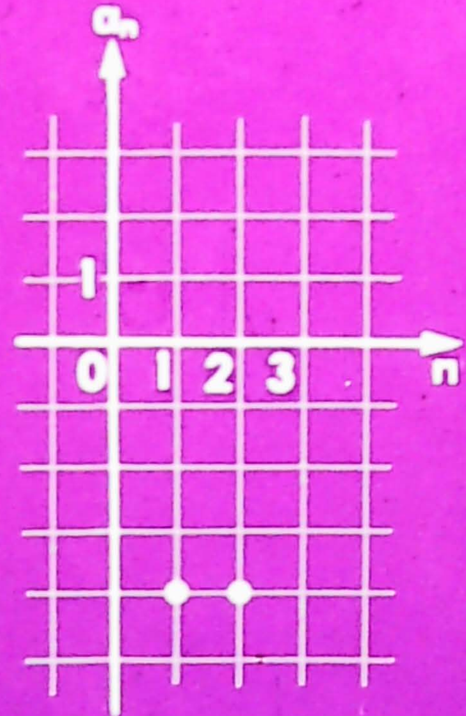
$q = 1972{,}5$

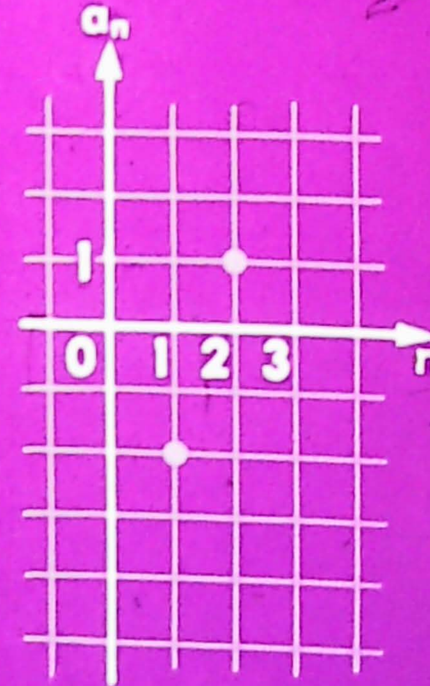
Найдите a_1 и q у этих геометрических прогрессий.



Какие арифметические и какие геометрические прогрессии начинаются такими членами? Где расположены изображения их третьих членов?







У арифметической и геометрической прогрессий могут совпадать два соседних члена. Найдите члены, следующие за данной парой и предшествующие ей.

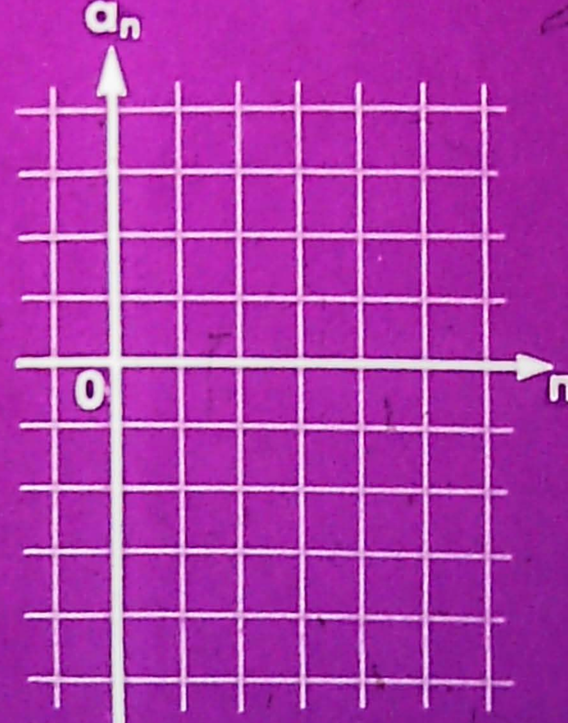
Арифметические прогрессии

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
a_k								
a_{k+1}	1	1	0	3	1	1	0	3
a_k	2	−2	3	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	3
a_{k+3}								

Геометрические прогрессии

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
b_k								
b_{k+1}	1	1	0	3	1	1	0	3
b_{k+2}	2	−2	3	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	3
b_{k+3}								

Могут ли у геометрической прогрессии встретиться такие члены? При каких $k<l<m$ это возможно? При каких q это возможно? При ответе используйте графики.



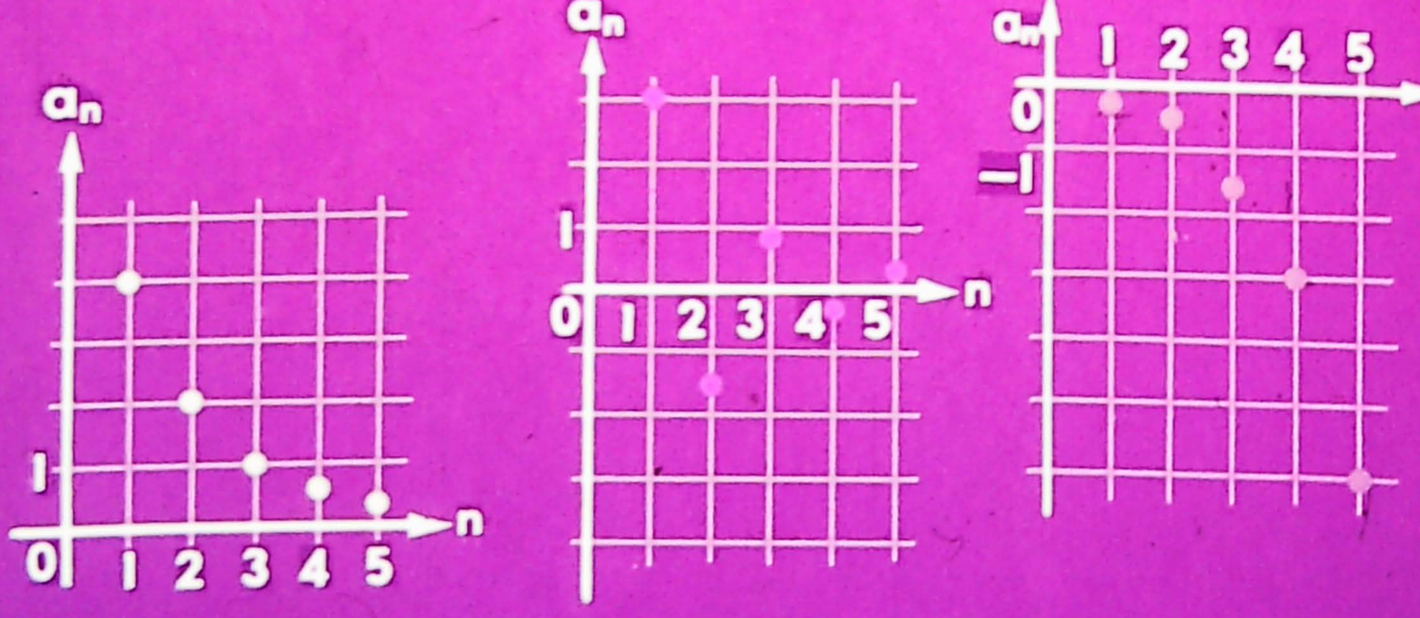
1) $a_k>0$, $a_l>0$, $a_m>0$;
2) $a_k>0$, $a_l>0$, $a_m<0$;
3) $a_k>0$, $a_l<0$, $a_m<0$;
4) $a_k>0$, $a_l<0$, $a_m>0$;
5) $a_k<0$, $a_l>0$, $a_m<0$;
6) $a_k<0$, $a_l<0$, $a_m<0$.

$$a_{n+1} - a_n = a_n q - a_n = a_n (q-1).$$

Исследуйте на монотонность геометрическую прогрессию, если

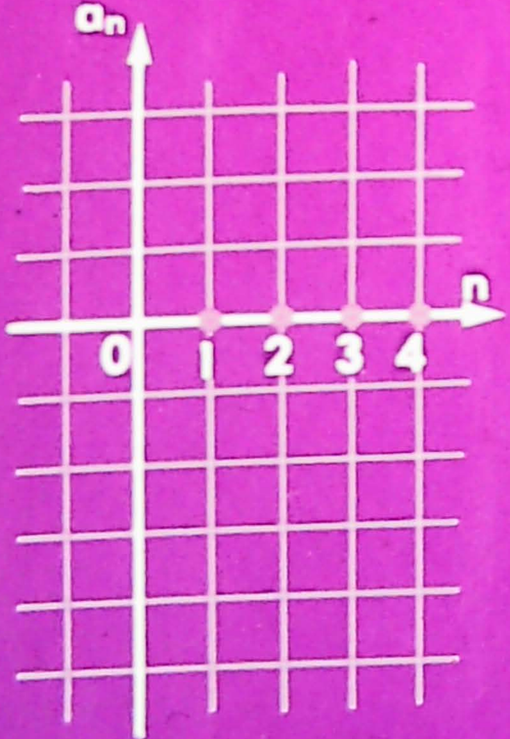
1) $a_1 \neq 0$, $q > 1$; 2) $a_1 \neq 0$, $0 < q < 1$; 3) $a_1 \neq 0$, $q < 0$.

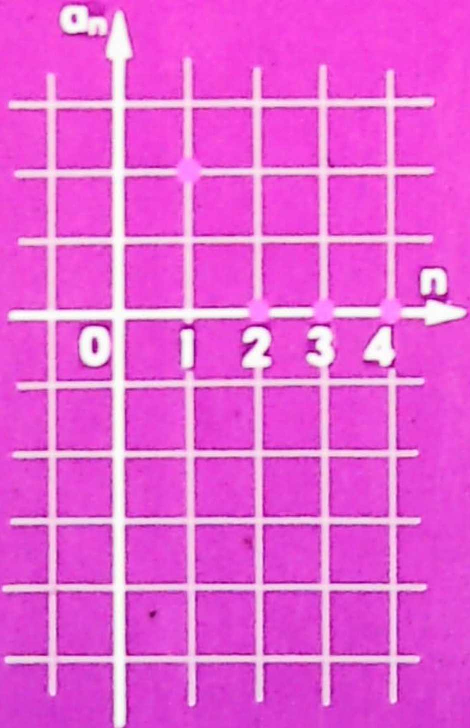
Какому случаю соответствует каждый график? Чему равны a_1 и q для этих графиков?

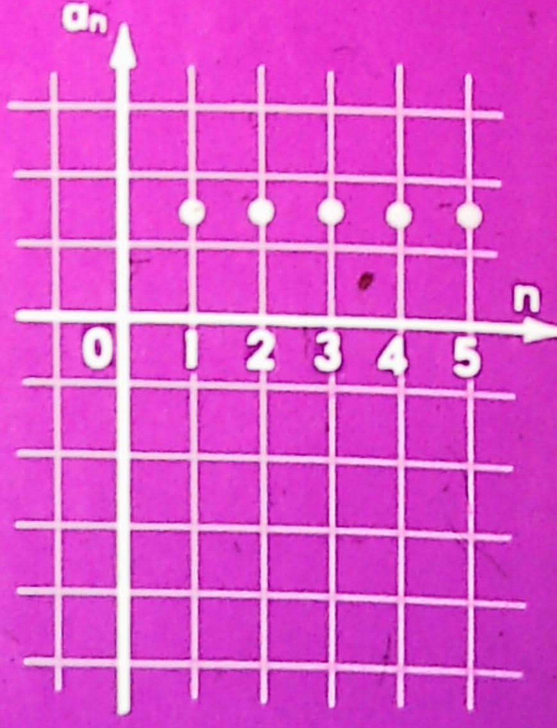


Проведите аналогичную работу при

4) $q=1$; 5) $a_1=0$; 6) $q=0$.

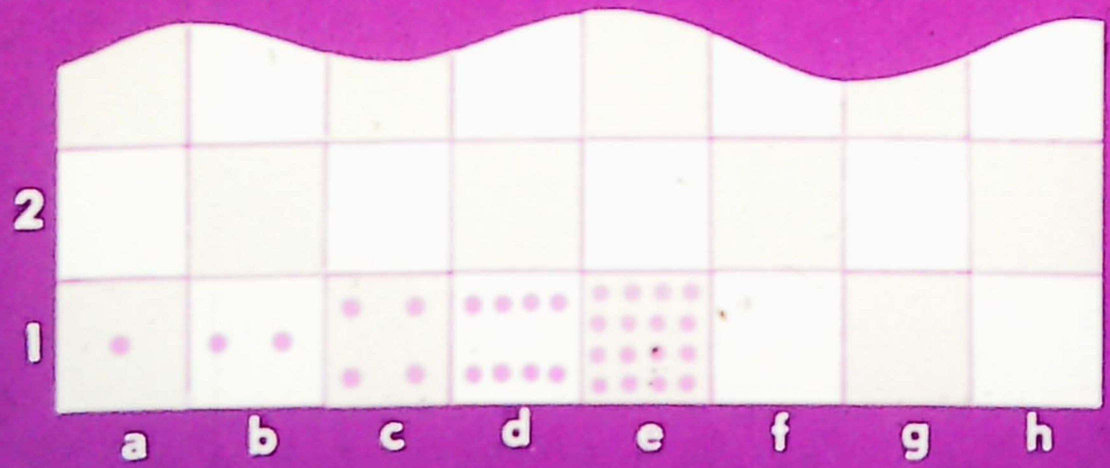






II. ФОРМУЛА n-ГО ЧЛЕНА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

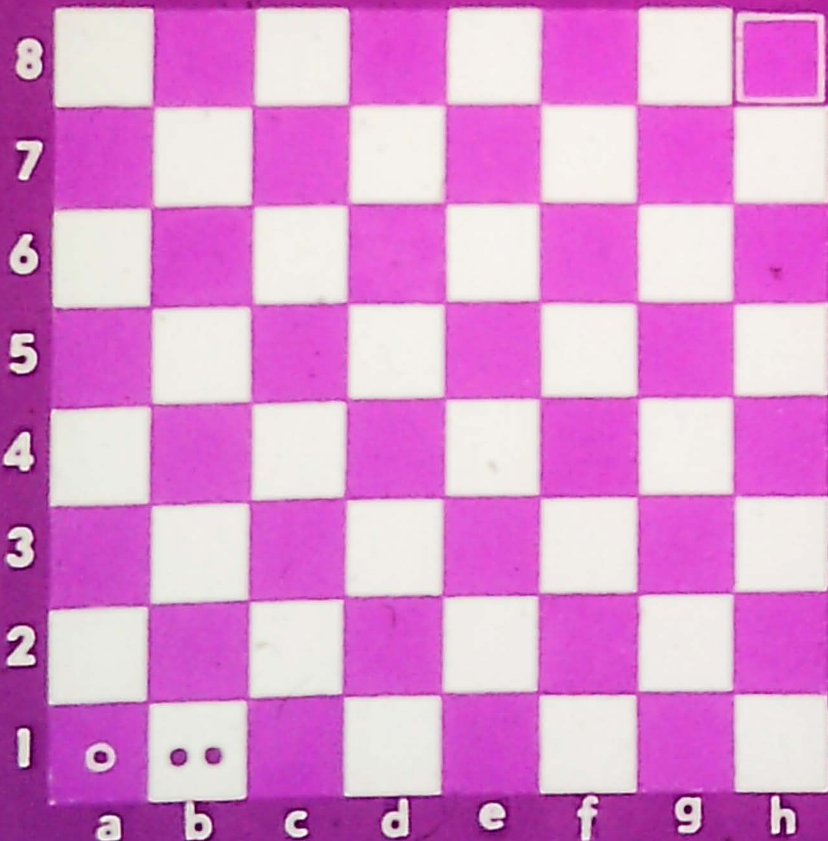
Следуя определению геометрической прогрессии, каждый её член, начиная со второго, мы можем найти, если известен предыдущий. Но как сразу вычислить a_5, зная a_1 и q?



$a_1=1$

$q=2$

$a_5=\ldots$



$$\underline{a_2} = \underline{a_1 q}$$

$$\underline{a_3} = a_2 q = \underline{a_1 q^2}$$

$$\underline{a_4} = a_3 q = \underline{a_1 q^3}$$

$$\underline{a_5} = a_4 q = \underline{a_1 q^4}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\boxed{a_n = a_1 q^{n-1}}$$

$a_1 = 1, \quad q = 2,$

$$a_{64} = 1 \cdot 2^{63} = 9\ 223\ 372\ 036\ 854\ 775\ 808$$

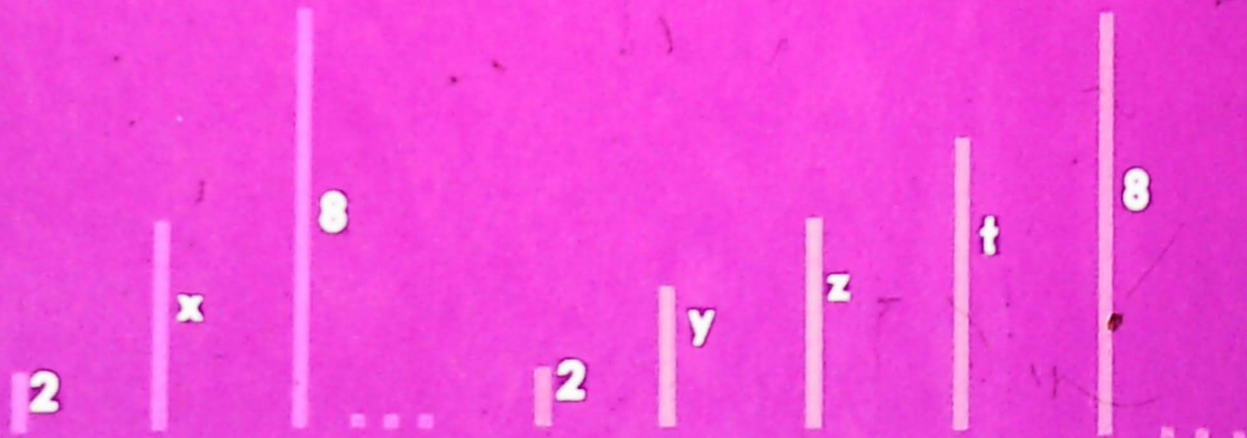
В формуле $a_n = a_1 q^{n-1}$ четыре переменных.

Зная три из них, можно найти четвёртую.

Заполните таблицу.

	a_1	q	n	a_n
1	3	$-\frac{1}{2}$	5	
2	-2	3		-162
3	a^5		6	b^5
4		$-\sqrt[3]{5}$	4	7

Длины этих отрезков—последовательные члены геометрических прогрессий.
Определите x, y, z и t.



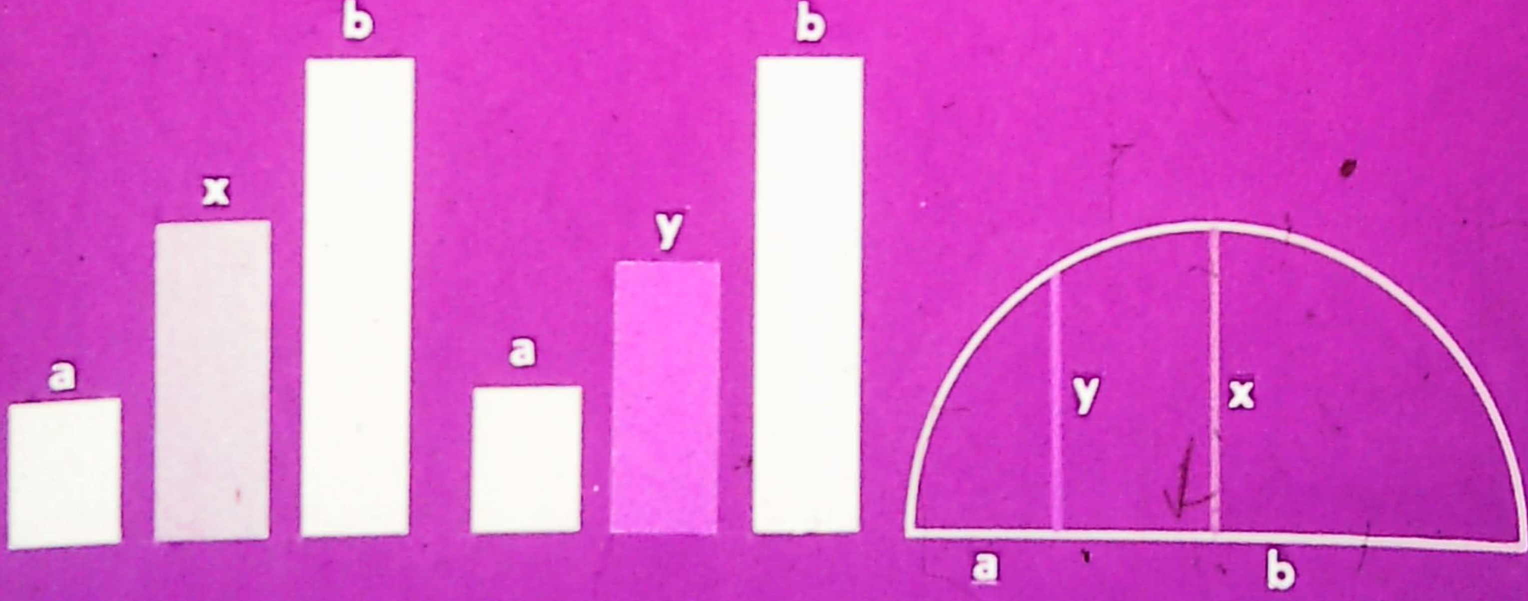
Найдите также обозначенные буквами члены следующих геометрических прогрессий:

∺2, a, 8, ...   ∺2, b, c, d, 8, ...

Докажите, что $a_k^2 = a_{k-1} a_{k+1}$. Если $a_k > 0, a_{k-1} > 0, a_{k+1} > 0$, то a_k называют средним геометрическим чисел a_{k-1} и a_{k+1}:

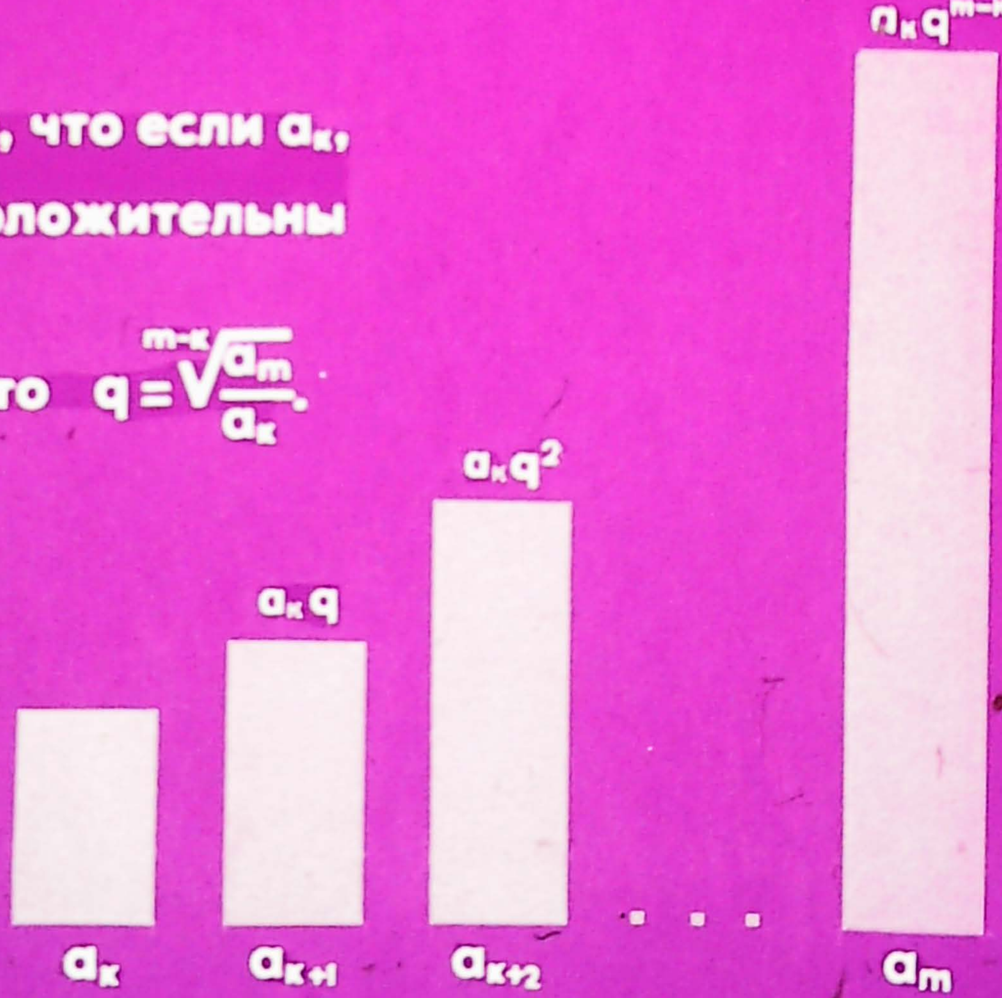
$$a_k = \sqrt{a_{k-1} a_{k+1}}.$$

Сравните среднее арифметическое x и среднее геометрическое y двух положительных чисел a и b.



$\div \ldots, a, x, b, \ldots$ $\qquad$ $\because\!\cdot \ldots, a, y, b, \ldots$

Докажите, что если $a_к$, a_m и q положительны и $m > к$, то $q = \sqrt[m-к]{\dfrac{a_m}{a_к}}$.



Найдите q и a_1, если $a_5 = 1$ и $a_{14} = 512$.

Последовательности

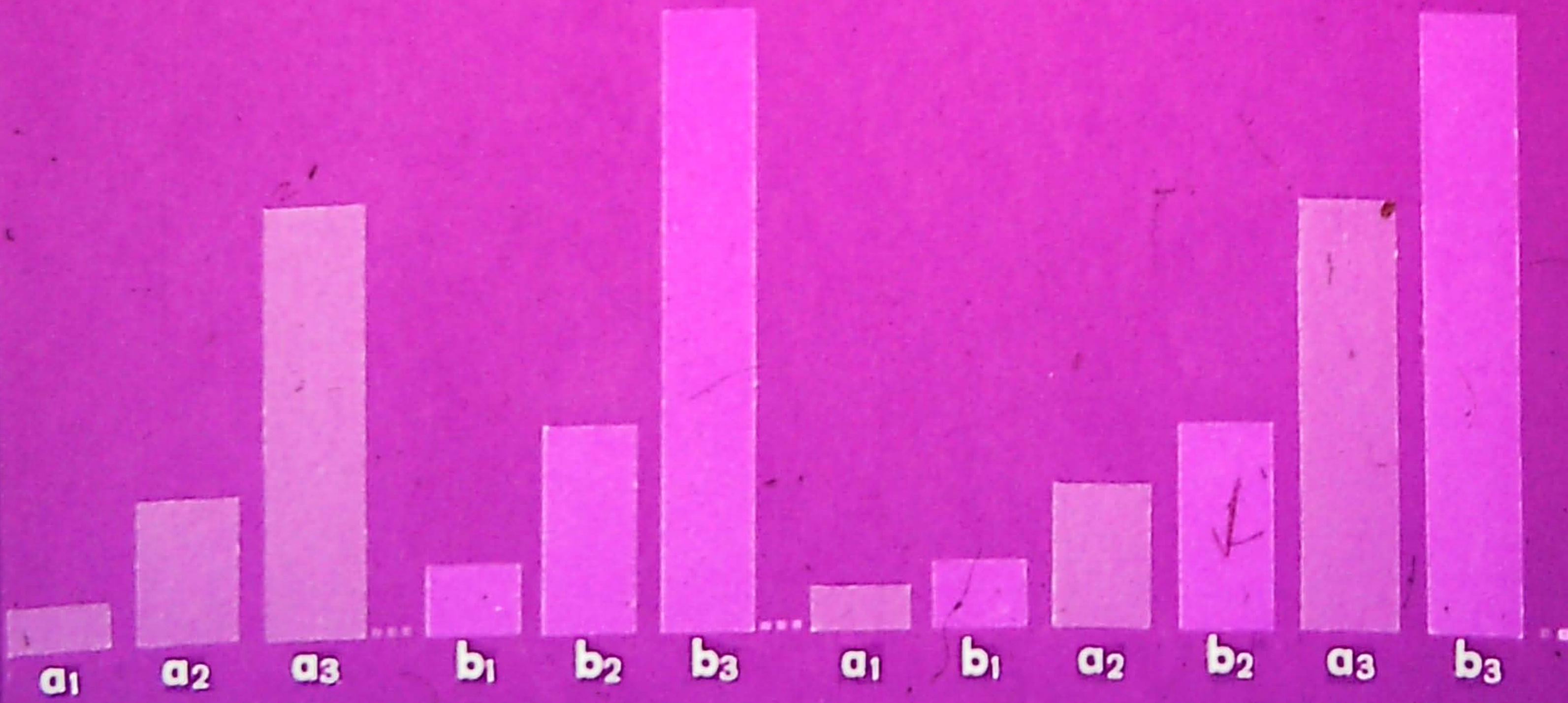
$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n \dots$

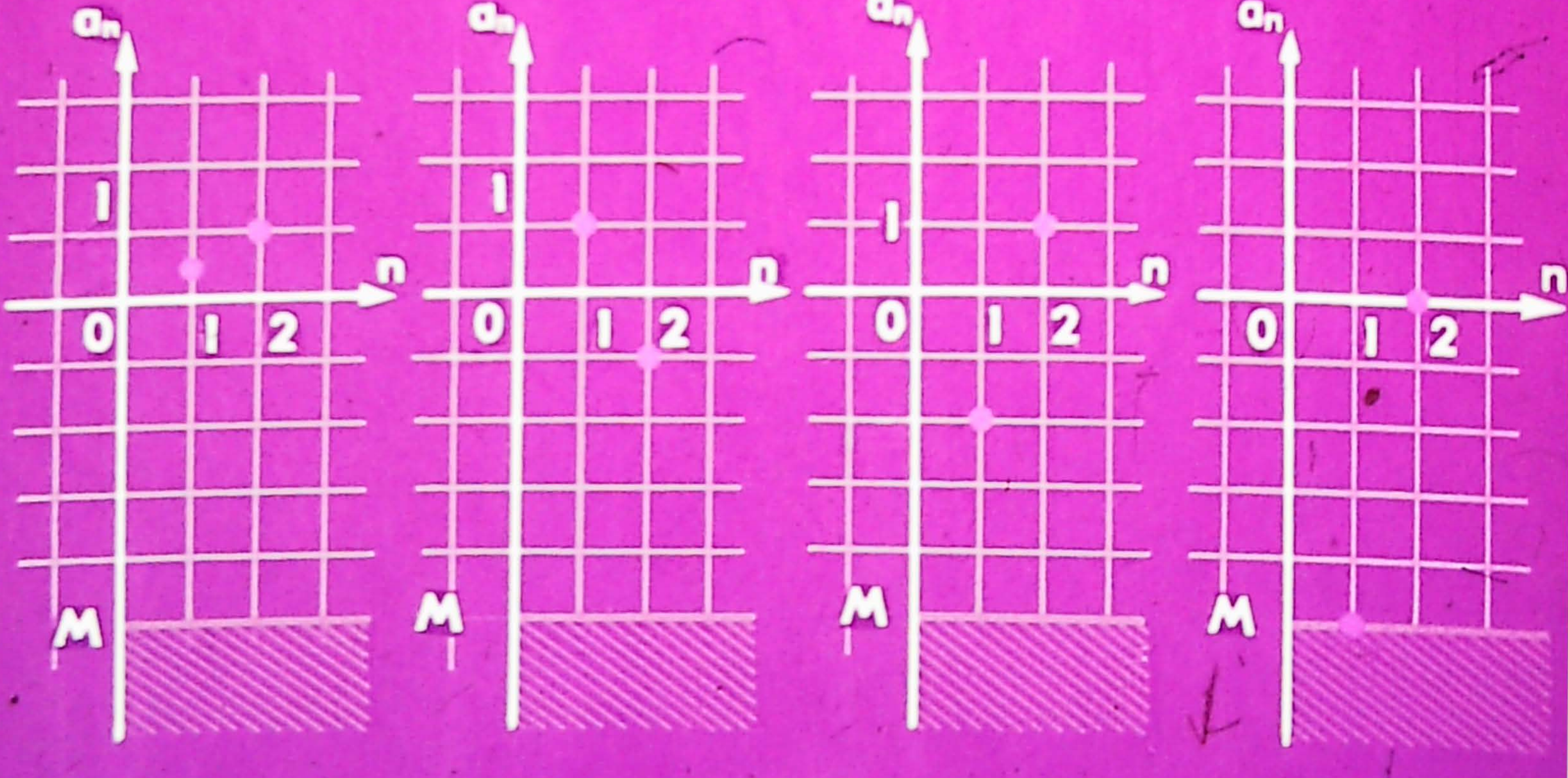
$a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots a_n, b_n, \dots$

—геометрические прогрессии.

При каких условиях это возможно?

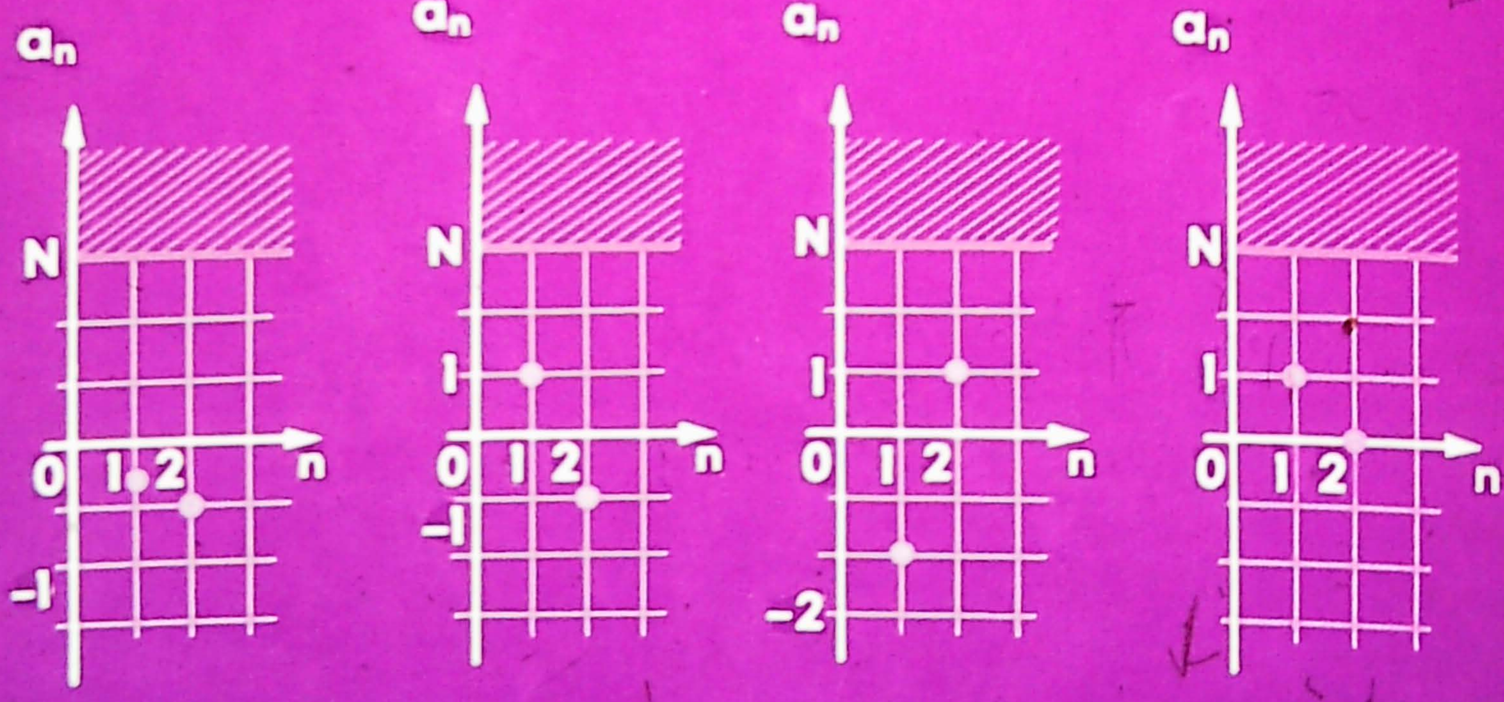


При каких a_1 и q геометрическая прогрессия ограничена снизу? Какие случаи представлены на графиках?



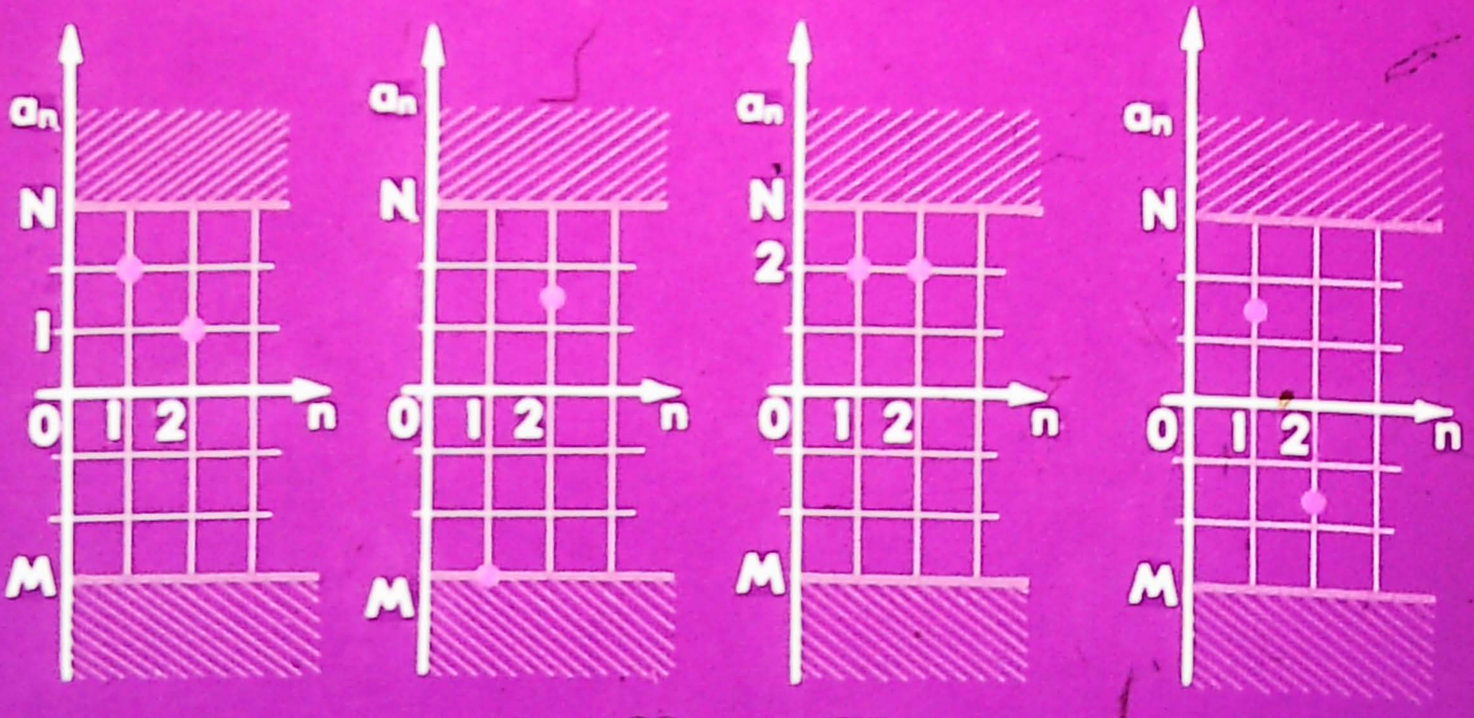
$a_n \geq M$

При каких a_1 и q геометрическая прогрессия ограничена сверху? Какие случаи представлены на графиках?



$a_n \leq N$

При каких a_1 и q геометрическая прогрессия ограничена (и сверху, и снизу). Какие случаи представлены на графиках?

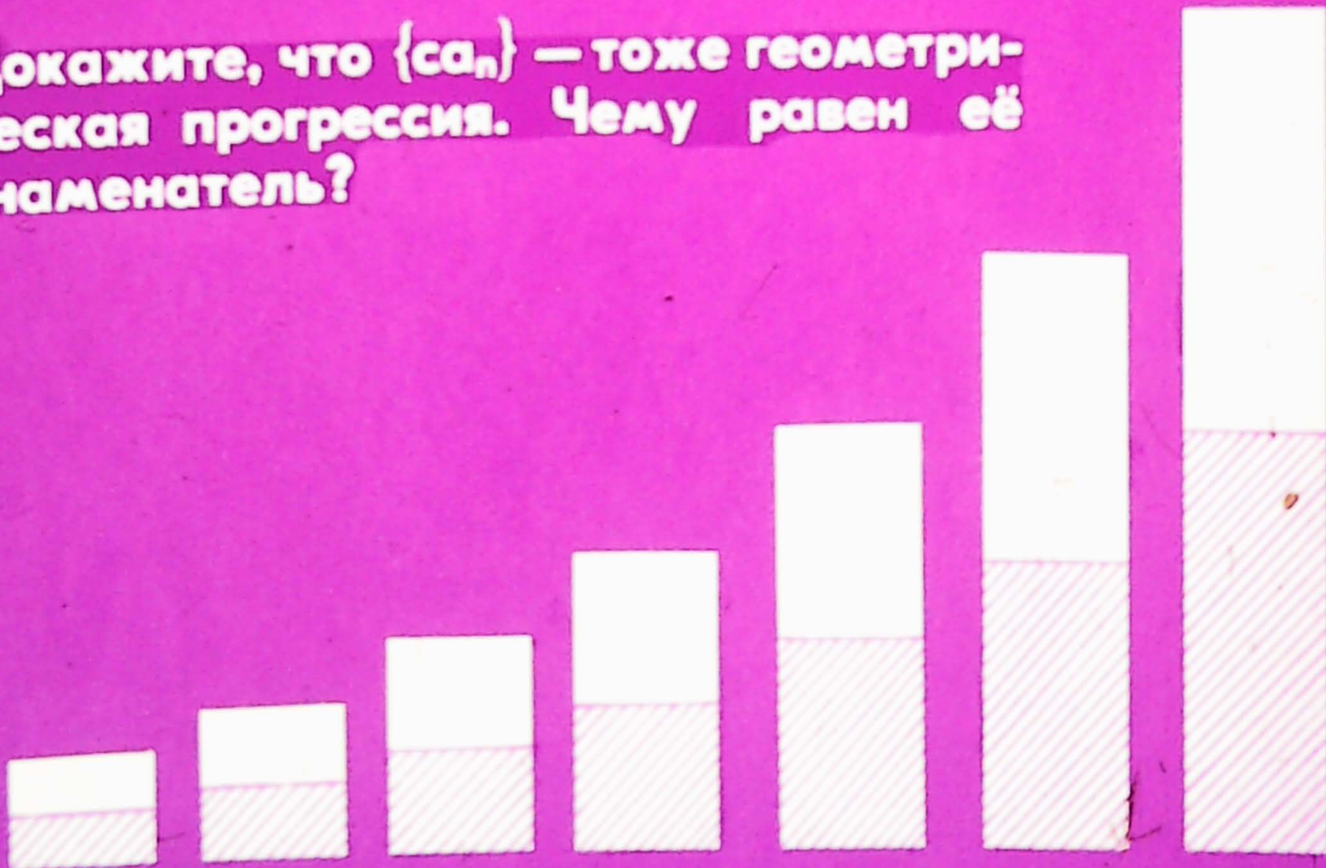


$M \leqslant a_n \leqslant N$

III. СУММА ПЕРВЫХ n ЧЛЕНОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Пусть $\{a_n\}$ — геометрическая прогрессия с знаменателем q ; пусть c — некоторое число.

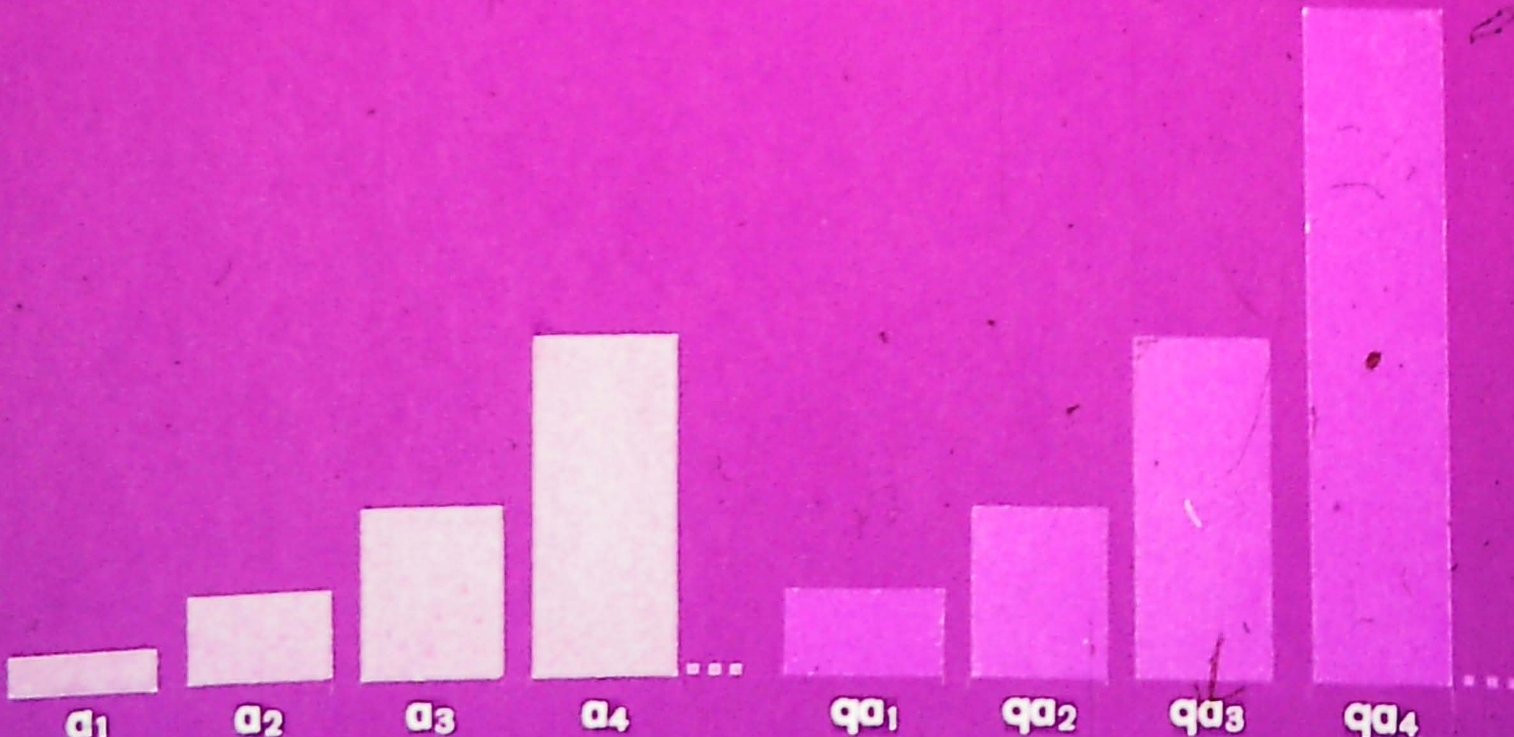
Докажите, что $\{ca_n\}$ — тоже геометрическая прогрессия. Чему равен её знаменатель?



$\{a_n\}$ и $\{ca_n\}$

Сравните геометрические прогрессии

$\{a_n\}$ и $\{qa_n\}$.



Если $q \neq 1$, то формулу S_n можно получить так:

$$\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \\ qS_n = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + a_{n+1} \end{cases}$$

$$(q-1)S_n = a_{n+1} - a_1$$

$$\boxed{S_n = \frac{a_{n+1} - a_1}{q-1} = \frac{a_n q - a_1}{q-1} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}}$$

Пример:

$$S_5 = 2 + 6 + 18 + 54 + 162$$

$$3S_5 = 6 + 18 + 54 + 162 + 486$$

$$2S_5 = 486 - 2 = 484$$

$$S_5 = 242$$

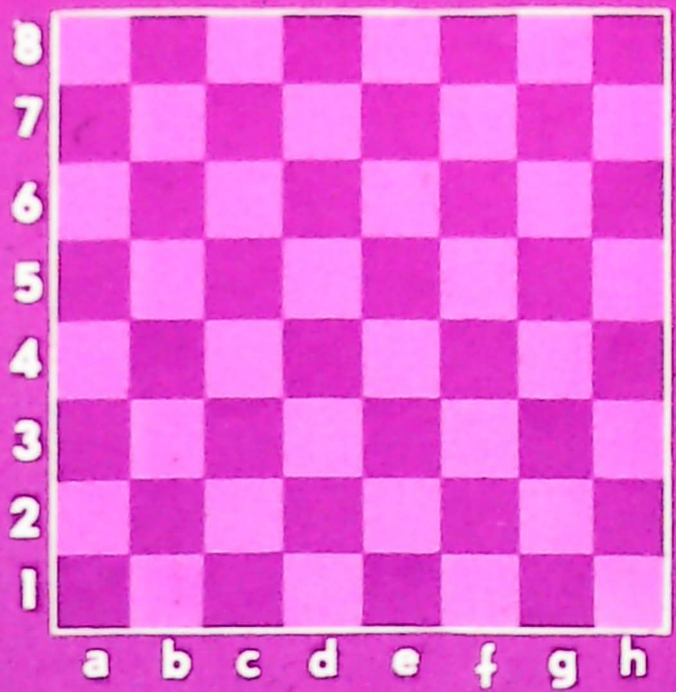
$$+\begin{array}{r} 2 \\ 6 \\ 18 \\ 54 \\ 162 \\ \hline 242 \end{array}$$

$$\begin{cases} S_n = \dfrac{a_n q - a_1}{q-1} \\ a_n = a_1 q^{n-1} \end{cases}$$

В этих двух уравнениях пять переменных. Зная три из них, можно найти две остальные. Заполните таблицу.

	a_1	q	n	a_n	S_n
1	4	$-\frac{1}{4}$	4		
2			6	2	0
3	5	-1			0
4	$\sqrt{2}$		6	-8	
5	1		8		511
6	x^6	$\frac{y}{x}$		y^6	

Теперь подсчитайте, какое число зёрен запросил изобретатель шахматной игры?



$a_1=1 \qquad q=2$

$a_{64}=9\ 223\ 372\ 036\ 854\ 775\ 808.$

S_{64} — ?

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К КАДРАМ

к. 7

В последнем примере q может быть любым числом.

к. 10

a_k	0	4	-3	6	1,5	2,5	0	3
a_{k+3}	3	-5	6	-3	0	-2	0	3
b_k	0,5	-0,5	не сущ.	не сущ.	2	-2	любое [1]	3
b_{k+3}	4	4	не сущ.	0	0,25	0,25	0	3

1) При условии, что $k=1$; иначе $b_k=0$.

к. 11 Нужно учесть, что все чётные члены геометрической прогрессии имеют один и тот же знак и что все нечётные члены — тоже одного знака.

к. 18

$$x=4,\ a=\pm 4;\ z=4,\ c=4;\ y=2\sqrt{2},\ b=\pm 2\sqrt{2};$$

$$t=4\sqrt{2},\ d=\pm 4\sqrt{2}.$$

к. 21

Это возможно, если знаменатели $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ равны одному и тому же $q \geqslant 0$ и если $b_1=\pm a_1\sqrt{q}$.

к. 22-24

Геометрическая прогрессия ограничена снизу во всех случаях, кроме 1) $a_1 < 0$, $q>1$; 2) $a_1 \neq 0$, $q<-1$; ограничена сверху во всех случаях, кроме 1) $a_1>0$, $q>1$; 2) $a_1 \neq 0$, $q<-1$; ограничена лишь в случаях 1) $a_1=0$; 2) $-1<q\leqslant 1$.

к. 30

$$S_{64}=18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615.$$

КОНЕЦ

Диафильм сделан по заказу Министерства
просвещения РСФСР

Автор кандидат педагогических наук Г. Левитас
Художник-оформитель М. Колчина
Редактор В. Чернина

Студия «Диафильм», 1972 г.
Москва, 101000, Старосадский пер., д. №7
Д-060-72 Цветной 0-30