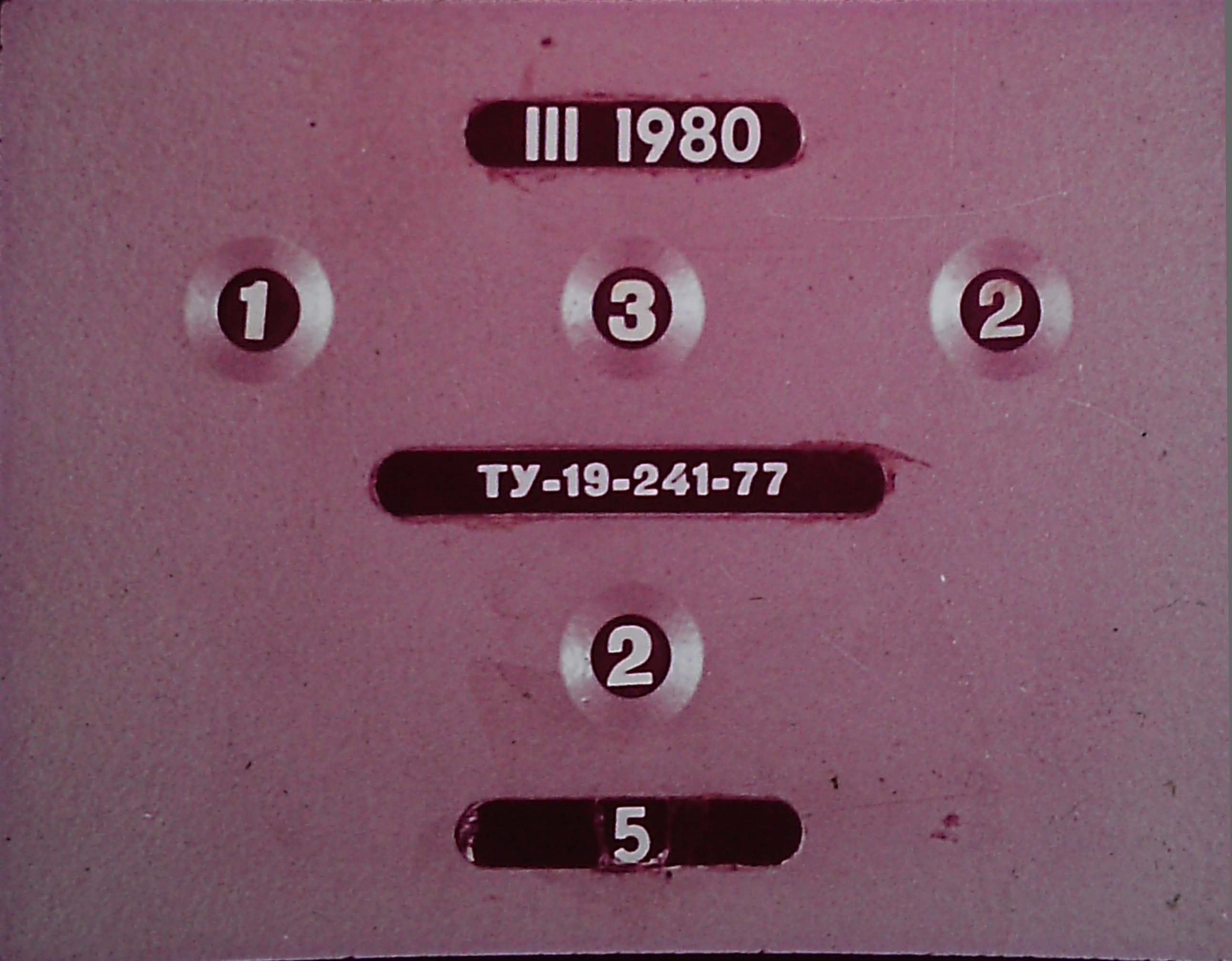
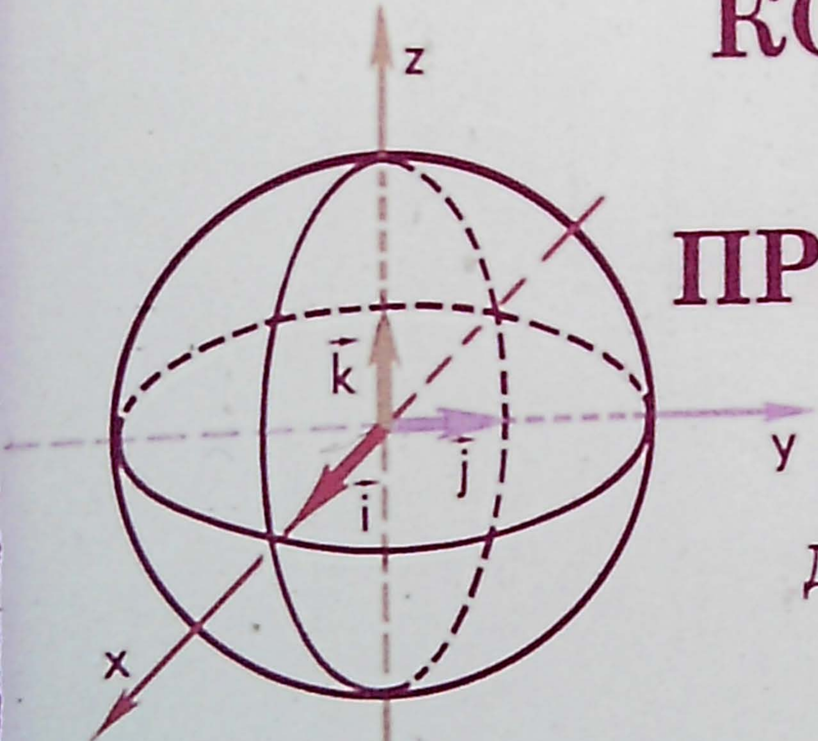

III 1980
1
3
2
ТУ-19-241-77
2
5

студия

ДИАФИЛЬМ

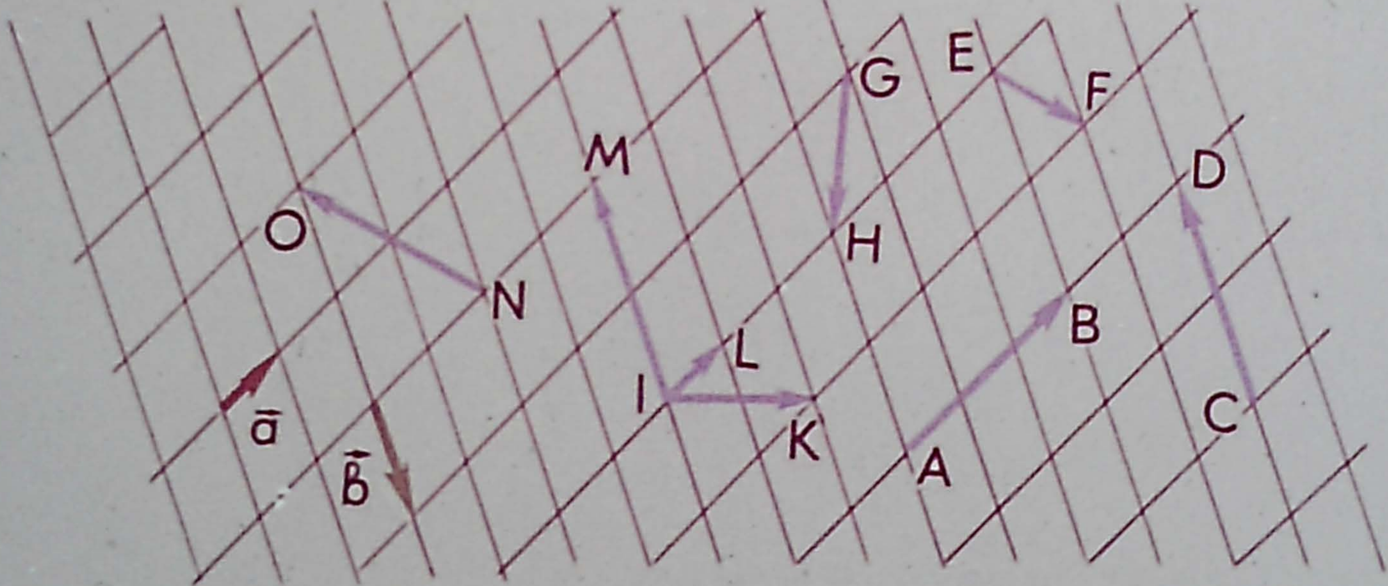
07—3—099



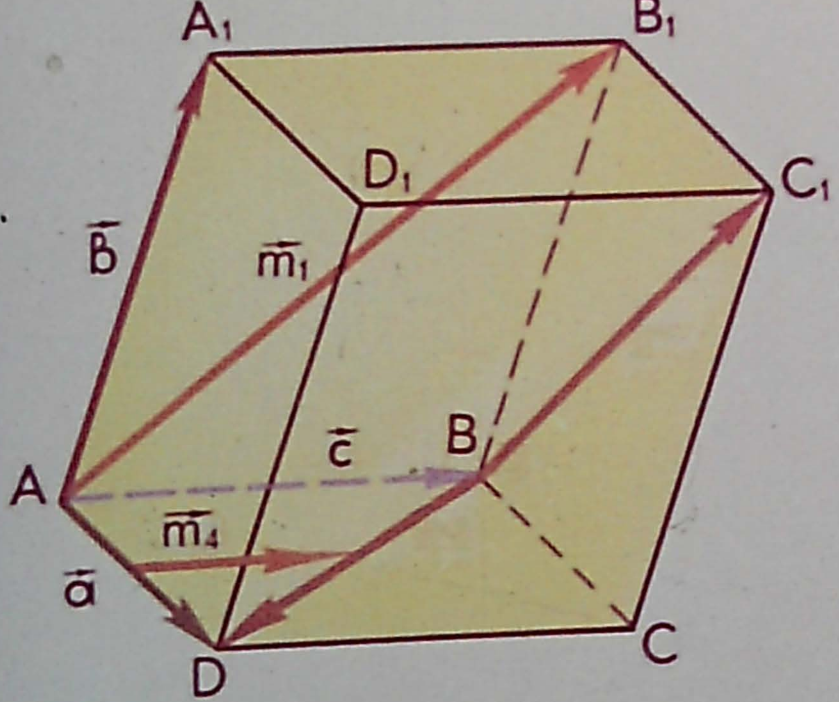
ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Диафильм по геометрии
для 10 класса

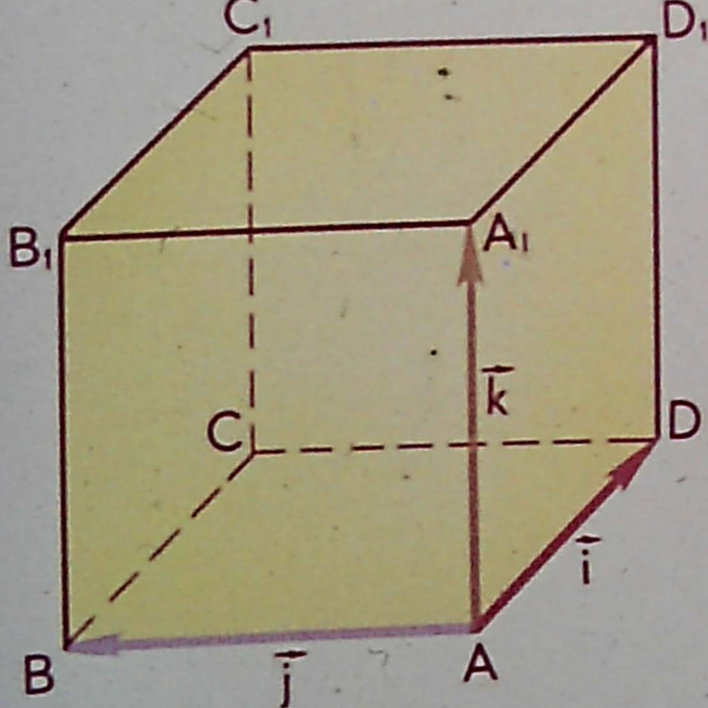
Координаты вектора



Представьте данные векторы в виде $x\vec{a}+y\vec{b}$, где $x, y \in R$. Существует ли в этой плоскости вектор $\vec{n}$, который нельзя представить в таком виде?

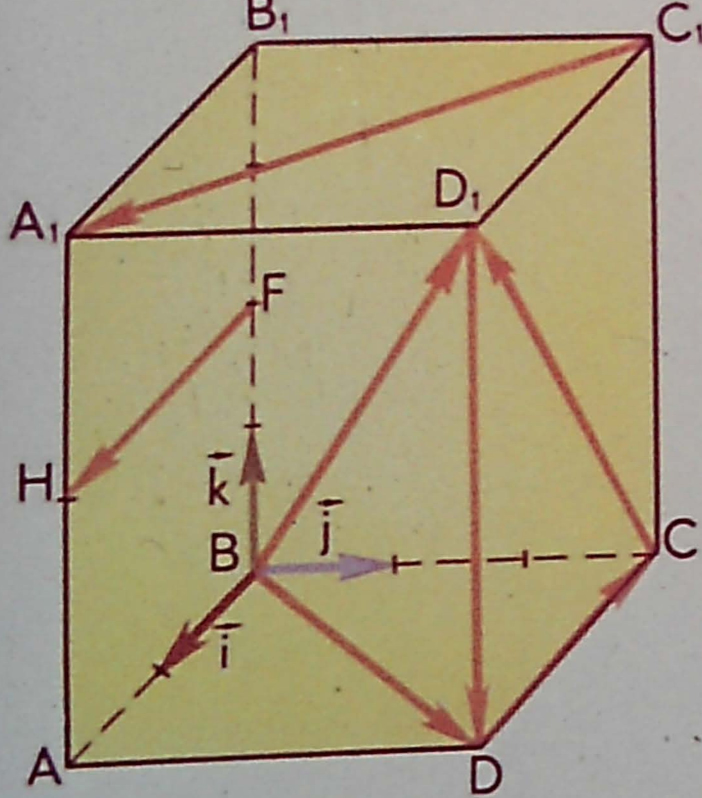


AD_1 — **параллелепипед. Представьте векторы** $\vec{m}_1$; $\vec{m}_2$; $\vec{m}_3$; $\vec{m}_4$ **в виде** $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, **где** $x, y, z \in R$. **Существует ли в пространстве вектор** $\vec{n}$, **который нельзя представить в таком виде?**

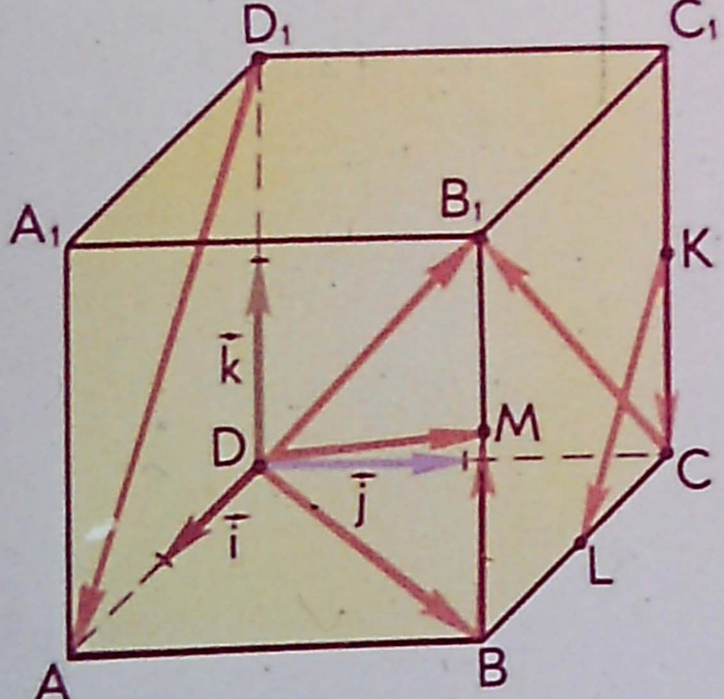


Если $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ **и**
$\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$,
то $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ **называют прямоугольным базисом.**

Векторы $\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AA_1}$ **образуют прямоугольный базис.**
Докажите,
что $ABCDA_1B_1C_1D_1$ **— куб.**



$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ — прямоугольный базис. Каждый из изображенных на рисунке векторов представьте в виде $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, где $x, y, z \in R$. Существует ли в пространстве вектор $\vec{a}$, который нельзя разложить по векторам $\vec{j}$; $\vec{i}$; $\vec{k}$?



Какой из изображенных на рисунке векторов представлен в виде:

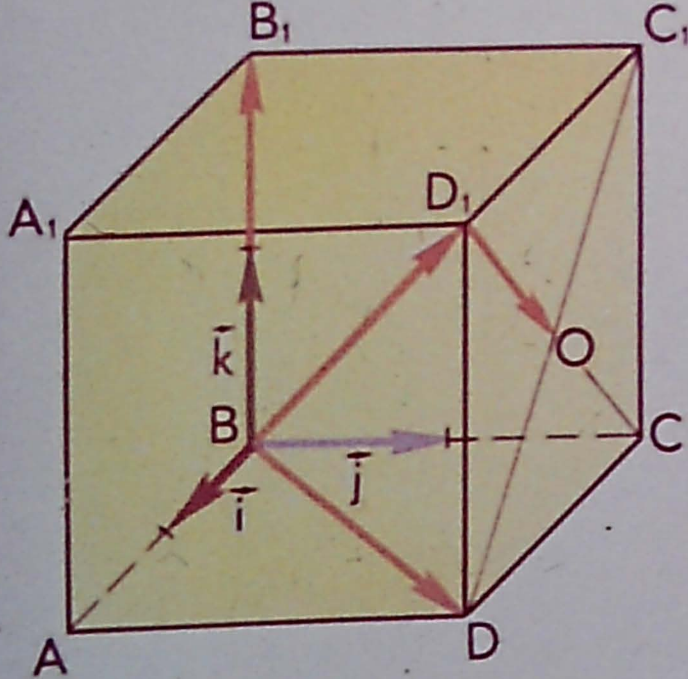
а) $0 \cdot \vec{i} + 0\vec{j} - 2 \cdot \vec{k}$;

б) $2\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k}$;

в) $\vec{i} + 0\vec{j} - \vec{k}$;

г) $2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$?

В базисе $(\vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k})$ каждая тройка чисел $(x;\ y;\ z)$ определяет единственный вектор $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z\vec{k}$.



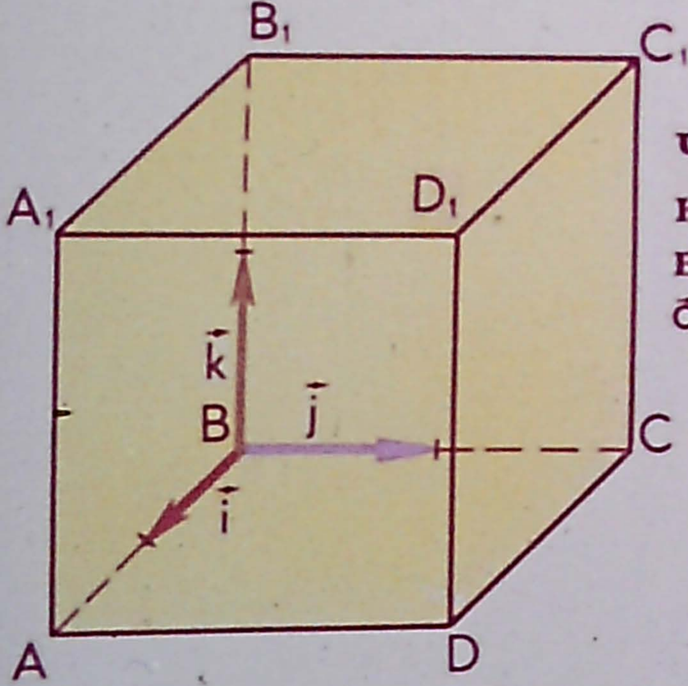
Какие векторы определены следующими тройками чисел:

а) (0; 0; 1);

б) (2; 2; 2);

в) (2; 2; 0);

г) (—1; 0; —1)?



Числа x, y, z называют координатами вектора $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ **в базисе** $(\vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k})$.

$\vec{a} = (x;\ y;\ z)$.

Найдите координаты векторов:

а) $\vec{a} = \vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$;

б) $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$;

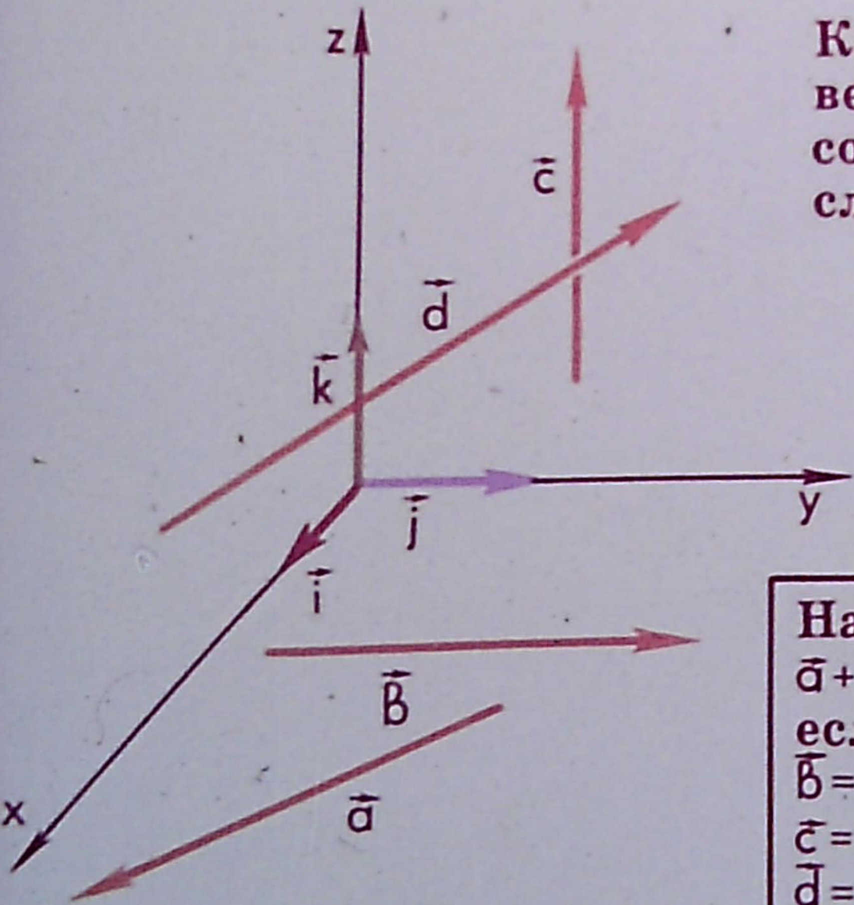
в) $\vec{c} = 5\vec{k}$;

г) $\overrightarrow{BC_1}$;

д) $\overrightarrow{AD_1}$;

е) $\overrightarrow{D_1B}$.

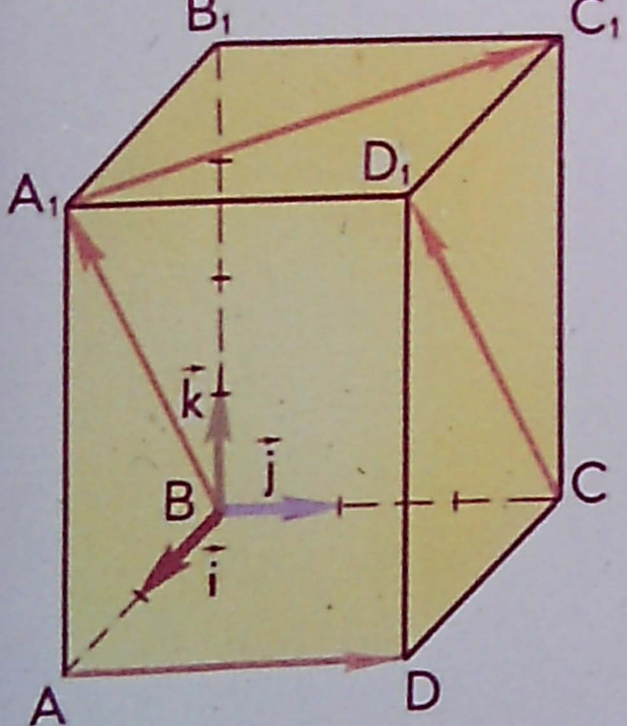
Правила действий над векторами, заданными своими координатами



Каждая координата суммы векторов равна сумме соответствующих координат слагаемых.

Найдите координаты вектор[о]
$\vec{a}+\vec{b}$; $\vec{a}+\vec{c}$; $\vec{b}+\vec{c}$; $\vec{c}+\vec{d}$,
если $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$;
$\vec{b}=3\vec{j}$;
$\vec{c}=2\vec{k}$;
$\vec{d}=-5\vec{i}+\vec{j}$.

$$(x_1; y_1; z_1) + (x_2; y_2; z_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2).$$



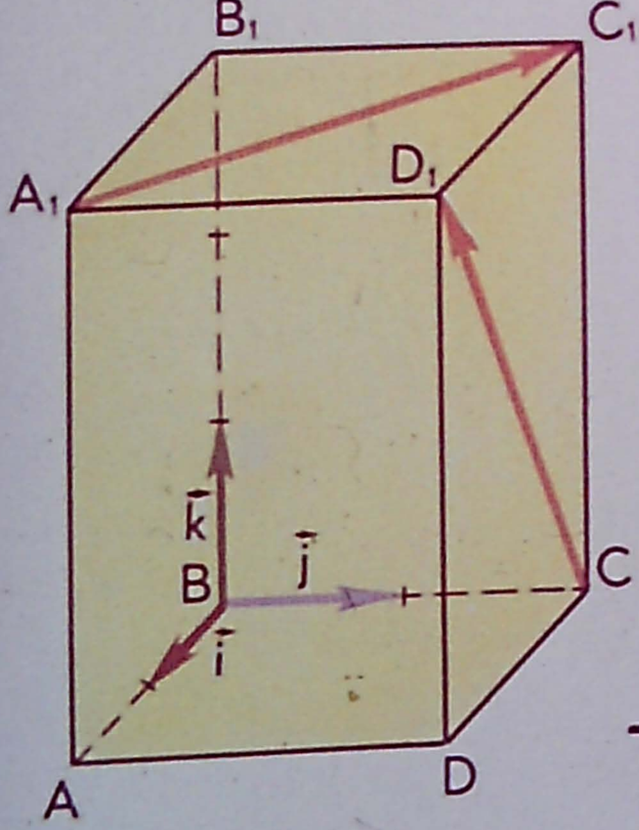
Найдите координаты векторов:

а) $\overrightarrow{A_1C_1}$; $\overrightarrow{CD_1}$ и $\overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{CD_1}$;

б) $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BA_1}$ и $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA_1}$;

в) $\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{C_1C}$ и $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{C_1C}$;

г) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CC_1}$.



Дано: $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ **и** $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$.

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k};$$

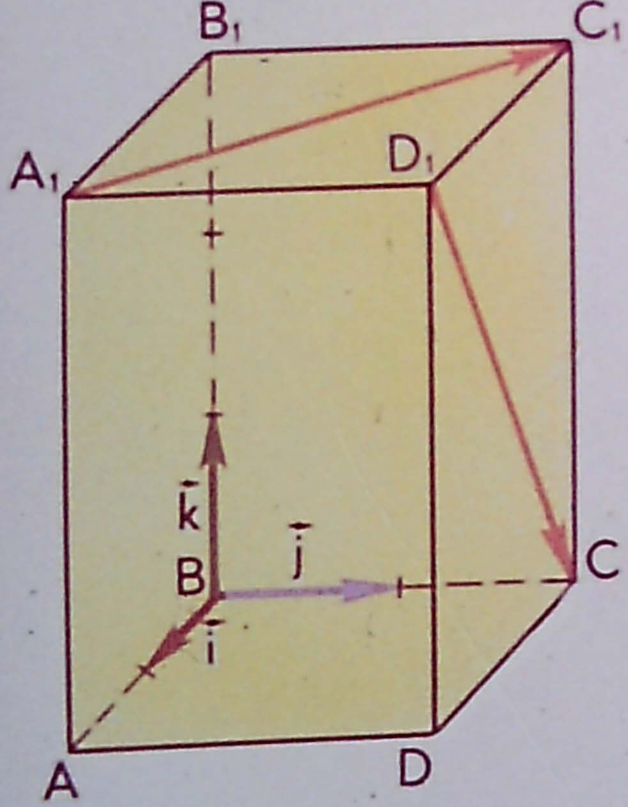
$$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k};$$

. . .   . . .

. . .

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}.$$

Доказать: $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2)$.



Дано: $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ **и** $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$

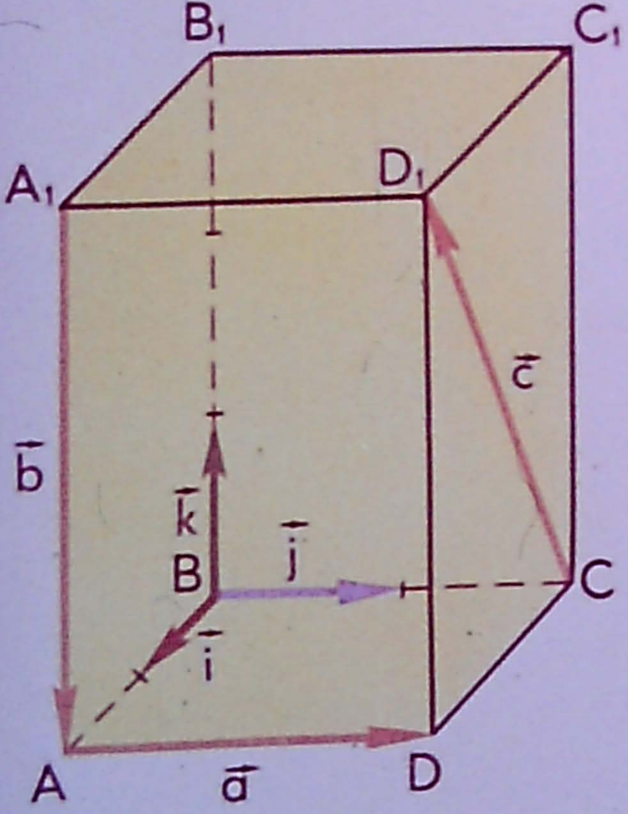
…   …

…

$$\boxed{\vec{a}-\vec{b} = (x_1-x_2)\vec{i} + (y_1-y_2)\vec{j} + (z_1-z_2)\vec{k}.}$$

Доказать: $\vec{a}-\vec{b} = (x_1-x_2; y_1-y_2; z_1-z_2)$.

Вычислите: а) $\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{A_1C_1}$; б) $\overrightarrow{B_1D_1}-\overrightarrow{AC}$;
в) $\overrightarrow{BD_1}+\overrightarrow{B_1D}$; г) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{B_1C_1}$.



Дано: $\vec a = (x; y; z)$, $p \in R$.

$\Downarrow$

$\cdots$

$\Downarrow$

$\boxed{p\vec a = px\vec i + py\vec j + pz\vec k.}$

$\Downarrow$

Доказать: $p\vec a = (px; py; pz)$.

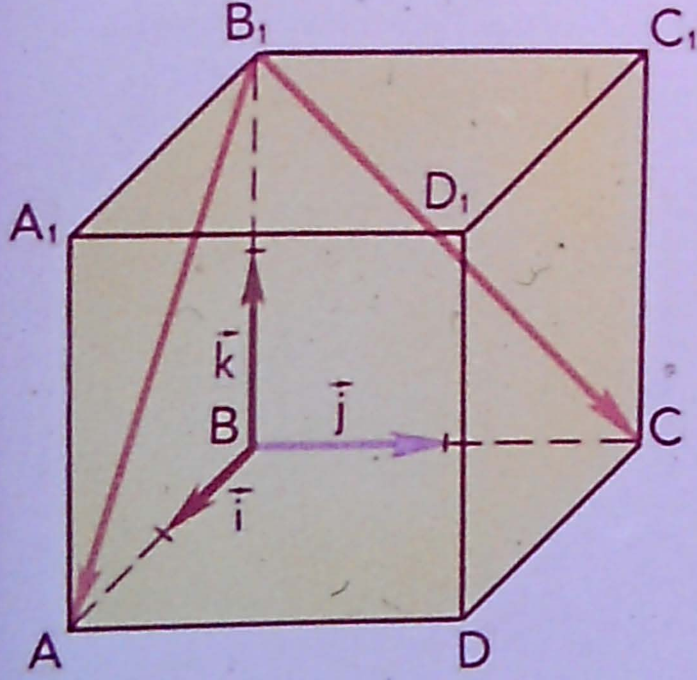
Найдите координаты векторов:

а) $\vec a$; $2\vec a$; $-\frac{1}{2}\vec a$; $0,75\vec a$;

б) $\vec b$; $-\vec b$; $\frac{2}{3}\vec b$; $-\frac{1}{3}\vec b$;

в) $\vec c$; $0\,\vec c$; $\frac{5}{4}\vec c$; $-1,5\vec c$.

Скалярное произведение двух векторов.	1. Если $\vec{a}=\vec{0}$ или $\vec{b}=\vec{0}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. 2. Если $\vec{a}\neq\vec{0}$ и $\vec{b}\neq\vec{0}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cdot\cos(\widehat{\vec{a}\cdot\vec{b}})$.



$(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ — **прямоугольный базис.**

Вычислите:

а) $\vec{i}\cdot\vec{j}$; б) $\vec{k}\cdot\vec{i}$; в) $\vec{j}\cdot\vec{k}$;

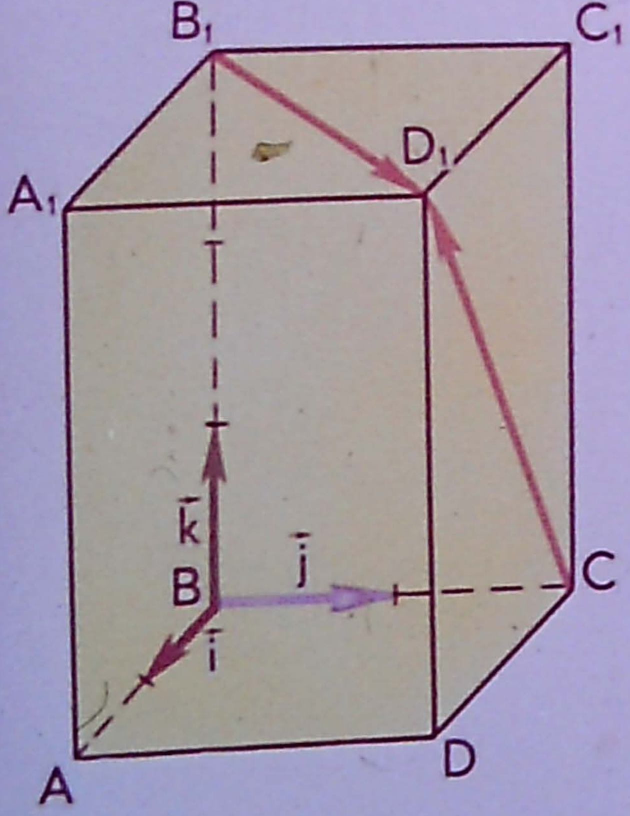
г) $\vec{i}^2$; д) $\vec{j}^2$; е) $\vec{k}^2$;

ж) $\vec{i}\cdot\overrightarrow{B_1C}$; з) $\vec{k}\cdot\overrightarrow{B_1A_1}$;

и) $\vec{i}\cdot(2\vec{k}-\vec{j})$;

к) $\vec{j}\cdot(2\vec{j}+2\vec{k})$.

Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.



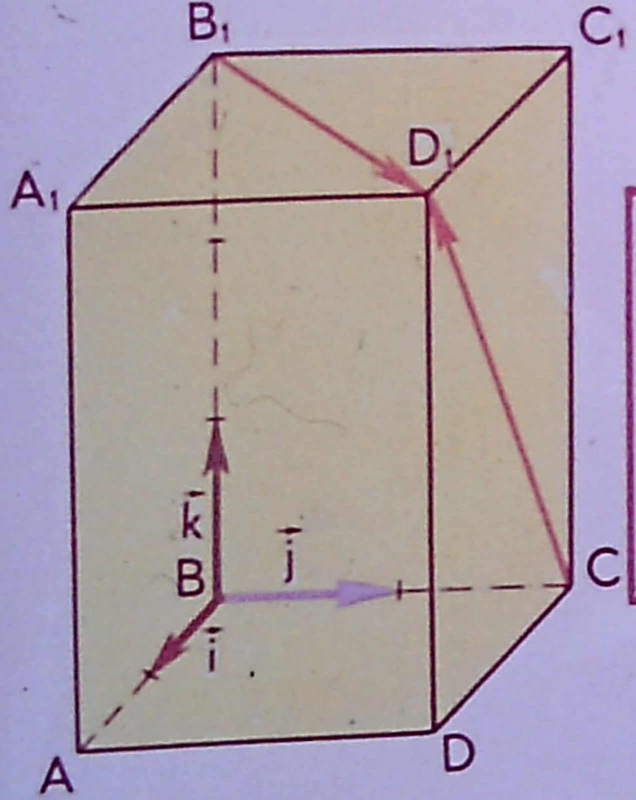
Дано: $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$.

$$\boxed{\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}} \qquad \boxed{\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}.}$$

. . .   . . .

. . .

Доказать: $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$



Дано: $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ **и** $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$.

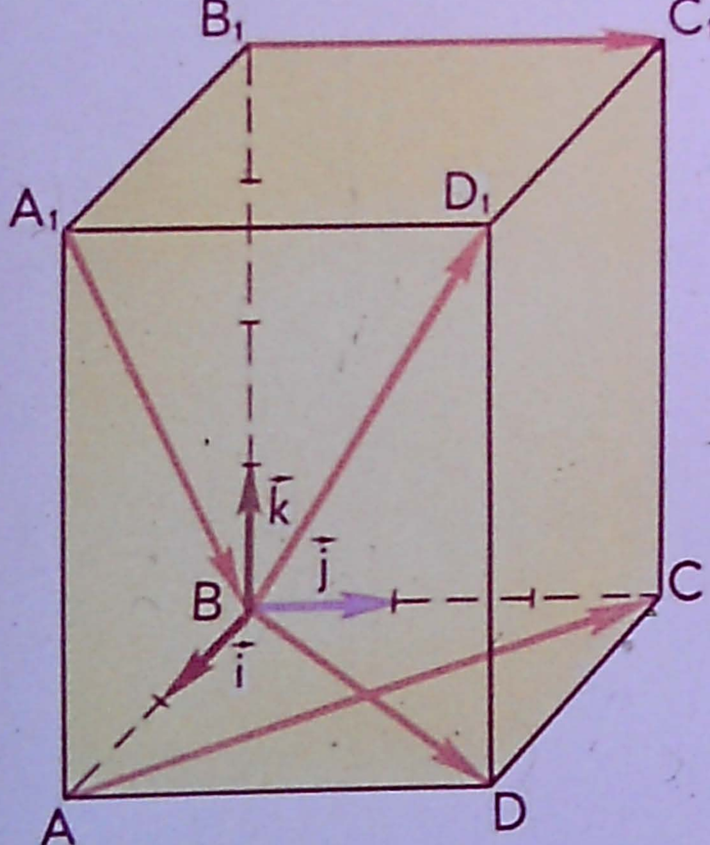
$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$

$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})\cdot(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = \\ &= x_1x_2\vec{i}^2 + x_1y_2\vec{i}\cdot\vec{j} + x_1z_2\vec{i}\cdot\vec{k} + \\ &+ y_1x_2\vec{j}\cdot\vec{i} + y_1y_2\vec{j}^2 + y_1z_2\,\vec{j}\cdot\vec{k} + \\ &+ z_1x_2\vec{k}\cdot\vec{i} + z_1y_2\vec{k}\cdot\vec{j} + z_1z_2\vec{k}^2 = \\ &= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2\end{aligned}$$

Доказать: $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1\ x_2 + y_1\ y_2 + z_1\cdot z_2$.

Какие свойства действий над векторами использовались?



Вычислите скалярное произведение векторов:

а) $(-3\vec{i}-4\vec{k})\cdot(2\vec{i}+9\vec{j})$;

б) $(-8\vec{i}+5\vec{j})\cdot\vec{k}$;

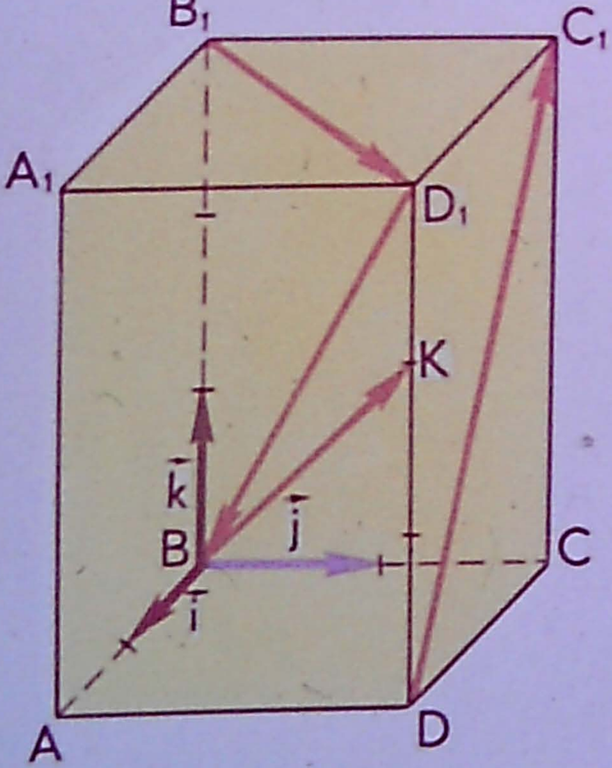
в) $(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})\cdot(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})$;

г) $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}$;

д) $\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{BD_1}$.

Вычисление длины вектора и угла между двумя векторами по их координатам

$\boxed{\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2}$



Дано: $\vec{a} = (x; y; z)$.

$\Downarrow$

$\cdots$

$\Downarrow$

$$\boxed{\vec{a}^2 = x^2 + y^2 + z^2}$$

$\Downarrow$

Доказать: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

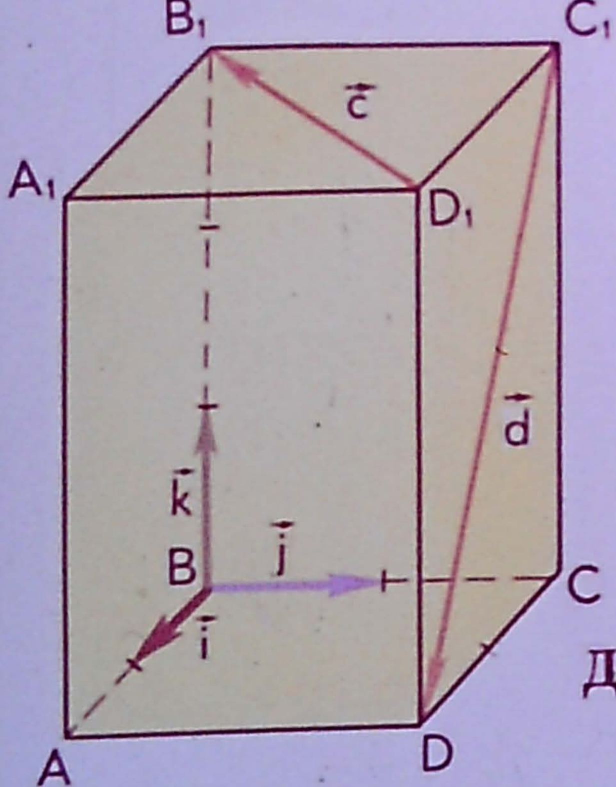
Найдите длины векторов:

а) $-2\vec{i} + 3\vec{k}$;

б) $2\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k}$;

в) $\overrightarrow{D_1B}$;

г) $\overrightarrow{BK}$.



Дано: $\vec{a}=(x_1; y_1; z_1)$; $\vec{b}=(x_2; y_2; z_2)$; $(\widehat{\vec{a};\vec{b}})=\varphi$.

$\Downarrow$

...

...

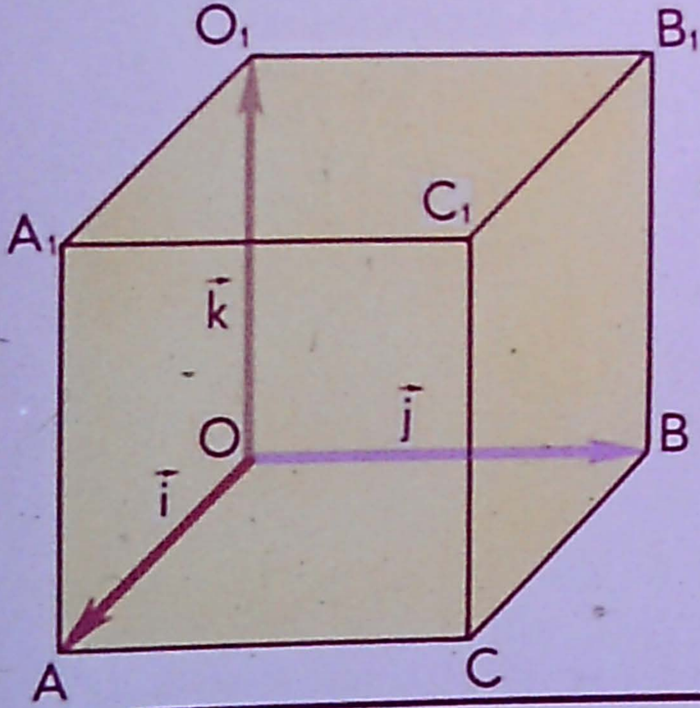
$\Downarrow$

Доказать: $\cos\varphi = \dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$.

Укажите координаты векторов $\vec{c}$ **и** $\vec{d}$.

Вычислите: $\cos(\widehat{\vec{i};\vec{d}})$; $\cos(\widehat{\vec{j};\vec{d}})$; $\cos(\widehat{\vec{k};\vec{d}})$; $\cos(\widehat{\vec{c};\vec{d}})$.

Прямоугольная система координат

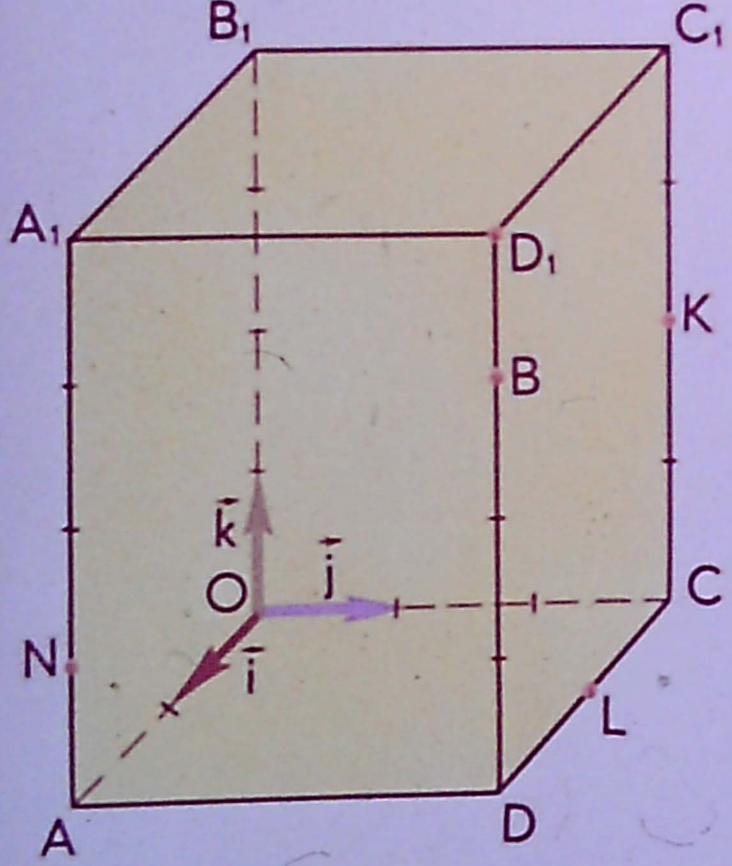


Если заданы прямоугольный базис $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ и точка O, то говорят, что задана *прямоугольная система координат в пространстве.*

Задают ли прямоугольную систему координат:

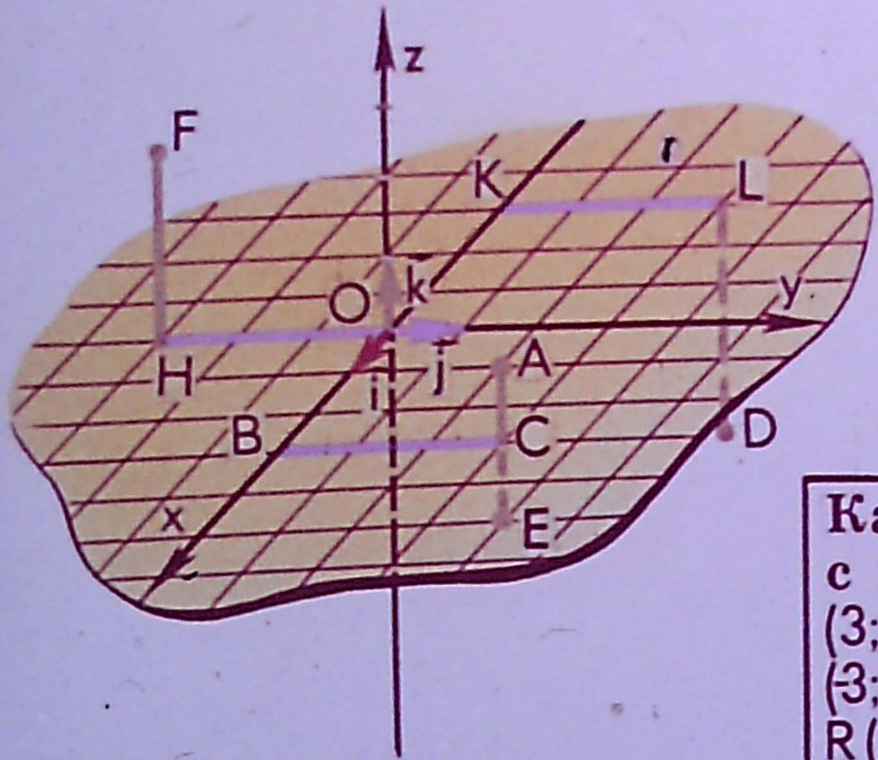
а) $C_1; (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$; б) $C; (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CC_1})$;

в) $B; (\overrightarrow{BO}; \overrightarrow{OO_1}; \overrightarrow{BA})$; г) $O; (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OO_1})$?



Координатами точки M в прямоугольной системе координат O; $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ называются координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$.

Найдите абсциссу, ординату и аппликату каждой точки: K; L; O; N; B; D_1.



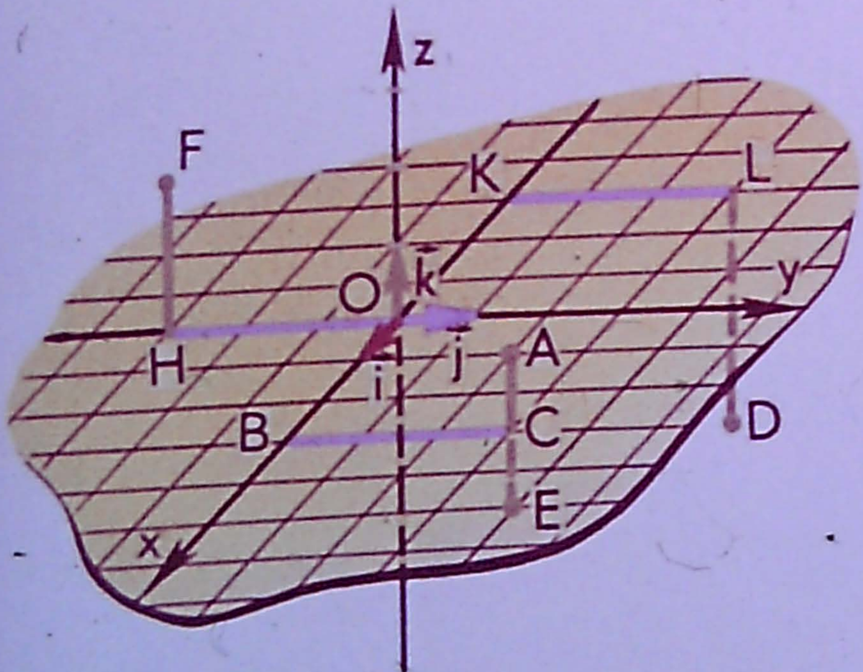
Как построить точки с координатами:
$(3; 3; 1)$; $(3; 3; -1)$;
$(-3; 3; -3)$; $(0; 3; 2)$;
$R(x_0; y_0; z_0)$?

Найдите координаты векторов $\overrightarrow{OM}$; $\overrightarrow{ON}$; $\overrightarrow{MN}$ **и их длины, если** $M(x_1; y_1; z_1)$, $N(x_2; y_2; z_2)$.

Поскольку $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{ON}=-\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$, **то**

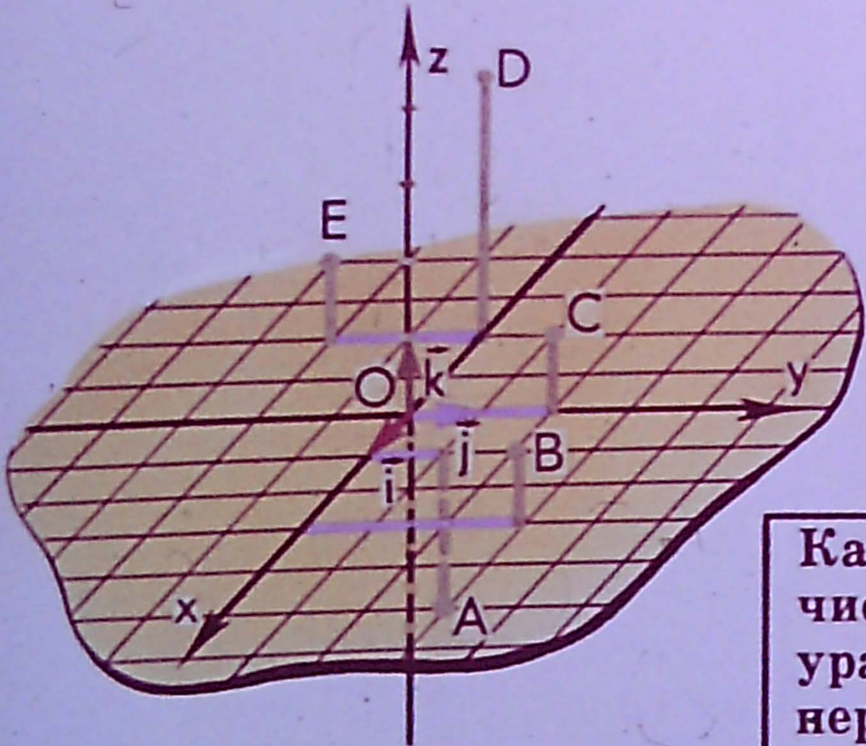
$$\overrightarrow{MN}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1);$$

$$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$



Найдите координаты векторов $\overrightarrow{OE}$; $\overrightarrow{OD}$; $\overrightarrow{ED}$ **и их длины.**

Уравнение плоскости

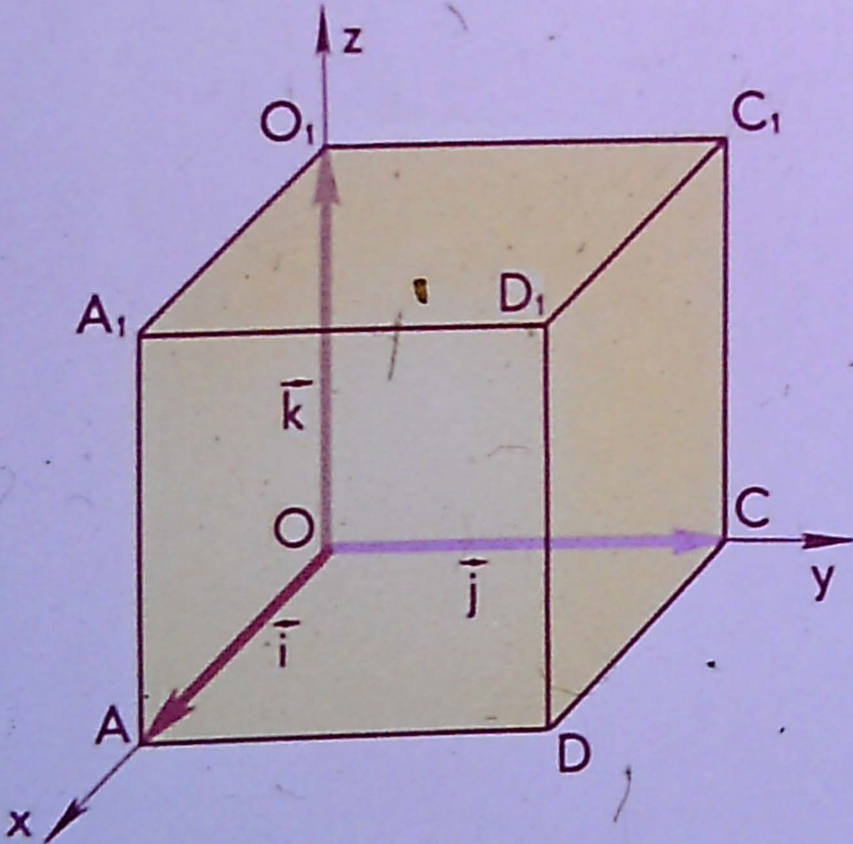


Какие из следующих троек чисел являются решениями уравнения с тремя переменными

$0x + 0y + z - 1 = 0$:

а) (3; 3; 1); б) (−2; 2; 1);
в) (−2; 0; 3); г) (0; 2; 1)?

Уравнение $P(x;y;z)=0$ задает фигуру Ф—множество точек пространства, координаты которых являются решениями этого уравнения.



Какую фигуру задает уравнение:

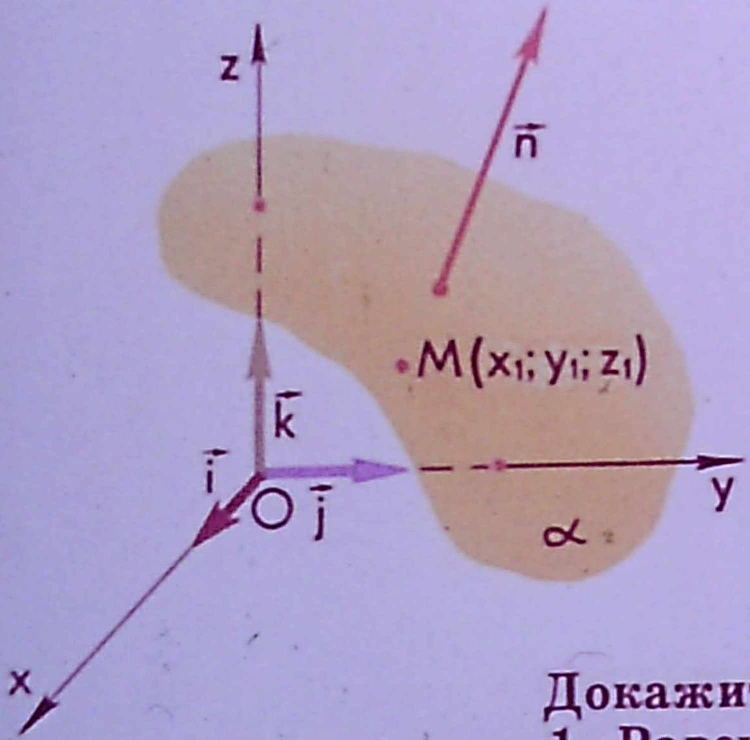
а) $z=0$;

б) $x-1=0$;

в) $y=0$;

г) $x-y=0$;

д) $x^2+y^2+z^2=0$?



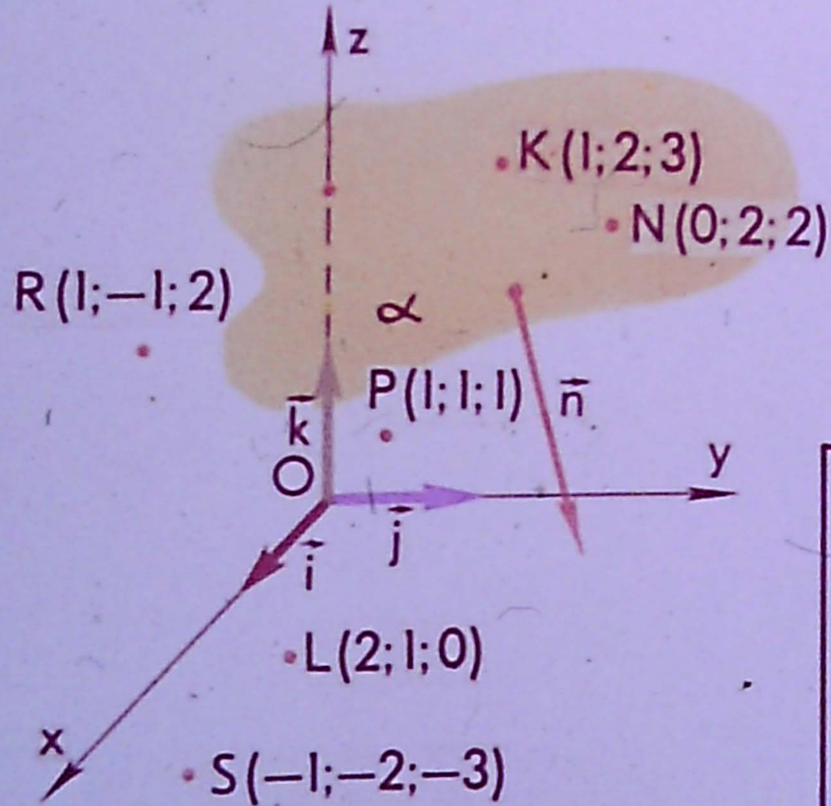
Дано: α, $\vec{n}=(a; b; c)$, $\vec{n} \perp \alpha$,
$M(x_1; y_1; z_1) \in \alpha$,
$K(x; y; z)$.

Докажите, что:

1. Равенство $\vec{n} \cdot \overrightarrow{MK} = 0$ **выполняется, если** $K \in \alpha$.

2. $a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=\vec{n} \cdot \overrightarrow{MK}$.

3. Уравнение $a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$ **есть уравнение плоскости.**



$M_1 \in \alpha, \vec{n} \perp \alpha$.

Назовите уравнение плоскости α**, если:**

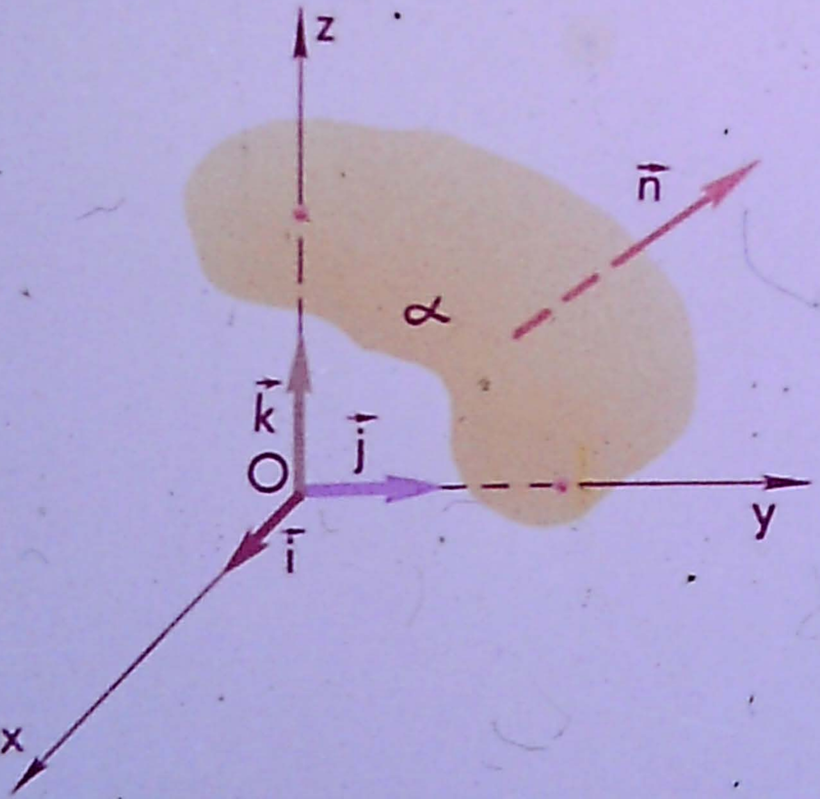
а) $M_1(1;0;1)$, $\vec{n}=(2;0;0)$;

б) $M_1(2;4;3)$, $\vec{n}=(0;0;-1)$.

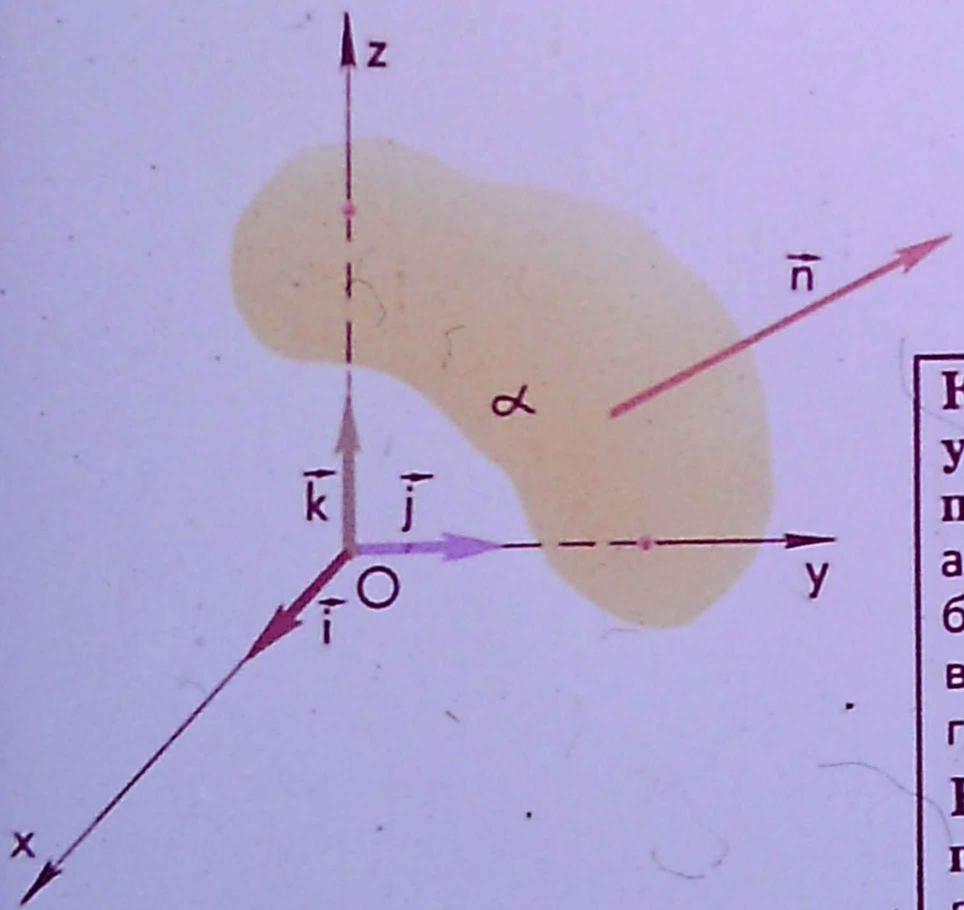
Какие из отмеченных точек принадлежат α **?**

Теорема.

Всякое уравнение первой степени $ax+by+cz+d=0$ задает единственную плоскость, которая перпендикулярна вектору с координатами $(a;b;c)$.



Выделите в этой теореме условие и заключение.



Какими из следующих уравнений задаются плоскости:

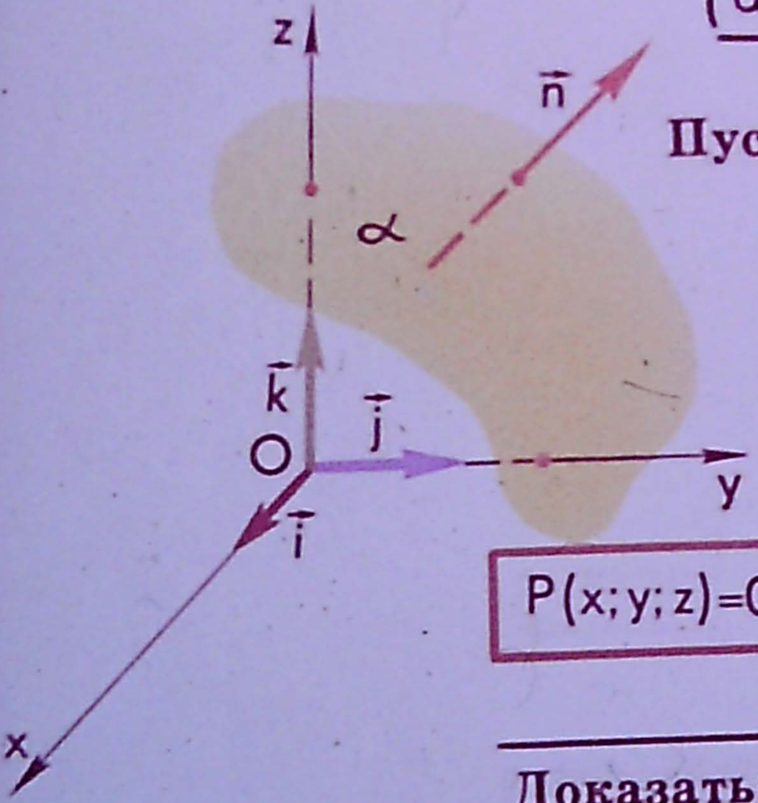
а) $3x-2=0$;

б) $2y=0$;

в) $-z^2+1=0$;

г) $5x-2=0$?

Каким векторам перпендикулярны эти плоскости?



Дано: $P(x; y; z): ax + by + cz + d = 0$
$(a \neq 0$ **или** $b \neq 0$ **или** $c \neq 0)$.

$\Downarrow$

Пусть $(x_1; y_1; z_1)$ — **решение** $P(x; y; z) = 0$

$\Downarrow$

$\cdots$

$\cdots$

$\Downarrow$

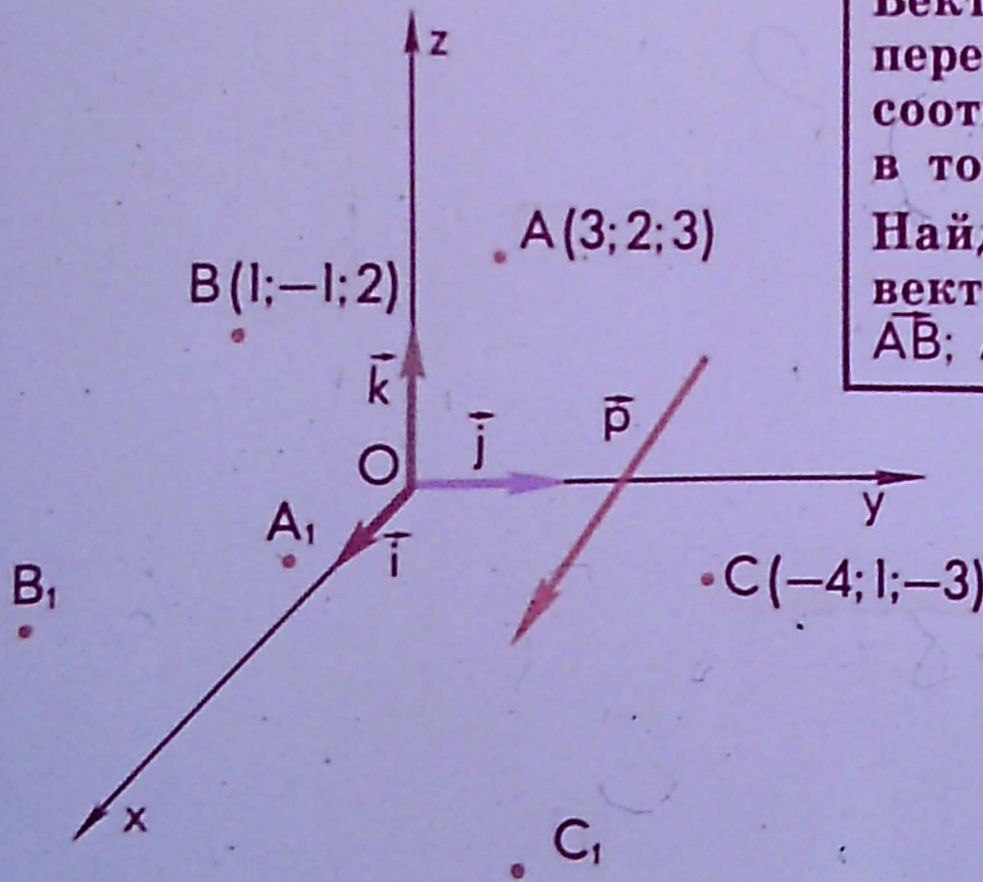
$$\boxed{P(x; y; z) = 0 \Leftrightarrow a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0}$$

$\Downarrow$

Доказать: 1. Уравнение $ax + by + cz + d = 0$ **задает единственную плоскость** α.

2. $\alpha \perp \vec{n}$, **где** $\vec{n} = (a; b; c)$.

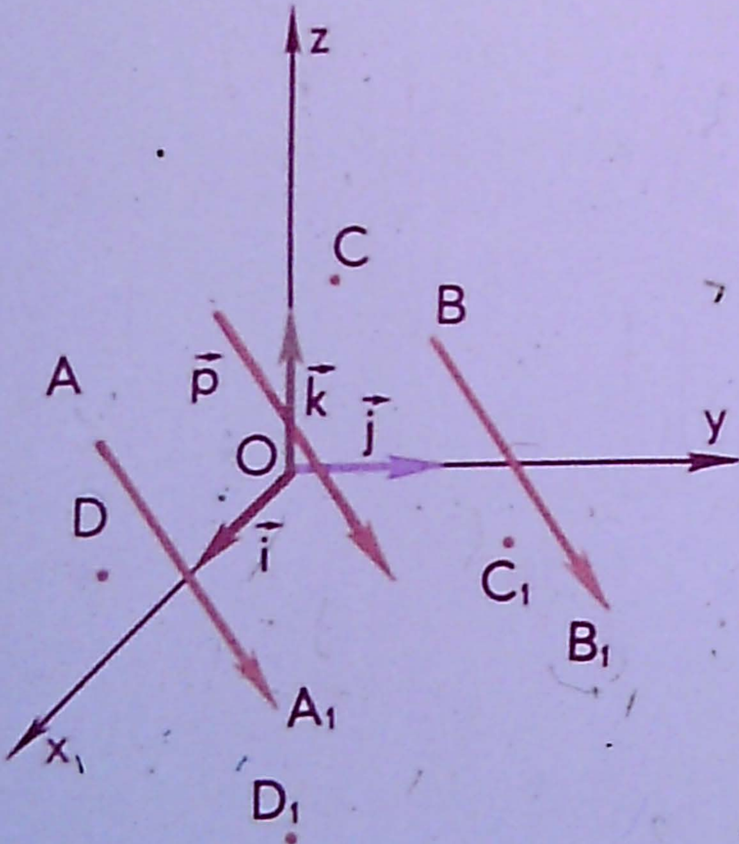
Координатные формулы отображений



Вектор $\vec{p} = (a; b; c)$ **переводит точки** A; B; C **соответственно в точки** $A_1; B_1; C_1$.

Найдите координаты векторов:
$\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AA_1}$; $\overrightarrow{C_1C}$; $\overrightarrow{BB_1}$.

Формулы, позволяющие по координатам всякой точки M вычислить координаты ее образа при отображении f, называют ***координатными формулами отображения*** **f.**



Дано: $\vec{p}=(a;b;c)$, $M(x;y;z)$, $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_1=\vec{p}(M)$.

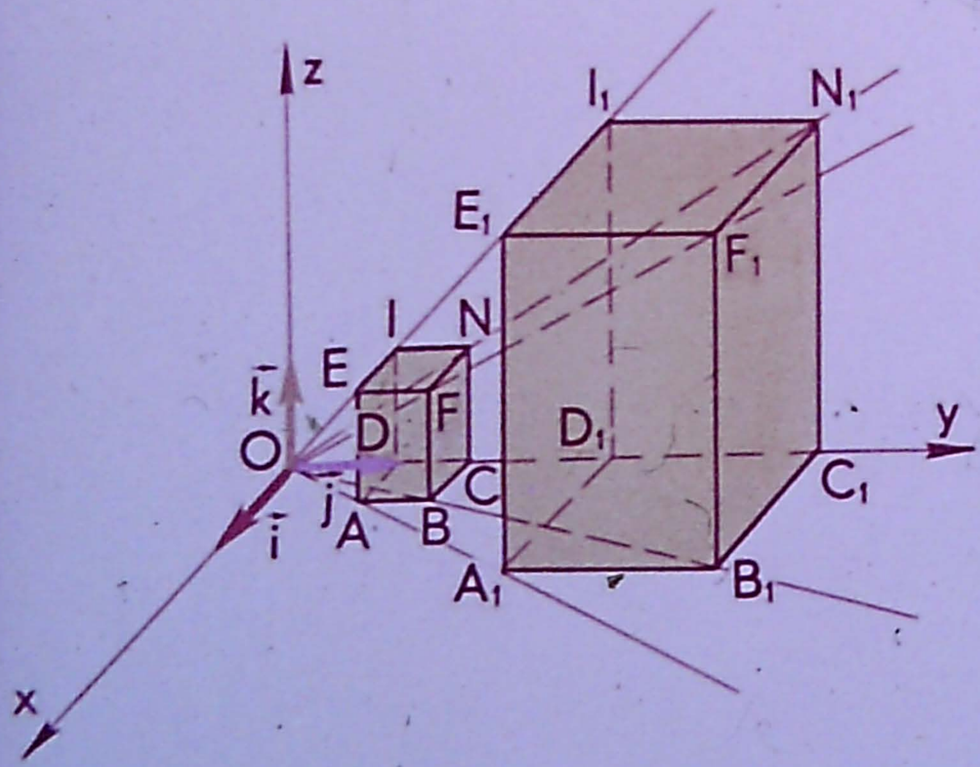
Докажите, что $x_1=x+a$;

$y_1=y+b$;

$z_1=z+c$

есть координатные формулы вектора $\vec{p}$.

Гомотетией H_O^k **с центром** O **и коэффициентом** $k \neq 0$ **называется отображение пространства на себя, при котором образом произвольной точки** M **является такая точка** M_1, **что** $\overrightarrow{OM_1} = k \cdot \overrightarrow{OM}$.

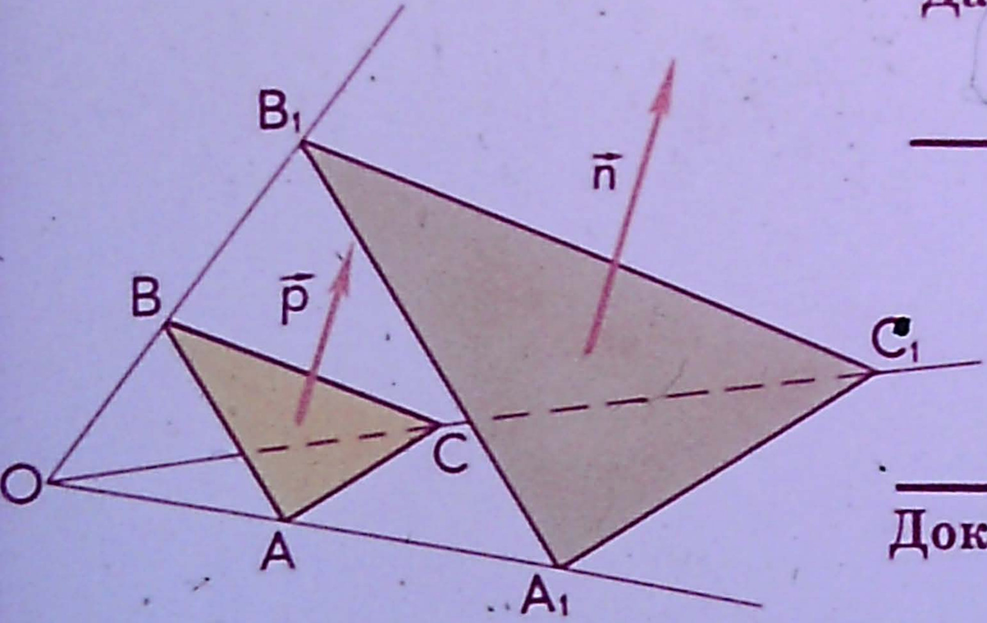


Дано: H_O^k, $M(x; y; z)$,
$M_1 = H_O^k(M)$, $M_1(x_1; y_1; z_1)$.

Докажите, **что** $x_1 = kx$,
$y_1 = ky$,
$z_1 = kz$
есть координатные формулы гомотетии H_O^k.

Теорема.

При гомотетии плоскость отображается на параллельную ей плоскость.



Дано: $\alpha: ax + by + cz = 0,$

$\beta = H_O^k(\alpha)$, $\vec{p} = (a; b; c)$.

$\Downarrow$

...

...

$\Downarrow$

Доказать: 1. β—плоскость.

2. $\beta \parallel \alpha$.

Дано: $\alpha : ax + by + cz + d = 0$, $\vec{p} = (a; b; c)$, $\beta = H_o^k(\alpha)$.

Пусть $M(x; y; z) \in \alpha$, $M_1(x_1; y_1; z_1) \in \beta$, $M_1 = H_o^k(M)$

$\Downarrow$

...

$x_1 = kx$,
$y_1 = ky$,
$z_1 = kz$

...

$\Downarrow$

β **задается уравнением первой степени**

$\vec{p} \perp \beta$

Доказать: **1.** β — **плоскость.** **2.** $\beta \parallel \alpha$.

Дано: $\alpha : ax + by + cz + d = 0$, $\vec{p} = (a; b; c)$, $\beta = H_0^k(\alpha)$.

Пусть $M(x; y; z) \in \alpha$, $M_1(x_1; y_1; z_1) \in \beta$, $M_1 = H_0^k(M)$

$x_1 = kx,$
$y_1 = ky,$
$z_1 = kz$

$x = \frac{x_1}{k},$

$y = \frac{y_1}{k},$

$z = \frac{z_1}{k}$

$$\frac{a}{k}x_1 + \frac{b}{k}y_1 + \frac{c}{k}z_1 + d = 0$$

β **задается уравнением первой степени**

$\vec{p} \perp \beta$

Доказать: 1. β — **плоскость. 2.** $\beta \parallel \alpha$.

К сведению учителя.

Диафильм предназначен для изложения материала главы V учебного пособия «Геометрия 10» (под ред. З. А. Скопеца). Названия фрагментов соответствуют названиям параграфов и даются в кадрах 2, 9, 18, 20, 24, 31. В конце каждого фрагмента, рядом с номером кадра, ставится знак ▲.

В кадрах, посвященных доказательству теорем, цветом выделены вновь появляющиеся части доказательства (высказывания и знаки следования), они требуют обсуждения в классе. Рисунки в кадрах позволяют организовать работу по усвоению формулировок теорем на конкретном материале. Такие кадры желательно проецировать на доску.

Кадры 2—3 позволяют повторить материал 9 класса, подводят к идее базиса. Точки, координаты которых заданы в общем виде, в кадре не обозначены: это может быть любая точка плоскости.
В кадрах 22—24 координаты точек определяются непосредственно по чертежу.

КОНЕЦ

Диафильм по математике для 10 класса
сделан по заказу Министерства просвещения СССР

Авторы М. Б. ВОЛОВИЧ, П. М. КАМАЕВ
Художник-оформитель И. В. ИЩЕНКО
Редактор Р. А. ЭСТРИНА

Студия «Диафильм» Госкино СССР, 1978 г.
101000, Москва, Центр, Старосадский пер., д. № 7

Д-155-78 Цветной 0-30