И. П. ЕГОРОВ

ГЕОМЕТРИЯ

СПЕЦИАЛЬНЫЙ КУРС ДЛЯ СТУДЕНТОВ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФАКУЛЬТЕТОВ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ

Допущено Министерством просвещения СССР
в качестве учебного пособия
для студентов физико-математических факультетов
педагогических институтов

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1979

ОГЛАВЛЕНИЕ

Раздел I
О СИСТЕМАХ АКСИОМ ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Глава I
Аксиоматический метод и математические структуры

Глава II
Система аксиом школьного курса геометрии

Глава III
О системах аксиом Вейля и Гильберта

Глава IV
Длины, площади

Глава V

О символических исчислениях и формализации геометрии

Раздел II

ОБОБЩЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Глава VI

Неевклидовы геометрии

Глава VII

Дифференцируемые многообразия, группы и алгебры Ли

Глава VIII

Римановы пространства и пространства аффинной связности

Добавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга состоит из двух самостоятельных разделов. Первый раздел (главы I—V) посвящен расширению и углублению вопросов школьного курса геометрии и объединенного курса геометрии I—IIпединститутов; здесь рассматривается аксиоматика А. Н. Колмогорова школьного курса геометрии, аксиоматика Вейля и обзорно — аксиоматика Гильберта. Заключительная глава первого раздела посвящена дальнейшему развитию аксиоматического метода — символическим исчислениям и вопросам формализации геометрии.

Второй раздел книги (главы VI—VIII) посвящен дальнейшему развитию теории обобщенных пространств (римановым пространствам, пространствам аффинной связности), имеющим важные приложения в теории относительности. В добавлении кратко рассматриваются расслоенные пространства и инфинитезимальные связности. Приводятся некоторые понятия из теории касательного и кокасательного расслоений; определяются лифты функций, векторных полей и аффинных связностей с базисного многообразия M на его касательное расслоенное многообразие $T(M)$.

Автору приходилось читать по спецкурсу «Научные основы школьного курса геометрии» разные разделы предлагаемого учебного пособия.

В зависимости от конкретных условий подготовки студентов, наличия на кафедре специалистов можно рекомендовать в пединститутах один из указанных разделов для спецкурса, а другой для спецсеминаров и самостоятельной работы студентов.

Об актуальности рассматриваемой тематики убедительно говорит в объяснительной записке к программе «Научных основ школьного курса математики» (НОШКМ) акад. А. Н. Колмогоров. «Очень желательно, — указывает он, — чтобы к «Научным основам школьного курса математики» примыкал спецкурс или спецсеминар по геометрии, продолжающий общее направление данного курса».

Раздел I книги в основном продолжает общее направление НОШКМ на геометрические дисциплины.

Предлагаемое содержание спецкурса широко обсуждалось на научно-методическом семинаре МП РСФСР, на семинаре заведующих математическими кафедрами пединститутов Российской Федерации МП СССР и семинаре заведующих математическими кафедрами пединститутов союзных республик, конференции преподавателей математики Центральной зоны МП РСФСР по заочному отделению.

В заключение автор приносит искреннюю благодарность проф. В. Т. Базылеву и проф. Б. Л. Лаптеву за их ценные замечания по рукописи, которые были учтены при подготовке книги к опубликованию.

Отзывы и предложения просим направлять по адресу: Москва, 129846, 3-й проезд Марьиной рощи, 41. Издательство «Просвещение», редакция математики.

РАЗДЕЛ I

О СИСТЕМАХ АКСИОМ ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Глава I

АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

ВВЕДЕНИЕ

Аксиоматический метод впервые был успешно применен при изложении геометрии Евклидом, греческим ученым, жившим в III в. до н. э. Его «Начала» построены следующим образом.

Сначала даются определения и перечисляются основные допущения — постулаты и аксиомы.

Затем идут предложения (теоремы), которые Евклид стремился доказать по правилам логики на основании принятых постулатов и аксиом.

Аксиоматический метод является в настоящее время основным методом исследования не только в геометрии, но и во многих других разделах современной математики.

Выясним теперь в общих чертах, что же представляет собой аксиоматический метод построения теории.

С этой целью мы обратим внимание на предложения (теоремы), рассматриваемые в геометрии. Истинность таких предложений устанавливается при помощи рассуждений — доказательств, которые опираются на определения, аксиомы и ранее полученные теоремы. Доказательства последних в свою очередь основываются на предыдущих теоремах, определениях и положенных в основу аксиомах. В итоге мы приходим к аксиомам как к простейшим отправным предложениям геометрии.

Аналогичное положение имеет место при определении понятий. Всякое понятие определяется через ранее введенные понятия и аксиомы. В результате указанной редукции мы придем в конце концов к понятиям, которые уже не сводятся к более простым и представляют собой отправные неопределяемые понятия. Эти понятия называются *основными понятиями*, и они также описываются аксиомами.

Например, в аксиоматике школьного курса геометрии в качестве основных понятий принимаются точки, прямые и расстояния от одной точки до другой. Основные понятия — точки и прямые —

в этом случае называются также основными образами. Расстояния при таком построении геометрии образуют системы так называемых неотрицательных величин.

Отметим, что основные понятия при построении теории используются только через посредство аксиом. Поэтому все свойства основных понятий, необходимые для построения аксиоматической теории, должны быть перечислены в аксиомах. В этом смысле часто говорят, что аксиомы неявно определяют основные понятия. Ниже на конкретных примерах мы убедимся, как с помощью аксиом описываются свойства основных образов и отношений.

Задача выбора основных понятий и аксиом геометрии является одной из важных задач оснований геометрии. Эта задача решается неоднозначно и требует от математика большого внимания и навыка. Всякая аксиоматическая теория строится по следующему плану:

1. Сначала перечисляются основные понятия — основные образы и основные отношения.

2. Далее приводится список аксиом-предложений, в которых фиксируются некоторые свойства основных понятий, необходимые для построения теории.

3. Все последующие предложения (теоремы) должны быть получены из аксиом при помощи лишь одних логических законов.

4. Все понятия, не являющиеся основными, должны быть определены через основные и понятия, ранее введенные.

Аксиомы при этом должны удовлетворять определенным требованиям, в первую очередь требованию совместности.

Математика является одной из самых абстрактных наук. Но ее понятия отражают свойства реальных вещей и отношений между ними. Аксиомы не являются продуктом свободного творения математиков или условными соглашениями. Они выведены из взаимосвязей понятий и в своих предпосылках имеют опытное происхождение.

Усиленное развитие аксиоматического метода было связано с открытием в прошлом веке неевклидовой геометрии и созданием теории множеств. Геометрия Лобачевского и теория множеств вызвали появление ряда важнейших исследований по общим вопросам аксиоматики. Они содействовали распространению в математике метода научного исследования с помощью аксиом.

Если в аксиоматической теории правила вывода явно не перечисляются, то она называется *содержательной*, неформальной аксиоматической *теорией*; если же система правил вывода явным образом включается в аксиоматическую теорию, то последняя называется *формальной* или дедуктивной *аксиоматической теорией*. Примером содержательной аксиоматической теории может служить теория групп, примером формальной аксиоматической теории — исчисление высказываний (см. V главу).

Дальнейшее развитие аксиоматического метода привело математиков к понятию символического исчисления. Последнее характеризуется заданием на языке формул системы аксиом и правил вывода. В теории символических исчислений получен ряд важных результатов, составляющих новую ступень в развитии аксиоматического метода исследования.

Прежде чем перейти к математическим структурам, мы остановимся кратко на понятиях отношения, отношения эквивалентности и факторизации.

§ 1. ОТНОШЕНИЯ. ОТНОШЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И ФАКТОРИЗАЦИЯ

Отношения выражают связи между предметами (понятиями). Предположим, что нам дана какая-нибудь связь (соотношение) $\rho(x, y)$ между элементами x, y, принадлежащими соответственно множествам A и B. Множество всех пар (x, y), таких, что элемент $x \in A$ находится в данной связи (соотношении) со вторым элементом $y \in B$, определяет некоторое подмножество (которое обозначим тем же символом $\rho = \{(x, y) \mid \rho(x, y)\}$ в множестве всех пар (x, y)). Обратно, задание подмножества ρ в множестве $A \times B$ — декартовом произведении множеств A, B — выражает некоторую связь (соотношение) между элементами $x \in A$, $y \in B$, для которой ρ будет множеством пар истинности (декартовым произведением $A \times B$ множеств A и B называется множество всех упорядоченных пар (x, y), таких, что элемент x принадлежит множеству A, а элемент y — множеству B). Таким образом, утверждения «соотношение $\rho(x, y)$ выполнено для x, y» и «пара (x, y) является элементом множества ρ» равносильны. Изложенное показывает, что бинарное отношение целесообразно определить следующим образом.

Бинарным отношением ρ между элементами x, y двух множеств A, B ($x \in A$, $y \in B$) *называется всякое подмножество декартова произведения* $A \times B$ этих множеств: $\rho \subset A \times B$.

Отношение ρ иногда обозначается так: $\rho(x, y)$, где $x \in A$, $y \in B$. Особо отметим бинарные отношения на множестве A. В этом случае отношение ρ будет подмножеством декартова произведения $A \times A$: $\rho \subset A \times A$.

В случаях, если отношение ρ такое, что $\rho = A \times A$, $\rho = \varnothing$, $\rho = \Delta$, где $\varnothing$ — пустое множество и Δ — диагональ множества $A \times A$ ($\Delta = \{(x, x) \mid x \in A\}$), то бинарное отношение называется соответственно *полным*, *пустым* и *диагональным*.

Если множество ρ будет подмножеством декартова произведения трех различных или совпадающих множеств, то отношение называется *тернарным*.

Если же ρ будет подмножеством декартова произведения n различных или совпадающих сомножителей, то отношение называется *n-арным* или *n-местным*.

Операция объединения и пересечения множеств позволяет ввести соответствующие операции над отношениями. В самом деле, если на множестве A заданы бинарные отношения ρ, q, то на том же множестве, очевидно, можно определить бинарные отношения: $\rho \cup q$, $\rho \cap q$.

Для некоторых бинарных отношений применяются специальные обозначения. Например, $x = y$, $x < y$, $X \subset A$ выражают в символической записи бинарные отношения соответственно отношения равенства, меньше и включения.

Важную роль играют так называемые *отношения эквивалентности*. Отношением эквивалентности между элементами данного множества M называется отношение p, обладающее следующими тремя свойствами:

1. Отношение $p(x, y)$ $(x, y \in M)$ всегда истинно при $x = y$; другими словами, для всякого $x \in M$ выполняется $p(x, x)$ (свойство рефлексивности отношения p).

2. Если x эквивалентен y, то y эквивалентен x для любых $x, y \in M$. В символической записи: если $p(x, y)$, то $p(y, x)$ (свойство симметричности отношения p).

3. Если x эквивалентен y и y эквивалентен z, то x эквивалентен z. В символической записи: если $p(x, y)$ и $p(y, z)$ истинны, то $p(x, z)$ также истинно для любых $x, y, z \in M$ (свойство транзитивности отношения p).

Короче, бинарное отношение одновременно рефлексивное, симметрическое и транзитивное называется *отношением эквивалентности*. Легко видеть, что отношения равенства, подобия фигур, параллельности прямых являются примерами отношений эквивалентности.

Совокупность всех классов эквивалентности определяет новое множество, называемое *фактор-множеством множества M* по отношению p. Фактор-множество обозначается символом M/p. Элементами этого множества являются классы эквивалентности — попарно непересекающиеся подмножества.

Обратно, всякое разбиение множества M определяет отношение эквивалентности между элементами x, y этого множества. Будем считать, что x, y обладают по определению отношением p тогда и только тогда, когда оба элемента принадлежат одному и тому же подмножеству данного разбиения. Можно убедиться, что аксиомы эквивалентности 1—3 выполняются и элементами фактор-множества будут подмножества данного разбиения.

Операция перехода от множества M к множеству M/p называется *факторизацией* данного множества M. Понятие факторизации, как и понятие декартова произведения множеств, является важным понятием современной математики.

Вопросы и упражнения

1. Приведите примеры отношений эквивалентности, используемых в геометрии.

2. Будет ли отношение сонаправленности двух лучей отношением эквивалентности?

3. Постройте три элемента фактор-множества прямых плоскости по отношению параллельности прямых.

§ 2. ПОНЯТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

В настоящее время усиленно развиваются аксиоматические теории Г, в основе которых лежат теоретико-множественные понятия. Последние позволяют основным понятиям аксиоматической теории придать определенное теоретико-множественное истолкование в виде множеств и некоторых отношений между их элементами и, естественно, приводят к понятию математической структуры.

Предположим, что нам дана некоторая система множеств:

$$M_1, M_2, \ldots, M_k \ (k \geqslant 1). \tag{2.1}$$

Эта система позволяет образовать другие множества — множества их подмножеств, декартовы произведения одного из множеств (2.1) на множество той же системы. Присоединяя полученные множества к исходным множествам (2.1), повторим указанные операции образования совокупностей подмножеств и декартовых произведений над множествами новой системы и т. д. Полученная в конечном итоге совокупность множеств называется *шкалой* Sh $(M_1, M_2, \ldots, M_k)$ *множеств, определенной множествами* (2.1).

Нетрудно убедиться, что задание отношений между элементами множеств шкалы, отображений одного из множеств шкалы в другое, а также задание некоторого числа элементов в множествах шкалы сводится каждый раз к заданию элемента одного из множеств этой же шкалы. Предположим далее, что между элементами множеств (2.1) и множеств порождаемой ими шкалы определена система отношений

$$U_i \ (i \in I), \tag{2.2}$$

описываемая аксиомами

$$\alpha_j \ (j \in J), \tag{2.3}$$

выраженными на языке теории множеств. В (2.2) символ i пробегает множество индексов I, а символ j в (2.3) пробегает множество индексов J.

Может оказаться, что для указанных множеств $M_1, M_2, \ldots, M_k$ не существует ни одного набора системы подмножеств $U = (U_i \mid i \in I)$, удовлетворяющих вместе с множествами шкалы требованиям аксиом α_j $(j \in J)$, или таких систем существует более чем одна.

Таким образом, в общем случае отношения U_i $(i \in I)$ между элементами множеств шкалы не фиксируются до конца аксиомами α (α_j). Каждая из систем отношений $U = (U_i \mid i \in I)$ между элементами множеств шкалы Sh $(M_1, M_2, \ldots, M_k)$ называется *математической структурой* (короче, *структурой*), если все аксиомы (2.3) выполняются на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_k$; множества $M_1, M_2, \ldots, M_k$ называются *базисными множествами структуры*; отношения U_i $(i \in I)$ — *основными отношениями*.

Математическая структура с базисными множествами M_1, M_2, ..., M_k обозначается так:

$$S = (M_1, M_2, \ldots, M_k, U_i \ (i \in I)). \tag{2.4}$$

Здесь и далее в аналогичных обозначениях подчеркивается, что структура $U = (U_i \mid i \in I)$ вводится на базисных множествах M_1, M_2, ..., M_k. Отметим, что в структуре некоторые из отношений U_i могут описывать операции, т. е. отображения вида $M^s \to M$, где s — натуральное число.

Для класса структур, встречающихся в настоящей книге, полезно ввести понятия типа отношения и типа структуры. Речь идет о структурах с отношениями между элементами лишь базисных множеств, не содержащих других множеств шкалы. Такие структуры иногда называются алгебраическими системами или структурами с отношениями.

Если отношение p есть подмножество декартова произведения

$$p \subset M_1^{n_1} \times M_2^{n_2} \times \ldots \times M_k^{n_k},$$

где $M_1^{n_1}$ — декартово произведение n_1 раз взятых сомножителей M_1 и т. д., то говорят, *что это отношение типа* $t_p = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$.

Предположим, что каждое основное отношение p_i в некоторой структуре имеет тип t_i. Совокупность t типов t_i отношений $p_i (i \in I)$ называется *типом структуры*; в символической записи $t = (t_i \mid i \in I)$.

Две структуры с отношениями S, S' называются структурами *одного и того же типа*, если они имеют одинаковое число базисных множеств ($k = k'$), общее множество индексов ($I = I'$) и наборы t, t' совпадают (покомпонентно): $t_i = t'_i$ $(i \in I)$.

Предполагая, что теории натурального ряда чисел $\boldsymbol{N}$ и множества $\boldsymbol{Z}$ всех целых чисел уже известны, приведем следующие примеры конкретных математических структур.

П р и м е р 1. Возьмем в качестве базисного множества множество $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел, в роли основного отношения примем отношение $p(x, y, z)$ от трех аргументов x, y, z, определенное операцией сложения, т. е. 1) отношение $p(x, y, z)$ принимает значение И (истинно), если $x + y = z$; 2) отношение $p(x, y, z)$ принимает значение Л (ложно), если $x + y \neq z$. Эта структура $S_1 = (\boldsymbol{N}, p)$ с одним базисным множеством $\boldsymbol{N}$ и одним основным отношением p. Тип структуры $t = (3)$.

Аналогичным образом можно построить структуру, в которой базисным множеством будет также натуральный ряд чисел, а основным отношением — отношение $p(x, y, z)$, которое выполняется тогда и только тогда, когда $xy = z$.

П р и м е р 2. Множество N_1 четных чисел натурального ряда также можно принять в качестве базисного множества структуры с основным отношением $p_1(x, y, z) \Leftrightarrow x + y = z$ (т. е. $p_1(x, y, z)$ выполняется тогда и только тогда, когда $x + y = z$ порождает структуру $S_2 = (N_1, p_1)$, где $k = 1$, $I = \{1\})$. Тип структуры $t = (3)$.

Пример 3. Рассмотрим далее множество M, состоящее из двух чисел 1, —1. В качестве основного отношения возьмем отношение, описывающее умножение этих чисел. В этом случае структура S_3 такова:

$p = \{(1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, -1)\}$. Тип структуры $t = (3)$.

Пример 4. Рассмотрим множество целых чисел $\boldsymbol{Z}$ с отношениями, характеризующими «+» и «+, $\leqslant$».

В первом случае

$$U_1 = \{(a, b, c) \mid a + b = c, a, b, c \in \boldsymbol{Z}\}$$

есть структура на множестве целых чисел $\boldsymbol{Z}$; во втором случае структура U определяется на том же множестве совокупностью двух множеств:

$$U_1, U_2 = \{(a, b) \mid a \leqslant b, a, b \in \boldsymbol{Z}\}, t = (3, 2).$$

Примеры структур с двумя и более базисными множествами рассматриваются в конце главы I, а также в главах II, III, IV книги.

1. Род структур и его аксиомы. Изоморфизм структур

Прежде чем перейти к другим примерам математических структур, введем еще несколько определений, которые позволят лучше усвоить понятие математической структуры.

Мы указывали выше, что аксиомами α (α_j) отношения между элементами множеств шкалы Sh $(M_1, M_2, \ldots, M_k)$ не фиксируются до конца.

Выбор возможной структуры U_i $(i \in I)$ для данных базисных множеств $M_1, M_2, \ldots, M_k$ определяется так называемой *типовой характеристикой* $T(M_1, M_2, \ldots, M_k, U_i \mid i \in I)$.

Обозначим символом Σ совокупность всевозможных структур $S = (M_1, M_2, \ldots, M_k, U_i\ (i \in I))$, определенных различными типовыми характеристиками на базисных множествах $M_1, M_2, \ldots, M_k$ аксиомами (2.3).

Если эта совокупность Σ структур не пустая, то говорят, что каждый ее элемент $U = (U_i \mid i \in I)$ определяет на $M_1, M_2, \ldots, M_k$ *математическую структуру рода* Σ (короче, *структуру рода* Σ) соответствующей типовой характеристики.

Система аксиом $\alpha = (\alpha_j \mid j \in J)$ в (2.3) называется *системой аксиом рода структур* Σ, $T(M, U)$ — *типовой характеристикой* (*типизацией*) *структуры рода структур* Σ. В целях краткости здесь применяются обозначения:

$$\alpha = (\alpha_j \mid j \in J),\ M = (M_1, M_2, \ldots, M_k),\ U = (U_i \mid i \in I).$$

Отметим, что *U есть математическая структура рода Σ на базисных множествах $M_1, M_2, \ldots, M_k$, если каждое* U_i $(i \in I)$ получено согласно данной типовой характеристике и все аксиомы рода структур Σ выполняются на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_k$.

Следует помнить, что α_j $(j \in J)$ называются *аксиомами рода структур*, а не аксиоматической теории; аксиомы здесь используются лишь для задания некоторой совокупности структур.

Из контекста легко устанавливается смысл употребляемых слов: «аксиомы», «система аксиом» в зависимости от того, идет ли речь об аксиомах (системе аксиом) теории или рода структур.

Будем теперь считать, что аксиомы α рода структур Σ (вместе с аксиомами Γ) составляют систему аксиом некоторой аксиоматической теории. Совокупность предложений Γ_Σ, которые можно доказать из указанных аксиом, называется *теорией рода структур* Σ. Мы предполагаем, что теоремы в этой теории выводятся из аксиом, так же как выводятся теоремы в теории множеств.

Под аксиоматической теорией без каких-либо дополнительных оговорок мы всегда понимаем аксиоматическую неформальную теорию.

Часто в структурах некоторые из базисных множеств играют более важную роль, чем другие, и называются они *основными базисными множествами*; остальные базисные множества называются *вспомогательными базисными множествами*.

Структурам одного рода при каких угодно базисных множествах обычно приписывается специальное название. Такие известные читателю понятия, как группа, кольцо, поле и др. являются структурами рода структуры соответственно группы, кольца, поля и др.

Если нам даны два рода структур Σ, Θ, то теории Γ_Σ, Γ_θ все же могут быть связаны друг с другом. Особого внимания, естественно, заслуживает случай, когда эти роды структур приводят к одной и той же теории, т. е. случай эквивалентности аксиом теорий Γ_Σ, Γ_θ. Системы аксиом двух теорий называются *эквивалентными*, если в каждой из этих теорий можно построить основные понятия другой теории так, что все ее аксиомы будут теоремами в первой теории.

Изучение структур ведется с точностью до изоморфизма. Приведем определение этого важнейшего понятия сначала для структур с одним базисным множеством.

Допустим, что нам даны две математические структуры S и S', каждая из которых имеет одно базисное множество M, M' соответственно:

$$S = (M,\ p_i \mid i \in I), \quad S' = (M',\ p'_i \mid i \in I').$$

Отображением структуры S в структуру S' называется отображение базисного множества M структуры S в базисное множество M' структуры S'.

Две структуры одного и того же типа называются *изоморфными*, если можно установить взаимно однозначное отображение элементов базисного множества M на элементы базисного множества M', при котором отношение p_i ($i \in I$) выполняется или не выполняется для аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_{n_i}$ тогда и только тогда, когда отношение p'_i соответственно выполняется или не выполняется для элементов $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{n_i})$.

В символическом виде условие изоморфизма записывается так:

$$p_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n_i}) \Leftrightarrow p'_i(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{n_i})), \qquad (2.5)$$

где $\Leftrightarrow$ символ, выражающий эквивалентность левой и правой частей формулы (2.5). Структуры S, S', допускающие изоморфизм, называются *изоморфными*.

Можно убедиться, что структуры S_1, S_2 в приведенных выше примерах 1, 2 изоморфны. В самом деле, взаимно однозначное отображение $f(x) = 2x$ структуры S_1 на S_2 является изоморфизмом.

Отображение f структуры S в структуру S' называется *гомоморфизмом*, если (2.5) выполняется лишь в одну сторону: из выполнимости левой части следует выполнимость правой части. Например, структура S_1 гомоморфна структуре S_3 (с. 13) по отображению $f: f(n) = 1$, если n четное, $f(n) = -1$, если n нечетное.

Понятие изоморфизма структур S, S' общего вида вводится следующим образом. Пусть нам даны две структуры одного и того же рода:

$$S = (M_1, M_2, \ldots, M_k, A_1, A_2, \ldots, A_m, U),$$
$$S' = (M'_1, M'_2, \ldots, M'_k, A_1, A_2, \ldots, A_m, U')$$

с основными базисными множествами $M_1, M_2, \ldots, M_k$, соответственно $M'_1, M'_2, \ldots, M'_k$ и вспомогательными базисными множествами $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$. Пусть далее $f_i: M_i \to M'_i$ ($i = 1, 2, \ldots, k$) — взаимно однозначные отображения M_i на M'_i. Говорят, что $(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ является изоморфизмом множеств $M_1, M_2, \ldots, M_k$, наделенных структурой U, на множества $M'_1, M'_2, \ldots, M'_k$, наделенные структурой U', если множество U при таких отображениях (и их распространениях на множества p_i, входящие в типизацию) переходит на множество U'; каждое вспомогательное базисное множество $A_1, A_2, \ldots, A_m$ подвергается при этом лишь тождественному отображению на себя.

Следует помнить, что понятие изоморфизма структуры связано с характером условий, которым должны удовлетворять аксиомы родов структур — они должны выражать *переносимые отношения*. Именно это обстоятельство порождает существование понятия изоморфизма в структурном плане.

В заключение отметим, что в современной математике роль аксиоматического метода исключительно велика; большую роль играет и тесно связанное с этим методом понятие математической структуры. Последнее понятие — одно из важнейших в математике, и связано оно в основном с систематикой изучаемых объектов в аксиоматических теориях.

2. Примеры структур рода группы и порядка

Сначала дадим определение группы. *Группой* называется множество G элементов любой природы, допускающее операцию умножения $\varphi(x, y) = xy$, такую, что выполняются следующие аксиомы 1—4.

Аксиомы рода структур групп

1. Для любых двух элементов x, y данного множества, взятых в определенном порядке, существует определенный элемент $z \in G$, такой, что $z = xy$.

2. Операция умножения удовлетворяет ассоциативному закону, т. е. для любых трех элементов x, y, z, принадлежащих множеству G, справедливо равенство $(xy)z = x(yz)$.

3. Существует правая единица, т. е. такой элемент $e \in G$, что для любого элемента x, принадлежащего множеству G, имеет место $xe = x$.

4. Для любого элемента x из множества G существует правый обратный элемент x', принадлежащий также G, т. е. такой элемент $x' \in G$, что $xx' = e$.

Аксиомами 1—4 определяется род структур групп на множестве G. Упоминаемая в определении бинарная операция $\varphi(x, y) = z$ равносильна отношению $p(x, y, z)$ между тремя упорядоченными элементами x, y, z, которое считается истинным тогда и только тогда, когда произведение первых двух элементов x, y в указанном порядке равняется третьему элементу z. Группа является математической структурой вида

$$S = (G, p), \tag{2.6}$$

где G — базисное множество, p — основное отношение.

Так как отношение p в структуре (2.6) определяет групповую операцию $\varphi(x, y) = z$ и, обратно, операция эта определяет отношение p, то структура (2.6) часто обозначается так:

$$S = (G, \varphi). \tag{2.7}$$

В дальнейшем мы пользуемся обоими обозначениями. Следует отметить, что в правой части (2.6) иногда указывается еще единичный элемент; в целях простоты записи мы не будем явно указывать этот фиксированный аксиомами 1—4 элемент.

Возвратимся к нашему примеру. Определение группы совершенно не касается природы элементов базисного множества и смысла групповой операции умножения. Элементы множества могут быть любой природы, так же как и групповая операция $\varphi(x, y) =$

$= xy$ может быть любой операцией, лишь бы удовлетворялись указанные четыре аксиомы рода структур групп. Очевидно, подмножества $p \subset G \times G \times G$ определяют типовые характеристики рода структуры группы на базисном множестве G. Теория структур рода группы Σ на произвольных множествах G называется теорией групп.

Функция $\varphi(x, y)$ задается на множестве упорядоченных пар элементов $x, y \in G$ — декартовом произведении $G \times G$. Ясно, что задание групповой операции $\varphi(x, y)$ равносильно заданию отображения $\varphi : G \times G \to G$ в предположении, что групповые аксиомы 1—4 выполняются. Приведем примеры групп:

А. Множества целых чисел, а также рациональных или вещественных будут группами относительно операции сложения. Единицей этих групп является число нуль.

Б. Множества рациональных (а также действительных) чисел без нуля составляют группу относительно операции умножения. Единицей группы является число единица.

В. Множество подстановок из n цифр составляет относительно операции умножения подстановок группу с $n!$ элементами.

При $n = 3$, например, получаем группу подстановок из трех цифр, содержащую шесть элементов. Существуют другие группы, также содержащие шесть элементов и не изоморфные группе подстановок из трех цифр. Например, совокупность вращений евклидовой плоскости вокруг данной точки O на углы, кратные 60°, образуют группу. Умножение элементов здесь понимается в смысле последовательного осуществления данных вращений. Неизоморфность этих групп следует из того, что умножение в группе вращений коммутативно, т. е. не зависит от порядка сомножителей, а в группе подстановок — некоммутативно, т. е. произведение элементов, вообще говоря, зависит от порядка сомножителей.

Совокупность H элементов из группы G, составляющая относительно групповой операции в G самостоятельную группу, называется подгруппой группы G. Например, подгруппами аддитивной группы вещественных чисел являются множества рациональных (а также целых) чисел.

Множество M элементов какой угодно природы, допускающее ассоциативную операцию, называется *полугруппой*. Ясно, что полугруппа является математической структурой с одним базисным множеством и одним основным отношением p. Очевидно, множество натуральных чисел допускает структуру полугруппы относительно операции умножения (сложения). Род структур полугрупп на M определяется первыми двумя аксиомами рода структур групп.

Переходим к роду структур порядка. Структуры порядка — структуры

$$(M, p)$$

с одним базисным множеством M и одним основным отношением

Рис. 1

p — отношением порядка $\leqslant$, выражаемым словами «x меньше или равен y», «x предшествует y» и обозначаемым $x \leqslant y$, причем выполняются следующие аксиомы 1—3 рода структур порядка.

Аксиомы рода структур порядка

1. Для любого элемента x имеет место $x \leqslant x$.
2. Если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$.
3. Если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$.

Примерами математических структур порядка $(M, \leqslant)$ могут служить, в частности, множества натуральных и вещественных чисел, упорядоченные по величине. Множество натуральных чисел допускает структуру порядка, в которой $x \leqslant y$ означает «y делится на x». Структура порядка называется структурой совершенного (линейного) порядка, если для любых двух x, y выполняется $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$ (рис. 1). Отметим еще один важный пример структур порядка — структуру подмножеств данного множества, упорядоченных по включению.

Подмножества $p \subset M^2$ определяют возможные типовые характеристики $T(M, p)$ рода структур порядка на базисном множестве M. Теория рода структур порядка называется также теорией упорядоченных множеств.

Еще одним важным родом структур является род структур, называемых топологическими пространствами (с. 166). Эти структуры не являются структурами с отношениями между элементами единственного базисного множества (структурное отношение связано с множеством шкалы — множеством всех подмножеств базисного множества).

В заключение параграфа еще раз подчеркнем, что аксиоматический метод является также методом исследования, при котором все предложения теории (теоремы) выводятся логическим путем из некоторой части этих предложений, называемых аксиомами. Указанный метод является инструментом исследования математических закономерностей реального мира.

Вопросы и упражнения

1. Какие понятия в аксиоматической теории называются основными?
2. Приведите примеры математических структур с одним базисным множеством и двумя основными отношениями.
3. Каково отличие предложений, выражающих аксиомы, от других предложений (теорем) аксиоматической теории?
4. Приведите примеры изоморфных структур. Определите род структур порядка для базисного множества, содержащего три элемента.

§ 3. ПОНЯТИЕ МОДЕЛИ (ИНТЕРПРЕТАЦИИ) СИСТЕМЫ АКСИОМ

Абстрактность понятий в современной математике вовсе не означает отхода от задач, которые возникают перед нами при изучении реального мира. Наоборот, аксиоматические теории успешно применяются на практике в самых неожиданных ситуациях, в которых удается подходящим образом найти некоторые объекты и связать их первоначальными отношениями так, чтобы все аксиомы были выполнены.

Допустим, что для данной системы аксиом K теории Γ_k существуют некоторые множества и такие отношения между элементами этих множеств, что все аксиомы K будут истинными предложениями. Логические выводы, вытекающие из данных аксиом, будут также истинными высказываниями для указанных множеств и отношений. Это заключение следует из того, что правила вывода в аксиоматической теории Γ_k, определенной аксиомами K, и теории множеств считаются по предположению одинаковыми, общими.

Основные объекты математической теории Γ_k, определенной аксиомами K, могут быть любой природы, и основные отношения могут иметь любой конкретный смысл, лишь бы эти объекты и отношения удовлетворяли данной системе аксиом.

Всякий набор конкретных множеств и отношений между их элементами, удовлетворяющий требованиям системы аксиом аксиоматической теории Γ_k, называется *моделью* (интерпретацией) данной системы аксиом. Модель системы аксиом K часто называется также *моделью аксиоматической теории* Γ_k.

Приведенные выше примеры групп и упорядоченных множеств также могут служить моделями соответствующих аксиом теории групп и аксиом порядка. С моделями других систем аксиом мы познакомимся в следующем параграфе.

При изучении моделей данной системы аксиом большое значение имеет понятие изоморфизма двух моделей.

Допустим, что некоторая система аксиом допускает две модели. Эти модели называются *изоморфными*, если между элементами (основными образами) базисных множеств данных моделей можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие элементы находятся в одноименных основных отношениях.

Легко видеть, например, что группа вращений плоскости вокруг данной точки на углы 0°, 90°, 180°, 270° и группа вычетов целых чисел по модулю четыре являются изоморфными моделями аксиом 1—4 теории групп.

Обратим внимание читателя на следующие обстоятельства.

Во-первых, следует помнить, что существуют системы аксиом, имеющие бесчисленное множество неизоморфных друг другу моделей (например, аксиомы 1—4 теории групп).

Во-вторых, очевидно, совокупность моделей аксиоматической теории определяет границы применимости этой теории.

Теория множеств является главным поставщиком моделей аксиоматических теорий, математических структур. Однако сама эта теория также нуждается в обосновании.

В заключение остановимся на моделях конечных структур порядка. Базисные множества и упорядочивающие их отношения

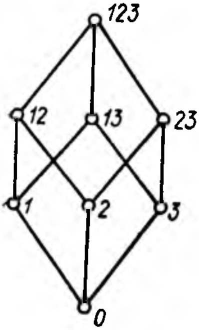


Рис. 2

изображаются при помощи диаграмм следующим образом. Элементы множества изображаются кружочками, расположенными на плоскости на различных уровнях. Если элементы x, y сравнимы и $x \leqslant y$, то кружочек, изображающий элемент y, расположен на более высоком уровне, т. е. выше кружочка, изображающего элемент x, причем из первого кружочка можно перейти во второй по крайней мере по одной какой-нибудь ломаной, звенья которой опускаются вниз.

Если элемент x непосредственно предшествует элементу y (т. е. $x \leqslant y$ и не существует такого элемента z, что $x \leqslant z \leqslant y$), то соответствующие кружочки соединяются отрезком. В этом случае говорят, что элемент y покрывает элемент x. В других случаях сравнимые элементы соединяются ломаными.

Несравнимые элементы не соединяются ни с какими опускающимися вниз звеньями. На рис. 2 элементы 1, 2 несравнимы, элементы 1,123 сравнимы.

Если кружочки являются вершинами лишь одной ломаной, то говорят о линейном порядке элементов данного множества (см. рис. 1). На рис. 2 изображена совокупность всех подмножеств трехэлементного множества, упорядоченная по правилу включения. Кружок на самом низком уровне изображает пустое подмножество, кружочки предшествующего уровня — одноэлементные подмножества, кружочки следующего уровня — двухэлементные подмножества.

Наконец, на самом высоком уровне кружочек изображает данное трехэлементное множество как несобственное подмножество.

Примером бесконечного частично упорядоченного множества может служить множество натуральных чисел, упорядоченное отношением $\leqslant$, где по определению $x \leqslant y$, если y делится на x.

Об одном классе структур порядка — решетках

Большой интерес представляют решетки — упорядоченные множества, в которых любые двухэлементные подмножества $\{x, y\}$ имеют точную верхнюю и нижнюю грани.

Приведем определение верхней и нижней граней подмножества, состоящего из двух элементов. *Верхней гранью подмножества* $\{x, y\}$ называется такой элемент a, что $x \leqslant a$, $y \leqslant a$. Верхняя грань a называется точной, если она связана с любой другой верхней гранью b данного подмножества соотношением $a \leqslant b$. Нижней гранью подмножества $\{x, y\}$ называется такой элемент c, что $c \leqslant x$, $c \leqslant y$; эта грань c называется *точной нижней гранью*, если любая другая нижняя грань d меньше или равна c. На рис. 1, 2 и 3 изображены диаграммы структур, состоящие из четырех, пяти и восьми элементов. На рис. 4 изображено частично упорядоченное множество, не являющееся решеткой.

Точные грани a, c двухэлементных подмножеств $\{x, y\}$ позволяют ввести на решетке операции сложения и умножения. В качестве суммы и произведения элементов x, y по определению принимаются соответственно точная верхняя и точная нижняя грани множества $\{x, y\}$. Эти операции в символической записи представляются в следующем виде: $x + y = a$, $xy = c$.

Например, если взять элементы $x = \{1, 2\}$, $y = \{2, 3\}$ решетки, изображенной на рис. 2, то $x + y = \{1, 2, 3\}$, $xy = \{2\}$; очевидно, также в случае $x = \{1, 2\}$, $y = \{3\}$ получим: $x + y = \{1, 2, 3\}$, $xy = \varnothing$.

Перебирая таким образом различные пары элементов, мы придем к таблицам сложения и умножения элементов рассматриваемой решетки.

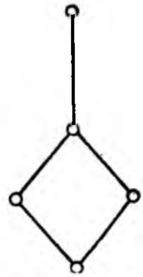


Рис. 3

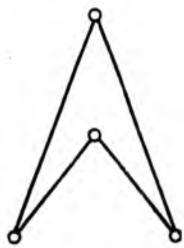


Рис. 4

Вопросы и упражнения

1. Постройте модель аксиом порядка 1—2, в которой бы аксиома 3 (аксиома транзитивности) не выполнялась.
2. Определите отношения ρ порядка в математических структурах, изображенных на рисунках 1—4.
3. Приведите примеры неизоморфных моделей аксиом порядка 1—3.
4. Составьте таблицы сложения и умножения для пар элементов x, y решеток, изображенных на рисунках 1—3.
5. Почему частично упорядоченное множество, изображенное на рис. 4, не является решеткой?
6. Приведите примеры решеток, в которых не выполняется дистрибутивный закон умножения.

§ 4. НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ, НЕЗАВИСИМОСТЬ И ПОЛНОТА СИСТЕМЫ АКСИОМ. ПРИМЕРЫ

При аксиоматическом построении математической дисциплины мы принимаем некоторые предложения в качестве аксиом, из которых другие предложения выводятся по правилам формальной логики. Однако не всякую совокупность предложений данной теории можно принять в качестве системы аксиом. Несомненно, что основным требованием, предъявляемым к системе аксиом, должно быть требование непротиворечивости или совместности. Наряду с требованием непротиворечивости при исследовании системы аксиом возникают также вопросы независимости и полноты. Разберем в отдельности каждое из указанных понятий.

1. Рассмотрим сначала требование непротиворечивости системы аксиом.

Введем следующее определение: система аксиом называется *непротиворечивой* или *совместной*, если определяемая ею теория средствами обычной логики не содержит противоречия, т. е. невозможно доказать в этой теории какое-нибудь предложение A и его отрицание $\overline{A}$. В противном случае система аксиом называется противоречивой.

Нетрудно убедиться, что противоречивая система аксиом не допускает никакой модели. Действительно, ни одно из отношений p, описываемых такой системой аксиом, не может обладать в модели одновременно свойствами p и $\overline{p}$. Следовательно, если система аксиом допускает какую-нибудь модель, то она непротиворечива.

Таким образом, вопрос о непротиворечивости данной системы аксиом K сводится к другому вопросу — построению интерпретации рассматриваемой системы аксиом. Если данные аксиомы допускают интерпретацию на совокупности некоторых образов и отношений между ними в некоторой по предположению непротиворечивой теории, то из этих данных аксиом невозможно вывести противоречия: если бы из данных аксиом можно было вывести два противоречащих друг другу предложения A, $\overline{A}$, то и в модели получили бы два истинных предложения, одно из которых будет отрицанием другого. Но это невозможно, так как теория, которая позволила построить модель аксиом K, по предположению была непротиворечива.

Обратим внимание читателя на то, что вопрос о непротиворечивости системы аксиом здесь решается в условном смысле. Именно мы заключаем, что данная система аксиом K непротиворечива, если непротиворечива теория, на понятиях которой реализованы эти аксиомы.

2. Перейдем теперь к вопросу независимости аксиом. Система аксиом называется *независимой*, если никакую из аксиом невозможно вывести как теорему из остальных аксиом.

В противном случае система аксиом называется *зависимой*. Предположим, что данная система аксиом K непротиворечива и некоторая ее аксиома α зависит от других аксиом $K - \alpha$, т. е. выводится логически из $K - \alpha$. Тогда очевидно, что система аксиом $K - \alpha$ также непротиворечива и всякая ее модель является моделью всей системы аксиом K. Более того, ясно, что в этом случае система аксиом, которая получается в результате присоединения к аксиомам $K - \alpha$ аксиомы $\overline{\alpha}$, противоречива. Следовательно, чтобы показать независимость аксиомы α от остальных, достаточно построить такую интерпретацию, в которой бы выполнялись все аксиомы, кроме данной, а аксиома α не выполнялась бы. Если аксиома окажется зависимой от других аксиом системы, то ее можно доказать на основании остальных аксиом и перевести в теоремы.

3. Аксиоматика многих математических теорий обладает свойством полноты. Это свойство, естественно, должно гарантировать отсутствие в рамках данной теории независимых утверждений. Последнее означает, что должно быть доказуемо данное предложение теории или его отрицание. Это будет иметь место, если любые

две модели системы аксиом изоморфны. Поэтому полную систему аксиом можно определить следующим образом.

Непротиворечивая система называется *полной*, если любые две ее модели (интерпретации) изоморфны. Полную систему аксиом теории в указанном смысле — в смысле изоморфизма моделей — называют часто *категоричной*.

Понятие полной системы аксиом иногда вводится во внутреннем смысле, не опираясь на понятия изоморфизма моделей. Полную систему аксиом в этом смысле называют дедуктивно полной. Дадим точное определение этого понятия.

Непротиворечивая система аксиом называется *дедуктивно полной*, если для всякого предложения A в определяемой ею теории будет доказуемо или это данное предложение, или его отрицание $\overline{A}$. В противном случае система аксиом по определению будет дедуктивно неполной. Таким образом, если система аксиом неполная, то имеется некоторое предложение A, выраженное в терминах понятий данной теории, которое недоказуемо и неопровержимо в этой теории. (Предложение A называется опровержимым, если $\overline{A}$ доказуемо.)

Приведенное определение дедуктивной полноты является очень кратким и формальным. Постараемся более подробно разъяснить смысл этого важного понятия.

Предположим, что нам дана непротиворечивая система аксиом K. Рассмотрим множество P всех предложений, которые являются высказываниями о понятиях, определяемых этой системой аксиом.

Любое предложение $A \in P$ либо доказуемо (т. е. это предложение является одной из аксиом или следствием аксиом), либо A является отрицанием некоторого доказуемого предложения, либо предложение A недоказуемо и неопровержимо.

Таким образом, множество P всех предложений допускает разбиение на три подмножества T, O, D так, что всякое предложение (формула) попадает в одно и только одно из этих подмножеств:

$$P = T \cup O \cup D. \tag{4.1}$$

Первое слагаемое в правой части T — подмножество доказуемых предложений; каждое предложение из этого подмножества будет либо аксиомой, либо теоремой рассматриваемой теории.

Второе слагаемое O — подмножество предложений, не только не выводимых из данной системы аксиом, но, наоборот, противоречащих предложениям T. Каждое из предложений $A \in O$ противоречит либо какой-нибудь аксиоме, либо какому-нибудь доказуемому предложению. Таким образом, отрицание этого предложения принадлежит подмножеству T.

Наконец, третье слагаемое D в формуле (4.1) — подмножество предложений, каждое из которых не находится в противоречии с предложениями множества T и не является логическим следствием аксиом. Иными словами, всякое предложение $A \in D$ недоказуемо и неопровержимо.

Очевидно, предложения $A \in T$ выполняются в каждой модели данной системы аксиом K; предложения $A \in O$ не выполняются ни в одной модели данной системы аксиом; наконец, предложения, принадлежащие третьему слагаемому D, выполняются в одних моделях, но существуют и такие модели, в которых они не выполняются.

Обратим внимание читателя еще раз на то, что дедуктивная полнота непротиворечивой системы аксиом теории означает согласно данному выше определению, что всякое предложение $A \in P$ рассматриваемой теории либо доказуемо, либо опровержимо; другими словами, одно из предложений A или $\bar{A}$ в этом случае доказуемо, а другое опровержимо.

Разложение (4.1) в случае дедуктивно полной системы аксиом осуществляется лишь по первым двум подмножествам; слагаемое D является пустым подмножеством:

$$P = T \cup O. \tag{4.2}$$

Обратное заключение также справедливо. Если совокупность предложений D является пустым множеством, то каждое предложение теории будет либо доказуемо, либо опровержимо и система аксиом K дедуктивно полная. Итак, дедуктивная полнота аксиом K характеризуется разложением вида (4.2) множества P всех ее предложений.

В случае дедуктивно неполной системы аксиом ($D \neq \varnothing$) можно найти две неизоморфные модели, в одной из которых некоторое предложение A выполняется, а в другой не выполняется: в этом случае при обычных логических средствах предложение $A \in D$.

Очевидно, если система аксиом категорична, то она дедуктивно полная. Отсюда все же нельзя сделать вывод о том, что если система аксиом дедуктивно полная, то она будет полной также в смысле изоморфизма любых двух моделей (категоричной).

Необходимо отметить, что о дедуктивной полноте системы аксиом имеет смысл говорить лишь при предположении, что логические средства вывода следствий точно описаны. Напомним, что аксиоматическая теория, в которой явно перечислены правила вывода следствий, по определению является дедуктивной теорией. В дедуктивной теории, построенной на дедуктивно неполной системе аксиом, существуют предложения, которые невозможно ни доказать, ни опровергнуть с помощью логических средств этой теории.

Например, система аксиом теории групп является дедуктивно неполной, так как в этой теории, например, свойство коммутативности группы недоказуемо и неопровержимо.

Примеры

Теперь мы проиллюстрируем свойства совместности, независимости и категоричности системы аксиом на трех примерах — аксиомах инцидентности, теории действительных чисел и системы величин.

Пример 1. Предположим, что имеются два множества M_1, M_2 без общих элементов. Назовем элементы множества M_1 точками, множества M_2 — прямыми. Предположим также, что нам дано бинарное отношение между элементами этих двух множеств, называемое отношением инцидентности точек и прямых. Мы будем говорить, что эти множества точек и прямых допускают структуру инцидентности, если выполняются следующие свойства 1—4.

Аксиомы инцидентности

1. Любым двум различным точкам можно отнести прямую, им инцидентную.

2. Любым двум различным точкам можно отнести не более одной прямой, им инцидентной.

3. На каждой прямой существуют по крайней мере две точки, ей инцидентные.

4. Существует тройка точек, не инцидентных одной прямой.

Структуры, определяемые аксиомами 1—4, обозначаются в виде $S_0 = (M_1, M_2, p_1)$, где M_1, M_2 — базисные множества, а p_1 — отношение инцидентности точки и прямой. Нас теперь интересует теория $\Gamma(S_0)$, определенная аксиомами 1—4.

Легко доказать, что система аксиом 1—4 инцидентности совместна. Действительно, пусть нам задан какой-нибудь треугольник ABC. Объявляя его вершины A, B, C «точками», а стороны, т. е. множества $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{B, C\}$, «прямыми», мы убеждаемся непосредственной проверкой в справедливости всех аксиом при обычном понимании инцидентности точек и прямых. Построенная модель состоит из трех точек и трех прямых, соответствующих вершинам и сторонам треугольника.

Зададимся теперь вопросом: как доказать независимость данных утверждений? Другими словами, каким образом можно установить, что каждая из аксиом 1—4 существенна, т. е. ни одна из аксиом не может быть получена средствами логики как следствие из остальных аксиом?

Поставленная таким образом задача является простейшей задачей на независимость данной системы аксиом. Независимость каждой аксиомы от остальных трех аксиом будем доказывать указанным в определении методом.

Докажем сначала независимость первой аксиомы. Возьмем для этого в качестве точек вершины A, B, C, D прямоугольника (рис. 5), а в качестве прямых — его стороны, т. е. подмножества $\{A, B\}$, $\{B, C\}$, $\{C, D\}$, $\{A, D\}$. Инцидентность будем понимать в обычном смысле.

Вершины и стороны рассматриваемого прямоугольника образуют модель аксиом 2—4 (рис. 5) (эта модель является одной из структур рода Σ, определенного аксиомами 2—4): $S_1 = (M_1, M_2, p_1)$.

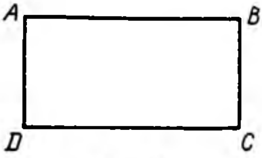


Рис. 5

Все аксиомы инцидентности здесь выполняются, за исключением первой аксиомы. Первая аксиома для точек A, C не выполняется: не существует прямой, инцидентной данным точкам, так как подмножество $\{A, C\}$ в построенной модели не является прямой.

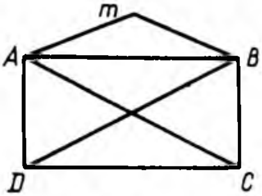


Рис. 6

Перейдем к рассмотрению независимости второй аксиомы. Для этого построим геометрию из четырех точек и семи прямых, указанных на рисунке. К прежним четырем точкам и сторонам прямоугольника добавляются в качестве прямых диагонали AC и BD, а также прямая AmB. Инцидентность точек и прямых понимается также в обычном смысле (рис. 6). Для точек A и B в построенной модели аксиом 1, 3, 4 существуют две различные прямые AB и AmB, инцидентные указанным точкам, т. е. вторая аксиома не выполняется.

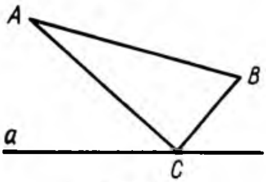


Рис. 7

Что касается других аксиом 1, 3, 4, то они выполняются, как показывает непосредственная проверка. Таким образом, вторая аксиома не зависит от остальных аксиом. При доказательстве этого утверждения мы опирались на модель системы аксиом 1, 3, 4 или (что то же самое) на одну из структур рода: $S_2 = (M_1, M_2, p_1)$, Σ, определенного аксиомами 1, 3, 4.

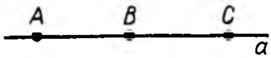


Рис. 8

Чтобы доказать независимость третьей аксиомы от всех остальных, рассмотрим модель, базисные множества которой содержат три точки A, B, C и четыре прямые $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{B, C\}$ и a (рис. 7). В этой модели аксиом 1, 2, 4 (структуре рода Σ, определенного аксиомами 1, 2 и 4), очевидно, все аксиомы инцидентности выполняются, кроме третьей аксиомы. На прямой a существует лишь одна точка C, ей инцидентная.

Для доказательства независимости четвертой аксиомы от всех остальных аксиом достаточно рассмотреть модель системы аксиом 1—3 (она является структурой S_4 рода Σ, определенного аксиомами 1—3). Предположим, что базисные множества состоят из одной прямой и трех точек, ей инцидентных (рис. 8). Очевидно, на этой модели выполняются все аксиомы, кроме четвертой. Следовательно, система аксиом инцидентности 1—4 совместна и независима.

Совсем просто доказать, что система аксиом 1—4 инцидентности не удовлетворяет требованию категоричности. Действительно, эти аксиомы допускают модели на конечных и бесконечных множествах — множествах разной мощности, поэтому между одноименными образами указанных моделей невозможно установить даже взаимно однозначного соответствия. Следовательно, такие модели заведомо неизоморфны между собой.

Пример 2. Говорят, что множество элементов, именуемых числами, допускает *структуру рода действительных чисел* и обозначается $S = (\boldsymbol{R}, +, \cdot, <)$, если оно упорядочено некоторым отношением $<$ и для любых двух элементов $x, y \in \boldsymbol{R}$ определена сумма $S(x, y) = x + y \in \boldsymbol{R}$ и произведение $p(x, y) = xy \in \boldsymbol{R}$, так что удовлетворяются следующие аксиомы 1—5.

Аксиомы теории действительных чисел

1. Совокупность всех чисел образует коммутативную группу относительно операции сложения.

2. Совокупность всех чисел, за исключением нулевого числа, образует также коммутативную группу по умножению.

3. Сложение и умножение чисел связаны дистрибутивным законом: $z(x + y) = zx + zy$.

4. (Аксиома порядка и монотонности.) Для любых двух различных чисел справедливо одно из отношений $x < y$ или $y < x$, причем:

а) если $x < y$ и $y < z$, то $x < z$;

б) если $x < y$, то $x + u < y + u$ для любого $u \in \boldsymbol{R}$;

в) если $x < y$ и $u > 0$, то $xu < yu$.

5. (Аксиома непрерывности.) Если все числа разделить каким угодно законом на два непустых класса так, что каждое число второго класса больше каждого числа первого класса, то существует число или наибольшее в первом классе, или наименьшее во втором классе.

Непротиворечивость теории Г, определяемой этими аксиомами, доказывается с помощью сечений рациональных чисел. Вводимые сечения и известные отношения между ними позволяют построить основные понятия теории действительных чисел так, что все аксиомы 1—5 выполняются. Построенная модель позволяет сделать вывод о том, что аксиоматика теории вещественных чисел непротиворечива, если непротиворечива аксиоматика рациональных чисел. Непротиворечивость же аксиоматики рациональных чисел в свою очередь сводится к непротиворечивости аксиоматики теории натуральных чисел.

Другой моделью теории вещественных чисел может служить множество бесконечных десятичных дробей. Если число x целое, т. е. $x = n$, то такой бесконечной дробью будет $x = n - 1, 999\ldots$. Если же x является конечной десятичной дробью $x = n, n_1 n_2 \ldots n_k$, то соответствующей бесконечной дробью будет $x = n, n_1 n_2 \ldots \ldots (n_k - 1)\, 999\ldots$. Наконец, если x не есть рациональное число, то при любом n имеем: $n, n_1 \ldots (n_k - 1) < x < n, n_1 n_2 \ldots n_k$. Нетрудно убедиться, что все аксиомы 1—5 будут выполняться. Построенная модель теории вещественных чисел иногда называется арифметической. Аксиоматика теории вещественных чисел удовлетворяет также требованию категоричности, т. е. любые две ее модели изоморфны.

Идея доказательства этого утверждения состоит в следующем. Берется произвольная модель теории вещественных чисел и доказывается, что она изоморфна арифметической модели.

Прежде всего в этой данной модели существуют на основании аксиом 1—2 два элемента, одному из которых сопоставляется число 0, а другому — 1. Аксиомы 1—5 позволяют сопоставить каждому $x \notin \{0, 1\}$ определенное число. Если элементу x сопоставляется целое число n, то из арифметической реализации ему отнесем величину $n - 1, 999...$

Предположим, что образ элемента x не является целым числом и принадлежит интервалу $(n, n + 1)$. В этом случае интервал $(n, n + 1)$ делится на десять равных частей. Если данный элемент получит координату вида n, n_1, то ему отнесем $n, (n_1 - 1)\,99\ldots$ из арифметической модели. В противном случае интервал $(n_1, n_1 + 1)$ снова будем делить на десять равных частей и повторять приведенные рассуждения.

Пример 3. Рассмотрим еще один пример теории, представляющий особый интерес для учителя математики. Непустое множество $B = \{x, y, z, \ldots\}$, элементы которого могут быть любой природы, называется *системой величин* (скалярных), а его элементы — *величинами*, если выполняются следующие аксиомы.

Аксиомы теории величин

1. Если $x, y \in B$, то выполняется одно и только одно из отношений: $x < y$, $x = y$, $x > y$.

2. Если $x < y$, $y < z$, то $x < z$.
3. Для любых $x, y \in B$ определена величина $z = x + y$, которая также принадлежит B.
4. Аксиома коммутативности:

$$(\forall xy \in B)\ [x + y = y + x].$$

5. Аксиома ассоциативности:

$$(\forall xyz \in B)\ [x + (y + z) = (x + y) + z].$$

6. Для любых двух x, y существует одна и только одна величина z, для которой $x = y + z$.
7. Если $x < y$, то $x + z < y + z$ для любого $z \in B$.
8. Для любого $x \in B$ и натурального числа n существует такое $y \in B$, что $x = ny$.
9. Аксиома Архимеда: если $y > 0$, то для любого $x \in B$ существует такое n, что $x < ny$.

10. Аксиома Кантора: если

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots < y_n < \ldots < y_2 < y_1$$

и при достаточно больших n выполняется $y_n - x_n < c$, где c — произвольная положительная величина, то существует и притом единственная величина ξ, такая, что выполняются неравенства $x_n < \xi < y_n$ при любом натуральном числе n.

Из аксиом 3—6 следует, что в системе величин B существует вполне определенный элемент — нуль, обозначаемый символом 0, который обладает свойством $x + 0 = x$ для любого $x \in B$. Аксиомы 3—6 показывают, что система величин B допускает относительно сложения структуру коммутативной группы.

Совокупность величин $x \in \boldsymbol{R}$, таких, что $0 \leqslant x$, называется системой неотрицательных величин $\boldsymbol{R}_{+}^{0}$. Если операцию вычитания определить (см. акс. 6) лишь для элементов $y < x$, совокупность $\boldsymbol{R}_{+}$ называется *системой положительных величин*.

Примером неотрицательной величины, очевидно, является совокупность вещественных чисел $0 \leqslant x$, причем символы $+$ и $<$ интерпретируются соответственно в смысле операции сложения и упорядочения чисел по величине. Но операция умножения в системе величин B не определена. Совокупность вещественных чисел $0 < x$ является системой положительных величин.

Каждой величине $x \in B$ при выбранной единице $e \in B$ ($e > 0$) измерения можно сопоставить, как это следует из аксиом 1—10, вполне определенное числовое значение x_e так, что:

1) если $x < y$, то $x_e < y_e$;

2) если $z = x + y$, то $z_e = x_e + y_e$.

Очевидно, отсюда следует, что значение нулевой величины равняется нулю.

Рассматриваемая система аксиом теории величин категорична, т. е. эта система аксиом полна в смысле изоморфизма моделей.

В случае системы неотрицательных (положительных) величин базисное множество B допускает относительно операции сложения структуру полугруппы.

Система величин B, определенная аксиомами 1—10, называется *системой скалярных величин*. Примером таких величин может служить совокупность $\boldsymbol{R}$ вещественных чисел относительно операции сложения и обычного порядка.

Заметим, что в аксиоме непрерывности во втором примере речь идет о любых законах разбиений, что приводит нас к аксиоматической теории так называемого второго порядка; аналогичное замечание можно сделать в связи с примером 3 (подробнее см. с. 125).

Мы рассмотрели свойства совместности, независимости и категоричности на примерах простейших систем аксиом теории инцидентности, теории вещественных чисел и скалярных величин. Можно убедиться также, что приведенная в предыдущем параграфе система аксиом теории групп совместна, независима и неполна. Совместность и некатегоричность групповых аксиом следуют из указанных там примеров групп.

Вопросы и упражнения

1. Какой вывод следует из существования модели аксиом 1—3 теории упорядоченных множеств?

2. Постройте модель, из которой бы следовала независимость первой аксиомы порядка от остальных.

3. а) Постарайтесь убедиться, что система аксиом 1—4 теории инцидентности некатегорична.

б) Приведите другие примеры некатегоричных систем аксиом.

4. Будет ли система аксиом инцидентности дедуктивно полной?

5. Верно ли, что система аксиом инцидентности будет дедуктивно полной теорией рода структур, содержащих лишь три точки и три прямые?

6. Верно ли, что система аксиом 1—4 теории групп дедуктивно неполная?

7. Определите отношение инцидентности в математических структурах, изображенных на рис. 6—8.

8. Наметьте важнейшие шаги в доказательстве категоричности системы аксиом теории вещественного числа.

Глава II
СИСТЕМА АКСИОМ ШКОЛЬНОГО КУРСА ГЕОМЕТРИИ

В настоящей главе мы познакомимся с аксиоматикой А. Н. Колмогорова школьного курса геометрии и некоторыми следствиями, вытекающими из нее. Здесь же выясняется роль некоторых аксиом при таком построении евклидовой геометрии.

Связь аксиом школьного курса геометрии с аксиомами Гильберта рассматривается в третьей главе.

§ 1. АКСИОМЫ ШКОЛЬНОГО КУРСА ГЕОМЕТРИИ

В школьном курсе планиметрии основными понятиями являются точка, прямая и расстояние. Плоскость при этом понимается как множество всех точек. Некоторые из подмножеств плоскости принимаются в качестве прямых. Предполагается также, что любым двум точкам A, B можно сопоставить неотрицательное число — расстояние от точки A до точки B.

В аксиоматике школьного курса геометрии содержится всего 12 аксиом, которые описывают указанные три основных понятия. Аксиомы эти распределяются в пять групп аксиом I—V.

I. Аксиомы принадлежности

1. Прямая есть множество точек.

2. Для любых двух точек существует одна и только одна содержащая их прямая.

3. Существует хотя бы одна прямая, каждой прямой принадлежит хотя бы одна точка.

Из первых двух аксиом следует, что две отличные друг от друга прямые имеют не более одной общей точки.

II. Аксиомы расстояния

1. Любым точкам A и B поставлено в соответствие неотрицательное действительное число $|AB|$, называемое *расстоянием от A до B*. Расстояние это равно нулю в том и только в том случае, если A, B совпадают.

2. Расстояние от точки A до точки B равно расстоянию от точки B до точки A: $|AB| = |BA|$.

3. Для любых трех точек A, B, C расстояние от A до C не больше суммы расстояний от A до B и от B до C: $|AC| \leqslant |AB| + |BC|$.

При помощи понятия «расстояние» определяется понятие точки, лежащей *между* двумя данными точками, и отрезка (с. 35). Отображение множества точек на себя, сохраняющее расстояние, называется *изометрией* или *перемещением*.

III. Аксиомы порядка

1. Любая точка O прямой p разбивает множество отличных от O точек прямой p на два непустых множества так, что точка O лежит между любыми двумя точками, принадлежащими разным множествам.

Каждое из полученных множеств называется *открытым лучом*, точка O — началом луча (рис. 9).

2. Для любого неотрицательного действительного числа a на заданном луче с началом O существует одна и только одна точка, расстояние от которой до начала O равно числу a.

3. Три точки принадлежат одной прямой тогда и только тогда, когда одна из них лежит между двумя другими.

Прежде чем привести последнюю аксиому порядка — аксиому о разбиении точек плоскости, остановимся на определении разделения. Мы будем говорить, что прямая p разделяет не принадлежащие ей точки A, B, если отрезок AB пересекается с прямой p, т. е. существует точка $C \in p$, которая является точкой (внутренней) отрезка AB ($\overset{\times}{C}AB$).

4. Любая прямая разбивает множество не принадлежащих ей точек плоскости на две непустые выпуклые области (рис. 10).

Каждое из множеств α_1, α_2 называется *открытой полуплоскостью*, прямая p — *ребром полуплоскости*, $\alpha_1 \cup p$ $(\alpha_2 \cup p)$ — *полуплоскостями*.

Рис. 9

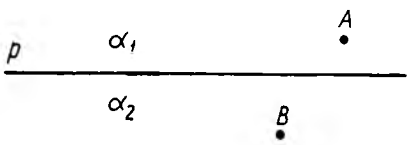


Рис. 10

IV. Аксиома подвижности плоскости

Если расстояние $|AB|$ положительно и равно расстоянию

$|A'B'|$, то существует ровно два перемещения, каждое из которых отображает точку A на точку A', а точку B на точку B'.

Если α_1—полуплоскость, ограниченная прямой AB, то она этими двумя перемещениями отображается на две различные полуплоскости соответственно β_1, β_2, ограниченные прямой $A'B'$.

V. Аксиома параллельности

Через любую точку A плоскости проходит не более одной прямой, параллельной данной прямой p.

Следствия из аксиом

Аксиомами групп I—V исчерпывается аксиоматика школьного курса планиметрии. Аксиоматика эта характеризует род структур Σ на базисных множествах T, Π, называемых *евклидовыми плоскостями* $S = (T, \Pi, p)$; элементы множеств T, Π именуются соответственно *точками и прямыми*; отношение $p(A, B, d) \Leftrightarrow d = \rho(A, B)$ определяет расстояние от точки A до точки B при предположении, что перечисленные 12 аксиом групп I—V выполняются.

Геометрия является теорией указанного рода структур Σ.

Другие истинные предложения планиметрии доказываются, исходя из этих аксиом по правилам логики. Например, из первых двух аксиом I следует, как уже отмечалось, что две различные прямые имеют не более одной общей точки. Остановимся подробнее на некоторых следствиях, вытекающих из аксиом расстояний, а также из аксиом I—III и I—IV.

§ 2. СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМ РАССТОЯНИЙ

Аксиомы II позволяют изучить общие свойства расстояний независимо от природы элементов, именуемых точками, и конкретных видов законов, определяющих ту или другую метрику. Эти аксиомы определяют метрическое пространство. *Метрическим пространством* называется любое множество элементов

$$T = \{A, B, C, \ldots\}, \tag{2.1}$$

в котором определено расстояние, т. е. для любых двух точек определено неотрицательное число так, что аксиомы расстояний II_{1-3} выполняются. Аксиома II_1 часто называется аксиомой позитивности, а аксиомы II_2 и II_3 называются соответственно аксиомами *симметрии* и *треугольника*.

Приведем простейшие примеры метрических пространств.

Пример 1. Множество вещественных чисел $\boldsymbol{R} = \{x, y, z, \ldots\}$ допускает структуру метрического пространства, если расстояние от точки x до точки y условимся определять по формуле $\rho(x, y) = |y - x|$.

В самом деле, если $\rho(x, y) = 0$, то $x = y$; обратно, из $x = y$ следует, что $\rho(x, y) = 0$. Очевидно также, что $|x - y| = |y - x|$. Таким образом, первые две аксиомы расстояний выполняются.

Остается убедиться в справедливости аксиомы треугольника. Предположим, что x, y, z — любые три вещественных числа, и разберем, например, случай, когда $y \leqslant z \leqslant x$. Так как

$$|z-x| = x-z, \quad |z-y| = z-y, \quad |y-x| = x-y,$$

то получим:

$$|y-x|+|z-y| = x-y+z-y \geqslant x+z-2z = |x-z|,$$

т. е. аксиома треугольника выполняется. Аналогично разбираются и другие случаи расположения x, y, z. Таким образом, множество $\boldsymbol{R}$ с метрикой $\rho(x, y) = |y-x|$ является метрическим пространством.

Пример 2. Множество упорядоченных пар вещественных чисел (координатная плоскость) $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} = \{(x, y)\}$, $(x, y \in \boldsymbol{R})$ допускает структуру метрического пространства $(\boldsymbol{R}^2, d)$, если расстояние от точки $A\,(x_1, y_1)$ до точки $B\,(x_2, y_2)$ ввести по формуле

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \qquad (*)$$

В самом деле, выполнимость аксиом расстояний 1—2 очевидна. Докажем, что аксиома треугольника также выполняется. Пусть (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) — три произвольные точки. Чтобы установить неравенство

$$\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2} \leqslant \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} + \sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}, \qquad (2.2)$$

положим, что

$$x_2-x_1 = u_1, \qquad y_2-y_1 = u_2,$$
$$x_3-x_2 = v_1, \qquad y_3-y_2 = v_2.$$

В этих обозначениях из (2.2) следует, что

$$\sqrt{(u_1+v_1)^2+(u_2+v_2)^2} \leqslant \sqrt{u_1^2+u_2^2}+\sqrt{v_1^2+v_2^2}. \qquad (2.3)$$

Возводя обе части (2.3) в квадрат, получим:

$$u_1v_1+u_2v_2 \leqslant \sqrt{u_1^2+u_2^2}\sqrt{v_1^2+v_2^2}. \qquad (2.4)$$

Освобождаясь в (2.4) от радикала, выводим:

$$2u_1v_1u_2v_2 \leqslant u_1^2v_2^2+u_2^2v_1^2, \quad (u_1v_2-v_1u_2)^2 \geqslant 0.$$

Так как эти рассуждения можно обратить, то (2.2) доказано. Условимся полученное метрическое пространство обозначать символом $(\boldsymbol{R}^2, d)$.

Можно доказать, что пространство $(\boldsymbol{R}^2, d)$ является двумерным евклидовым пространством. При определении евклидовой геометрии на координатной плоскости используются лишь аксиомы 1—3 расстояний и дополнительное предположение (выражающее аксиому Пифагора) о том, что расстояние от точки (x_1, y_1) до точки (x_2, y_2) определяется по формуле $(*)$.

Пример 3. Та же самая координатная плоскость $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} = \{(x, y)\}$ допускает другую структуру метрического пространства, если расстояние от точки (x_1, y_1) до точки (x_2, y_2) определить по формуле

$$m((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}. \qquad (2.5)$$

Действительно, аксиомы расстояния II_{1-3} здесь также выполняются. Для любых двух точек величина (2.5) неотрицательная; она равна нулю тогда и только тогда, когда $|x_2 - x_1| = |y_2 - y_1| = 0$, т. е. точки (x_1, y_1), (x_2, y_2) совпадают: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Очевидно также, что II_2 — свойство симметрии выполняется, т. е. расстояние от (x_1, y_1) до (x_2, y_2) равно расстоянию от (x_2, y_2) до (x_1, y_1). Докажем далее выполнимость аксиомы треугольника.

Предположим, что нам даны три любые точки: (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), которые для краткости обозначим буквами соответственно A_1, A_2, A_3. Так как

$$|x_3 - x_1| \leqslant |x_3 - x_2| + |x_2 - x_1|,$$

то получим:

$$|x_3 - x_1| \leqslant \max\{|x_3 - x_2|, |y_3 - y_2|\} + \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}.$$

Следовательно, неравенство это можно переписать в виде

$$|x_3 - x_1| \leqslant m(A_1, A_2) + m(A_2, A_3).$$

Аналогично оценивается абсолютная величина разности $y_3 - y_1$:

$$|y_3 - y_1| \leqslant m(A_1, A_2) + m(A_2, A_3).$$

Из последних двух неравенств заключаем, что

$$\max\{|x_3 - x_1|, |y_3 - y_1|\} \leqslant m(A_1, A_2) + m(A_2, A_3).$$

Окончательно имеем:

$$m(A_1, A_3) \leqslant m(A_1, A_2) + m(A_2, A_3).$$

Аксиома треугольника тоже выполняется.

Таким образом, множество $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ допускает структуру метрического пространства. В дальнейшем условимся его обозначать символом $(\boldsymbol{R}^2, m)$.

Графически (2.5) обозначает, что расстояние от A_1 до A_2 равно длине наибольшего катета прямоугольного треугольника с гипотенузой A_1A_2 и катетами, параллельными осям координат. Если $(A_1A_2) \parallel [Ox)$ ($(A_1A_2) \parallel [Oy)$), то расстояние $m(A_1, A_2)$ равно длине евклидова отрезка A_1A_2.

Аналогично можно построить метрические пространства $(\boldsymbol{R}^2, s)$ или более общие $(\boldsymbol{R}^2, d_p)$, в которых соответственно

$$s((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|,$$

$$d_p((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (|x_2 - x_1|^p + |y_2 - y_1|^p)^{\frac{1}{p}} \quad (p \geqslant 1). \; (**)$$

Очевидно, при $p = 1$ из (**) получим (R^2, s), а при $p = 2$ — (R^2, d).

Пространства (**) (в том числе и (R^2, m), которое получается из (**) при $p = \infty$) порождают так называемые двумерные нормированные пространства.

Нас интересуют метрические пространства, допускаемые координатной плоскостью — известным учащимся множеством. Но следует заметить, что приведенными примерами не исчерпываются возможные метрики на координатной плоскости.

Пример 4. Пространство непрерывных функций, определенных на сегменте $[AB]$, где расстояние между двумя функциями $f(x)$, $\varphi(x)$, определяется как верхняя грань разности этих функций, взятой по абсолютной величине. Наиболее важные применения аксиомы расстояния имеют место в теории функций. Возникновение и развитие теории метрических пространств и было связано в основном с функциональными пространствами.

Пример 5. Любое множество элементов, очевидно, будет метрическим пространством, если положить расстояние δ между двумя различными точками равным единице и нулю, если точки совпадают.

Это метрическое пространство называется *дискретным*. Условимся обозначать дискретное метрическое пространство, определенное на координатной плоскости R^2, символом (R^2, δ).

Очевидно, всякое подмножество метрического пространства также является метрическим пространством. Расстояния между точками в этом пространстве равны расстояниям между теми же точками в данном пространстве.

1. Отношение „лежать между". Понятие отрезка

Аксиомы расстояний позволяют определить понятие точки, лежащей между точками A и B. Говорят, что точка C лежит между точками A, B (символически обозначают $\overset{\times}{C}AB$), если точки A, B, C различны и расстояния между парами точек AB, AC, BC удовлетворяют равенству

$$|AB| = |AC| + |CB|.$$

Опираясь на это понятие, дадим определение отрезка. *Отрезком* называется множество, состоящее из двух различных точек A, B и всех точек C, лежащих между ними. Точки A, B называются *концами отрезка*. Всякая точка C, лежащая между концами отрезка AB, называется *внутренней точкой отрезка*.

Внешняя точка отрезка AB может быть определена как такая точка C, что $\overset{\times}{A}BC$ или $\overset{\times}{B}AC$. Точка O отрезка AB называется его *серединой*, если $|AO| = |OB|$. В качестве длины отрезка AB можно принять расстояние от точки A до точки B. Но длины отрезков и сами отрезки в произвольном метрическом пространстве, как мы убедимся ниже, не играют большой роли, как в евклидовой геометрии.

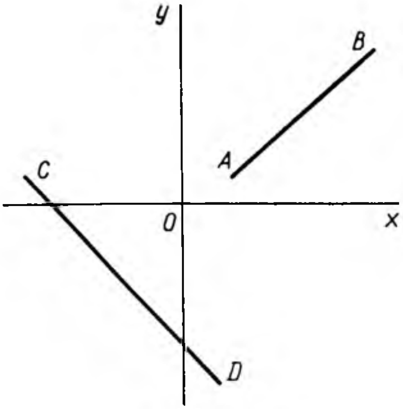


Рис. 11

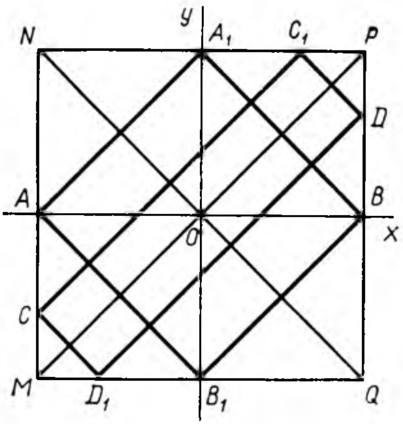


Рис. 12

Отрезки в дискретных пространствах состоят лишь из одних концевых точек. Например, в пространстве ($\boldsymbol{R}^2$, δ) среди трех точек A (1, 0), B (2, 0), C (3, 0), принадлежащих оси Ox, нет ни одной точки, которая бы лежала между двумя другими. Этот вывод сразу следует из того, что каждое из расстояний $|AB|$, $|AC|$, $|BC|$ равно единице и, следовательно, ни одно из этих чисел не равно сумме двух других, т. е. никакая из точек A, B, C оси Ox не лежит между двумя другими. Но если в координатной плоскости ввести метрику согласно аксиоме Пифагора или по правилу наибольшего катета, то в каждом из пространств ($\boldsymbol{R}^2$, d), ($\boldsymbol{R}^2$, m) точка B уже будет лежать между точками A, C.

Вопрос о единственности концов A, B отрезка AB в аксиоматической теории, определенной аксиомами II расстояний, решается отрицательно.

В дискретном пространстве ($\boldsymbol{R}^2$, δ) отрезки имеют бесчисленное множество пар концов (с. 35). В пространстве ($\boldsymbol{R}^2$, m) существуют отрезки двух типов с одной парой концов. Отрезки первого типа параллельны биссектрисе координатных углов *1*, *3*, и отрезки второго типа параллельны биссектрисе координатных углов *2*, *4*. В этом пространстве имеются также отрезки с двумя парами концов (отрезки третьего типа, называемые ниже также биотрезками). На рис. 11 изображены отрезки AB, CD соответственно первого и второго типа в пространстве ($\boldsymbol{R}^2$, m). Отрезки третьего типа (биотрезки) AB (A_1B_1) с концами A, B и A_1, B_1, CD (C_1D_1) с концами C, D и C_1, D_1 изображены на рис. 12.

Вопросы и упражнения

1. Проверьте, что если $\overset{\times}{A}BC$, то $\overset{\times}{A}CB$.

2. Из трех различных точек A, B, C существует не более одной, лежащей между двумя другими. Докажите.

3. Почему невозможно определить в метрическом пространстве (M, ρ) прямую как множество таких точек p, что если $\{A, B\} \subset p$, то отрезок $[AB] \subset p$?

4. Определите тип структуры $S = (T, \Pi, \rho)$ евклидовой плоскости, определенной аксиомами 1—12 А. Н. Колмогорова.

2. Круги и окружности

Во всяком метрическом пространстве можно ввести понятие шара (сферы). *Шаром* (*сферой*) называется множество точек M пространства, расстояния которых до некоторой точки O удовлетворяют условию: $|OM| \leqslant r$ ($|OM| = r$); точка O называется *центром шара* (*сферы*), число r — *его* (*ее*) *радиусом*.

Как известно, структуру метрического пространства допускает и координатная плоскость $\boldsymbol{R}^2$, в которой точками являются упорядоченные пары (x, y) вещественных чисел. В этих пространствах шары (сферы) обычно называются *кругами* (*окружностями*).

В случае структуры $(\boldsymbol{R}^2, m)$, где расстояние от точки (x_1, y_1) до точки (x_2, y_2) определяется по формуле

$$m = \max \{|x_2 - x_1|, \ |y_2 - y_1|\}, \tag{2.6}$$

круг с центром в $(0, 0)$ радиуса r состоит из точек (x, y), для которых $\max \{|x|, \ |y|\} \leqslant r$.

Таким образом, для x, y выполняются одновременно неравенства $|x| \leqslant r$, $|y| \leqslant r$. Искомым кругом будет внутренность «квадрата» с вершинами (r, r), $(-r, r)$, $(-r, -r)$, $(r, -r)$ (рис. 12).

Посмотрим теперь, что представляют собой в этом случае диаметры. Легко видеть, что диаметры являются отрезками третьего типа, т. е. отрезками с двумя парами концов, за исключением двух диаметров MP, NQ первого и второго рода соответственно: AB (A_1B_1), CD (C_1D_1) — диаметры 3-го рода.

Очевидно, диаметр круга (окружности) с двумя парами концов в $(\boldsymbol{R}^2, m)$ разбивается центром круга на четыре радиуса.

Отрезки в этом пространстве в общем случае имеют две пары концов. В связи с этим представляют интерес случаи взаимного расположения круга (окружности) и отрезка, в которых круг (окружность) принадлежит отрезку (рис 13).

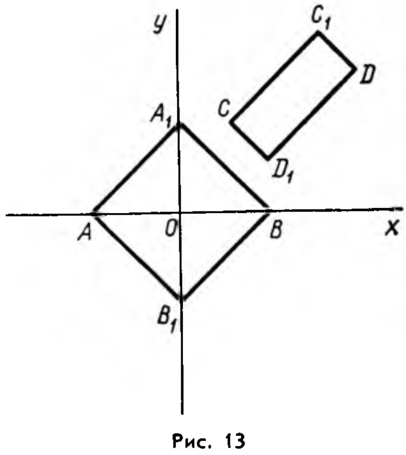


Рис. 13

На рис. 14 изображен круг (окружность), «вписанный» (вписанная) в отрезок третьего рода; на рис. 15 изображен круг (окружность), принадлежащий отрезку AB (A_1B_1) с концами A, B и A_1, B_1.

Перечисление возможных

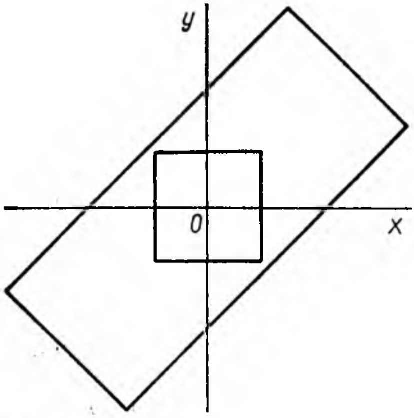


Рис. 14

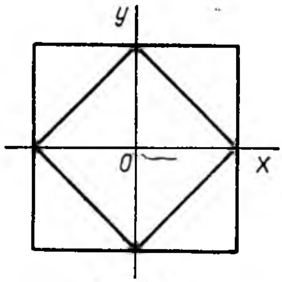


Рис. 15

случаев взаимного положения окружности (круга) и отрезка третьего рода представляется читателю самостоятельно в качестве полезного упражнения.

В заключение рассмотрим вопрос о взаимном положении двух окружностей в (R^2, m).

Круг в этой плоскости изображается в виде квадрата со сторонами, параллельными осям координат. Окружности изображаются в виде сторон указанных квадратов.

Вопрос о взаимном положении двух окружностей решается совсем просто. На приведенных ниже рис. 16—23, понятных без дополнительных объяснений, указаны возможные случаи взаимного расположения двух окружностей.

В последних двух случаях (рис. 22, 23) окружности имеют бесчисленное множество общих точек. Обратим внимание также на рис. 21: ни один из соответствующих кругов не принадлежит другому, но пересекаются они все же по кругу.

Вопросы и упражнения

1. В координатной плоскости (x, y), метризованной по правилу наибольшего катета (т. е. в метрическом пространстве (R^2, m)), рассмотрите следующие вопросы и задачи:

а) Дайте графическое изображение диаметра и радиуса какой-нибудь окружности.

б) Правильно ли утверждение, что центр окружности разбивает диаметр на два радиуса?

в) Сколько существует диаметров окружности с одной парой концов (с двумя парами концов)?

г) При каком условии можно вписать в отрезок окружность (круг)?

д) Дайте графическое изображение хорды окружности.

е) Постройте центр данной окружности, если на рисунке он не отмечен.

ж) Можно ли в окружность вписать хорду — отрезок с двумя парами концов? Сколько решений имеет задача?

з) Чему равно отношение длины окружности к диаметру?

2. Рассмотрите вопросы а) — з) предыдущей задачи в пространствах (R^2, s), (R^2, δ).

3. Будут ли структуры (R^2, m) и (R^2, s) однотипными?

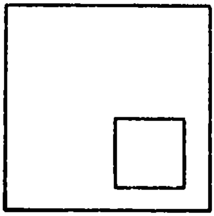


Рис. 16

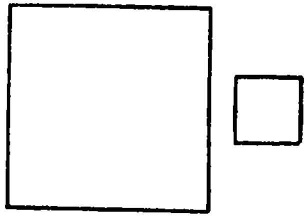


Рис. 17

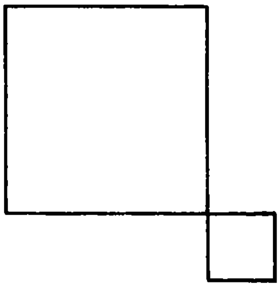


Рис. 18

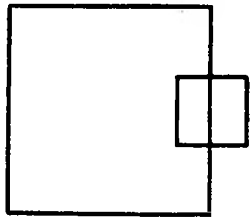


Рис. 19

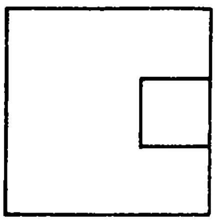


Рис. 20

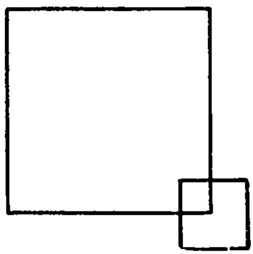


Рис. 21

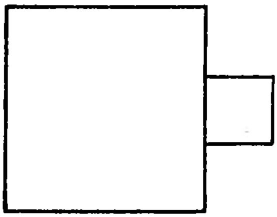


Рис. 22

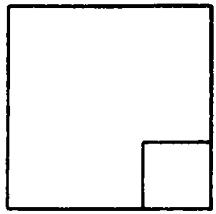


Рис. 23

3. Изометрии. Группа изометрий

Отображение метрического пространства на себя называется *изометрическим преобразованием*, короче *изометрией* (перемещением), если оно сохраняет расстояние, т. е. расстояние между двумя любыми точками равняется расстоянию между их образами. Множество всех изометрий метрического пространства составляет группу.

Очевидно, всякая изометрия отображает отрезок на отрезок, причем концы отрезка отображаются в концы преобразованного отрезка.

Это интуитивно ясное предложение, но оно тем не менее требует от читателя определенного внимания.

Дело в том, что из определения отрезка, как мы указывали ранее, совсем не следует наличия у него единственной пары концевых точек.

В самом деле, существуют изометрии, которые отрезок AB отображают на себя и концы его при этом будут отображаться на внутренние точки A_1, B_1 этого отрезка.

Такие изометрии возможны в случае, когда отрезок наряду с концами A, B имеет другую пару концов, например A_1, B_1. Конечно, эти точки A_1, B_1 необходимо являются внутренними точками отрезка AB, так же как A и B в свою очередь необходимо являются внутренними точками отрезка A_1B_1.

Более того, объявляя эти точки A_1, B_1 концами нового отрезка, получим отрезок A_1B_1, равный в теоретико-множественном смысле отрезку AB.

Вопросы и упражнения

1. Докажите, что изометрия F отображает точки отрезка AB на точки отрезка $F(A)\,F(B)$, т. е. если $\overset{\times}{C}AB$, то $\overset{\times}{F}(C)\,F(A)\,F(B)$.

2. Найдите группу изометрии метрического пространства, состоящего из вершин равнобедренного треугольника.

3. Найдите группу изометрии метрического пространства, определенного вершинами египетского треугольника со сторонами 3, 4 и 5.

4. В метрическом пространстве (R^2, m) рассмотрите следующие вопросы и задачи:

а) Откуда следует, что биотрезок при изометрии переходит в биотрезок и центр его — в центр?

б) Существуют ли изометрии, которые отображают отрезок AB на себя, но $\{F(A), F(B)\} \neq \{A, B\}$?

5. Проверьте, что координатная плоскость R^2 допускает структуру метрического пространства, если расстояние $d_p(A, B)$ от $A(x_1, y_1)$ до $B(x_2, y_2)$ определить по формуле

$$d_p(A, B) = (|x_2 - x_1|^p + |y_2 - y_1|^p)^{\frac{1}{p}} \quad (p \geqslant 1).$$

6. Докажите, что при возрастании p расстояния $d_p(A, B)$ убывают.

7. Докажите, что метрику пространства (R^2, m) можно получить из метрики пространства (R^2, d_p) при $p \to \infty$.

8. В каких группах аксиом школьного курса геометрии используются понятия «множество», «число», являющиеся основными понятиями во всех разделах математики?

9. Верно ли, что в аксиоматике школьного курса планиметрии имеется пять основных понятий — понятия точки, прямой, расстояния, множества, числа?

10. Выясните строение отрезков в пространствах (R^2, d_p (A, B)).

§ 3. СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМ I—III

Множества, которые определяются согласно первой аксиоме порядка заданием прямой p и принадлежащей ей точкой O, называются открытыми лучами с началом O. Объединение каждого из открытых лучей с точкой O называется лучом с началом O (с. 31).

Множества, которые определяются согласно аксиоме порядка III_4 заданием прямой p, называются открытыми полуплоскостями, ограниченными этой прямой p.

Объединение открытой полуплоскости с прямой p называется просто полуплоскостью, ограниченной этой прямой. Прямая p называется границей полуплоскости. Отметим, что два открытых луча одной прямой и две открытые полуплоскости одной плоскости однозначно определяются соответственно заданием начала O луча и граничной прямой p. Пусть, например, прямая p производит разбиение остальных точек плоскости α согласно аксиоме III_4 на непустые множества α_1, α_2, причем $A_1 \in \alpha_1$, $A_2 \in \alpha_2$. Предположим далее, что разбиение не однозначно, т. е. та же прямая p разбивает остальные точки плоскости на непустые множества β_1, β_2. Предположим, что эти множества так обозначены символами β_1, β_2, что $A_1 \in \beta_1$. Докажем, что множество β_1 совпадает с α_1. В самом деле, если $\beta_1 \neq \alpha_1$, то существует точка $C \in \alpha_1$, что $C \notin \beta_1$. Последнее означает, что $C \in \beta_2$. В таком случае A_1, $C \in \alpha_1$, и точки A_1, C не разделяются прямой p. С другой стороны, $A_1 \in \beta_1$, $C \in \beta_2$ и точки A_1, C разделяются прямой p, что невозможно. Утверждение доказано полностью. Вывод об однозначности определения лучей рекомендуется читателю получить самостоятельно.

Из аксиомы III_1 следует, что прямая содержит по крайней мере три точки. Более того, из бесконечности множества положительных чисел и аксиомы III_2 мы заключаем, что прямая, луч и отрезок являются бесконечными множествами точек.

Из аксиомы III_3 вытекает, что отрезок AB есть подмножество прямой AB. Из этой же аксиомы и аксиом расстояния заключаем, что для трех точек A, B, C, не лежащих на одной прямой, выполняется неравенство $|AB| < |AC| + |CB|$.

Из аксиомы III_4 и бесчисленности точек на прямой следует наличие бесчисленного множества прямых.

В геометрии аксиом I—III справедлива следующая теорема Паша: если прямая не проходит через вершины треугольника и пересекает одну из его сторон, то эта прямая пересекает также еще одну из двух других его сторон.

Приведем также определение понятия угла: *углом* называется *фигура*, состоящая из двух различных лучей с общим началом и ограниченной ими части плоскости. Лучи эти называются *сторонами угла*, а общее их начало — *его вершиной*. Если стороны угла составляют прямую, то угол называется *развернутым*. Если разделить такой угол на два конгруэнтных угла, получим два прямых угла, величина каждого из которых равна d.

Аксиомы I—III позволяют доказать следующее предложение. Теорема. Между точками прямой p и множеством вещественных чисел $\boldsymbol{R}$ можно установить такое взаимно однозначное соответствие $f: p \to \boldsymbol{R}$, что для любой пары точек M, N и соответствующих им чисел m, n справедливо равенство

$$|MN| = |n - m|. \tag{3.1}$$

Искомое отображение f будем строить следующим образом:

1) Произвольной точке $O \in p$ отнесем число нуль.

2) Всякой другой точке $M \in p$, принадлежащей какому-нибудь лучу, например P_1, сопоставим число m так, что

$$|OM| = m.$$

3) Всякой точке N, принадлежащей дополнительному лучу p_2, сопоставим число n так, что $|ON| = -n$. Легко убедиться, что построенное таким образом отображение f будет искомым. Прежде всего это взаимно однозначное отображение: очевидно, различным точкам оно относит различные числа и каждое вещественное число имеет прообраз. Докажем теперь справедливость (3.1) в случае, когда M, N принадлежат одному лучу, например p_1, то $\overset{\times}{M}NO$ или $\overset{\times}{N}MO$. В первом случае имеем:

$$|OM| + |MN| = |ON|,$$

где $|OM| = m < |ON| = n$. Следовательно,

$$|MN| = n - m,$$

т. е. (3.1) справедлива. Если $\overset{\times}{N}MO$, то

$$|ON| + |NM| = |OM|,$$

причем $|ON| = n < |OM| = m$. Таким образом,

$$|MN| = m - n = |n - m|,$$

и формула (3.1) снова имеет место. Если теперь M, N будут принадлежать дополнительному лучу p_2, то рассуждения аналогичны приведенным.

Если точки M, N принадлежат разным лучам, например $M \in p_1$, $N \in p_2$, то начало луча O лежит между точками M, N. Следовательно, имеем: $|MO| + |ON| = |MN|$, $|ON| = -n$. Таким образом, $|MN| = m - n$, т. е. $|MN| = |n - m|$, и (3.1) также справедлива. Аналогично рассматриваются другие случаи. Теорема доказана.

Замечание 1. Эта теорема позволяет утверждать, что множество точек прямой и множество вещественных чисел с метриками соответственно $|MN|$, $|n - m|$ порождают с точностью до изометрии одно и то же метрическое пространство.

Замечание 2. Установленное выше отображение определяет на прямой систему координат с началом в точке O. Очевидно, точку O и луч на прямой с положительными координатами можно выбирать произвольно.

1. О единственности концов отрезка

Остановимся еще на одном вопросе — единственности концов отрезка. Эта единственность в [7] не устанавливается. Докажем, что каждый отрезок имеет единственную пару концов.

Предположим, что нам дано $[AB] = [CD]$, т. е.

$$\{X | \overset{\times}{X}AB\} = \{Y | \overset{\times}{Y}CD\} \; (X \neq C, D; \; Y \neq A, B).$$

Требуется доказать, что множества $\{A, B\}$, $\{C, D\}$ определяют одну и ту же пару точек. По условию точка X отрезка AB является также точкой отрезка CD. Таким образом, эти точки A, B принадлежат дополнительным лучам XA, XB, которые можно получить на прямой AB на основании аксиомы III_1. Но X является по условию также точкой отрезка CD, поэтому каждому из лучей XA, XB принадлежит одна из точек C или D. Для определенности будем считать, что конец отрезка CD, принадлежащий $[XA)$, обозначен буквой C, а другой — D $(D \in [XB))$.

Предположим теперь, что $A \neq C$ и $\overset{\times}{A}XC$, тогда на $[XA)$ существует по аксиоме II_2 такая точка K, что $|XK| = (|XC| + |XA|)/2$, т. е. $K \in [CD]$, но $K \in [AB]$, что невозможно. Аналогично убеждаемся, что C не лежит между X, A. Таким образом, из двух различных точек A, C луча XA нет ни одной точки, лежащей между другой точкой и точкой X, что невозможно по аксиоме III_1. Полученное противоречие показывает, что предположение о несовпадении A, C неверное. Утверждение доказано полностью.

При доказательстве мы существенно опирались на порядковые свойства плоскости, перечисленные в аксиомах III. Эти свойства в доказательстве играли решающую роль.

В дискретном пространстве аксиомы III не выполняются и единственность пары концов отрезка не имеет места.

В самом деле, в пространстве $(\boldsymbol{R}^2, \delta)$ множества внутренних точек любых двух отрезков совпадают (у каждого отрезка имеется пустое множество таких точек). Другими словами, отрезки в дискретном пространстве состоят из одних и тех же внутренних точек, составляющих пустое множество; отрезки различаются лишь концами, в роли последних можно взять любые две точки в $(\boldsymbol{R}^2, \delta)$. Отметим, что не выполняется свойство единственности концов отрезка и в $(\boldsymbol{R}^2, m)$ — координатной плоскости, метризованной по правилу «наибольшего катета».

2. Единственность середины отрезка

Прежде всего напомним определение середины отрезка. Точка O отрезка AB называется *серединой этого отрезка*, если $|AO| = |OB|$, $\overset{\times}{O}AB$.

Единственность середины устанавливается совсем просто. В самом деле, на основании аксиомы III_2 на луче AB существует одна и только одна искомая точка O, такая, что $|AO| = |OB| = |AB|/2$, $(\overset{\times}{O}AB)$.

В произвольном метрическом пространстве аксиома III_2 не выполняется и единственность середины отрезка не имеет места.

Действительно, отрезок AB в дискретном пространстве $(\boldsymbol{R}^2, \delta)$ не имеет середины, т. е. не существует точки отрезка O, для которой $|AO| = |OB|$.

С другой стороны, в координатной плоскости $(\boldsymbol{R}^2, m)$, метризованной по правилу наибольшего катета, существуют отрезки, которые имеют бесчисленное множество середин. Такие отрезки мы называли выше биотрезками, и имеют они две пары концов. Графически биотрезки представляются на координатной плоскости $(\boldsymbol{R}^2, m)$ в виде прямоугольников со сторонами, параллельными биссектрисам *1*, *3* и *2*, *4* координатных углов, а парами концов таких отрезков являются пары противоположных вершин этих прямоугольников. Серединами отрезков являются точки отрезка на координатных линиях, проходящих через точку пересечения «диагоналей» прямоугольника.

3. Единственность центра и радиуса круга (окружности)

Школьная геометрия начинается с определения окружности и круга — самых простейших фигур метрического пространства. Напомним эти определения. Множество точек плоскости, расстояние каждой из которых от данной точки O этой плоскости равно (меньше или равно) данному, называется *окружностью* (кругом). В случае, когда число измерений $n \geqslant 3$, говорят соответственно о сфере и шаре. Таким образом, точки M окружности (круга) определяются условием:

$$|OM| = r \ (|OM| \leqslant r), \tag{3.2}$$

где точка O — центр окружности (круга), r — радиус.

Из этих определений и аксиом I—III следует, что круг (окружность) имеет единственный центр и радиус.

В самом деле, допустим, например, что некоторый круг имеет два центра O_1, O_2 и два радиуса r_1, r_2, причем $r_1 > r_2$. Предположим далее, что точки A, B — точки прямой O_1O_2, для которых $|O_1A| = |O_1B| = r_1$. Существование этих точек гарантируется аксиомой III_2. Так как по условию $r_1 > r_2$, то $O_2 \in [AO_1)$ лежит между A, O_1; следовательно,

$$|O_1O_2| + r_2 = r_1. \tag{3.3}$$

С другой стороны, так как $|O_2B| = r_2$, то

$$r_1 + |O_1O_2| = r_2. \tag{3.4}$$

Складывая почленно равенства (3.3) и (3.4), получим: $|O_1O_2| = 0$, т. е. точки O_1, O_2 совпадают и $r_1 = r_2$. Аналогично разбираются случаи $r_1 < r_2$. Очевидно, этот вывод также сразу следует из свойства единственности середины отрезка. Таким образом, центр и радиус круга (окружности) в геометрии аксиом I—III определяются единственным образом.

В приведенных здесь рассуждениях решающая роль принадлежит порядковым свойствам прямых и плоскости. В дискретном метрическом пространстве $(\boldsymbol{R}^2, \delta)$ круг радиуса $r \leqslant 1$ (так же как и круг радиуса $r \leqslant 5$) совпадает со всем пространством, причем центром его может служить любая точка пространства.

Таким образом, в пространстве $(\boldsymbol{R}^2, \delta)$ не имеет места ни единственность центра круга, ни единственность его радиуса.

Вопросы и упражнения

1. Как установить однозначность разбиения точек прямой некоторой ее точкой на два непустых множества согласно аксиоме III_1?

2. Откуда следует, что существует бесчисленное множество точек, принадлежащих прямой?

3. Докажите единственность разбиения точек плоскости какой-нибудь ее прямой на два непустых класса согласно аксиоме III_4.

4. Докажите, что плоскость содержит бесчисленное множество точек и прямых.

5. На какие аксиомы и теоремы мы опирались при доказательстве:

а) единственности пары концов отрезка;

б) единственности середины отрезка?

6. На какие аксиомы и теоремы опирается доказательство утверждения о единственности центра и радиуса круга (окружности)?

7. Приведите примеры метрических пространств, в которых концы отрезка AB никак не связаны между собой «посредством» точек этого отрезка.

§ 4. СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМ I—IV

Аксиома подвижности плоскости играет большую роль при построении евклидовой геометрии. Она характеризует множество возможных перемещений (движений) плоскости по самой себе с сохранением расстояний между точками.

Прежде всего рассмотрим частные виды перемещений — симметрии относительно прямой, повороты и симметрии относительно точки.

1. Симметрия относительно прямой

Симметрия относительно прямой p в [7] — [9] определяется как такое перемещение, при котором: 1) точки прямой p остаются на месте; 2) полуплоскости α_1, α_2 с границей p отображаются одна на другую. Прямая p в этом случае называется иногда осью симметрии.

Докажем следующий признак того, что некоторое перемещение является симметрией относительно прямой p.

Т е о р е м а. Перемещение f_p является симметрией относительно прямой p тогда и только тогда, когда оно оставляет единственными неподвижными точками точки этой прямой p.

Н е о б х о д и м о с т ь очевидна. Предположим, что перемещение f_p является симметрией S_p относительно прямой p. Тогда из определения S_p следует, что только точки прямой p остаются на месте.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть перемещение f_p оставляет только точки некоторой прямой p на месте. Докажем, что оно является симметрией S_p относительно этой прямой p.

По первой части аксиомы IV подвижности плоскости существует всего два перемещения, которые оставляют неподвижными различные точки A, B прямой p. Очевидно, одним из таких перемещений является тождественное перемещение, а другим — данное перемещение f_p. С другой стороны, квадрат этого перемещения f_p тоже оставляет точки прямой p неподвижными, поэтому f_p^2 равняется f_p или E. Если

$$f_p^2 = f_p, \tag{4.1}$$

то $f_p = E$, что невозможно. Таким образом, имеем:

$$f_p^2 = E, \tag{4.2}$$

т. е. перемещение f_p является инволюцией.

Убедимся теперь, что f_p отображает полуплоскости α_1, α_2 с границей p одну на другую.

В самом деле, предположим, что точка $A \in \alpha_1$ и пусть она отображается на точку A': $A' = f_p(A)$. Докажем, что $A' \in \alpha_2$; так как отображение f_p инволютивно, то $A = f_p(A')$. Кроме того, середина O инвариантного при f_p отрезка AA' в силу ее однозначности будет, очевидно, неподвижной точкой, принадлежащей прямой p. Поэтому точки A, A' принадлежат разным полуплоскостям. Но по предположению $A \in \alpha_1$, следовательно, $A' \in \alpha_2$, что и требовалось доказать.

С л е д с т в и е 1. Из приведенных рассуждений следует, что всякая прямая p на плоскости определяет одну и только одну симметрию S_p относительно этой прямой p.

С л е д с т в и е 2. Прямая AA', содержащая пару соответствующих при симметрии S_p точек, перпендикулярна оси симметрии p.

С л е д с т в и е 3. При формулировке аксиомы IV подвижности плоскости (с. 31) можно ограничиться лишь первой ее частью: если $|AB| = |A'B'|$, то существуют два перемещения F_1, F_2, каждое из которых отображает точку A на точку A', а точку B на точку B'. Что касается второй части аксиомы IV (если α_1 — полуплоскость, ограниченная прямой AB, то α_1 этими двумя перемещениями F_1, F_2 отображается на две различные полуплоскости α'_1, α'_2, ограниченные прямой $A'B'$), то она следует из остальных аксиом I—III, IV а) как теорема.

В самом деле, если F отображает полуплоскость α_1 на α'_1, то перемещение

$$F_2 = S_{(A'B')}F_1 \qquad (4.3)$$

получается в результате наложения на F_1 симметрии относительно прямой $A'B'$. Перемещение (4.3), очевидно, отображает α_1 на α'_2.

Однако принятая в [7] формулировка аксиомы подвижности более удобна для учащихся, как об этом справедливо замечают также авторы учебника. В настоящей главе, как указывалось во введении, рассматриваются лишь некоторые следствия из аксиоматики А. Н. Колмогорова с целью обратить на них внимание читателя.

Мы опираемся на теоремы и определения, рассматриваемые в [7] — [9].

2. Поворот

Поворот вокруг точки O в [7] определяется как перемещение, при котором: 1) точка O отображается сама на себя; 2) угол между любым лучом OX и соответствующим ему лучом OX' имеет одну и ту же величину α. Величина α называется *углом поворота*, точка O — *центром поворота*.

Докажем следующий признак того, что некоторое перемещение является поворотом вокруг точки O.

Теорема. Нетождественное перемещение F_O является поворотом R_O вокруг центра O тогда и только тогда, когда оно оставляет единственную неподвижную точку — точку O.

Необходимость очевидна: если данное перемещение F_O является поворотом вокруг центра O, то эта точка O остается на месте и, очевидно, других неподвижных точек нет.

Достаточность. Пусть перемещение F_O оставляет единственную точку O неподвижной. Докажем, что это перемещение является поворотом вокруг точки O на некоторый угол α, заключающийся в пределах $0 \leqslant \alpha \leqslant 2d$.

Рассмотрим какие-нибудь лучи OX, OY и их образы OX', OY' при перемещении F_O:

$$OX' = F_O\,(OX),\ OY' = F_O\,(OY) \qquad (4.4)$$

и убедимся, что $\widehat{[OX)\,[OX')} = \widehat{[OY)\,[OY')}$.

В этих целях мы построим перемещение, которое отображает угол XOY на угол $X'OY'$. Нетрудно убедиться, что искомым перемещением является поворот R_O вокруг точки O, переводящий луч OX в OY: $[OY) = R_O([OX))$. Этот поворот OX' переводит в OY'. Действительно, согласно (4.4) имеем:

$$R_O([OX')) = R_O F\,([OX)).$$

Но перемещения R_O и F_O коммутативны, так как каждое из них оставляет неподвижной одну и только одну точку O. Таким образом, заключаем, что

$$R_O\ F_O\ ([OX)) = F_O R_O([OX)) = F_O\ ([OY)) = [OY').$$

Теорема доказана полностью. Отметим, что в приведенном доказательстве мы существенным образом опирались на понятие величины угла.

Полученные признаки о симметриях относительно прямой и поворотах вокруг центра позволяют дать этим перемещениям определения, эквивалентные приведенным в [7], но они были бы менее доходчивы для учащихся.

Принятая формулировка аксиомы подвижности и определения поворота и симметрии относительно прямой позволили авторам [7] — [9] значительно упростить изложение школьного курса геометрии. Большую роль при таком изложении играют, конечно, ссылки на явно сформулированные и недоказанные теоремы в учебнике.

Рассмотрим еще один частный вид перемещения — симметрию относительно данной точки.

3. Симметрия относительно точки

Среди поворотов вокруг O существуют инволютивные повороты, называемые также *симметрией относительно точки O*.

Такие повороты существуют. Например, композиция симметрий относительно перпендикулярных прямых p, q, пересекающихся в точке O,

$$S_q \circ S_p \tag{4.5}$$

определяет симметрию относительно O.

С другой стороны, всякое инволютивное перемещение имеет неподвижную точку — середину отрезка AA', где A, A' — соответствующие точки. Более того, серединой отрезка AA' необходимо является точка O. Очевидно, симметрия относительно данной точки однозначно определяется этой точкой. Таким образом, для любой точки существует, и притом только одна, симметрия относительно этой точки O.

4. О конгруэнтности фигур и изометриях плоскости

Прежде всего докажем следующее предложение.

Теорема. Существует перемещение и притом единственное, которое переводит A в A', B в B', C в C', где каждая из трех точек A, B, C и A', B', C' не принадлежит одной прямой, если

$$|AB| = |A'B'|,\ |AC| = |A'C'|,\ |BC| = |B'C'|.$$

Для доказательства построим симметрию $S\ (A,\ A')$ относительно прямой, в которой точки A, A' соответствующие. Предположим, что эта симметрия $S(A, A')$ переводит $B \to B_1$, $C \to C_1$; таким образом, имеем: $|AB| = |A'B_1| = |A'B'|$. Осуществим теперь симметрию $S(B_1, B')$, которая точку A' оставляет на месте, а B_1 переводит в B', C_1 — в точку C_2. Кроме того, из $S(B_1, B') \circ S(A, A')$ следует, что

$$|AC| = |A'C_2| = |A'C'|,$$
$$|BC| = |B_1C_1| = |B'C_2| = |B'C'|,$$

т. е. существует еще одна симметрия $S(C_2, C')$, при которой точки A', B' неподвижны, а $C_2 \to C'$. Таким образом, перемещение

$$F = S(C_2, C') \circ S(B_1, B') \circ S(A, A') \tag{4.6}$$

является искомым.

Переходим ко второй части теоремы — единственности полученного перемещения F. Предположим, что имеются два перемещения F_1, F_2; тогда перемещение $F_2^{-1} \circ F_1$, очевидно, оставляет точки A, B, C неподвижными. Неподвижными будут также точки прямых AB, AC, BC. Отсюда уже следует, что каждая точка плоскости будет неподвижной, т. е. $F_2^{-1} \circ F_1$ является тождественным перемещением и, следовательно, $F_1 = F_2$. В самом деле, предположим, нам дана M — любая точка, не лежащая ни на одной из этих прямых, а N — внутренняя точка отрезка AB. Если $C \in (MN)$, то каждая точка этой прямой MN неподвижная и $M = M'$. Если $C \notin (MN)$, то по теореме Паша прямая MN пересечет сторону треугольника AC или BC, и снова мы убедимся, что $M = M'$.

Таким образом, перемещение $F_2^{-1} \circ F_1$, оставляющее неподвижными три неколлинеарные точки A, B, C, является тождественным, т. е. $F_2^{-1} \circ F_1 = E$. Умножая почленно это равенство слева на F_2, получим: $F_1 = F_2$. Другими словами, перемещение однозначно определяется заданием трех пар соответствующих точек (A, A'), (B, B'), (C, C'), где каждая из троек точек A, B, C и A', B', C' не принадлежит одной прямой.

Из доказанного предложения непосредственно следует так называемая теорема о конгруэнтности треугольников ABC, $A'B'C'$ по трем сторонам. Приведем определение конгруэнтности фигур.

Говорят, что *фигура Φ конгруэнтна фигуре Φ'*, если Φ можно отобразить на Φ' так, чтобы расстояние между любыми двумя точками первой фигуры было равно расстоянию между соответствующими точками второй.

Определить конгруэнтность фигур можно и другим способом: существует отображение всей плоскости на себя, сохраняющее расстояния, при котором фигура Φ отображается на фигуру Φ'.

Можно показать, что всякое изометрическое отображение $f_\text{ф}$ плоской фигуры Φ на фигуру Φ', лежащую в той же плоскости, можно продолжить всегда до перемещения f всей плоскости на себя.

Если фигура содержит три точки, не инцидентные одной прямой, то продолжение отображения $f_\text{ф}$ до изометрии (перемещения) f однозначно, как это следует из предыдущей теоремы. Если же,

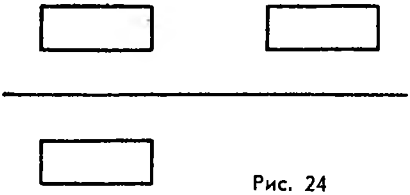


Рис. 24

например, F является стороной AB прямоугольника, а F' — противоположной его стороной CD, то изометрических отображений f здесь два, а соответствующих перемещений f четыре (см. [7], с. 49).

5. О следствиях из аксиом I—V

Аксиомами I—V определяется геометрия евклидовой плоскости — геометрия рода структур $S = (T, П, \rho)$, где T, $П$ — базисные множества точек и прямых, ρ — расстояние от точки A до точки B определяются 12 аксиомами I_{1-3}, II_1—II_3, III_1—III_4, IV_1, V_1.

Получению из этих аксиом теорем и посвящены в основном учебные пособия [7]—[9]. Поэтому приводить здесь доказательства теорем из аксиом I—V мы не будем. Заметим лишь, что теперь на основе всех групп I—V можно определить другие виды частных перемещений дополнительно к поворотам и симметриям относительно точек и прямых, рассмотренным выше. Такими перемещениями являются параллельный перенос и скользящая симметрия.

1. *Параллельным переносом* называется такое отображение плоскости на себя, при котором все точки плоскости перемещаются на одно и то же расстояние в одном и том же направлении.

Очевидно, задание одной пары соответствующих точек A, $A' = T(A)$ полностью определяет параллельный перенос T.

Перенос является перемещением, причем всякий луч отображается в луч того же направления. Обратное утверждение также справедливо. Если перемещение всякий луч отображает в луч того же направления, то это перемещение является переносом.

2. *Скользящая симметрия.* Так называется перемещение, которое получается в результате композиции осевой симметрии S_p и переноса $\overrightarrow{AB}$ при условии, что (AB) и ось симметрии параллельны. Это перемещение не зависит от порядка следования сомножителей S_p, $\overrightarrow{AB}$ (рис. 24).

Можно доказать, что всякое перемещение плоскости является либо поворотом, либо параллельным переносом, либо симметрией относительно прямой, либо скользящей симметрией (см. с. 57).

В следующем параграфе остановимся на построении декартовой системы координат.

§ 6. КООРДИНАТНЫЙ МЕТОД. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМ ПЛАНИМЕТРИИ

Аксиомы I—V позволяют построить в плоскости π координаты. Всякое изометрическое отображение данной плоскости на множество (R^2, d) упорядоченных пар вещественных чисел (x, y) задает на этой плоскости декартову прямоугольную систему координат.

Очевидно, любая точка плоскости π при этом может быть принята за начало системы координат. Кроме того, любые две взаимно ортогональные прямые, проходящие через начало O (рис. 25), можно взять в качестве осей координат Ox, Oy. Мы предполагаем, что на каждой из этих прямых с общей масштабной единицей введены координаты по описанному выше способу (с. 43).

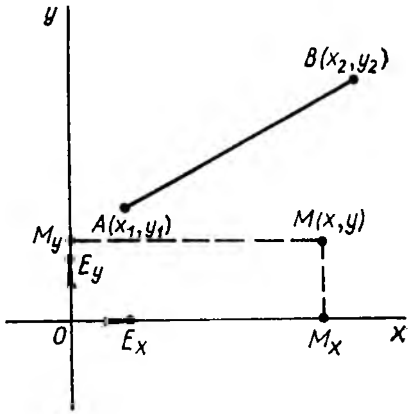


Рис. 25

Чтобы получить координаты (x, y) любой точки $M \in \pi$, опустим из нее перпендикуляр MM_x на ось Ox. Координату полученной точки M_x на оси Ox примем за абсциссу x точки M. За ординату y данной точки M примем координату точки M_y на оси Oy, где M_y является точкой пересечения прямой, проходящей через M и перпендикулярной Oy. Очевидно, построенное отображение точек плоскости π на пары (x, y) вещественных чисел взаимно однозначно.

Если точки A, B имеют координаты соответственно (x_1, y_1) и (x_2, y_2), то на основании теоремы Пифагора, справедливой в плоскости π, заключаем, что

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{*}$$

Построенная система координат, в которой расстояние между точками определяется по формуле (*), называется декартовой прямоугольной системой координат. Единичные точки E_x, E_y ($\overrightarrow{OE_x} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{OE} = \vec{e}_2$) на осях Ox и Oy имеют соответственно координаты (1,0) и (0,1).

Нетрудно проверить, что координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ в прямоугольном базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ численно равны соответствующим координатам точки M в прямоугольной системе координат.

Формула (*) показывает, что расстояние между точками $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ равно длине вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, т. е. корню квадратному из скалярного квадрата этого вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$. В самом деле, по правилу вычитания векторов $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{e}_1 + (y_2 - y_1)\vec{e}_2$. Отсюда следует:

$$\overrightarrow{M_1M_2}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2; \tag{**}$$

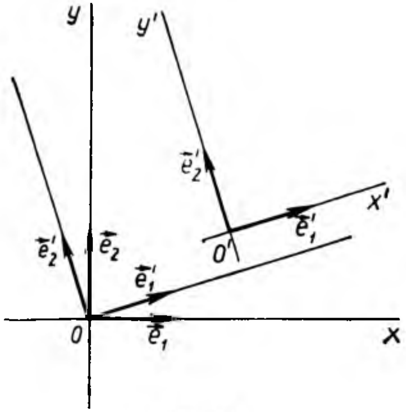


Рис. 26

следовательно, $|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$; аналогично имеем:

$$\overrightarrow{OM_1}\,\overrightarrow{OM_2} = x_1x_2 + y_1y_2;$$
$$(\vec{e}_1^{\,2} = \vec{e}_2^{\,2} = 1,\ \vec{e}_1\vec{e}_2 = 0).$$

1. Преобразование прямоугольных декартовых координат

Предположим, что нам дана евклидова плоскость, и рассмотрим в ней две прямоугольные системы координат — старую (x, y) с началом в точке O и новую (x', y') с началом O'. Соответствующие единичные и ортогональные координатные векторы обозначим через $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$ (рис. 26).

Таким образом, каждая точка M евклидовой плоскости S_k имеет старые координаты (x, y) и новые (x', y'). Поставим перед собой задачу получения формул, связывающих координаты (x, y) и (x', y'). С этой целью разложим координатные векторы новой системы по координатным векторам $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ старой:

$$\vec{e}_1' = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2, \quad \vec{e}_2' = \gamma\vec{e}_1 + \delta\vec{e}_2.$$

Так как $(\vec{e}_1')^2 = (\vec{e}_2')^2 = 1$, то сумма квадратов коэффициентов разложения в каждой из этих формул равняется единице: $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $\gamma^2 + \delta^2 = 1$. Следовательно, можно положить

$$\alpha = \cos\varphi,\ \beta = \sin\varphi,$$
$$\gamma = \cos\Theta,\ \ \delta = \sin\Theta.$$

Учитывая далее условие ортогональности координатных векторов новой системы, мы получим: $\cos\varphi\cos\Theta + \sin\varphi\sin\Theta = 0$. Отсюда следует, что $\Theta = \varphi + \frac{\pi}{2}$ или $\Theta = \varphi + 3\frac{\pi}{2}$, т. е. соответственно $\cos\Theta = -\sin\varphi$ или $\cos\Theta = \sin\varphi$, и формулы преобразования координатных векторов приводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned}\vec{e}_1' &= \cos\varphi\vec{e}_1 + \sin\varphi\vec{e}_2,\\ \vec{e}_2' &= \mp\sin\varphi\vec{e}_1 \pm \cos\varphi\vec{e}_2.\end{aligned} \tag{5.1}$$

Очевидно, определитель матрицы преобразования с верхними знаками равняется единице, а с нижними — минус единице. Преобразования, отвечающие этим случаям, называются вращениями координатных векторов соответственно первого и второго рода.

Выпишем преобразование координат, соответствующее формулам (5.1) преобразования координатных векторов. Разлагая радиус-вектор $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ по старым и новым координатным векторам, получим:

$$x'\vec{e}_1' + y'\vec{e}_2' + a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2, \tag{5.2}$$

где a_1, a_2 — координаты нового начала в старой системе координат. Из этого равенства и формул (5.1) мы будем иметь соответственно в случае верхних знаков:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi + a_1, \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi + a_2, \end{aligned} \tag{5.3}$$

и в случае нижних знаков

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi + y'\sin\varphi + a_1, \\ y &= x'\sin\varphi - y'\cos\varphi + a_2. \end{aligned} \tag{5.4}$$

2. Изометрические преобразования плоскости

Преобразование точек плоскости, сохраняющее расстояние между любыми двумя точками, называется изометрическим преобразованием или, короче, изометрией. Так как расстояние между двумя точками A и B равно длине вектора $\overrightarrow{AB}$, то изометрия сохраняет скалярные квадраты векторов. Другими словами, если точки A и B при изометрии переходят соответственно в точки A' и B', то длины соответствующих векторов равны: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{A'B'}|$. Покажем теперь, что отсюда следует инвариантность при изометрии скалярных произведений векторов. Действительно, предположим, что векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ при данной изометрии переходят в векторы соответственно $\vec{x}'$, $\vec{y}'$. Так как длины векторов инвариантны и вектор $\vec{x} + \vec{y}$ переходит в вектор $\vec{x}' + \vec{y}'$, то $\vec{x}'^2 + 2\vec{x}'\vec{y}' + \vec{y}'^2 = \vec{x}^2 + 2\vec{x}\vec{y} + \vec{y}^2$. Но $\vec{x}'^2 = \vec{x}^2$, $\vec{y}'^2 = \vec{y}^2$; следовательно, $\vec{x}'\vec{y}' = \vec{x}\vec{y}$, т. е. скалярные произведения векторов инвариантны при изометриях (точнее, при преобразованиях векторов, порождаемых изометриями).

3. Движения евклидовой плоскости

Предположим, что в евклидовой плоскости E_2 выбраны некоторая старая и новая прямоугольные системы координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ и $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ с одним и тем же масштабом. Всякое отображение плоскости E_2 в себя, сопоставляющее каждой точке M (x_1, x_2) точку M' (x_1, x_2), имеющую во второй системе координат $Oe_1'e_2'$ те же самые координаты, которые точка M имела в первой системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, называется движением плоскости E_2.

Соответствующие при движениях фигуры называются *конгруэнтными*. Убедимся теперь, что движение является изометрическим преобразованием. По условию данное движение точки $M(x_1, x_2)$ и $N(y_1, y_2)$ переводит соответственно в точки $M'(x_1, x_2)$ и $N'(y_1, y_2)$ с теми же координатами относительно некоторой новой системы координат. Эта новая система координат, как и исходная, прямоугольная и имеет тот же масштаб. Следовательно, расстояния MN и $M'N'$ выражаются в указанных системах координат одной и той же формулой $\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$, и данное движение является изометрией.

Обратно, можно доказать, что всякая изометрия f является движением. Действительно, если данная изометрия начало O и координатные векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ прямоугольной системы координат (x_1, x_2) переводит соответственно в O' и $\vec{e}\,'_1$, $\vec{e}\,'_2$, то по доказанному выше векторы $\vec{e}\,'_1$, $\vec{e}\,'_2$ также будут единичными и ортогональными. Умножая скалярно обе части равенства $\overrightarrow{OM} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$ на $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, мы получим следующие выражения координат x_1, x_2 через скалярные произведения:

$$x_1 = \overrightarrow{OM}\vec{e}_1, \quad x_2 = \overrightarrow{OM}\vec{e}_2. \tag{5.5}$$

Ясно, что координаты x'_1, x'_2 точки M', соответствующей точке M по данной изометрии, определяются в системе $O'\vec{e}\,'_1\vec{e}\,'_2$ аналогичными равенствами, т. е.

$$x'_1 = \overrightarrow{O'M'}\,\vec{e}\,'_1, \quad x'_2 = \overrightarrow{O'M'}\,\vec{e}\,'_2. \tag{5.6}$$

Но правые части формул (5.5), (5.6), определяющих x_1, x'_1 (а также x_2, x'_2), равны, так как перемножаются соответствующие по изометрии векторы. Поэтому левые части формул также равны: $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2$ и данная изометрия f является движением.

4. Свойства движений плоскости

Чтобы найти формулы, связывающие координаты x_1, x_2 точки M с координатами x'_1, x'_2 соответствующей при движении f точки M', разложим вектор $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M'}$ по векторам $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}\,'_1$, $\vec{e}\,'_2$:

$$x'_1\vec{e}_1 + x'_2\vec{e}_2 = x_1\vec{e}\,'_1 + x_2\vec{e}\,'_2 + a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2. \tag{5.7}$$

Это равенство лишь обозначениями отличается от (5.2). Если в (5.2) заменить x_i на x'_i и, наоборот, x'_i на x_i, то получим (5.7). Применяя это правило к (5.3) и (5.4), мы получим формулы движений соответственно первого рода:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi + a_1, \\ x_2' &= x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi + a_2 \end{aligned} \tag{5.8}$$

и второго рода:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi + a_1, \\ x_2' &= x_1 \sin\varphi - x_2 \cos\varphi + a_2. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Отсюда следует, что движения первого рода (собственные движения), очевидно, можно осуществить, переводя плоскость из начального положения в конечное непрерывным образом.

Движение же второго рода (несобственные движения) можно получить, комбинируя движение первого рода с симметриями относительно какой-нибудь прямой. Легко убедиться, что совокупность всех движений составляет трехпараметрическую группу. В качестве параметров группы движений можно принять, например, координаты точки (a_1, a_2), в которую переходят начало координат и угол поворота φ.

Собственные движения представляются в виде произведения вращения вокруг начала на угол φ и параллельного переноса на вектор $\{a_1, a_2\}$: несобственные же движения можно представить в виде произведения симметрии относительно, например, оси Ox_1 и некоторого собственного движения (5.8).

Эти свойства движений читателю известны из курса геометрии [1], но теперь они следуют из перечисленных выше аксиом школьного курса геометрии.

Докажем теперь, что движение может быть представлено либо как параллельный перенос, либо как вращение вокруг некоторой точки. Для этого рассмотрим неподвижные точки данного движения. Ясно, что координаты таких точек определяются системой уравнений, получаемой из формул (5.8) при $x_1' = x_1$, $x_2' = x_2$:

$$\begin{aligned} x_1 (1 - \cos\varphi) + x_2 \sin\varphi &= a_1, \\ -x_1 \sin\varphi + x_2 (1 - \cos\varphi) &= a_2. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Если определитель этой системы $\Delta = 2(1 - \cos\varphi)$ не равняется нулю, то система (5.10) имеет единственное решение (x_i^0) и данное движение есть вращение на угол φ вокруг этой точки.

Действительно, так как точка $M_0(x_i^0)$ неподвижна при движении (5.8), то ее координаты удовлетворяют системе уравнений (5.10), т. е.

$$\begin{aligned} x_1^0 (1 - \cos\varphi) + x_2^0 \sin\varphi &= a_1, \\ -x_1^0 \sin\varphi + x_2^0 (1 - \cos\varphi) &= a_2. \end{aligned}$$

Вставляя найденные a_1, a_2 в уравнения (5.8), мы получим формулы:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi + x_1^0 - x_1^0 \cos\varphi + x_2^0 \sin\varphi, \\ x_2' &= x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi + x_2^0 - x_1^0 \sin\varphi - x_2^0 \cos\varphi, \end{aligned}$$

определяющие вращение плоскости на угол φ вокруг точки (x_1^0, x_2^0).

Если же определитель системы равняется нулю, то получим: $\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = 0$. Формулы (5.8) в этом случае приводятся к виду: $x_1' = x_1 + a_1$, $x_2' = x_2 + a_2$, т. е. данное собственное движение является параллельным переносом на вектор $\{a_1, a_2\}$.

Предположим теперь, что нам дано несобственное движение (5.9). Если точка (x_1, x_2) неподвижна при данном несобственном движении, то ее координаты удовлетворяют системе уравнений, получаемой из (5.9) при $x_1 = x_1'$, $x_2 = x_2'$:

$$\begin{aligned} x_1(1-\cos\varphi) - x_2\sin\varphi &= a_1, \\ -x_1\sin\varphi + x_2(1+\cos\varphi) &= a_2. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Определитель системы (5.11) равен тождественно нулю. Но в этом случае не все его элементы равны нулю: очевидно, элементы главной диагонали одновременно в нуль не обращаются. Система уравнений (5.11) может быть совместной или противоречивой.

В случае совместности уравнения системы (5.11) пропорциональны и координаты неподвижных точек удовлетворяют по существу одному уравнению. Совокупность неподвижных точек составляет целую прямую, и данное движение есть отражение относительно этой прямой. Действительно, принимая прямую неподвижных точек за ось Ox_1 и какую-нибудь прямую, ей перпендикулярную за ось Ox_2, мы убедимся, что данное движение в новой системе координат будет вида (5.9). С другой стороны, из условия инвариантности начала координат следует, что $a_1 = a_2 = 0$. Учитывая далее условие инвариантности точек оси Ox_1, получим: $\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = 0$. Следовательно, данное движение необходимо является симметрией, и в новой системе координат оно определяется формулами вида $S: x_1' = x_1$, $x_2' = -x_2$. В случае несовместности системы (5.11) движение сводится к отражению от некоторой прямой и последующему вдоль нее переносу.

В самом деле, нетрудно убедиться, что несобственное движение (5.9) можно записать в виде произведения симметрии относительно оси Ox_1 и собственного движения (5.8). Последнее в свою очередь разлагается в произведение вращения V вокруг начала координат на угол φ и переноса на вектор $\{a_1, a_2\}$. Но вращение на угол φ вокруг начала можно представить снова в виде произведения двух симметрий относительно каких угодно двух прямых, пересекающихся в начале координат под углом $\varphi/2$. Принимая в качестве первой из этих прямых ось Ox_1, мы получим: $VS = S_1SS = S_1$, так как квадрат симметрии S равен тождественному преобразованию. Симметрия же S_1 будет симметрией относительно прямой, проходящей через начало координат и составляющей с осью Ox_1 угол $\varphi/2$. Но эта симметрия с наложением последующего переноса на вектор $\{a_1, a_2\}$, как известно, представима в виде скользящей симметрии, т. е. симметрии относительно некоторой параллельной прямой и последующего переноса в направлении этой прямой.

Итак, любое движение плоскости, отличное от тождественного, приводится к одному из последующих четырех видов: 1) повороту вокруг точки; 2) переносу; 3) симметрии относительно прямой; 4) скользящей симметрии.

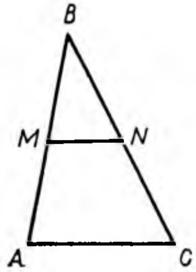


Рис. 27

5. О других теоремах евклидовой геометрии

а) Предположим, что нам дан треугольник ABC (рис. 27). Пусть далее точки M, N являются серединами сторон AB и BC. Так как $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, то средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине.

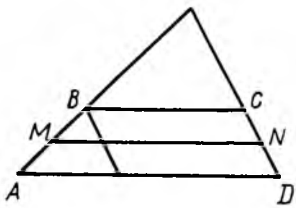


Рис. 28

б) Рассмотрим трапецию $ABCD$ (рис. 28). Так как векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ пропорциональны и $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}+(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC})/2=(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD})/2$, то средняя линия трапеции параллельна основаниям. Из полученной формулы следует также, что средняя линия трапеции равняется полусумме оснований.

в) Предположим, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом. Очевидно, для его диагоналей справедливы равенства:

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}, \qquad (*)$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}, \qquad (**)$$

из которых легко определяются радиус-векторы середин O_1, O_2 диагоналей BD и AC. В самом деле, $\overrightarrow{O_1A_1}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=$ $=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$, $\overrightarrow{AO_2}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$.

Таким образом, $\overrightarrow{AO_1}=\overrightarrow{AO_2}$ и точки O_1, O_2 совпадают. Следовательно, диагонали параллелограмма взаимно делятся пополам.

Нетрудно убедиться, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон. Действительно, возводя оба равенства (*), (**) скалярно в квадрат и складывая их почленно, получим ($\overrightarrow{AB}=\vec{q}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{p}$):

$$\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2=(\vec{p}+\vec{q})^2+(\vec{p}-\vec{q})^2=2\vec{p}^2+2\vec{q}^2.$$

Пусть четырехугольник $ABCD$ является ромбом. Перемножая

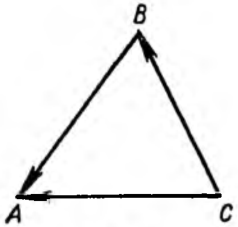


Рис. 29

равенства (*), (**) почленно скалярным образом, получим:

$$\vec{AC}\,\vec{BD} = (\vec{p}+\vec{q})(\vec{p}-\vec{q}) = \vec{p}^2 - \vec{q}^2 = 0.$$

Следовательно, диагонали ромба AC и BD взаимно перпендикулярны.

6. Теоремы косинусов и синусов

В заключение докажем теоремы косинусов и синусов. Предположим, что нам дан треугольник с вершинами A, B, C и противолежащими сторонами a, b, c (рис. 29). Так как $\vec{AB} = \vec{AC} - \vec{CB}$, где $\vec{AB} = \vec{c}$, $\vec{CB} = \vec{a}$, $\vec{AC} = \vec{b}$, то

$$\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}. \tag{5.12'}$$

Возводя обе части равенства почленно в квадрат, получим: $\vec{c}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}\,\vec{b}$. Но это соотношение можно переписать в виде

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}. \tag{5.12}$$

Формула (5.12) выражает теорему косинусов: квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

Заменяя в этой формуле обозначения сторон a, b, c и углов A, B, C в круговом порядке, мы получим еще две аналогичные формулы. Если угол C прямой, то из (5.12) получаем равенство

$$c^2 = a^2 + b^2, \tag{5.13}$$

выражающее теорему Пифагора.

Перейдем к выводу теоремы синусов. Умножая (5.12') почленно на $\vec{a} + \vec{b}$, получим:

$$\vec{c}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2. \tag{5.14}$$

Очевидно, это соотношение можно переписать так:

$$c(a\cos\widehat{B} - b\cos\widehat{A}) = a^2 - b^2. \tag{5.15}$$

Умножая (5.12') скалярно на $\vec{c}$, мы выразим сторону c в виде

$$c = a\cos\widehat{B} + b\cos\widehat{A}. \tag{5.15'}$$

Учитывая далее (5.15) и (5.15'), получим: $a^2\cos^2\widehat{B} - b^2\cos^2\widehat{A} = a^2 - b^2$. Следовательно, $b^2\sin^2\widehat{A} = a^2\sin^2\widehat{B}$. Отсюда заключаем, что $b\sin\widehat{A} = a\sin\widehat{B}$. Заменяя в этой формуле b и $\widehat{B}$ на c и $\widehat{C}$, получим: $c\sin\widehat{A} = a\sin\widehat{C}$. Ясно, что последние две формулы можно переписать в виде

$$\frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c}. \tag{5.16}$$

Полученные соотношения (5.16) и выражают теорему синусов: синусы углов треугольника относятся как противолежащие им стороны.

Глава III
О СИСТЕМАХ АКСИОМ ВЕЙЛЯ И ГИЛЬБЕРТА

§ 1. АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА ПО ВЕЙЛЮ

1. Аксиомы Вейля

В последние 40—50 лет все большее предпочтение получает аксиоматика Вейля евклидовой геометрии, в которой неопределяемыми понятиями являются точки и векторы. Именно поэтому аксиоматика Вейля называется иногда точечно-векторной аксиоматикой.

Аксиоматика Вейля более простая, чем аксиоматика Гильберта, и, как убедимся далее, тесно связана с различными разделами современной математики.

Система аксиом Вейля описывает шесть основных (неопределяемых) понятий. Основные понятия — точки T и векторы V — называются основными образами. Понятия сложения векторов, умножения вектора на число, скалярного умножения векторов и откладывание вектора от точки называются *основными отношениями*. Аксиомы Вейля распределяются на пять групп, причем аксиомы первых трех и четырех групп составляют соответственно аксиоматику аффинного и евклидова векторного пространства.

Отметим также, что дополнительно к обычным формулировкам аксиом мы будем приводить их символические записи с применением символов $\forall x$, $\exists x$, $\rightarrow$, обозначающих соответственно «для всех x». «существует такое x, что» и «если..., то...».

I. Аксиомы сложения векторов

Первая группа аксиом описывает отображение $V \times V \rightarrow V$, называемое *операцией сложения векторов*. Эта операция позволяет любым двум векторам $\vec{x}$ и $\vec{y}$ отнести третий вектор — их сумму $\varphi_1(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} + \vec{y}$ — так, что выполняются следующие четыре аксиомы:

1. Сложение векторов коммутативно, т. е. для любых двух векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ справедливо равенство $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$.

В символической записи $\forall \vec{x}\,\vec{y}\,[\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}\,]$.

2. Сложение векторов ассоциативно, т. е. для любых трех векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ выполняется следующее равенство: $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$.

В символической записи $\forall \vec{x}\,\vec{y}\,\vec{z}\,[(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})]$.

3. Существует такой вектор $\vec{\theta}$, что для любого вектора $\vec{x}$ справедлива формула $\vec{x}+\vec{\theta}=\vec{x}$.

В символической записи $\forall \vec{x}\,\exists \vec{\theta}\,[\vec{x}+\vec{\theta}=\vec{x}]$.

4. Для любого вектора $\vec{x}$ существует такой вектор $\vec{x}'$, что $\vec{x}+\vec{x}'=\vec{\theta}$.

В символической записи $\forall \vec{x}\,\exists \vec{x}'\,[\vec{x}+\vec{x}'=\vec{\theta}]$.

Вектор $\vec{x}'$ называется *противоположным* вектору $\vec{x}$; вектор $\vec{\theta}$ называется *нулевым* вектором.

II. Аксиомы умножения вектора на число

Вторая группа аксиом описывает отображение $V \times \boldsymbol{R} \to V$, называемое *операцией* φ_2 *умножения вектора на число* ($\boldsymbol{R}$ — поле вещественных чисел). Каждому вектору $\vec{x}$ и $\lambda \in \boldsymbol{R}$ однозначно сопоставляется вектор $\varphi_2(\lambda, \vec{x}) = \lambda\vec{x}$, называемый *произведением вектора* $\vec{x}$ *на число* λ. Перечислим аксиомы этой группы:

1. Операция умножения φ_2 дистрибутивна относительно сложения векторов, т. е. для любых векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и любого вещественного числа λ справедливо равенство $\lambda(\vec{x}+\vec{y})=\lambda\vec{x}+\lambda\vec{y}$.

В символической записи $(\forall \vec{x}\,\vec{y}\,\lambda)\,[\lambda(\vec{x}+\vec{y})=\lambda\vec{x}+\lambda\vec{y}]$.

2. Операция умножения φ_2 дистрибутивна относительно сложения чисел, т. е. для любого вектора $\vec{x}$ и любых вещественных чисел λ, μ выполняется следующее равенство: $(\lambda+\mu)\vec{x}=\lambda\vec{x}+\mu\vec{x}$.

В символической записи $(\forall \lambda\mu\vec{x})\,[(\lambda+\mu)\vec{x}=\lambda\vec{x}+\mu\vec{x}]$.

3. Операция умножения вектора на число ассоциативна, т. е. для любого вектора $\vec{x}$ и любых чисел λ, μ выполняется формула $\lambda(\mu\vec{x})=(\lambda\mu)\vec{x}$.

В символической записи $(\forall \lambda\mu\vec{x})\,[\lambda(\mu\vec{x})=(\lambda\mu)\vec{x}]$.

4. Операция умножения вектора на единицу не меняет вектора: $1\cdot\vec{x}=\vec{x}$.

В символической записи $\forall \vec{x}\,[1\cdot\vec{x}=\vec{x}]$.

Аксиомы I—II позволяют определить понятие векторного пространства. *Векторным пространством над полем* $\boldsymbol{R}$ *вещественных чисел называется структура* $V(\boldsymbol{R})=(V, \varphi_1, \varphi_2)$ с базисным множеством V, элементы которого именуются векторами, и операциями $\varphi_1(\vec{x}, \vec{y})=\vec{x}+\vec{y}$ сложения векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\varphi_2(\lambda, \vec{x})=\lambda\vec{x}$ умножения вектора $\vec{x}$ на вещественное число λ, причем выполняются аксиомы I—II.

III. Аксиомы размерности

Прежде чем перейти к формулировке аксиом III, напомним понятие линейно независимой (зависимой) системы векторов. Система векторов

$$\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \ldots\ ,\ \vec{x}_k \qquad (1.1)$$

называется линейно независимой (зависимой), если из равенства

$$\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{x}_k = \vec{\theta}$$

следует, что все $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \boldsymbol{R}$ равны нулю (не все $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ равны нулю). Для дальнейшего удобно также ввести понятие линейной комбинации векторов. Предположим, что нам дана система векторов (1.1); вектор

$$\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{x}_k, \qquad (1.2)$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — данные вещественные числа, называется линейной комбинацией векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$. Линейная комбинация вида $0\vec{x}_1 + 0\vec{x}_2 + \ldots + 0\vec{x}_k$, сводящаяся к нулевому вектору, называется *тривиальной*. Линейная комбинация (1.2) называется *нетривиальной*, если в ней хотя бы один из коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \ldots, \lambda_k$ не равняется нулю. Очевидно, система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ линейно зависима, если возможно такое разложение по ним нулевого вектора

$$\vec{\theta} = \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{x}_k, \qquad (1.3)$$

в котором не все коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ равны нулю. Таким образом, нулевой вектор в случае линейной зависимости векторов (1.1) представляется в виде нетривиальной комбинации (1.2). Если же из равенства (1.3) следует, что коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ необходимо равняются нулю, то векторы (1.1) будут линейно независимыми. Нулевой вектор в этом случае представляется лишь в виде тривиальной комбинации векторов (1.1).

Переходим к перечислению аксиом третьей группы — аксиом размерности:

1. Существуют три линейно независимых вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. В символической записи

$$(\exists \vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3)\ [\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 = \vec{\theta} \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0].$$

2. Любые четыре вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ линейно зависимы. В символической записи

$$(\forall \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\vec{d}\exists\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4)\ [\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c} + \lambda_4\vec{d} =$$
$$= \vec{\theta} \rightarrow \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 \neq 0].$$

Аксиомы I—III позволяют ввести понятие трехмерного векторного пространства. Векторное пространство $V(R)$ называется *трехмерным векторным пространством* $V_3(R)$ над полем $\boldsymbol{R}$, если выполняются аксиомы размерности III_{1-2}. Таким образом, структура пространства $V_3(R)$ определяется аксиомами I—III. Всякая система трех линейно независимых векторов пространства $V_3(R)$ называется *базисом* (например, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — базис).

IV. Аксиомы скалярного произведения векторов

Четвертая группа аксиом описывает отображение $V \times V \to \boldsymbol{R}$, называемое *операцией скалярного умножения векторов*. Эта операция позволяет любым двум векторам $\vec{x}$ и $\vec{y}$ однозначно отнести вещественное число $\varphi_3(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}\vec{y}$ (скалярное произведение данных векторов) так, что выполняются следующие аксиомы:

1. Скалярное произведение $\vec{x}\vec{y}$ коммутативно, т. е. для любых двух векторов $\vec{x}, \vec{y}$ выполняется равенство $\vec{x}\vec{y} = \vec{y}\vec{x}$.

В символической записи $\forall \vec{x}\,\vec{y}\,[\vec{x}\,\vec{y} = \vec{y}\vec{x}]$.

2. Скалярное произведение векторов линейно, т. е. для любых трех векторов $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ и вещественных чисел λ, μ выполняется равенство $(\vec{x}, \lambda\vec{y} + \mu\vec{z}) = \lambda\vec{x}\vec{y} + \mu\vec{x}\vec{z}$.

В символической записи $(\forall \vec{x}\,\vec{y}\,\vec{z}\lambda\mu)\,[\vec{x},\ \lambda\vec{y} + \mu\vec{z}] = \lambda\vec{x}\vec{y} + \mu\vec{x}\,\vec{z}$.

3. $\vec{x}\vec{x} > 0$, если $\vec{x} \neq \vec{\theta}$; $\vec{x}\vec{x} = 0$, если $\vec{x} = \vec{\theta}$.

В символической записи $\forall \vec{x}\,[\vec{x} \neq \vec{\theta} \to \vec{x}\vec{x} > 0]$, $[\vec{x} = \vec{\theta} \to \vec{x}\vec{x} = 0]$.

Аксиомы групп I—IV позволяют ввести понятие евклидова векторного пространства.

Множество элементов называется *евклидовым векторным пространством*, если его элементы (векторы) допускают операции сложения векторов, умножение вектора на вещественное число и скалярного умножения двух векторов так, что будут выполняться аксиомы групп I—IV.

Неотрицательная величина

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x}^2}$$

называется *длиной вектора* $\vec{x}$; *углом между векторами* $\vec{x}, \vec{y}$ называется число φ, удовлетворяющее уравнению

$$\cos\varphi = \frac{\vec{x}\,\vec{y}}{\sqrt{\vec{x}^2}\sqrt{\vec{y}^2}}.$$

В этом пространстве можно построить ортонормированный базис, т. е. базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, состоящий из попарно ортогональных и единичных векторов:

$$\vec{e}_1^{\,2} = \vec{e}_2^{\,2} = \vec{e}_3^{\,2} = 1,\ \vec{e}_1\vec{e}_2 = \vec{e}_1\vec{e}_3 = \vec{e}_2\vec{e}_3 = 0. \tag{1.4}$$

Скалярное произведение двух векторов $\vec{x}(x_i)$, $\vec{y}(y_i)$, а также скалярный квадрат вектора и косинус угла между двумя векторами в построенном базисе выражаются соответственно формулами:

$$\vec{x}\vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \tag{1.5}$$

$$\vec{x}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \tag{1.6}$$

$$\cos\varphi = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}. \tag{1.7}$$

V. Аксиомы откладывания векторов

Аксиомы V группы описывают операцию $\varphi_4 : T \times T \to V$ откладывания вектора от точки. Операция эта позволяет любым упорядоченным двум точкам A, B однозначно сопоставить некоторый вектор $\vec{x} \in V$. Вектор $\varphi_4(A, B)$ в дальнейшем обозначается символом $\overrightarrow{AB}$, причем точка A называется *начальной точкой вектора* $\overrightarrow{AB}$, а точка B — *конечной*. Вектор $\overrightarrow{AB}$ определяется аксиомами откладывания; перечислим эти аксиомы:

1. Для каждой фиксированной точки $A \in T$ отображение $T \to V$, определенное по закону $\varphi_4(A, B) = \overrightarrow{AB}$, является взаимно однозначным отображением множества T на множество векторов V.

2. Аксиома треугольника. Для любых трех точек A, B, C справедливо равенство $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Символические записи этих аксиом мы не приводим; читателю рекомендуется произвести их самостоятельно.

Аксиомами групп I—V исчерпывается аксиоматика Вейля; определяемая этими аксиомами теория может быть построена посредством строгих логических выводов.

Докажем в заключение пункта некоторые теоремы, непосредственно вытекающие из аксиом I—V.

Теорема 1. Каждый из векторов $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \overrightarrow{CC}, \ldots$ $(A, B, C \in T)$ является нулевым вектором пространства V.

Действительно, для любых точек $A, X \in T$ справедливо равенство $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AX}$. Так как $\overrightarrow{AX} \in V$ — любой вектор пространства согласно аксиоме V_1, то вектор $\overrightarrow{AA} = \vec{\theta}$. Аналогично заключаем: $\overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \vec{\theta}$.

Теорема 2. Отображение φ_4 такое, что $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

В самом деле, полагая в аксиоме треугольника V_2 $C = A$, получим: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{\theta}$, т. е. векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ противоположные.

Теорема 3. Если $\overrightarrow{AB} = \vec{\theta}$, то точки A, B совпадают. Согласно аксиоме треугольника V_2 имеем: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Далее по условию нам дано, что $\overrightarrow{AB} = \vec{\theta}$, следовательно, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Отсюда вытекает, что $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}$ и по первой аксиоме V_1 точки A, B совпадают.

2. Определение евклидова пространства по Вейлю

Аксиоматическая теория, определяемая аксиомами I—V Вейля, называется *евклидовой геометрией*. Другими словами, *евклидовой геометрией* называется совокупность теорем, которая получается из аксиом I—V посредством логических выводов. Дадим теперь определение евклидова пространства.

Совокупность T элементов (точек) называется *евклидовым пространством*, если эти точки вместе с совокупностью векторов V, определенной аксиомами I—IV, удовлетворяют требованиям аксиом V.

Таким образом, аксиомы I—V определяют род структур S_B, называемых трехмерными евклидовыми пространствами с двумя базисными множествами T, V и четырьмя отношениями, определяемыми соответственно операциями φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 так, что аксиомы Вейля I—V (аксиомы рода структур) выполняются. Евклидова геометрия является теорией указанного рода структур, и аксиомы I—V рода структур будут аксиомами евклидовой геометрии.

В символическом виде структуры этого рода записываются так:

$$S_B = (T, V, p_1, p_2, p_3, p_4), \tag{1.8}$$

где p_1, p_2, p_3, p_4 пробегают всевозможные типовые характеристики рода структур для данных базисных множеств.

В формуле (1.8) множество векторов V с отношениями p_1, p_2, p_3 в свою очередь определяется родом структур, называемых трехмерными евклидовыми векторными пространствами. Операция сложения векторов φ_1, умножения вектора на число φ_2, скалярное произведение векторов φ_3 и операция φ_4 откладывания векторов определяются аксиомами I—V Вейля.

Перечисленные операции φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 определяют соответствующие тернарные отношения p_1, p_2, p_3, p_4, т. е. подмножества

$$p_1 \subset V \times V \times V,\ p_2 \subset R \times V \times V,$$
$$p_3 \subset V \times V \times R,\ p_4 \subset T \times T \times V.$$

Обратно, отношения p_1, p_2, p_3, p_4 в свою очередь определяют бинарные операции соответственно φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, и математическую структуру (1.8) часто записывают в виде, содержащем операции (с. 12):

$$S_B = (T, V, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4). \tag{1.9}$$

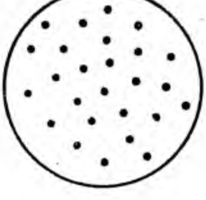


Рис. 30

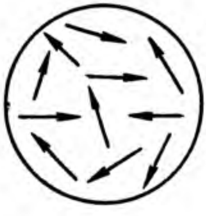


Рис. 31

В аксиоматике Вейля расстоянием $d\ (A,\ B)$ между двумя точками A, B называется длина вектора $\overrightarrow{AB}$: $d\ (A,\ B) = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$.

На рис. 30, 31 изображены в виде кругов объемы понятий точек и векторов евклидова пространства и соответственно евклидова векторного пространства.

3. Прямоугольная декартова система координат

В евклидовом пространстве прямоугольная декартова система координат вводится следующим образом. Рассмотрим базис $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, состоящий из единичных и взаимно ортогональных векторов, отложенных от некоторой точки O. Предположим далее, что M — произвольная точка евклидова пространства. Разлагая *радиус-вектор* $\overrightarrow{OM}$ этой точки по векторам базиса, получим:

$$\overrightarrow{OM} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3, \tag{1.10}$$

где x_1, x_2, x_3 — некоторые вещественные числа.

Очевидно, формулы (1.10) осуществляют взаимно однозначное соответствие между точками евклидова пространства и упорядоченными тройками вещественных чисел x_1, x_2, x_3.

Отображение упорядоченных троек вещественных чисел $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ на множество точек евклидова пространства, определенное по закону (1.10), называется *прямоугольной декартовой системой координат*; значения x_1, x_2, x_3, соответствующие точке M, — *декартовыми прямоугольными координатами этой точки*, а векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ — координатными векторами. Совокупность точки O и векторов базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ называется *ортонормированным репером* (в символической записи $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$).

Очевидно, если $(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $(b_1,\ b_2,\ b_3)$ будут прямоугольными декартовыми координатами точек A и B, т. е. если

$$\overrightarrow{OA} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3,$$
$$\overrightarrow{OB} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3,$$

то расстояние $d\ (AB)$ между этими точками, которое по определению равно длине вектора $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1)\,\vec{e}_1 + (b_2 - a_2)\,\vec{e}_2 +$

$+ (b_3 - a_3)\vec{e}_3$, вычисляется по формуле

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}. \qquad (1.11)$$

Если базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ не ортонормированный, то координаты радиуса вектора $\overrightarrow{OM}$ в (1.10) называются *декартовыми* (аффинными) координатами точки M. Система координат, определяемая в этом случае репером $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, называется также *декартовой* (аффинной) *системой координат*. Формула (1.11) в этой системе координат уже не определяет расстояния между точками A и B.

4. Определение аффинного пространства

Аксиомы I—III определяют трехмерное аффинное векторное пространство (с. 59 — 61), а аксиомы I—III, V — точечное аффинное пространство. Последнее определяется следующим образом.

Совокупность точек T называется *аффинным пространством*, если она вместе с векторами, определенными аксиомами I—III трехмерного векторного пространства V (пространство переносов), удовлетворяет аксиомам V.

Это точечное пространство называется трехмерным аффинным пространством A_3, если соответствующее векторное пространство трехмерно.

Таким образом, аксиомы I—III, V определяют род структур $A_3 = (T, V, p_1, p_2, p_4)$ на базисных множествах точек T и векторов V, называемых трехмерными аффинными пространствами. Отношения p_1, p_2, p_4, как и в евклидовом пространстве, определяются соответственно операциями $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4$ — сложения векторов, умножения вектора на $\lambda \in \boldsymbol{R}$ и откладывания вектора от точки. Аффинная геометрия является теорией указанного рода структур, а аксиомы I—III, V — аксиомами аффинной геометрии.

Обратим внимание читателя на то, что в аксиомах аффинной геометрии отсутствуют аксиомы IV, определяющие скалярное произведение векторов. Добавляя эти аксиомы к аксиомам аффинного пространства, получим аксиомы I—V Вейля евклидова пространства.

Совокупность точки O и приложенных к ней векторов базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ определяет аффинный репер (в символической записи $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$). Разложение радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ здесь также приводит нас к понятию аффинной системы координат.

Отображение совокупности упорядоченных троек вещественных чисел x_1, x_2, x_3 на точки аффинного пространства, определенное по закону:

$$\overrightarrow{OM} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3,$$

называется аффинной системой координат пространства A_3, координаты x_1, x_2, x_3 радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ — координатами точки M, а векторы базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ — координатными векторами.

Мы определили евклидово и аффинное пространства. Эти пространства лишь в первом приближении описывают свойства реального мира.

Более точно свойства физического пространства описываются римановой геометрией и ее обобщениями. Проводимые в настоящее время исследования космического пространства приведут математиков к дальнейшему изменению и обобщению наших геометрических представлений о свойствах физического пространства.

Вопросы и упражнения

1. а) Перечислите основные понятия аксиоматики Вейля евклидовой геометрии.

б) Определите тип структуры Вейля евклидова пространства.

2. Какие теоремы доказываются и какие понятия определяются в теории аксиом Вейля I—III?

3. а) Перечислите аксиомы IV группы — аксиомы скалярного произведения векторов.

б) Откуда следует, что если $\vec{x}\vec{x} > 0$, то $\vec{x} \neq \vec{\theta}$?

4. Из какой аксиомы группы IV следует, что если $\vec{x}\vec{x} = 0$, то $\vec{x} = \vec{\theta}$?

5. а) Приведите формулировку аксиом — аксиом откладывания векторов.

б) Можно ли утверждать, исходя из этих аксиом, что векторы являются направленными отрезками?

6. Верно ли, что множество векторов в структуре S_B является множеством классов эквивалентности упорядоченных пар точек?

7. Какой тип имеет структура евклидова векторного пространства?

8. Какие типы имеют структуры Вейля аффинного точечного пространства и аффинного векторного пространства?

§ 2. НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ АКСИОМ ВЕЙЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Перейдем теперь к доказательству непротиворечивости аксиом Вейля. С этой целью мы построим модель аксиом I—V, которую будем называть *арифметической*, так как векторы и точки этой модели являются наборами трех чисел. В результате будет установлена непротиворечивость системы аксиом Вейля трехмерного евклидова пространства при условии непротиворечивости теории вещественных чисел.

В арифметической интерпретации мы назовем *точкой* или *вектором* любой набор упорядоченных трех вещественных чисел x_1, x_2, x_3. Эти числа будем заключать в круглые или фигурные скобки

$$(x_1, x_2, x_3), \quad \{x_1, x_2, x_3\}$$

в зависимости от того, представляют они соответственно точку или вектор. Числа x_1, x_2, x_3 в дальнейшем называются *координатами точки* (соответственно вектора). Сложение векторов по определению будем осуществлять покоординатно, т. е.

$$\{x_1, x_2, x_3\} + \{y_1, y_2, y_3\} = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3\};$$

требования аксиом I_{1-4} удовлетворяются, в чем легко убедиться непосредственной проверкой.

Умножение вещественного числа λ на вектор $\vec{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ понимается в смысле обычного умножения числа λ на каждое из чисел x_1, x_2, x_3: $\lambda\vec{x} = \{\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3\}$. Так, определенная операция умножения удовлетворяет всем аксиомам II_{1-4}.

Аксиомы III_{1-2}, очевидно, также выполняются: векторы $\{1, 0, 0\}$, $\{0, 1, 0\}$, $\{0, 0, 1\}$ линейно независимы и образуют базис пространства, т. е. всякий вектор $\{x_1, x_2, x_3\}$ является линейной комбинацией этих векторов.

Теперь определим в нашей модели операцию скалярного произведения двух векторов. Пусть $\vec{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$, $\vec{y} = \{y_1, y_2, y_3\}$ — два произвольных вектора; *скалярным произведением векторов* $\vec{x}$, $\vec{y}$ называется величина $\vec{x}\vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Так определенная операция удовлетворяет требованиям аксиом IV_{1-3}.

Подробнее рассмотрим выполнимость аксиом V_{1-2} откладывания векторов. Мы докажем выполнимость в нашей интерпретации последовательно каждой аксиомы, входящей в группу V_{1-2}.

Обратимся к аксиоме V_1, которая утверждает для данной произвольной точки $A\ (a_1, a_2, a_3)$ и данного вектора $\vec{x}\ (x_1, x_2, x_3\}$ существование такой точки $B\ (b_1, b_2, b_3)$, что $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$. Аксиома эта выполняется. Действительно, искомая точка B определяется следующим упорядоченным набором чисел:

$$b_1 = a_1 + x_1,\ b_2 = a_2 + x_2,\ b_3 = a_3 + x_3.$$

Убедимся теперь в справедливости второй аксиомы V_2: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, имеющей место для любых трех точек A, B, C. Предположим, что эти точки суть соответственно (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3). Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \{b_1 - a_1,\ b_2 - a_2,\ b_3 - a_3\},\\ \overrightarrow{BC} &= \{c_1 - b_1,\ c_2 - b_2,\ c_3 - b_3\},\\ \overrightarrow{AC} &= \{c_1 - a_1,\ c_2 - a_2,\ c_3 - a_3\}.\end{aligned}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что вектор $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ определяется следующим набором чисел: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \{c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3\}$, т. е. вектор этот равен вектору $\overrightarrow{AC}$.

Таким образом, аксиома V_2 выполнена. Итак, все аксиомы I—V выполнены, и мы приходим к следующему важному выводу: система аксиом I—V Вейля евклидовой геометрии непротиворечива, если непротиворечива арифметика вещественных чисел.

Вопросы и упражнения

1. По какой схеме ведется доказательство непротиворечивости системы аксиом Вейля?

2. Как обосновать утверждение о том, что если система аксиом имеет модель, то она непротиворечива?

3. Как интерпретируются основные понятия вейлевской аксиоматики в арифметической модели?

4. Проверьте, что противоположный элемент $-(\vec{x}+\vec{y})$ к элементу $\vec{x}+\vec{y}$ равен $(-\vec{y})+(-\vec{x})$, т. е.

$$-(\vec{x}+\vec{y})=(-\vec{y})+(-\vec{x}).$$

5. Из каких аксиом следует, что

$$-(\vec{x}+\vec{y})=-1\cdot(\vec{x}+\vec{y})=(-\vec{x})+(-\vec{y})?$$

6. Опираясь на результаты предыдущих двух задач, докажите, что: а) аксиомы I_{1-4}, II_{1-4} зависимы; б) из аксиом I_{2-4}, II_{1-4} следует I_1 — свойство коммутативности сложения.

§ 3. КАТЕГОРИЧНОСТЬ АКСИОМАТИКИ ВЕЙЛЯ

Прежде чем переходить к доказательству категоричности аксиоматики Вейля евклидовой геометрии, мы установим категоричность аксиоматики I—III векторного пространства, I—IV евклидова векторного пространства.

а) С этой целью напомним сначала понятие изоморфности векторных пространств. Говорят, что *два векторных пространства L, L' изоморфны*, если можно установить взаимно однозначное соответствие между векторами этих пространств, сохраняющее операции сложения векторов и умножения векторов на число, т. е. если векторам $\vec{x}$, $\vec{y}$ первого пространства соответствуют векторы $\vec{x}'$, $\vec{y}'$ второго пространства, то вектору $\vec{x}+\vec{y}$ соответствует $\vec{x}'+\vec{y}'$ и вектору $\lambda\vec{x}$ соответствует вектор $\lambda\vec{x}'$.

Из этого определения следует, что изоморфные векторные пространства с логической точки зрения построены совершенно одинаково. Такие пространства отличаются лишь конкретным содержанием, которое вкладывается в основные понятия.

Нетрудно установить, что нулевой вектор $\vec{\theta}$ векторного пространства L при любом изоморфизме соответствует нулевому вектору $\vec{\theta}'$ векторного пространства L'. Действительно, правая и левая части равенства $\vec{x}+\vec{\theta}=\vec{x}$ при изоморфизме переходят в векторы второго пространства, соответственно в $\vec{x}'+\vec{\theta}'$ и $\vec{x}'$, также равные между собой: $\vec{x}'+\vec{\theta}'=\vec{x}'$. Прибавляя почленно к обеим частям этого равенства вектор, противоположный вектору $\vec{x}'$, мы убедимся, что $\vec{\theta}'$ является нулевым вектором второго пространства.

Из указанного свойства и определения изоморфизма L, L'

следует, что векторное равенство

$$c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \ldots + c_k\vec{x}_k = \vec{\theta},$$

где $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k \in L$, $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbf{R}$, переходит при изоморфном отображении в равенство $c_1\vec{x}'_1 + c_2\vec{x}'_2 + \ldots + c_k\vec{x}'_k = \vec{\theta}'$, связывающее с теми же коэффициентами соответствующие векторы во втором пространстве.

Отсюда следует, что любые две модели аксиом I—III изоморфны, т. е. аксиоматика I—III векторного пространства категорична.

б) Аксиоматика I—IV евклидова векторного пространства также категорична. Любые две модели геометрии трехмерного евклидова пространства изоморфны. Таким образом, если векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$ переходят при изоморфизме в $\vec{x}'$, $\vec{y}'$, то $\vec{x} + \vec{y}$, $\lambda\vec{x}$ переходят соответственно в $\vec{x}' + \vec{y}'$, $\lambda\vec{x}'$; кроме того, $\vec{x}\vec{y} = \vec{x}'\vec{y}'$.

в) Теперь установим категоричность системы аксиом Вейля евклидовой геометрии, т. е. докажем изоморфизм любых двух моделей аксиом I—V. Модели E_3 и E'_3 называются *изоморфными*, если можно установить взаимно однозначное соответствие $f: E_3 \to E'_3$, так, что удовлетворяются следующие два условия:

1) f индуцирует изоморфное соответствие между векторами моделей E_3 и E'_3;

2) Если точкам M, N модели E_3 соответствуют точки M', N' модели E'_3, то вектору $\overrightarrow{MN}$ соответствует вектор $\overrightarrow{M'N'}$.

Из этого определения следует, что модели евклидовой геометрии имеют одинаковую размерность, равную в нашем случае трем.

Теперь мы докажем, что любые два трехмерных евклидовых пространства E_3 и E'_3 изоморфны. Действительно, выберем в данных пространствах как-либо ортонормированные реперы соответственно $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ и $O'\vec{e}'_1\vec{e}'_2\vec{e}'_3$. Построим далее отображение точек E_3 на точки E'_3 по следующему закону. Каждой точке M с координатами (x_1, x_2, x_3) первого евклидова пространства условимся относить в качестве соответствующей точку M' второго пространства, имеющую относительно выбранного репера $O'\vec{e}'_1\vec{e}'_2\vec{e}'_3$ координаты x_1, x_2, x_3 точки M. Другими словами, соответствующие точки в выбранных системах координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ и $O'\vec{e}'_1\vec{e}'_2\vec{e}'_3$ данных пространств E_3 и E'_3 имеют одинаковые координаты. Очевидно, так построенное отображение взаимно однозначно и оно индуцирует изоморфное отображение векторов первого пространства на векторы второго пространства. Кроме того, если две точки M, N пространства E_3 переходят при отображении в точки M', N' пространства E'_3, то вектор $\overrightarrow{MN}$ переходит в вектор $\overrightarrow{M'N'}$.

Таким образом, построенное точечное отображение пространства E_3 на E'_3 является изоморфным, и вейлевская система аксиом I—V евклидовой геометрии категорична (т. е. полна в смысле изоморфизма моделей).

Вопросы и упражнения

1. Приведите примеры, когда часть аксиом некоторой полной (в смысле изоморфизма моделей) аксиоматики также удовлетворяет требованию полноты (в смысле изоморфизма моделей).

2. Может ли полная система аксиом при присоединении других аксиом быть неполной?

§ 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ В АКСИОМАТИКЕ ВЕЙЛЯ

Аксиоматика Вейля евклидовой геометрии, как показывают аксиомы I—V, в основном векторная. Лишь в последней группе аксиом V речь идет о свойствах точек и векторов. Возникает вопрос: как же при таком способе построения геометрии определяются важнейшие геометрические понятия: прямая, отношение лежать между, отрезок, луч, плоскость, угол, треугольник, конгруэнтность фигур и др.? Определению этих и других понятий, необходимых нам в дальнейшем, в основном и посвящается настоящий параграф.

1. Прямая. Пусть нам даны две различные точки A и B. Множество точек M, таких, что вектор $\overrightarrow{AM}$ пропорционален вектору $\overrightarrow{AB}$, т. е. $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$, где t — вещественное число, называется прямой. В символической записи

$$(AB) = \{M \mid \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB},\ t \in \boldsymbol{R}\} \quad (\overrightarrow{AB} = \vec{p}). \qquad (4.1)$$

Из (4.1) следует, что точка M тогда и только тогда принадлежит прямой AB, когда найдется вещественное число t, такое, что $\overrightarrow{AM} = t\vec{p}$. Отсюда следует, в частности, что точки A и B принадлежат прямой AB.

Множитель пропорциональности t фиксирует текущую точку M на прямой, причем, очевидно, различным точкам соответствуют различные значения t и каждому значению t отвечает вполне определенная точка прямой. Таким образом, между точками прямой и вещественными числами t устанавливается по указанному в определении (4.1) закону взаимно однозначное соответствие. Множитель пропорциональности t называется аффинным параметром (координатой) на прямой, а вектор $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$ — направляющим (базисным) ее вектором.

Предположим теперь, что $M_1\ (t_1)$, $M_2\ (t_2)$, $M_3\ (t_3)$ — три различные точки прямой (4.1). Мы будем говорить, что точка M_2

лежит между точками M_1, M_3 тогда и только тогда, когда все эти три точки различны и параметр t_2 принадлежит интервалу (t_1, t_3).

Это понятие «лежать между» позволяет ввести понятие отрезка: совокупность двух точек M_1, M_3 и всех тех точек M_2, которые лежат между ними, называется отрезком. Точки M_2 называются точками отрезка, а точки M_1, M_3 — концами отрезка.

Из (4.1) следует также, что значению $t = 0$ отвечает точка A, $t = 1$ — точка B. Отрезком AB является множество точек, значение параметра t которых принадлежит сегменту $[0,1]$. Точки A, B являются концами отрезка AB. Если в уравнении (4.1) параметр t принимает лишь значения $t \geqslant 0$, то полученное множество точек (соответствующее в (4.1) значениям параметра $t > 0$) называется лучом с началом A. Очевидно, этому лучу принадлежит точка B. Условимся обозначать луч с началом A и какой-нибудь точкой B, ему принадлежащей, символом $[AB)$. На прямой (4.1) существуют два луча с началом A: луч $[AB)$ и дополнительный луч $[AB')$, где B' — точка (4.1) со значением $t < 0$.

Легко далее видеть, что прямая (4.1) определяется однозначно любыми двумя различными ее точками. В самом деле, возьмем из множества точек прямой a любые две точки A_1 (t_1), B_1 (t_2) и построим «проходящую» через них прямую a_1:

$$\overrightarrow{A_1M_1} = s\vec{p}_1, \tag{4.2}$$

где $\vec{p}_1 = \overrightarrow{A_1B_1}$, s — параметр. Докажем, что точечные множества a, a_1 совпадают. Для этого сначала установим, что всякая точка M (t) прямой a принадлежит прямой a_1. Действительно, из (4.1) следует, что $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1M} = t\vec{p}$. Так как в этом равенстве $\overrightarrow{AA_1} = t_1\vec{p}$, то $\overrightarrow{A_1M} = (t - t_1)\vec{p} = (t - t_1) \cdot \vec{p}_1/\sigma$ $(\vec{p}_1 = \sigma\vec{p})$, т. е. произвольная точка M (t) прямой a совпадает с точкой M_1 (s) прямой a_1, для которой параметр

$$s = (t - t_1)/\sigma. \tag{4.3'}$$

Обратно, возьмем произвольную точку M_1 (s) на прямой a_1. Так как $\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AM_1} = s\vec{p}_1$, $\overrightarrow{A_1A} = -t_1\vec{p}$, то получим: $\overrightarrow{AM_1} = (s\sigma + t_1)\vec{p}$, откуда следует, что произвольная точка M_1 (s) прямой a_1 совпадает с точкой M (t) прямой a, для которой параметр

$$t = s\sigma + t_1. \tag{4.3}$$

Зависимость параметров t, s определяется той же формулой (4.3); следовательно, прямые a, a_1 совпадают.

Формула (4.3) выражает преобразование аффинной координаты t при переходе от системы координат, определенной начальной и единичной точками A, B, к системе координат, в которой начальной и единичной точками являются A_1 и B_1.

Обозначая радиус-векторы $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OA}$ через $\vec{x}$, $\vec{a}$ соответственно, мы убедимся, что уравнение прямой (4.1) приводится к виду:

$$\vec{x} = \vec{a} + t\vec{p}, \tag{4.4}$$

где параметр t определен с точностью до линейного невырожденного преобразования.

2. **Плоскость.** Пусть теперь нам даны три различные точки A, B, C, не принадлежащие одной прямой.

Множество точек M, таких, что вектор $\overrightarrow{AM}$ является линейной комбинацией векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, т. е.

$$\overrightarrow{AM} = u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC}, \tag{4.5}$$

где $u, v \in \boldsymbol{R}$, называется *плоскостью* α. В символической записи

$$\alpha = \{M \mid \overrightarrow{AM} = u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC},\quad u,v \in \boldsymbol{R}\}. \tag{4.5'}$$

Из этого определения следует, что точка M тогда и только тогда принадлежит плоскости α, когда найдется пара вещественных чисел u, v, таких, что (4.5) удовлетворяется. Очевидно также, что точки A, B и C принадлежат плоскости α.

Упорядоченные пары (u, v) вещественных чисел в (4.5) фиксируют текущую точку M на плоскости; очевидно, различным парам (u, v) отвечают различные точки и каждой упорядоченной паре (u, v) отвечает по (4.5) вполне определенная точка M на плоскости.

Таким образом, между точками плоскости α и упорядоченными парами вещественных чисел устанавливается по указанному закону (4.5) взаимно однозначное соответствие. Числа u, v называются аффинными параметрами (координатами) точек плоскости, а векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{AC} = \vec{e}_2$ — базисными (направляющими) ее векторами. Из (4.5) следует, что значения параметров u, v для точек A, B, C будут соответственно $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$. Эти точки определяют в плоскости α как в самостоятельном пространстве аффинную систему координат с началом в точке A и координатными (базисными) векторами:

$$\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB},\ \vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}. \tag{4.6}$$

После сделанных замечаний нетрудно установить аналогично тому, как это делалось в случае прямой, что плоскость (4.5) однозначно определяется любыми ее точками A_1, B_1, C_1, не принадлежащими прямой. Множество точек M, определенное по закону:

$$\{M \mid \overrightarrow{A_1M} = u_1\overrightarrow{A_1B_1} + v_1\overrightarrow{A_1C_1}\}, \tag{4.7}$$

совпадает с плоскостью α.

Нетрудно показать, что формулы преобразования u, v и u_1, v_1 будут линейными и невырожденными. Они являются формулами преобразования аффинных координат (параметров) при переходе от системы координат $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ к системе $(A_1, \overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{B_1C_1})$.

3. Прямая и плоскость. Две прямые a, b называются параллельными, если у них направляющие векторы пропорциональны. Отношение параллельности обозначается посредством знака $\|$. Из определения следует, что отношение параллельности прямых является отношением эквивалентности, т. е. оно рефлексивно ($a \| a$), симметрично (если $a \| b$, то $b \| a$) и транзитивно (если $a \| b$, $b \| c$, то $a \| c$).

З а м е ч а н и е. Параллельные прямые либо не имеют общих точек, либо совпадают. В самом деле, если $a \| b$ и $\vec{p}_a$, $\vec{p}_b$ — направляющие их векторы, то $\vec{p}_a = \lambda \vec{p}_b$. Таким образом, если прямые a, b имеют общую точку A, то прямая a, определенная точкой A и $\vec{p}_a = \lambda \vec{p}_b$, совпадает с прямой b, определенной той же точкой A и $\vec{p}_b$.

Далее, через каждую точку A пространства проходит одна и только одна прямая, параллельная данной прямой a.

В самом деле, прямая $a_1 = \{M \mid \overrightarrow{AM} = t\vec{p}_1, t \in \boldsymbol{R}\}$ проходит через точку A и параллельна прямой a. Единственность прямой a_1 непосредственно следует из приведенных выше замечаний.

Переходим к определению некоторых других понятий.

Две прямые называются перпендикулярными, если направляющие их векторы ортогональны.

Вектор называется перпендикулярным плоскости α, если он *ортогонален любому вектору*, начальная и конечная точки которого принадлежат плоскости. Опираясь на это понятие, дадим определение перпендикулярности прямой и плоскости.

Прямая a называется перпендикулярной плоскости α ($a \perp \alpha$), если направляющий вектор прямой ортогонален любому вектору плоскости. Из этого определения следует, что если a перпендикулярна α, то она перпендикулярна любой прямой, принадлежащей плоскости.

Очевидно также, что если прямая $a \perp \alpha$, то прямая a_1, параллельная a, также перпендикулярна плоскости α.

Приведем теперь определение параллельности плоскостей, а также параллельности прямой и плоскости. *Две плоскости называются параллельными*, если они либо не имеют общих точек, либо совпадают.

Прямая и плоскость называются параллельными, если направляющий вектор прямой является линейной комбинацией направляющих векторов плоскости.

Если в уравнении (4.5) плоскости параметр u будет принимать неотрицательные значения $u \geqslant 0$, а параметр v — произвольные вещественные значения, то получим *полуплоскость* с границей (AC) и обозначим $(AC, B) = \{M \mid \overrightarrow{AM} = u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC},\ u \geqslant 0\}$. Пересечение полуплоскостей (AC, B), (AB, C) называется *углом* (выпуклым) (в символической записи $\angle BAC$).

Нетрудно также ввести понятия параллелограмма и прямоугольника. В самом деле, пусть

$$\vec{x} = \vec{a} + u\vec{p}_1 + v\vec{p}_2 \tag{4.8}$$

является уравнением плоскости. Множество точек, которое получается из уравнения (4.8) при произвольном изменении каждого из параметров u, v в сегменте $[0, 1]$, по определению называется *параллелограммом*; точки $A_0(\vec{a})$, $A_i(\vec{a}+\vec{p}_i)$ $(i = 1, 2)$, $A_{12}(\vec{a} + \vec{p}_1 + \vec{p}_2)$ — его вершинами.

Параллелограмм, у которого направляющие векторы $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ перпендикулярны, называется *прямоугольником*. На понятиях квадрата, ромба и трапеции мы не будем останавливаться, так как они теперь могут быть определены обычным образом.

Приведем обобщение некоторых из этих понятий на трехмерное пространство. Если в уравнении

$$\vec{x} = \vec{a} + u_1\vec{p}_1 + u_2\vec{p}_2 + u_3\vec{p}_3, \tag{4.9}$$

определяющем трехмерное евклидово пространство, параметр u_1 будет принимать неотрицательное значение $u_1 \geqslant 0$ и параметры u_2, u_3 будут произвольными вещественными числами, то получим множество точек, называемое *полупространством* с границей

$$\vec{x} = \vec{a} + u_2\vec{p}_2 + u_3\vec{p}_3. \tag{4.10}$$

Множество точек, определяемое уравнением (4.9) при произвольном изменении каждого из параметров u_1, u_2, u_3 в сегменте $[0, 1]$, называется *параллелепипедом*; точки

$$A_0(\vec{a}),\ A_i(\vec{a} + \vec{p}_i),\ A_{ij}(\vec{a} + \vec{p}_i + \vec{p}_j),\ A_{123}(\vec{a} + \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3)$$

называются его вершинами; если параметры u_1, u_2 принимают произвольные значения из сегмента $[0, 1]$, а параметр $u_3 = 0$ или $u_3 = 1$, то получим противоположные грани $A_0A_1A_2A_3$, $A_3A_{12}A_{23}A_{123}$. Если поменять роли параметров u_1 и u_3 или u_2 и u_3, то получим другие пары противоположных граней:

$$A_0A_2A_3A_{23},\ A_1A_{12}A_{13}A_{123};\ A_0A_1A_3A_{13},\ A_2A_{12}A_{23}A_{123}.$$

Параллелепипед, у которого направляющие векторы A_0A_i $(i = 1, 2, 3)$ попарно перпендикулярны, называется *прямоугольным параллелепипедом*. Длины ребер параллелепипеда, выходящие из одной вершины, называются его *измерениями*.

4. Многоугольная фигура и многогранное тело. Рассмотрим в пространстве упорядоченную совокупность точек A_1, A_2, ..., ..., A_{n-1}, A_n.

Совокупность отрезков

$$A_1A_2,\ A_2A_3,\ \ldots,\ A_{n-1}A_n \tag{*}$$

называется ломаной. Точки A_1, A_2, ..., A_n называются вершинами ломаной, а отрезки (*) — ее звеньями.

Если точки A_1 и A_n совпадают, то ломаная называется замкнутой. Ломаная называется плоской, если все ее вершины лежат в одной плоскости. Плоская замкнутая ломаная называется *простой*, если несоседние ее звенья не имеют общих точек. Можно показать, что простая замкнутая ломаная l разбивает все точки плоскости, которой она принадлежит, на две области: внутреннюю, не содержащую целиком ни одной прямой, и внешнюю, содержащую в себе целиком некоторые прямые плоскости (теорема Жордана). Объединение ломаной l и внутренней области называется *многоугольником*; ломаная l называется *границей многоугольника*, а внутренняя область — *внутренней областью многоугольника*. Звенья границы многоугольника называются также его *сторонами*, а вершины ломаной — *вершинами многоугольника*.

При $n = 3$, $n = 4$ мы получаем многоугольники, называемые соответственно треугольниками и четырехугольниками.

Очевидно, многоугольник допускает разложение на конечное число треугольников, не имеющих общих внутренних точек. Но таким свойством обладают не только многоугольники. Введем следующее определение. Множество точек плоскости, которое может быть разложено на конечное число треугольников без общих внутренних точек, называется многоугольной фигурой. Это понятие будет иметь большое значение в четвертой главе при построении теории площадей фигур.

Заметим, что радиус-векторы внутренних точек треугольника $A_1A_2A_3$ и его сторон характеризуются через радиус-векторы вершин A_i $(\vec{a}_i)$ треугольника равенствами:

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 \quad (\lambda_i \geqslant 0, \ \ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0).$$

Обобщая это свойство, мы получим в трехмерном пространстве понятие тетраэдра. Предположим, что нам даны четыре точки A_i $(\vec{a}_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, не принадлежащие одной плоскости. Тетраэдром называется множество точек, определенных радиус-векторами: $\vec{x} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 + \lambda_4\vec{a}_4$ $(\lambda_i \geqslant 0, \ \sum\limits_1^4 \lambda_i = 1)$, где $\vec{a}_i$ радиус-векторы точек A_i — вершин тетраэдра. Приведем еще определение понятия многогранного тела. Это понятие будет играть важную роль в теории объемов. Множество точек пространства, которое может быть разложено на конечное число тетраэдров без общих внутренних точек, называется *многогранным телом*.

В заключение приведем определение понятия шара. Открытым шаром с центром A и радиусом r называется множество точек M пространства, отстоящих от A на расстояния меньше r: $\overrightarrow{AM}^2 < r^2$.

Замкнутым шаром с центром A и радиусом r называется множество точек M пространства, отстоящих от A на расстояния не более r, т. е. $\overrightarrow{AM}^2 \leqslant r^2$.

Множество точек M, таких, что $\overrightarrow{AM}^2 = r^2$, называется *сферой*. В случае двумерного евклидова пространства слова «шар» и «сфера» заменяются на *«круг»* и *«окружность»* соответственно.

Вопросы и упражнения

1. Проверьте утверждение, что прямая однозначно определяется любыми двумя ее различными точками.

2. а) Проверьте, что плоскость однозначно определяется любыми тремя ее различными точками, не принадлежащими одной прямой.

б) Какой геометрический смысл имеют формулы, выражающие линейное невырожденное преобразование параметров u, v на плоскости?

3. Из каких аксиом Вейля следует, что через точку A плоскости α проходит не более одной прямой, параллельной данной прямой $p \subset \alpha$?

4. Верно ли:

а) Любая точка A прямой a разбивает все другие ее точки на два открытых луча соответственно.

б) Откуда следует, что если точки M, N принадлежат разным лучам, то $\overset{\times}{A}MN$.

в) Если две точки M, N принадлежат одному лучу, то одна из этих точек лежит между другой точкой и точкой A. Докажите.

5. Проверьте, что понятие точки, лежащей между другими двумя точками, инвариантно при линейном преобразовании параметра t на прямой.

6. Докажите, что любые две различные точки A, $B \in T$ определяют отрезок $[AB]$ в геометрии Вейля.

7. Постарайтесь убедиться, что дополнительное множество к лучу AB прямой AB является открытым лучом.

8. Верно ли, что дополнительным множеством к полуплоскости α_1 с граничной прямой AB является открытая полуплоскость α_2 с той же граничной прямой?

9. В терминах аксиоматики Вейля S_B прямая a по определению есть множество точек:

$$a = \{M \mid \overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB},\ A,\ B \in T,\ x \in R\}. \qquad (*)$$

а) Принадлежит ли этой прямой точка X, для которой

$$\overrightarrow{AX} = -\overrightarrow{AB}?$$

б) Проверьте, что если точки C, $D \in a$, то отрезок

$$[CD] \subset a.$$

10. Дана прямая AB и C — точка луча AB. Докажите, что

$$[AC) = [AB).$$

11. Проверьте, что точка C отрезка $[AB]$ разбивает остальные его точки на два множества, которые будут соответственно точками отрезков AC, CB.

12. Верно ли: если $\overset{\times}{C}AB$, то $[AC] \subset [AB]$?

13. а) Докажите теорему об однозначности разбиения точек прямой некоторой ее точкой на два открытых луча.

б) Убедитесь, что разбиение точек плоскости некоторой ее прямой на две открытые полуплоскости однозначно.

14. Верно ли: а) подмножество точек M параллелограмма $ABCD$, таких, что

$$\overrightarrow{AM} = x_1\overrightarrow{AB} + x_2\overrightarrow{AC}\ (0 \leqslant x_1,\ x_2 \leqslant 3),$$

является параллелограммом;

б) переменные x_1, x_2 являются параметрами (аффинными) точек?

15. Постарайтесь убедиться, что понятие точки C, лежащей между точками A, B, не зависит от выбора параметра (аффинного) на прямой a (точки A, B, C принадлежат прямой a).

16. Предположим, что $\overset{\times}{CAB}$. Проверьте, что понятие точки C, лежащей между точками A, B, не зависит от выбора параметра x (аффинного) на прямой AB.

17. По определению множество точек M, таких, что

$$a = \{M \mid \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}\ (x \in R\},$$

является прямой. Откуда следует, что точки A, $B \in a$?

18. Предположим, что точки A, B, C не принадлежат одной прямой. Верно ли: множество точек

$$\{M \mid \overrightarrow{AM} = (u)^3\overrightarrow{AB} + (v)^3\overrightarrow{AC};\ u, v \in R\}$$

является плоскостью, причем:

а) векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ являются направляющими векторами плоскости;

б) переменные u, v являются параметрами (аффинными координатами) точек плоскости?

19. Пусть A, B, C — точки, не принадлежащие прямой. Верно ли: множество точек

$$\{M \mid \overrightarrow{AM} = 2x_1\ \overrightarrow{AB} + 3x_2\overrightarrow{AC},\ x_1, x_2 \in R\} \qquad (**)$$

является плоскостью, причем:

а) векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ являются направляющими векторами плоскости;

б) переменные x_1, x_2 являются параметрами точек для указанных направляющих векторов?

Какие следует ввести в (**) параметры, чтобы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ были направляющими векторами; при каких направляющих векторах переменные x_1, x_2 будут параметрами (аффинными) точек плоскости?

20. Вычислите скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, длину вектора и косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в общей аффинной системе координат, определенной векторами $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$.

§ 5. СИСТЕМА АКСИОМ ГИЛЬБЕРТА (ОБЗОР)

Аксиоматическое обоснование геометрии впервые было дано Гильбертом в 1899 г. уже после того, как была открыта неевклидова геометрия. Вскоре затем появились системы аксиом Пеано, Кагана, Шура и др. Точечно-векторная аксиоматика евклидовой геометрии была предложена Вейлем в 1918 г.

В аксиоматике Гильберта содержится 20 аксиом, и описывают они восемь основных понятий. Основные понятия: точки, прямые, плоскости — называются *основными образами*. Основные понятия (p_1 — инцидентности точки и прямой, p_2 — инцидентности точки и плоскости, p_3 — «лежать между» или короче «между» для трех точек, инцидентных прямой, p_4 — конгруэнтности отрезка отрезку и p_5 — конгруэнтности угла углу) называются *основными отношениями*. Система аксиом Гильберта евклидовой геометрии состоит из пяти групп, описывающих отношения между основными образами.

Первая группа аксиом называется *аксиомами соединения* (инцидентности). Она описывает отношения инцидентности точки и прямой, точки и плоскости.

Вторая группа аксиом называется *аксиомами порядка*. Она описывает основное отношение «лежать между», связанное с тремя точками, инцидентными прямой.

Третья группа аксиом называется *аксиомами конгруэнтности*; она описывает отношения конгруэнтности отрезка отрезку и угла углу.

Четвертая группа аксиом называется *аксиомами непрерывности* и описывает свойства непрерывности расположения точек на прямой.

Пятая группа называется *аксиомой параллельности*. Первая группа содержит 8 аксиом, вторая — 4, третья — 5, четвертая — 2 и пятая — одну аксиому. Отметим также, что в первой группе аксиом имеются две аксиомы I_3, I_4 с двумя требованиями; аксиома II_1 содержит два требования. В третьей группе первая аксиома содержит два требования, а четвертая — три требования. Во всей системе аксиом, состоящей из 20 аксиом, содержится 26 требований.

В аксиоматике Гильберта рассматриваются три множества M_1, M_2, M_3, элементы которых являются соответственно точками, прямыми и плоскостями. Между элементами этих множеств определены основные отношения p_1 — p_5 так, что эти образы и отношения удовлетворяют всем аксиомам гильбертовой аксиоматики. Совокупность элементов указанных трех множеств M_1, M_2, M_3 с отношениями p_1 — p_5 между ними, удовлетворяющими требованиям аксиом Гильберта, называется *евклидовым пространством*.

Если в первой группе аксиом сохранить лишь первые три аксиомы, то они вместе с аксиомами других групп аксиом составят систему аксиом евклидовой плоскости. Евклидова плоскость определяется как совокупность точек и прямых. Эти точки и прямые с основными отношениями p_1, p_3—p_5 удовлетворяют требованиям всех 15 аксиом гильбертовой аксиоматики планиметрии.

I. Аксиомы соединения

Эта группа аксиом описывает основные отношения p_1 и p_2 инцидентности (синонимы «принадлежит», «лежит на», «проходит через») соответственно точек и прямых, а также точек и плоскостей:

1. Для любых двух различных точек существует прямая, инцидентная этим точкам (рис. 32).

2. Для любых двух различных точек существует не более одной прямой, инцидентной этим точкам.

3. Для каждой прямой существуют по крайней мере две точки, ей инцидентные. Существуют три точки, не инцидентные одной прямой (рис. 33).

Рис. 32

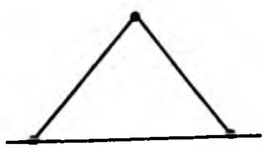


Рис. 33

4. Для любых трех точек, не инцидентных прямой, существует плоскость, инцидентная этим точкам. Для каждой плоскости существует по крайней мере одна точка, ей инцидентная (рис. 34).

5. Для любых трех точек, не инцидент-

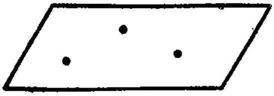


Рис. 34

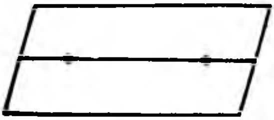


Рис. 35

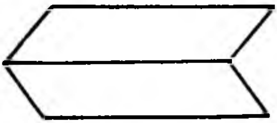


Рис. 36

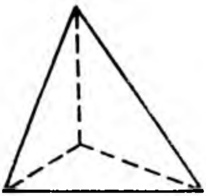


Рис. 37

ных прямой, существует не более одной плоскости, инцидентной этим точкам.

6. Если две точки прямой инцидентны плоскости, то каждая точка прямой инцидентна этой плоскости (рис. 35).

Прямая называется инцидентной плоскости, если всякая точка, инцидентная прямой, инцидентна плоскости.

7. Если две плоскости имеют точку, им инцидентную, то существует по крайней мере еще одна точка, им инцидентная (рис. 36).

8. Существуют четыре точки, не инцидентные одной плоскости (рис. 37).

Геометрия первой группы аксиом. Из этих аксиом можно вывести ряд предложений, составляющих геометрию первой группы аксиом. Приведем некоторые из них:

а) Две различные точки определяют одну и только одну прямую, им инцидентную в «смысле» правила p_1.

б) Три точки, не инцидентные в «смысле» правила p_1 одной прямой, определяют одну и только одну плоскость, им инцидентную по правилу p_2.

в) Прямая a и не инцидентная ей точка A определяют одну и только одну плоскость, им инцидентную.

г) На каждой плоскости можно найти по крайней мере три точки, не инцидентные прямой.

II. Аксиомы порядка

Основное назначение аксиом этой группы состоит в том, чтобы ввести тернарное отношение p_3 «лежать между», относящееся к любым трем различным точкам, инцидентным прямой. Отношение p_3 представляется подмножеством множества $M \times M \times M$, где M обозначает множество точек, инцидентных данной прямой: $p_3 \subset M \times M \times M$. В эту группу входит четыре аксиомы:

1. Если A, B, C — три точки, инцидентные прямой, и точка B лежит в смысле p_3 между точками A, C, то: а) точки A, B, C различны; б) точка B лежит между точками C, A.

2. Для любых двух точек A, B, инцидентных прямой a, существует точка C прямой a, такая, что точка B лежит между точками A и C в смысле p_3 (аксиома неограниченного продолжения прямой).

3. Для трех различных точек, инцидентных прямой, существует не более одной из них, которая лежит в смысле p_3 между двумя оставшимися.

Приведенные аксиомы называются *линейными аксиомами порядка*. Совокупность двух точек A и B и всех точек, которые обладают свойством p_3 быть между точками A и B, называется *отрезком*. Точки, лежащие между A и B, называются *точками отрезка*. Совокупность трех точек A, B, C, не инцидентных прямой, и трех отрезков, образованных парами этих точек, называется *треугольником*; точки A, B, C называются *вершинами*, а отрезки AB, AC, BC — *сторонами треугольника*. Прямая a называется *пересекающейся с отрезком* AC, если существует точка O отрезка AC, инцидентная прямой a. Отношение «лежать между» мы будем в дальнейшем обозначать звездочкой, поставленной над буквой, обозначающей точку, которая лежит между двумя другими.

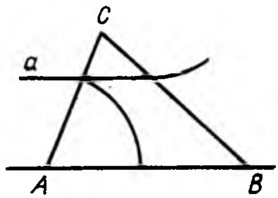


Рис. 38

4. Аксиома Паша. Пусть задан треугольник ABC и в его плоскости прямая a, не проходящая через A, B, C. Если прямая a пересекает одну сторону AC треугольника, то она пересекает также или вторую сторону AB, или третью его сторону BC (рис. 38).

Геометрия I—II групп аксиом. В геометрии первых двух групп аксиом справедливы, в частности, следующие предложения:

а) Каждый отрезок имеет по крайней мере одну точку.

б) За каждой точкой на прямой нет непосредственно следующей.

в) Из трех различных точек, инцидентных прямой, одна и только одна обладает свойством лежать между оставшимися двумя другими.

В этой геометрии можно ввести также понятие луча и угла. Прежде всего отметим следующее предложение о делении точек прямой некоторой ее точкой на два множества.

Все точки прямой a, за исключением точки O, можно разбить на два множества так, что: 1) если M, N — точки разных множеств, то отрезок MN содержит точку O (рис. 39); 2) если M, N — точки одного множества, то отрезок MN не содержит точку O (рис. 40).

Множества точек, которые мы получили при разбиении точек прямой a точкой O, называются *лучами*. Следовательно, точки прямой a всякой ее точкой O разбиваются на два луча. Точка O называется началом этих лучей. Отметим, что лучи, как и отрезки, являются точечными множествами. Напомним также, что прямая в гильбертовой аксиоматике является основным понятием и не распадается на точки. В этом смысле совокупность обоих лучей и их начала — точки O — не совпадает с прямой.

Рис. 39

Рис. 40

В геометрии первых двух групп аксиом можно ввести ряд новых понятий. Пусть три точки A, B, C инцидентны одной прямой. Точки A и B называются расположенными с одной стороны по отношению к точке C, если они принадлежат одному из лучей, порожденных точкой C. Точки A и B называются расположенными *по разные стороны* по отношению к точке C, если они принадлежат разным лучам, порожденным точкой C. Эти понятия можно обобщить на плоскость следующим образом.

Все точки плоскости α, за исключением точек некоторой ее прямой a, можно разбить на два множества так, что: 1) если M, N — точки разных множеств, то прямая a пересекает отрезок MN; 2) если точки M, N одного множества, то прямая a не пересекает отрезок MN.

В случае пространства справедлива следующая теорема о расположении точек. Все точки пространства, за исключением точек данной плоскости α, можно разбить на два множества (полупространства) так, что: 1) если M, N — точки разных множеств, то плоскость α пересекает отрезок MN; 2) если M, N — точки одного множества, то плоскость α не пересекает отрезка MN.

Множества точек, которые мы получили при разбиении точек плоскости прямой a, называются *полуплоскостями*. Следовательно, точки плоскости разбиваются всякой ее прямой на две полуплоскости. Прямая a, производящая деление, называется ребром этих полуплоскостей.

Отметим также, что полуплоскости, как лучи и отрезки, являются точечными множествами. Плоскость в гильбертовой аксиоматике является элементарным образом и не распадается на точки. Совокупность полуплоскостей и точек прямой не совпадает с исходной плоскостью.

Эта теорема позволяет ввести следующие понятия. Пусть точки A, B и прямая a инцидентны одной плоскости α. Две точки A и B называются расположенными с одной стороны по отношению к прямой a, если они принадлежат одной из полуплоскостей, порожденных прямой a. Эти точки называются расположенными по разные стороны по отношению к прямой a, если они принадлежат разным полуплоскостям.

Нетрудно доказать, что множество точек, инцидентных прямой, можно упорядочить в геометрии первых двух групп аксиом. Множество называется *линейно упорядоченным*, если между его элементами

$$A, B, C, \ldots$$

существует отношение «предшествовать» (обозначается символом $<$), удовлетворяющее следующим двум свойствам (с. 18):

1) если A и B — различные элементы множества, то или $A < B$ или $B < A$;

2) если $A < B$, $B < C$, то $A < C$.

Второе свойство предшествования называется свойством транзитивности: если A предшествует B и B предшествует C, то A предшествует C. Мы введем предшествование сначала для точек луча, затем обобщим построения на точки всей прямой.

Пусть даны прямая a и инцидентная ей точка O. Эта точка позволяет разбить все остальные точки прямой на два луча a_1 и a_2. Введем правило предшествования для точек луча a_1 следующим образом. Если точки A и B принадлежат рассматриваемому лучу, то будем называть ту точку из них предшествующей, которая обладает свойством быть между оставшейся точкой и началом луча O. Нетрудно установить, что так введенное предшествование f для точек луча удовлетворяет указанным двум требованиям. Действительно, построенное правило из двух различных точек луча одну и только одну точку выделяет в качестве предшествующей. Этот факт следует из теоремы, уточняющей аксиому II_3, и теоремы о делении точек прямой некоторой ее точкой на два множества. Убедимся теперь в том, что f транзитивно. Пусть для трех точек A, B, C имеют место два предшествования: A предшествует B и B предшествует C. Докажем, что A предшествует C. Так как понятие предшествования точек A и B сводится к понятию «между» точек O, A, B, то предыдущую задачу можно сформулировать в следующем виде. Если O, A, B, C — такие точки прямой a, что $\overset{\times}{A}OB$, $\overset{\times}{B}OC$, то $\overset{\times}{A}OC$. Этот факт на самом деле имеет место (см. книгу автора «Введение в неевклидовы геометрии») [6]. Можно убедиться также, что наряду с введенным понятием предшествования можно построить противоположное предшествование $\bar{f}$: если A и B по-прежнему принадлежат лучу a, то будем называть ту точку из них предшествующей, которая не обладает свойством лежать между оставшейся точкой и началом луча O. Противоположное предшествование $\bar{f}$ также применимо к любым двум различным точкам луча и транзитивно.

Введем теперь правило предшествования для точек, инцидентных прямой a. Возьмем на ней любые две точки A, B. Если эти точки принадлежат одному лучу a_1, то 1) предшествующая определяется по правилу f. Мы считаем также, что: 2) начало луча O предшествует точкам луча a_1; 3) точки второго луча предшествуют началу; 4) точки луча a_2 предшествуют точкам луча a_1; наконец, 5) если точки A, B принадлежат второму лучу a_2, то предшествующая определяется по правилу $\bar{f}$.

Нетрудно доказать, что так построенное правило предшествования f точек прямой транзитивно и применимо к любой паре различных точек прямой. Это предшествование не зависит от выбора точки O. Прямая, точки которой упорядочены по правилу предшествования, называется *направленной прямой* или осью.

В геометрии первых двух групп аксиом вводится понятие угла. Пусть заданы две различные прямые a и b с общей точкой O. Эта точка разбивает точки указанных прямых на пары лучей a_1, a_2 и b_1, b_2 соответственно. *Углом* a_1b_1 называется совокупность двух лучей с общим началом O. Точка O называется вершиной угла. Лучи a_1, b_1 называются *сторонами угла*. Внутренними точками угла

a_1b_1 называется множество точек плоскости (a, b), принадлежащее одновременно полуплоскостям (a_1b) и (a, b_1). Точки плоскости (a, b), не принадлежащие сторонам угла и отличные от начала O и внутренних точек, называются *внешними точками угла.*

III. Аксиомы конгруэнтности

Основное назначение аксиом этой группы состоит в том, чтобы описать бинарные отношения конгруэнтности ρ_4 отрезка отрезку и конгруэнтности ρ_5 угла углу.

1. Пусть дан отрезок AB, а также прямая a' и точка на ней A'. На прямой a' существует точка B' с той или с другой стороны относительно A' такая, что отрезок AB конгруэнтен отрезку $A'B'$ или $AB \equiv A'B'$; требуется также, чтобы $AB \equiv BA$.

2. Если $AB \equiv A''B''$, $A'B' \equiv A''B''$, то $AB \equiv A'B'$.

3. Пусть AB и BC — два отрезка без общих точек на прямой a, и если $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, причем $B'\overset{\times}{A'}C'$, то $AC \equiv A'C'$.

4. Пусть a_1b_1 — угол с вершиной O. При любой точке O' и выходящем из нее луче a_1' можно построить в заданной плоскости, инцидентной a', по любую сторону прямой a' один и только один второй луч b_1', такой, что $\angle a_1b_1 \equiv \angle a_1'b_1'$. Требуется также, чтобы $\angle a_1b_1 \equiv \angle a_1b_1$, $\angle a_1b_1 \equiv \angle b_1a_1$.

5. Пусть заданы два треугольника ABC и $A'B'C'$, таких, что $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$, тогда $\angle BAC \equiv \equiv \angle B'A'C'$ (рис. 41).

Геометрия первых трех групп аксиом. В геометрии аксиом I—III доказывается рефлексивность, взаимность и транзитивность понятия конгруэнтности отрезков. Аналогичные теоремы о взаимности и транзитивности имеют место для основного отношения ρ_5 конгруэнтности угла углу. Однако доказательство этих свойств возможно лишь после установления признаков конгруэнтности треугольников. Напомним, что свойство рефлексивности отношения ρ_5 фиксируется аксиомой III_4.

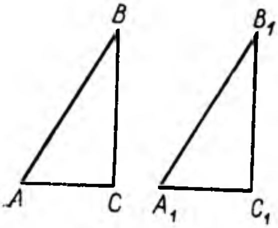


Рис. 41

Введем теперь ряд определений.

Говорят, что отрезок AB *больше* отрезка CD (рис. 42), и, употребляя специальное обозначение, записывают $AB > CD$, если существует такая точка M отрезка AB, что $AM \equiv CD$.

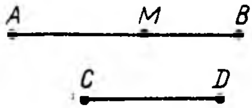


Рис. 42

Если $AB > CD$, то говорят также, что отрезок CD меньше отрезка AB, и записывают $CD < AB$. Пусть на прямой a дан отрезок AB. Точка O этой прямой называется *серединой отрезка*, если $AO \equiv OB$.

Можно доказать, что всякий отрезок имеет середину, и притом только одну, и эта середина является точкой отрезка AB.

Отметим, что понятия «больше» и «меньше» для отрезков и середины данного отрезка введены лишь в геометрии первых трех групп аксиом. В этой геометрии мы не располагаем теорией длин отрезков и величин углов. Однако в ней имеется теория сравнения отрезков и углов, треугольников и других фигур.

Два угла называются смежными, если одна сторона у них общая, две другие инцидентны прямой. Угол, конгруэнтный своему смежному, называется *прямым*. Два угла называются *вертикальными*, если стороны одного из них являются продолжением сторон другого. Нетрудно доказать, что вертикальные углы конгруэнтны между собой.

Угол, образованный одной стороной треугольника и продолжением другой стороны, называется *внешним углом* треугольника. Справедлива теорема: внешний угол треугольника больше каждого внутреннего, не смежного с ним. Две прямые называются *перпендикулярными*, если они образуют при пересечении прямые углы. Из данной точки на данную прямую можно опустить перпендикуляр, и притом единственный.

В рассматриваемой геометрии аксиом I—III имеют место все три признака конгруэнтности треугольников. В равнобедренном треугольнике углы при основании конгруэнтны. Каждый угол можно разделить пополам. В этой геометрии справедливы теоремы о том, что бо́льшая сторона треугольника лежит против большего угла и каждая сторона треугольника меньше суммы и больше разности двух других его сторон.

Остановимся подробнее на отображениях точечных множеств. Закон, по которому всякому элементу одного множества сопоставляется элемент другого или того же самого множества, называется отображением. Отображение $y = f(x)$ называется *взаимно однозначным*, если оно любым двум различным элементам x_1, x_2 первого множества относит различные элементы y_1, y_2 второго множества и преобразованные элементы заполняют все второе множество.

Для всякого взаимно однозначного отображения f можно построить обратное отображение. *Обратное отображение* φ по определению относит всякому элементу y второго множества тот элемент x из первого множества, который при отображении f переходит в y: $y = f(x)$.

Взаимно однозначное отображение множества на себя называется *преобразованием* этого множества. Последовательное осуществление двух преобразований f_1, f_2 в указанном порядке приводит к новому преобразованию, которое называется *произведением данных преобразований*. Совокупность преобразований называется *группой преобразований*, если она замкнута относительно операции умножения любых двух преобразований и операции построения обратного преобразования.

Возьмем теперь в качестве множества элементов совокупность всех точек пространства геометрии первых трех групп аксиом.

Преобразование точек такого пространства называется *движением*, если оно любые две точки A и B переводит в точки A' и B' так, что $AB \equiv A'B'$.

Движение пространства называется *вращением*, если оно оставляет неподвижной некоторую точку (центр вращения) пространства. Движение называется *вращением вокруг прямой*, если оно оставляет эту прямую точечно-неподвижной.

Нетрудно доказать, что произведение двух движений, как и обратное преобразование к заданному движению, является также движением. Отсюда следует, что совокупность всех движений пространства первых трех групп аксиом составляет группу. Можно также доказать, что: 1) точки, лежащие на прямой, переходят при движении в точки, также лежащие на прямой; 2) точки, лежащие на плоскости, при движении переходят в точки, лежащие на некоторой плоскости. Каждое движение сохраняет основное отношение лежать между.

Движения мы определили в геометрии первых трех групп аксиом на основе аксиом конгруэнтности. Можно было бы движения принять в качестве основного понятия и описать их свойства следующими аксиомами 1—6.

III′. Аксиомы движений

1. Движения суть преобразования $M_i \to M_i$ ($i = 1, 2, 3$) сохраняют основные образы и отношения между ними.
2. Совокупность движений составляет группу преобразований.
3. Если при движении начало и луч остаются на месте, то каждая точка луча остается на месте.
4. Существует единственное движение, которое начало O, луч a_1 и полуплоскость с ребром a переводит соответственно в заданные начало $\widetilde{O}$, луч $\widetilde{a}_1$ и полуплоскость с ребром $\widetilde{a}$.
5. Существует движение, переводящее концы отрезка друг в друга.
6. Существует движение, переводящее стороны угла друг в друга.

В геометрии первых двух групп аксиом и аксиом 1—6 движений все аксиомы конгруэнтности в свою очередь могут быть доказаны как теоремы. Таким образом, аксиомы конгруэнтности эквивалентны аксиомам 1—6 движений относительно аксиом первых двух групп I—II. Две группы предложений A и B называются эквивалентными относительно системы аксиом C, если из аксиом C, A следует предложение B и из аксиом C, B следует A.

IV. Аксиомы непрерывности

Основное назначение этой группы аксиом состоит в том, чтобы ввести длины отрезков и величины углов, а также описать свойство непрерывности расположения точек на прямой.

1. Аксиома Архимеда. Пусть даны два произвольных отрезка AB и CD; существует такое натуральное n, что (рис. 43)

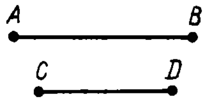


Рис. 43

$$nCD > AB. \qquad (5.1)$$

Отрезок nCD по определению означает отрезок CD_n, где D_n — точка луча CD, полученная при последовательном откладывании отрезков: $CD \equiv DD_2 \equiv D_2D_3 \equiv \ldots \equiv D_{n-1}D_n$.

Аксиома Архимеда позволяет в геометрии первых трех групп аксиом построить теорию длин отрезков.

2. Аксиома Кантора. Пусть на прямой дана последовательность отрезков, удовлетворяющих двум требованиям: 1) каждый следующий отрезок вложен в предыдущий; 2) не существует отрезка, принадлежащего всем отрезкам последовательности. Тогда существует точка, принадлежащая всем отрезкам последовательности.

Эта аксиома позволяет строить отрезок заданной длины. Нетрудно доказать, что точка в аксиоме Кантора, принадлежащая всем отрезкам последовательности, единственная.

Вместо аксиомы IV_2 Гильбертом была введена так называемая *аксиома полноты*: совокупность точек, прямых и плоскостей нельзя дополнить новыми элементами так, чтобы в расширенной совокупности по-прежнему имели место все аксиомы I—III, IV_1, V и чтобы отношения принадлежать, между, конгруэнтен в применении к старым объектам имели прежний смысл.

V. Аксиомы параллельности

Через любую точку A, не инцидентную прямой a, можно провести в плоскости (A, a) не более одной прямой, не пересекающейся с прямой a.

V′. Аксиома параллельности Лобачевского

Через любую точку A, не инцидентную прямой a, можно провести в плоскости (A, a) по крайней мере две различные прямые, не пересекающиеся с прямой a.

Следствия из аксиом Гильберта. Абсолютная геометрия. Геометрия Γ_e, определенная аксиомами групп I—IV, V, называется евклидовой геометрией; в символической записи

$$\Gamma_e = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, \text{I—IV, V}),$$

где p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 — символы основных отношений, I—IV, V — аксиомы Гильберта. Система аксиом I—IV, V′ определяет геометрию $\Gamma_л$, называемую геометрией Лобачевского; в символической записи

$$(\Gamma_л = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, \text{I—IV, V}').$$

Геометрия, построенная на первых четырех группах аксиом, называется абсолютной геометрией; в символической записи

$$\Gamma_a = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, \text{I—IV}).$$

В основе рассматриваемой аксиоматики, как отмечалось выше, лежат три множества M_1, M_2, M_3, элементы которых именуются соответственно точками, прямыми и плоскостями с отношениями p_1—p_5, удовлетворяющими требованиям аксиом I—IV, V или I—IV, V'. Отметим также, что перечисленные выше аксиомы Гильберта I—IV, V определяют род структур, называемых *трехмерными евклидовыми пространствами*

$$S_e = (M_1, M_2, M_3, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) \tag{5.2}$$

с базисными множествами M_1, M_2, M_3 и возможными типизациями $T(M, p)$ отношений p_1—p_5, определяемых аксиомами I—IV—V.

Евклидова геометрия является теорией Г указанного рода структур. Аналогичное заключение можно повторить относительно геометрии Лобачевского. Система аксиом Гильберта I—IV—V' *характеризует род структур, называемых трехмерными пространствами Лобачевского*:

$$S_л = (M_1, M_2, M_3, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5); \tag{5.3}$$

этот род определяется на базисных множествах M_1, M_2, M_3 возможными типизациями основных отношений p_1—p_5, описываемых указанной системой аксиом. Геометрия Лобачевского является теорией этого рода структур.

Бинарное отношение p_1 связывает элементы множества M_1 с элементами множества M_2. Это отношение представляется подмножеством декартова произведения $M_1 \times M_2$, символ Ap_1a, где $A \in M_1$, а $a \in M_2$ означает, что точка A принадлежит прямой a или прямая a проходит через точку A. Второе бинарное отношение p_2 связывает элементы множества M_1 с элементами множества M_3. Это отношение представляется подмножеством декартова произведения $M_1 \times M_3$, причем символ $Ap_2\alpha$ означает, что точка A принадлежит плоскости α или плоскость α проходит через точку A. Отношение p_3 является тернарным и выделяет точку B из трех точек A, B, C, инцидентных прямой, лежащую между точками A и C. Это отношение, очевидно, характеризуется подмножеством декартова куба $M_1 \times M_1 \times M_1$ множества M_1. Бинарные отношения p_4 и p_5 определены на парах отрезков и на парах углов. Они выражают соответственно отношение конгруэнтности данных отрезков и конгруэнтности данных углов.

Ясно, что математические структуры (5.2) и (5.3) являются достаточно сложными и знакомство с теорией этих родов структур представляет определенные трудности для читателей, начинающих изучать аксиоматические теории. Если в первой группе аксиом взять лишь первые три аксиомы, а остальные группы аксиом

II—IV—V и II—IV—V′ оставить без изменения, то получим соответственно *плоскость Евклида и плоскость Лобачевского.*

Подчеркнем еще раз, что с основными образами и отношениями мы не связываем в абстрактной геометрии никакого конкретного смысла. Точки, прямые и плоскости и основные отношения между ними представляются как понятия, полное описание которых дается системой аксиом. Нас совершенно не интересуют другие свойства, не порожденные основными понятиями. Природа основных образов может быть любой, лишь бы они и допускаемые ими основные отношения удовлетворяли требованиям системы аксиом.

В абсолютной геометрии можно построить понятие числовой оси. В самом деле, возьмем направленную прямую — ось и на ней некоторую точку O. Каждой точке данной прямой отнесем вещественное число по следующему правилу. Если точка O предшествует точке M, то соответствующее число равняется длине отрезка OM; если же точка M предшествует точке O, то число отличается знаком от длины отрезка. Условимся также относить точке O число нуль. Построенное отображение всех точек прямой на все вещественные числа взаимно однозначно: каждой точке соответствует число, разным точкам соответствуют разные числа и всякое вещественное число оказывается сопоставленным с некоторой точкой прямой. Ось, точкам которой отнесены указанным способом вещественные числа, называется *числовой осью.* Можно убедиться, что построенное отображение сохраняет порядок, т. е. если точки M, N имеют координаты x_M, x_N, то точка M тогда и только тогда предшествует точке N, когда $x_M < x_N$. Это свойство прямой называется *непрерывностью.* Свойство непрерывности прямой позволяет установить в абсолютной геометрии следующее предложение Дедекинда.

Если все точки направленной прямой распределены по некоторому закону на два непустых класса так, что: 1) каждая точка относится к одному и только одному классу; 2) каждая точка первого класса предшествует точкам второго класса, то существует точка, которая является либо последней точкой первого класса, либо первой точкой второго класса.

Обратно, если к аксиомам первых трех групп присоединить это предложение Дедекинда, то предложения Архимеда и Кантора, составляющие группу аксиом непрерывности, могут быть доказаны как теоремы. Другими словами, в геометрии I—III групп аксиом предложение Дедекинда эквивалентно предложениям Архимеда и Кантора. Напомним, что предложения A и B эквивалентны относительно системы аксиом C, если из C и A следует предложение B, а из C и B следует предложение A.

Теперь нетрудно построить систему координат в плоскости абсолютной геометрии. Действительно, пусть две взаимно ортогональные прямые Ox и Oy пересекаются в точке O. На каждой из них выберем положительное направление и при помощи единичного отрезка построим числовые оси Ox, Oy. Возьмем далее произвольную точку M на плоскости xOy и опустим из нее перпендикуляр $M\overline{M}_x$ на ось Ox. Координату x точки M на оси Ox примем за абсциссу точки M. За ординату точки M примем длину отрезка $M\overline{M}_x$ с положительным или отрицательным знаком в зависимости от того, лежит ли точка M и положительная полуось Oy соответственно по одну или по разные стороны относительно оси Ox. Эти построения позволяют построить обычную аналитическую геометрию и прийти к арифметической модели I—V, в которой точками являются упорядоченные пары вещественных чисел (x, y). В качестве прямых в этой реализации принимаются упорядоченные тройки (u, v, w), определенные с точностью до пропорциональности, причем первые два числа u и v одновременно не обращаются в нуль. Точка (x, y) и прямая (u, v, w) называются инцидентными, если сумма $ux + vy + w$ равняется нулю. Пусть теперь три различные точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) инцидентны прямой. Рассмотрим первые числа x_1, x_2, x_3, соответствующие данным точкам. Нетрудно убедиться, что они различны или совпадают друг с другом. Если одно из них по величине заключено между другими, то считают, что соответствующая точка лежит между оставшимися. Если первые числа совпадают, то соответствующее правило строится по вторым числам. Два отрезка (x_1, y_1), (x_2, y_2) и $(\overline{x}_1, \overline{y}_1)$, $(\overline{x}_2, \overline{y}_2)$ называются *конгруэнтными*, если существует отображение вида:

$$\overline{x} = x\cos\varphi \mp y\sin\varphi + a,$$
$$\overline{y} = x\sin\varphi \pm y\cos\varphi + b, \qquad (*)$$

переводящее точки отрезка (x_1, y_1), (x_2, y_2) в точки отрезка $(\overline{x}_1, \overline{y}_1)$, $(\overline{x}_2, \overline{y}_2)$. *Два угла конгруэнтны*, если их лучи являются соответствующими при некотором отображении вида (*).

Система аксиом Гильберта евклидовой геометрии удовлетворяет требованию категоричности. Напомним, что по определению *система аксиом называется категоричной*, если любые две ее модели изоморфны, т. е. можно установить между ними взаимно однозначное отображение, при котором основные образы первой модели, связанные между собой некоторыми основными отношениями, переходили бы в соответствующие основные образы второй модели, связанные одноименными отношениями. Система аксиом I_{1-3}, II—V евклидовой геометрии категорична; этот факт следует из того, что всякая модель аксиом евклидовой геометрии изоморфна арифметической. Идея доказательства последнего предложения состоит в следующем. Всякой точке M в данной модели, имеющей декартовы координаты (x, y), отнесем в рассмотренной выше арифметической модели точку (x, y). Если прямая в первой модели характеризуется уравнением $ux + vy + w = 0$, то в арифметической модели отнесем ей прямую (u, v, w) и т. д. Так построенное отображение будет изоморфизмом.

В заключение остановимся на эквивалентности систем аксиом Вейля и Гильберта. Исходя из аксиоматики Гильберта, можно ввести векторы как свободные направленные отрезки и определить обычным образом операции сложения векторов, умножения вектора на число, скалярного произведения двух векторов и операцию откладывания вектора от точки. Так мы определим все основные понятия аксиоматики Вейля. Далее непосредственной проверкой убедимся, что каждая аксиома геометрии Вейля В будет в геометрии Гильберта Г выражать «истинное» утверждение. Последнее означает, что каждую вейлевскую аксиому можно доказать как теорему на основании системы аксиом Гильберта.

Обратно, опираясь на аксиомы Вейля, можно ввести, как делали это мы выше (с. 71), понятия прямой, плоскости, инцидентности точки и прямой, точки и плоскости, лежать между, движения — все основные понятия гильбертовской аксиоматики. Нетрудно проверкой убедиться, что каждая аксиома гильбертовской аксиоматики будет в геометрии В выражать «истинное» утверждение, т. е. каждое такое утверждение можно доказать как теорему на основании системы аксиом Вейля.

Из этих рассуждений следует, что аксиоматика Гильберта эквивалентна аксиоматике Вейля евклидовой геометрии.

Вопросы и упражнения

1. В приводимой ниже таблице

№ п/п	Понятия	Аксиоматика		
		Вейля	Гильберта	школьного курса геометрии
1	Точка	+	+	+
2	Прямая	—	+	+
3	Расстояние	—	—	+
4	Инцидентность точки и прямой	—	+	—
5	Лежать между	—	+	—
6	Конгруэнтность отрезков и углов	—	+	—
7	Вектор	+	—	—
8	Сложение векторов	+	—	—
9	Умножение векторов на число	+	—	—
10	Скалярное произведение векторов	+	—	—
11	Откладывание вектора	+	—	—

знаком «+» отмечены понятия, которые в соответствующей аксиоматике приняты в качестве основных, неопределяемых.

а) Дайте определение понятий в терминах аксиоматики Вейля, которые в соответствующей колонке отмечены знаком «—».

б) Определите понятия, указанные в строках 3,7—11 м в системе Гильберта.

в) Как определяются понятия в строках 4—11 таблицы в школьном курсе геометрии?

2. В аксиоматике Вейля, Гильберта и школьного курса геометрии дайте определение следующих понятий:

а) отрезка, концов отрезка, внутренних точек отрезка; б) луча, открытого луча, начала луча; в) полуплоскости, открытой полуплоскости, граничной прямой; г) прямой a, разделяющей пару точек A, B; д) треугольника, сторон и вершин треугольника; е) угла, развернутого угла, прямого угла; ж) биссектрисы угла; з) конгруэнтности фигур.

3. Дайте определение евклидова пространства, исходя из аксиоматики Вейля, Гильберта и школьного курса геометрии.

4. а) Определите типы структур евклидовой плоскости по Вейлю, Гильберту и Колмогорову.

б) Будут ли эти структуры однотипными (эквивалентными)?

5. Верно ли утверждение, что указанные в вопросе 4 структуры одного рода?

6. Приведите примеры применения понятия факторизации в школьном курсе геометрии.

7. Какое множество факторизуется при введении на плоскости понятия вектора, исходя из направленных отрезков?

8. Назовите отношение эквивалентности, по которому производится факторизация множества всех направленных отрезков плоскости (см. вопрос 7) при построении векторного пространства V_2.

9. Какое множество факторизуется при построении понятия вектора на основе параллельного переноса плоскости? По какому отношению эквивалентности производится факторизация указанного множества параллельных переносов?

10. Дайте определение направления прямой на плоскости.

11. По какому отношению эквивалентности производится факторизация множества лучей плоскости при введении понятия направления луча?

Глава IV

ДЛИНЫ, ПЛОЩАДИ

Понятия длины, площади с давних пор используются в практической деятельности людей, но они оказались очень сложными математическими понятиями и были осмыслены математиками лишь в прошлом веке.

На протяжении многих веков математики интересовались лишь задачей вычисления длин, площадей без явного перечисления правил, на которых основывались эти вычисления, и свойств, описывающих сами понятия.

В этой главе мы познакомимся с аксиоматическим определением длин, площадей.

При рассмотрении длин отрезков мы, естественно, будем опираться на вейлевскую аксиоматику, в частности на понятия длины вектора и расстояния между двумя точками.

§ 1. ДЛИНЫ ОТРЕЗКОВ, АКСИОМЫ

Прежде всего напомним понятия прямой и отрезка (с. 71). Предположим, что точки A, B евклидова пространства определяются соответственно радиус-векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Множество точек M, радиус-векторы $\vec{x}$ которых удовлетворяют равенству

$$\vec{x} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}), \tag{1.1}$$

где параметр t принимает вещественные значения, определяет прямую AB. Из формулы (1.1) следует, что значению параметра $t = 0$ отвечает точка A, а значению $t = 1$ — точка B. Если же значения параметра t принадлежат интервалу $(0, 1)$, то множество соответствующих точек является отрезком AB, точки A, B — концами отрезка AB. Переходим к определению длин отрезков.

Длинами отрезков мы будем называть значения числовой функции $d(AB)$, определенной на классе отрезков и удовлетворяющей требованиям следующих трех аксиом.

Аксиомы длин отрезков

1. Аксиома позитивности. Функция $d(AB)$ неотрицательна, т. е. $d(AB) \geqslant 0$ для любого отрезка AB.

2. Аксиома инвариантности. Длины отрезков инвариантны при движениях, т. е. если произвольные точки A, B при каком-нибудь движении переходят соответственно в точки A', B', то $d(AB) = d(A'B')$.

3. Аксиома аддитивности. Длины отрезков обладают свойством аддитивности, т. е. если отрезок AC состоит из отрезков AB и BC без общих точек, то $d(AC) = d(AB) + d(BC)$.

Следствия. Докажем, что длины отрезков существуют. Действительно, положим, что $d(AB) = \rho(A, B)$, где $\rho(A, B)$ — расстояние между точками A, B, и докажем, что аксиомы 1—3 при этом выполняются.

Так как по определению $\rho(A, B) = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$, то аксиома позитивности выполняется, причем на основании аксиомы IV_3 $d(AB) > 0$ для любого отрезка AB.

Нетрудно также установить выполнимость аксиомы инвариантности. Действительно, выше мы доказали, что всякое движение является изометрией, т. е. преобразованием, сохраняющим расстояние между любыми двумя точками.

Что касается аксиомы аддитивности, то ее справедливость устанавливается следующим образом. Пусть отрезок AC состоит из отрезков AB и BC без общих внутренних точек. На основании аксиомы V_2 имеем: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
Предположим теперь, что

$$\overrightarrow{AC} = u\vec{e}, \ \overrightarrow{AB} = v\vec{e}, \ \overrightarrow{BC} = w\vec{e},$$

где $\vec{e}$ — некоторый единичный вектор. Отсюда следует соответственно, что $\rho(A, C) = |u|$, $\rho(A, B) = |v|$, $\rho(B, C) = |w|$. Находя скалярный квадрат вектора $\overrightarrow{AC}$, мы получим:

$$\overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}^2,$$

т. е. $|u|^2 = |v|^2 + 2\,|v|\,|w| + |w|^2 = (|v| + |w|)^2$, что и требовалось доказать. Таким образом, функция $d\,(AB)$, определенная на классе отрезков, удовлетворяет требованиям 1—3 аксиом, и вопрос о существовании длин отрезков рассмотрен до конца.

Теперь мы установим единственность закона, определяющего длины отрезков. Сформулируем это предложение более точно в виде следующей теоремы.

Теорема. Длина $d\,(AB)$ отрезка AB совпадает с точностью до постоянного множителя с расстоянием $\rho\,(A, B)$ между его концами A и B. Другими словами, если функция $d_1\,(AB)$ относит отрезку AB вещественное число так, что выполняются требования 1—3 аксиом длин отрезков, то эта функция $d_1\,(AB)$ лишь постоянным множителем отличается от длины $d\,(AB)$ отрезка AB.

Доказательство. Прежде всего, так как функции $d_1\,(AB)$ и $d\,(AB)$ инвариантны при движениях, то $d_1\,(AB)$ является функцией от положительного аргумента $x = d\,(AB)$ — длины отрезка AB: $d_1\,(AB) = f\,(x)$. Далее на основании аксиомы позитивности $d_1\,(AB)$ имеем $f\,(x) > 0$ для любого $x > 0$. Отсюда и из аксиомы аддитивности следует, что функция $f\,(x)$ возрастающая. В самом деле, из условия аддитивности функции $d_1\,(AB)$ следует, что $f\,(x_1 + x_2) = f\,(x_1) + f\,(x_2)$.

Если $x < x'$, то $f\,(x') = f\,(x' - x + x) = f\,(x' - x) + f\,(x) > f\,(x)$, т. е. функция $f\,(x)$ возрастающая.

Из аксиомы аддитивности следует также, что

$$f\,(nx) = f\,(\underbrace{x + x + \ldots + x}_{n \text{ раз}}) = f\,(x) + f\,(x) + \ldots + f\,(x).$$

Таким образом, имеем: $f\,(nx) = n\,f\,(x)$.

Отсюда вытекает при $x = \frac{1}{n}$, что

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} f\,(1). \tag{1.1}$$

На основании этой формулы для любого натурального m мы получим:

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n} f\,(1),$$

$$\text{или } f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} f\,(1). \tag{1.2}$$

Возьмем теперь любое положительное иррациональное число x. Как известно, для любого натурального числа n можно найти другое натуральное число m, что будут выполняться неравенства

$$\frac{m}{n} < x < \frac{m+1}{n}. \tag{1.3}$$

Так как функция $f(x)$ монотонно возрастающая, то из этих неравенств следуют неравенства для соответствующих значений функции:

$$f\left(\frac{m}{n}\right) < f(x) < f\left(\frac{m+1}{n}\right).$$

С другой стороны, учитывая формулу (1.2), получим:

$$\frac{m}{n} f(1) < f(x) < \frac{m+1}{n} f(1),$$

или $\frac{m}{n} < \frac{f(x)}{f(1)} < \frac{m+1}{n}$.

Так как из (1.3) следует, что последовательности $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$ сходятся к одному пределу x, то $f(x)/f(1) = x$, т. е. $f(x) = x f(1)$. Таким образом, функция $d_1(AB) = f(x)$ отличается лишь постоянным множителем от длины $x = d(AB)$ отрезка AB. Условимся далее считать длину $d_1(AB)$ отрезка AB равной единице, если длина $d(AB)$ того же отрезка AB равна единице. В этом случае $f(1) = 1$ и длина отрезка $d_1(AB)$ численно равна длине $d(AB)$: $d_1(AB) = d(AB)$. Иначе говоря, аксиомы позитивности, инвариантности и аддитивности полностью характеризуют понятие длины отрезка, если к аксиомам 1—3 присоединить еще так называемую *аксиому нормированности*: существует некоторый отрезок EE_1, для которого значение $d(EE_1)$ равняется единице.

Все другие свойства длин отрезков являются следствиями этих четырех аксиом и аксиом, положенных в основу геометрии.

Замечание. Мы определили понятие длин отрезков — простейших геометрических образов. Дальнейшим обобщением этой теории будет построение так называемой теории меры на классе более сложных точечных множеств на прямой.

Используя понятие измеримости множества в смысле Лебега, можно добиться значительного расширения класса множеств (отрезков), допускающих длины.

Вопросы и упражнения

1. Перечислите аксиомы длин отрезков.
2. На какие аксиомы и понятия опирается доказательство существования длин отрезков?
3. Назовите теоремы и аксиомы, на которые мы опирались при доказательстве единственности длин отрезков.

§ 2. МНОГОУГОЛЬНЫЕ ФИГУРЫ. ПЛОЩАДИ НА КЛАССЕ МНОГОУГОЛЬНЫХ ФИГУР

Прежде всего напомним понятие внутренней точки фигуры. Предположим, что на плоскости нам дана *фигура*, т. е. *некоторое множество точек* F. Точка A плоскости называется *внутренней* *точкой данной фигуры*, если существует круг (открытый) с центром в этой точке, целиком принадлежащий фигуре F. Совокупность внутренних точек фигуры называется внутренней ее частью. *Множество*, каждая точка которого внутренняя, называется *открытым*.

Точка A плоскости называется *внешней точкой относительно данной фигуры* F, если существует открытый круг с центром в этой точке, не имеющий общих точек с множеством F. Существует еще один тип точек — граничных. *Точка* A плоскости называется *граничной точкой* по отношению к данному множеству F, если любой круг с центром в этой точке содержит точки как принадлежащие, так и не принадлежащие множеству F. Совокупность всех граничных точек множества составляет по определению *границу* данной фигуры F. Очевидно, фигура F на плоскости и дополнительная к ней фигура имеют одну и ту же границу.

Предположим, что на плоскости нам дана произвольная многоугольная фигура F. По определению это означает (с. 75), что множество точек F можно разложить на конечное число треугольников, не имеющих общих внутренних точек.

Всякое разложение многоугольной фигуры на составляющие треугольники, попарно не имеющие общих внутренних точек, называется *разбиением*. Если пересечение любых двух треугольников в данном разбиении будет лишь общей стороной, или общей вершиной, или пустым множеством, то разбиение называется *правильным*. В противном случае разбиение называется *неправильным*.

Неправильное разбиение всегда можно измельчить так, что новое разбиение будет правильным. В самом деле, в этом случае некоторые вершины составляющих треугольников будут внутренними точками сторон других составляющих треугольников; соединяя эти точки с противоположными вершинами соответствующих треугольников, придем к измельченному разбиению, которое будет правильным разбиением.

Определение площади

Площадью на классе всех многоугольных фигур мы будем называть функцию $S(F)$, определенную на указанном классе и удовлетворяющую требованиям следующих четырех аксиом.

Аксиомы площади

1. **Аксиома позитивности.** Функция $S(F)$ неотрицательна, т. е. $S(F) \geqslant 0$ для любой многоугольной фигуры F.

2. **Аксиома инвариантности.** Если многоугольная фигура F переходит при движении в многоугольную фигуру F', то $S(F) = S(F')$.

3. **Аксиома аддитивности.** Если многоугольная фигура F рас-

падается на многоугольные фигуры F_1, F_2, не имеющие общих внутренних точек, то $S(F) = S(F_1) + S(F_2)$.

4. Аксиома нормированности. Площадь квадрата Q, сторона которого есть единица длины, равняется числу 1: $S(Q) = 1$.

Следствие. Исходя из предположения, что площади многоугольных фигур существуют, т. е. каждой многоугольной фигуре можно поставить в соответствие неотрицательное число так, что выполняются свойства 1—4, докажем следующее свойство площадей.

Убедимся, что из аксиом 1 и 3 следует свойство монотонности площади, т. е. если площади многоугольных фигур существуют и если многоугольная фигура F_1 есть часть многоугольной фигуры F, то $S(F_1) \leqslant S(F)$.

В самом деле, разность $F - F_1$ не имеет общих точек с множеством F_1. Поэтому $F = F_1 + [F - F_1]$, причем слагаемые множества не имеют общих внутренних точек. Второе слагаемое в этом равенстве обозначает замыкание $F - F_1$ и будет (можно доказать) многоугольной фигурой. По аксиоме аддитивности имеем:

$$S(F) = S(F_1) + S([F - F_1]) \geqslant S(F_1), \tag{2.1}$$

т. е. свойство монотонности площади действительно имеет место. Остановимся теперь на вычислении площадей простейших многоугольных фигур — прямоугольников, параллелограммов и треугольников.

Вычисление площади прямоугольника

Теорема. Если на классе многоугольных фигур существует функция, удовлетворяющая требованиям аксиом 1—4, то значение этой функции для данного прямоугольника при фиксированной единице измерения равняется произведению его измерений.

Доказательство. Прежде всего из свойств инвариантности и позитивности функции $S(P)$ следует, что она является положительной функцией от положительных аргументов x_1, x_2 — измерений прямоугольника P. Будем обозначать в дальнейшем эту числовую функцию через $f(x_1, x_2)$: $S(P) = f(x_1, x_2)$.

Рассмотрим теперь прямоугольник, составленный из двух прямоугольников (рис. 44), не имеющих общих внутренних точек. Предположим, что первый прямоугольник определяется уравнением

$$\vec{x} = \vec{a} + t_1\vec{p}_1 + t_2\vec{p}_2 \tag{2.2}$$

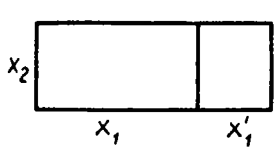


Рис. 44.

при условии, что параметры t_1, t_2 изменяются на сегменте $[0, 1]$. Предположим также, что второй прямоугольник получается из (2.2) при изменении t_1 на сегменте $[1, T]$ и произвольном изменении t_2 на сегменте [0, 1]. Из этих предположений следует, что результирующий третий прямоугольник определяется уравнением (2.2) при $0 \leqslant t_1 \leqslant T$ и $0 \leqslant t_2 \leqslant 1$. Первые измерения у рассматриваемых трех прямоугольников будут x_1, x_1' и $x_1 + x_1'$, а вторые измерения одинаковы и равны x_2. Так как третий прямоугольник составлен из данных двух прямоугольников, не имеющих общих внутренних точек, то в силу аксиомы аддитивности площади получим:

$$f(x_1 + x_1', x_2) = f(x_1, x_2) + f(x_1', x_2),$$

т. е. функция $f(x_1, x_2)$ удовлетворяет по первому аргументу условиям аддитивности и позитивности. Следовательно, по доказанному в § 1 заключаем, что

$$f(x_1, x_2) = x_1 f(1, x_2). \tag{2.3}$$

Если теперь повторить все рассуждения для двух прямоугольников с одним и тем же первым измерением и вторыми измерениями x_2, x_2^1, $x_2 + x_2'$, то получим: $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 f(1, 1)$, т. е. $f(x_1, x_2)$ лишь постоянным множителем отличается от произведения измерений прямоугольника.

Согласно аксиоме 4 для квадрата Q со стороной, равной единице, площадь $f(1, 1) = 1$; таким образом, $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$, что и требовалось доказать.

Вычисление площади параллелограмма и треугольника

Возьмем какой-нибудь параллелограмм

$$\vec{x} = \vec{a} + t_1 \vec{p}_1 + t_2 \vec{p}_2, \tag{2.4}$$

где переменные t_1, t_2 принимают произвольные значения из сегмента [0, 1], и параллелограмм с тем же уравнением (2.4), в котором вместо вектора $\vec{p}_2$ взят вектор $\vec{p}_2 + \lambda \vec{p}_1$. Очевидно, треугольник $A_0 A_2 A_2'$ преобразуется при переносе на вектор $\vec{p}_1$ в треугольник $A_1 A_{12} A_{12}'$, и площади этих треугольников одинаковы. Отсюда выводим на основании аксиом аддитивности и инвариантности, что площади S параллелограммов $A_0 A_1 A_2 A_{12}$, $A_0 A_1 A_2' A_{12}'$ также одинаковы. Подберем теперь такой множитель λ, чтобы $\vec{p}_2 + \lambda \vec{p}_1$ был перпендикулярен к $\vec{p}_1$ (второй параллелограмм будет прямоугольником). Так как $(\vec{p}_2 + \lambda \vec{p}_1)\, \vec{p}_1 = 0$, то длины сторон прямоугольника будут (рис. 45) $|\vec{p}_1|$, $\left|\vec{p}_2 - \frac{(\vec{p}_1 \vec{p}_2)}{\vec{p}_1^{\,2}} \vec{p}_1\right|$, выражающие соответственно длину основания и высоту данного параллелограмма. Отсюда площадь S параллелограмма равняется произведению его основания на высоту:

$$S = |\vec{p}_1| \left| \vec{p}_2 - \frac{\vec{p}_1\vec{p}_2}{\vec{p}_1^{\,2}}\vec{p}_1 \right|. \qquad (2.5)$$

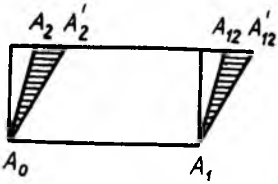


Рис. 45

Докажем теперь, что квадрат площади S параллелограмма равняется определителю Грама $\Gamma(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$, т. е.

$$S^2 = \begin{vmatrix} (\vec{p}_1\vec{p}_1) & (\vec{p}_1\vec{p}_2) \\ (\vec{p}_2\vec{p}_1) & (\vec{p}_2\vec{p}_2) \end{vmatrix}.$$

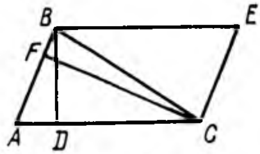


Рис. 46

В самом деле, из (2.5) следует, что

$$S^2 = \vec{p}_1^{\,2}\left(\vec{p}_2^{\,2} - \frac{2(\vec{p}_1\vec{p}_2)^2}{\vec{p}_1^{\,2}} + \frac{(\vec{p}_1\vec{p}_2)^2}{\vec{p}_1^{\,2}}\right) =$$

$$= \vec{p}_1^{\,2}\vec{p}_2^{\,2} - (\vec{p}_1\vec{p}_2)^2 = \Gamma(\vec{p}_1\vec{p}_2); \qquad (2.5')$$

очевидно, $\Gamma(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \Gamma(\vec{p}_2, \vec{p}_1)$.

Итак, если многоугольные фигуры имеют площади, то квадрат площади параллелограмма, определенного векторами $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, выходящими из общей точки, равняется определителю Грама от этих векторов.

Перейдем теперь к вычислению площадей треугольников. Предположим, что нам дан треугольник ABC с основанием $AC = b$ и высотой $BD = h$ (рис. 46).

Ясно, что площадь $S(ABC)$ треугольника ABC равняется половине площади параллелограмма $ABEC$. Но площадь параллелограмма равняется произведению его основания b на высоту h_b; следовательно,

$$S(ABC) = \frac{1}{2}bh_b. \qquad (2.5'')$$

Конечно, вместо b и h_b можно было бы взять другую сторону и соответствующую высоту, например c и h_c. Равенство произведений bh_b и ch_c следует из подобия прямоугольных треугольников ABD и AFC.

Таким образом, если многоугольные фигуры имеют площади, то площадь треугольника равняется половине произведения любой из его сторон на соответствующую высоту.

Теорема о существовании и единственности площади на классе многоугольных фигур

Теперь мы отбросим предположение о существовании функции на классе многоугольных фигур, удовлетворяющей требованиям аксиом 1—4, и перейдем к фактическому ее построению.

Теорема. На классе многоугольных фигур существует и притом только одна функция, удовлетворяющая требованиям 1—4 аксиом площадей.

Сначала докажем единственность искомой функции. Предположим, что существуют две функции S_1 и S_2, каждая из которых определена на классе многоугольных фигур и удовлетворяет требованиям 1—4 аксиом площадей. Для доказательства возьмем произвольную многоугольную фигуру F и разобьем ее на треугольники $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_r$ с основаниями $a_1, a_2, \ldots, a_r$ и соответствующими высотами $h_1, h_2, \ldots, h_r$. Функции S_1 и S_2 каждому треугольнику будут относить согласно (2.5) одно и то же значение: $S_1(\Delta_i) = S_2(\Delta_i) = a_i h_i/2$.

Следовательно, согласно аксиоме аддитивности

$$S_1(F) = S_2(F) = \sum_1^r a_i h_i/2, \tag{2.6}$$

т. е. функции $S_1(F)$ и $S_2(F)$ совпадают. Единственность функции доказана.

Докажем теперь существование функции, удовлетворяющей требованиям 1—4 аксиом площадей. Идею доказательства этого утверждения нам дают формулы (2.6). Более точно мы докажем, что правая часть формул (2.6) и есть искомая функция, удовлетворяющая требованиям аксиом 1—4. В самом деле, данную многоугольную фигуру можно разбить на треугольники и в каждом из них отметить основание и соответствующую высоту. Тогда формула (2.5) позволит нам определить величину $S(F) = \sum_{i=1}^r a_i h_i/2$, причем правая часть не зависит от выбора в составляющих треугольниках оснований и соответствующих высот. Непосредственно ясно, что построенная $S(F)$ удовлетворяет требованиям 1—4 аксиом площадей.

Остается лишь установить независимость значения $S(F)$ от способа разбиения многоугольной фигуры F на составляющие треугольники.

Это свойство следует из приводимых ниже двух теорем. Предварительно введем понятие *положительных* и *отрицательных* треугольников. Возьмем в плоскости треугольника ABC некоторую точку O и, соединяя ее с вершинами, образуем треугольники OAB, OAC, OBC. Треугольник, например, OAB называется положительным, если точки O и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB, и отрицательным в противном случае. Справедлива следующая важная теорема.

Теорема. Если в плоскости треугольника ABC взять точку O и соединить ее с вершинами A, B, C, то разность между суммой площадей положительных треугольников и суммой площадей отрицательных треугольников равняется площади треугольника ABC.

Чтобы доказать эту теорему, мы рассмотрим ряд случаев.

1. Точка O лежит на одной из сторон треугольника, например на стороне AC. Докажем, что площадь треугольника ABC равняется сумме площадей составляющих треугольников: $S(ABC) = S(ABO) + S(OBC)$.

Так как $S(OAB) = AO \cdot BD/2$, $S(OBC) = OC \cdot BD/2$, то в результате почленного сложения этих равенств мы получим площадь данного треугольника (рис. 47):

$$S(OAB) + S(OBC) = (AO + OC)\,BD/2 = S(ABC).$$

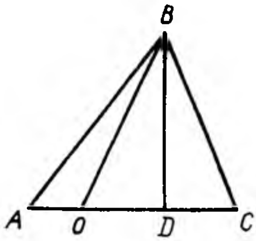


Рис. 47

2. Точка O лежит на продолжении одной из сторон треугольника, например на продолжении AC (рис. 48). В этом случае будем иметь:

$$S(ABO) = AO \cdot BD/2,$$
$$S(OBC) = CO \cdot BD/2,$$
$$S(ABC) = S(ABO) - S(OBC) = (AO - OC)\,BD/2,$$

т. е. теорема справедлива.

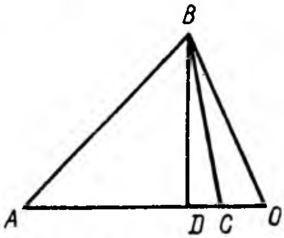


Рис. 48

3. Так как точка O лежит внутри треугольника, то все треугольники положительны. По аксиоме аддитивности имеем: $S(ABC) = S(ABD) + S(BDC)$, где D — точка пересечения прямой BO с основанием AC. Применяя эту же аксиому к треугольникам ABD и BDC (рис. 49), получим: $S(ABD) = S(ABO) + S(AOD)$, $S(BDC) = S(BOC) + S(DOC)$. Следовательно,

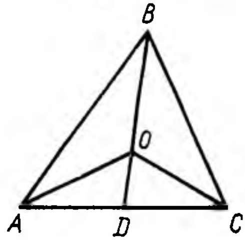


Рис. 49

$$S(ABC) = S(ABO) + S(AOD) + S(BOC) + S(DOC).$$

Объединяя второе и четвертое слагаемые, мы получим площадь треугольника AOC, а в целом в правой части будет сумма площадей трех положительных треугольников ABO, BCO и ACO. Теорема справедлива.

4. Точка O лежит вне треугольника в области, примыкающей к AC — одной из сторон треугольника. Тогда $S(ABC) = S(ABO) + S(OBC) - S(OAC)$.

5. Точка O лежит вне данного треугольника во внутренности угла, вертикального, например, углу A треугольника. В этом слу-

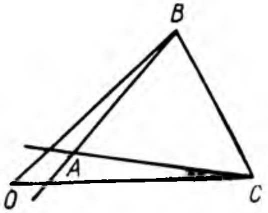


Рис. 50

чае треугольник OBC положительный и два треугольника OAC, OAB отрицательные. По аксиоме аддитивности имеем: $S(ABC) = S(OBC) - S(OBA) - S(OAC)$, т. е. теорема справедлива и в этом случае (рис. 50).

Доказанная теорема позволяет в свою очередь установить следующую важную теорему в теории площадей.

Теорема. Если на классе многоугольных фигур существует функция, удовлетворяющая требованиям 1—4 аксиом площадей, то, каким бы способом ни разлагалась данная многоугольная фигура на треугольники, сумма площадей этих треугольников будет одна и та же.

Предположим, что нам дана F — произвольная многоугольная фигура $M_1, M_2, \ldots, M_k$, правильно разложенная каким-нибудь способом на треугольники, и произвольная точка O в плоскости этой фигуры. Рассмотрим треугольники с общей вершиной O. Стороны, противоположные вершине O, будут сторонами составляющих треугольников. Среди этих треугольников будут положительные и отрицательные треугольники.

Допустим, что ABC — какой-нибудь составляющий треугольник, тогда OAB, OBC, OCA будут положительные или отрицательные относительно треугольника ABC. По предыдущей теореме площадь треугольника ABC равна разности между суммой площадей положительных и суммой площадей отрицательных треугольников. Перебирая таким образом все составляющие треугольники, мы убедимся, что их сумма площадей равна разности $S_1 - S_2$, где S_1 — сумма площадей положительных треугольников, S_2 — сумма площадей отрицательных треугольников.

Если какая-нибудь сторона AB составляющего треугольника правильного разбиения будет принадлежать внутренности F, то она будет принадлежать двум составляющим треугольникам без общих внутренних точек. Треугольник OAB будет положительным относительно одного из них и отрицательным относительно другого. Поэтому в разности $S_1 - S_2$ остаются лишь площади треугольников OAB, стороны AB которых принадлежат стороне данной многоугольной фигуры F. Объединяя теперь в S_1, S_2 площади треугольников, основания которых составляют одну сторону многоугольной фигуры F, мы убедимся, что $S_1 - S_2$ есть разность между суммами площадей положительных и отрицательных треугольников вида OM_1M_2, OM_2M_3, $\ldots$, OM_kM_1.

Мы рассмотрели теорему в предположении, что разбиение на треугольники правильное. Если же разбиение неправильное, то некоторые вершины составляющих треугольников будут внутренними точками сторон других составляющих треугольников. Соединяя эти точки с противоположными вершинами соответствующих треугольников, получим для данного разбиения новое правильное разбиение. В результате мы придем к разности $S_1 - S_2$, которая на основании предыдущей теоремы равна сумме площадей треугольников в первоначальном разбиении.

Вопросы и упражнения

1. Приведите примеры многоугольных фигур и изобразите их на рисунках.
2. Перечислите аксиомы площадей на классе многоугольных фигур K.
3. По какому плану (схеме) строится теория площадей на классе многоугольных фигур?
4. Приведите формулировку теоремы об однозначности и существовании площади.
5. На какие аксиомы и теоремы опирается доказательство однозначности площади на классе K?
6. Перечислите последовательность предложений (аксиом и теорем), составляющих доказательство теоремы существования площади многоугольных фигур.

§ 3. КЛАСС КВАДРИРУЕМЫХ ФИГУР

Определение квадрируемой фигуры

Мы рассмотрим теперь вопрос о расширении класса фигур, на котором можно было бы определить площади.

Допустим, что на плоскости нам дана произвольная фигура D, границей которой по предположению служит линия l. Рассмотрим многоугольную фигуру F^-, целиком содержащуюся в D, и многоугольную фигуру F^+, которая содержит фигуру D, т.е. $F^- \subset D \subset F^+$. Такие многоугольные фигуры F^-, F^+ называются соответственно входящими и объемлющими.

Фигуру D будем называть *квадрируемой фигурой*, если для всякого $\varepsilon > 0$ существуют такие многоугольные фигуры F^-, F^+, что

$$S(F^+) - S(F^-) < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Ясно, что если данная фигура D является многоугольной фигурой, то ее можно взять в качестве фигур F^-, F^+; очевидно, условие (3.1) будет выполняться. Отсюда следует, что всякая многоугольная фигура квадрируема.

Из этого определения следует, что квадрируемая фигура ограничена. Действительно, такая фигура содержится в некоторой многоугольной фигуре F^+, которая, как известно, ограничена.

Множество точек многоугольной фигуры F^+, не принадлежащих данной многоугольной фигуре F^-, называется *дополнением множества* F^- по отношению к множеству F^+. Легко видеть, что это дополнение в свою очередь является многоугольной фигурой, содержащей границу фигуры D.

Из определения квадрируемой фигуры D следует также, что ее граница может быть заключена в многоугольную фигуру сколь угодно малой площади. Очевидно, что это необходимое условие и достаточное.

Введем следующее определение. Мы будем говорить, что данное множество точек имеет нулевую площадь, если это множество можно заключить в многоугольную фигуру с произвольно малой площадью.

Признак квадрируемости теперь можно сформулировать в следующем виде: для того чтобы фигура D была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы ее граница имела площадь, равную нулю.

Нетрудно убедиться, что криволинейная трапеция, т. е. множество точек, ограниченное отрезком оси абсцисс, ординатами в концах этого отрезка и графиком непрерывной и неотрицательной функции, квадрируема.

С другой стороны, например, множество точек (x, y) квадрата, у которых ординаты являются рациональными числами, неквадрируемо (мы считаем, что оси координат направлены по двум смежным сторонам квадрата). В самом деле, в этом случае каждая точка квадрата является граничной, и, очевидно, в целом граница не будет нулевой площади.

Определение площади на классе квадрируемых фигур

Площади многоугольных фигур мы ввели аксиоматически. Аналогичным путем будем определять площади квадрируемых фигур.

Площадью фигуры называется функция, определенная на классе квадрируемых фигур и удовлетворяющая требованиям 1—4 аксиом площадей.

В частности, из того, что многоугольные фигуры квадрируемы, следует, что искомая функция на указанных фигурах совпадает с функцией S, которая нами рассматривалась в предыдущем параграфе. Новую функцию на классе квадрируемых фигур мы также будем обозначать тем же символом S. Существование и единственность этой функции мы докажем несколько позже. Теперь же, предполагая, что такая функция существует, получим некоторые необходимые условия.

Прежде всего легко показать, что площадь на классе квадрируемых фигур удовлетворяет следующему свойству монотонности. Если квадрируемая фигура N есть часть квадрируемой фигуры D, то $S(N) \leqslant S(D)$.

Действительно, ранее мы указывали, что разность $D - N$ является квадрируемой фигурой. Следовательно, квадрируемая фигура D составлена из квадрируемых фигур N, $D - N$, не имеющих общих точек, и по аксиоме 2 имеем: $S(N) + S(D - N) = S(D)$. Но согласно аксиоме позитивности $S(D - N) \geqslant 0$, поэтому

$$S(N) \leqslant S(D). \tag{3.2}$$

Предположим далее, что на плоскости нам дана произвольная квадрируемая фигура D. Рассмотрим всевозможные многоугольные фигуры F^- и F^+, такие, что $F^- \subset D \subset F^+$.

Если $S(F^-)$ и $S(F^+)$ обозначают площади многоугольных фигур соответственно F^- и F^+, то, очевидно, $S(F^-) \leqslant S(D) \leqslant S(F^+)$. Следовательно, множество чисел $S(F^-)$ ограничено сверху, и поэтому оно имеет точную верхнюю грань $S^-(D) = \sup S(F^-)$.

Аналогично множество чисел $S(F^+)$ ограничено снизу и, следовательно, имеет точную нижнюю грань $S^+(D) = \inf S(F^+)$. Ясно, что в общем случае $S^-(D) \leqslant S(D) \leqslant S^+(D)$. Но так как D является квадрируемой фигурой $S(F^-) \leqslant S^-(D)$, $S^+(D) \leqslant S(F^+)$, то $S^+(D) - S^-(D) < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ произвольно. Таким образом, имеем:

$$S^-(D) = S^+(D) = S(D). \tag{3.3}$$

Площадь квадрируемой фигуры есть точная верхняя грань площадей входящих многоугольных фигур и точная нижняя грань площадей объемлющих многоугольных фигур.

Т е о р е м а (существования и единственности). На классе квадрируемых фигур существует одна и только одна функция, удовлетворяющая требованиям аксиом 1—4 площадей.

Докажем сначала единственность. Предположим, что существуют две функции S_1 и S_2, каждая из которых определена на классе квадрируемых фигур и удовлетворяет требованиям аксиом площадей 1—4. В силу (3.3) для всякой квадрируемой фигуры D мы имеем:

$$S_1(D) = S_1^-(D) = \sup S_1(F^-),$$
$$S_2(D) = S_2^-(D) = \sup S_2(F^-),$$

где F^- — многоугольные фигуры, принадлежащие данной фигуре D. С другой стороны, по доказанной теореме единственности площади на классе многоугольных фигур $S_1(F^-) = S_2(F^-)$ для всякой многоугольной фигуры $F^- \subset D$.

Таким образом, $\sup S_1(F^-) = \sup S_2(F^-)$, и функции $S_1(D)$, $S_2(D)$ совпадают, т. е. для всякой квадрируемой фигуры D имеем: $S_1(D) = S_2(D)$.

Докажем теперь существование функции, определяющей площадь. Идею доказательства нам дает формула (3.3).

В самом деле, пусть нам дана произвольная квадрируемая фигура D и F^-, F^+ обозначают какие-нибудь многоугольные фигуры, такие, что $F^- \subset D \subset F^+$. Ясно, что множество чисел $S(F^-)$ ограничено сверху и пусть $\sup S(F^-)$ обозначает точную верхнюю грань, соответствующую фигуре D. Построим теперь следующую функцию $R(D)$ на классе квадрируемых фигур: $R(D) = \sup S(F^-)$, $F^- \subset D$. Очевидно, на классе многоугольных фигур функция $R(D)$ совпадает с функцией площади S. Докажем, что построенная функция $R(D)$ удовлетворяет требованиям 1—4 аксиом площадей. Действительно, непосредственно видно, что выполняются свойства позитивности, инвариантности и нормированности. Убедимся далее, что требование аддитивности также выполняется.

Допустим, что квадрируемая фигура $D = D_1 + D_2$ представляется в виде суммы квадрируемых фигур D_1, D_2 без общих внутренних точек.

Так как фигуры D_1, D_2, $D_1 + D_2$ квадрируемы, то

$$R(D_1) = \sup S(F_1^-),\ R(D_2) = \sup S(F_2^-),$$

$$R(D_1 + D_2) = \sup S(F_1^- + F_2^-).$$

Но последнее равенство можно переписать на основании аксиомы аддитивности для многоугольных фигур и свойств верхних граней в следующем виде:

$$R(D_1 + D_2) = \sup S(F_1^-) + \sup S(F_2^-) = R(D_1) + R(D_2).$$

Следовательно, свойство аддитивности функции $R(D)$ выполняется на классе квадрируемых фигур.

Замечания. а) Класс квадрируемых фигур можно значительно расширить, считая фигуру квадрируемой, если она измерима в смысле Лебега. Площадью фигуры в этом случае будет мера данной фигуры в смысле Лебега. Понятия измеримости и меры фигуры в смысле Лебега мы здесь не приводим.

Класс фигур, квадрируемых в смысле Лебега, является самым широким классом квадрируемых фигур при условии, что мы имеем дело лишь с ограниченной теорией множеств, т. е. теорией множеств, в которой не имеет места так называемая аксиома выбора (аксиома Цермело).

б) Вычисление площадей квадрируемых фигур производится при помощи интегрирования. Элементом площади в прямоугольных декартовых координатах будет площадь прямоугольника с измерениями dx, dy. Так как ds равняется абсолютной величине произведения $dx\,dy$, то площадь квадрируемой фигуры D выражается в виде двойного интеграла: $S(D) = \iint\limits_{(D)} dx\,dy$, распространенного на область D.

в) Нетрудно убедиться, что площади $S(D)$ фигур D при аффинном преобразовании умножаются на общий множитель. Но понятия равенства площадей, отношения площадей и аддитивности не зависят от выбора аффинной системы координат и являются понятиями аффинной геометрии.

Вопросы и упражнения

1. а) Дайте определение понятия квадрируемой фигуры.

б) Является ли многоугольная фигура квадрируемой фигурой?

в) Как определяются площади на классе квадрируемых фигур?

2. Есть ли отличия в доказательствах теоремы существования и единственности площади на классе многоугольных фигур и аналогичной теоремы на классе квадрируемых фигур?

3. Откуда следует вывод о том, что многоугольные фигуры квадрируемы?

4. Проверьте, что криволинейная трапеция квадрируема (криволинейная трапеция по определению является множеством точек, декартовы координаты (x, y) которых удовлетворяют неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — данная непрерывная функция).

Глава V
О СИМВОЛИЧЕСКИХ ИСЧИСЛЕНИЯХ И ФОРМАЛИЗАЦИИ ГЕОМЕТРИИ

В интуитивной теории нет строгого различия между тем, что очевидно, и тем, что должно доказываться.

Сравнительно более строгой является аксиоматическая теория, но и она лишь первое уточнение интуитивной теории. Здесь уже, как мы видели, выделяются основные понятия и перечисляются аксиомы, их описывающие. Свойства, не отмеченные в аксиомах, доказываются, а понятия, которые не являются основными, определяются. Каждое новое понятие сводится при помощи определения к ряду ранее введенных или основных понятий.

Следующим уточнением интуитивной теории является формальная аксиоматическая дедуктивная теория. Она также строится на аксиомах, но теперь явно перечисляются логические средства вывода следствий. Дальнейшая формализация дедуктивных теорий приводит к формализованным теориям и символическим исчислениям.

В развитии этого направления большую роль играли исследования по проблеме пятого постулата и теории множеств. Получение множества фактов по геометрии Лобачевского, противоречащих обычным представлениям, и открытие известных антиномий в теории множеств в большой мере содействовали выяснению логических основ математики.

Приведем в качестве примера следующий парадокс из теории множеств. Среди различных множеств заслуживают внимания множества, содержащие самих себя в качестве элемента. Например, множество всех множеств содержит самого себя в качестве элемента. Мы будем называть такие множества неправильными.

Множества, не содержащие самих себя в качестве элемента, будем называть правильными.

Ясно, что каждое множество будет правильным или неправильным. Поэтому все множества можно разбить на два класса: на класс, содержащий правильные множества, и класс, содержащий неправильные множества.

Возникает вопрос: каким будет множество X всех правильных множеств — правильным или неправильным?

Чтобы ответить на этот вопрос, предположим сначала, что множество X будет правильным. Тогда оно будет элементом множества всех правильных множеств, и, следовательно, множество X является неправильным, что противоречит предположению.

Предположим теперь, что множество X всех правильных множеств будет неправильным. Это означает, что среди элементов множества X встретится в качестве элемента само это неправильное множество, что также противоречит предположению.

Таким образом, множество X всех правильных множеств не является правильным и не является неправильным. Мы пришли к противоречию (парадоксу).

Как показывает детальное исследование, это парадокс логической природы и в целях предотвращения такого рода противоречий в математике следует точно сформулировать аксиомы и допустимые правила вывода, лежащие в основе теории множеств.

Чтобы иметь некоторые представления о формальной аксиоматической теории множеств, ниже приводится система аксиом Цермело—Френкеля. На этой основе мы приводим более строгие определения теории, системы аксиом, модели теории — понятий, связанных с аксиоматическим методом и математическими структурами. Естественно, указанный подход мы не могли осуществить в предыдущих главах книги, в которых рассмотрения проводились на уровне неформальной аксиоматической теории. Этот подход позволяет, как мы убедимся, обобщить понятие математической структуры.

Но предварительно познакомимся с примерами некоторых символических исчислений (исчисления высказываний, исчисления предикатов и исчисления предикатов с равенством).

§ 1. ПРИМЕРЫ СИМВОЛИЧЕСКИХ ИСЧИСЛЕНИЙ

Пример 1. Исчисление высказываний

Всякое предложение, относительно которого имеет смысл говорить, истинно оно или ложно, называется высказыванием.

Рассмотрим, например, следующие три предложения о натуральных числах: A) число 10 делится на 5; B) число 21 делится на 8; C) $x > 4$ ($x \in N$).

Первое из этих предложений является высказыванием, причем оно истинно. Второе предложение также является высказыванием, и оно ложно. Что касается третьего предложения, то оно не является высказыванием. Это предложение содержит переменную x, при значениях которой $x = 5, 6, \ldots$ получаются истинные высказывания, при значениях $x = 1, 2, 3, 4$ — ложные.

Если же x не фиксировать, то предложение $x > 4$ не является высказыванием, так как оно не истинно и не ложно.

Предложения, относительно которых невозможно решить вопрос, истинны они или ложны, не являются высказываниями.

В частности, вопросительные и восклицательные предложения не есть высказывания. Не будут также высказываниями и предложения, в которых определяется какое-нибудь понятие: например, предложение «Треугольник называется равнобедренным, если две его стороны конгруэнтны» также не является высказыванием.

Высказывания могут быть простыми или составными. Составные высказывания образуются из простых при помощи так называемых *операций конъюнкции, дизъюнкции, импликации, отрицания* и др.

Конъюнкция $A \wedge B$ *двух высказываний* A, B определяется как такое высказывание, которое принимает значение истинности (*И*), если значения обоих исходных высказываний принимают значение (*И*), во всех других случаях конъюнкция считается принимающей ложное (*Л*) значение. Таким образом, значения этого высказывания в зависимости от значений высказываний A и B представляются в виде таблицы 1.

Дизъюнкция $A \vee B$ *двух высказываний* A, B означает высказывание, принимающее значение *Л*, если оба высказывания принимают значение *Л*, во всех других случаях дизъюнкция $A \vee B$ принимает значение *И*. Указанные значения дизъюнкции представлены в таблице 2.

Таблица 1

A	B	$A \wedge B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Таблица 2

A	B	$A \vee B$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Таблица 3

A	B	$A \to B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Операция $A \to B$ — *импликация двух высказываний* A, B — определяется следующим образом. Высказывание $A \to B$ принимает значение *Л*, если высказывание A истинно, а высказывание B ложно. Во всех других случаях $A \to B$ по определению принимает значение *И*.

Операция отрицания позволяет по высказыванию A строить высказывание $\bar{A}$, значение истинности которого устанавливается по следующему правилу. Высказывание $\bar{A}$ принимает значение *И* или *Л*, если высказывание A принимает соответственно значение *Л* или *И*. Значения импликации и отрицания представляются таблицами 3, 4. Всякое простое или сложное высказывание, полученное из простых в результате применения указанных операций, называется *формулой*.

Таблица 4

A	$\bar{A}$
И	*Л*
Л	*И*

Таблица 5

A	$\bar{A}$	$\bar{\bar{A}}$	$A \to \bar{\bar{A}}$
И	*Л*	*И*	*И*
Л	*И*	*Л*	*И*

Обратим внимание на следующее свойство формул. Во множестве формул, соответствующих высказываниям, существуют формулы, принимающие всегда истинное значение при любых значениях *Й* или *Л* входящих в нее элементарных (атомарных) высказываний. Например, такими истинными будут формулы:

$$A \to \bar{\bar{A}}, \quad A \to A \vee B, \quad A \wedge B \to A. \tag{1.1}$$

Действительно, каждая из данных формул принимает всегда истинные значения, как показывают соответствующие таблицы истинности (табл. 5—7).

Таблица 6

A	B	$A \vee B$	$A \to A \vee B$
И	*И*	*И*	*И*
И	*Л*	*И*	*И*
Л	*И*	*И*	*И*
Л	*Л*	*Л*	*И*

Таблица 7

A	B	$A \wedge B$	$A \wedge B \to A$
И	*И*	*И*	*И*
И	*Л*	*Л*	*И*
Л	*И*	*Л*	*И*
Л	*Л*	*Л*	*И*

Нетрудно проверить, что каждая из нижеследующих формул принимает всегда истинные значения:

$$\begin{aligned}
&1.\ A \to (B \to A);\\
&2.\ (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C));\\
&3.\ [A \to B] \to ((A \to C) \to (A \to B \wedge C));\\
&4.\ [A \to C] \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C));\\
&5.\ (A \to B) \to (\bar{B} \to \bar{A});\\
&6.\ A \wedge B \to B;\\
&7.\ B \to A \vee B;\\
&8.\ \bar{\bar{A}} \to A.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Тождественно истинные формулы, как мы убедимся ниже, приобретают важное значение при построении исчисления высказываний.

Определение исчисления высказываний

Высказывания до сих пор мы понимали лишь в содержательном смысле. С этой точки зрения, в частности, выяснялась истинность и ложность сложных высказываний.

Поставим теперь задачу построения теории в предположении, что символы высказываний понимаются в абстрактном смысле, без использования в явном виде понятий истинности и ложности. Более того, мы не будем опираться и на законы логики, чтобы избежать порочного круга.

При построении исчисления высказываний мы используем набор символов

$$A,\ B,\ C,\ \ldots,\ X,\ Y,\ Z,\ \ldots, \tag{1.3}$$

именуемых условно высказываниями, и две операции над ними — дизъюнкцию $\vee$ и отрицание —. Понятие формулы определим следующим образом:

1. Всякое переменное высказывание есть формула.
2. Если α — формула, то $\overline{\alpha}$ — формула.
3. Если α и β — формулы, то $\alpha \vee \beta$ — формула.
4. Никаких других формул не существует.

В дальнейшем формулы часто будут обозначаться буквами греческого алфавита. Примерами формул являются

$$\alpha = \overline{X} \vee Y,\quad \beta = \overline{\overline{X}},\quad \gamma = X \wedge Y,\quad \delta = X \to Y.$$

Знаки конъюнкции $\wedge$ и импликации $\to$ связывают пары формул и определяются следующим образом:

$$\alpha \wedge \beta = \overline{\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}}, \tag{1.4}$$

$$\alpha \to \beta = \overline{\alpha} \vee \beta. \tag{1.5}$$

Аксиомы исчисления высказываний

Известно несколько систем аксиом исчисления высказываний. Мы приведем систему аксиом, состоящую из следующих четырех аксиом:

$$\begin{aligned} &1.\ X \vee X \to X; \\ &2.\ X \to X \vee Y; \\ &3.\ X \vee Y \to Y \vee X; \\ &4.\ (X \to Y) \to (Z \vee X \to Z \vee Y). \end{aligned} \tag{1.6}$$

В этих аксиомах используется определенный выше знак импликации. Очевидно, при желании аксиомы 1—4 могут быть совсем просто переписаны в виде, содержащем лишь основные знаки дизъюнкции и отрицания.

Теперь введем следующие правила вывода:

а) Правило отделения (modus ponens). Если формулы α и $\alpha \to \beta$ уже выведены из аксиом 1—4, то формула β также считается выведенной из этих аксиом.

б) Правило подстановки. В любую формулу, выведенную из аксиом 1—4, можно подставить вместо переменного высказывания любую правильно построенную формулу. Полученная в результате подстановки формула считается выведенной из тех же аксиом.

Например, предположим, что нам дана истинная формула β, содержащая A. Тогда, заменяя в данной формуле A всюду, где она входит, произвольной формулой γ, мы также получим истинную формулу.

Следствия из аксиом 1—4 исчисления высказываний

Процессы логического мышления в исчислении высказываний сводятся к некоторым механическим действиям над формулами по точно определенным правилам.

Теоремы являются утверждениями (формулами), выводимыми из аксиом.

Чтобы дать точное определение понятия теоремы, мы познакомимся сначала с понятиями доказательства и выводимости. Доказательством данной формулы (утверждения) T называется такая конечная последовательность формул

$$T_1, T_2, \ldots, T_n = T, \tag{1.7}$$

которая заканчивается данной формулой T и каждый ее член T_1, T_2, ... является аксиомой или получается по правилам вывода из одной или нескольких предыдущих формул этой последовательности. Другими словами, под доказательством формулы T в исчислении высказываний понимается набор конечной последовательности формул (1.7), обладающих свойствами:

1) формула T совпадает с последней формулой T_n цепочки (1.7);

2) каждая формула T_i цепочки является одной из аксиом 1—4 или ранее полученной формулой или получается из предыдущих формул этой цепочки по правилам вывода.

Формула T, полученная в результате доказательства, называется *доказуемой*. Говорят также, что формула T является теоремой данного исчисления.

В исчислении высказываний вводится также понятие вывода (следствия). *Формула* T называется *логическим выводом* (следствием) формул

$$T_1, T_2, \ldots, T_n, \tag{1.8}$$

что символически записывается в виде

$$T_1, T_2, \ldots, T_n \vdash T, \tag{1.9}$$

если T можно получить по правилам отделения и подстановки из формул (1.8) и аксиом 1—4 исчисления высказываний.

Формулы $T_1, \ldots, T_n$ называются *посылками, а формула* T — *заключением.*

Отметим, что упоминаемая в определении подстановка должна производиться лишь в формулы, доказуемые в исчислении высказываний.

Таким образом, 1) всякая доказуемая формула считается выводимой из формул (1.8); 2) всякая формула T_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) также считается выводимой из (1.8); 3) если γ и $\gamma \to \delta$ являются выводимыми из (1.8), то δ тоже считается *выводимой* из формул (1.8).

Справедлива так называемая теорема дедукции, согласно которой выводимость формулы T в (1.9) имеет место тогда и только тогда, когда справедлива формула

$$\vdash (T_1 \to (T_2 \to \ldots \to (T_{n-1} \to (T_n \to T)) \ldots)). \tag{1.10}$$

Очевидно, формулу (1.10) можно переписать в следующей эквивалентной форме:

$$\vdash T_1 \wedge T_2 \wedge \ldots \wedge T_n \to T. \tag{1.11}$$

Сопоставим теперь понятия вывода и доказательства. Из сравнения определений этих понятий сразу следует, что понятие вывода является обобщением понятия доказуемости; очевидно, доказательство формулы T является выводом этой формулы из пустого множества T_i посылок.

Примеры теорем

Теорема. Если формула $\alpha \vee \alpha$ доказуема, то формула α также доказуема.

В самом деле, по аксиоме 1 имеем: $X \vee X \to X$. Подставляя вместо X формулу α, получим, что

$$\alpha \vee \alpha \to \alpha \tag{1.12}$$

доказуема. Но по условию формула $\alpha \vee \alpha$ доказуема. Учитывая это, мы заключаем из (1.12) на основании правила отделения, что формула α также доказуема.

Теорема. Если формула α доказуема, то $\alpha \vee \beta$ тоже доказуема, где β — произвольная формула.

Доказательство следует из аксиомы 2 и правила подстановки. В самом деле, заменяя в этой аксиоме X на α, а переменную Y на β, получим: $\alpha \to \alpha \vee \beta$. Но по условию теоремы α доказуема. Применяя правило отделения, получим: $\alpha \vee \beta$ тоже доказуема.

Приводить другие теоремы исчисления высказываний мы не будем. Отметим лишь, что базисные (аксиомные) формулы 1—4 и правила вывода а), б) определяют класс доказуемых формул в исчислении высказываний.

О совместности, независимости и полноте аксиом исчисления высказываний

Аксиомы 1—4 исчисления высказываний, как нам известно, являются всегда истинными формулами.

Нетрудно убедиться, что правило подстановки, примененное к всегда истинной формуле, приводит снова к формуле, всегда истинной.

В самом деле, предположим, что формула $\alpha = \alpha(X, Y, Z, \ldots)$ всегда истинна. Очевидно, при подстановке вместо X, Y, Z некоторых формул будем получать по-прежнему всегда истинную формулу, так как множество значений формулы $\alpha(X, Y, Z, \ldots)$ после подстановки является частью множества значений $\alpha(X, Y, Z, \ldots)$.

Аналогичным свойством обладает и правило отделения, т. е. если формулы α, $\alpha \to \beta$ всегда истинные, то формула β также является всегда истинной.

Действительно, предположим, что формула β не является всегда истинной и принимает значение $Л$. Так как $\alpha \to \beta$ всегда истинна, то при значении $\beta = Л$ из нее следует, что $\alpha = Л$. Но этот вывод противоречит предположению о том, что α всегда истинная формула.

Итак, правило отделения позволяет из всегда истинных формул получать формулы, также всегда истинные.

Таким образом, в исчислении высказываний невозможно вывести из аксиом одновременно какую-нибудь формулу α и ее отрицание $\bar{\alpha}$; формула $\alpha \wedge \bar{\alpha}$ недоказуема в исчислении высказываний. Следовательно, система аксиом 1—4 исчисления высказываний непротиворечива (совместна).

Отметим, что система аксиом 1—4 независима, т. е. никакую из этих аксиом невозможно получить указанными правилами вывода из остальных аксиом.

Что касается полноты системы аксиом 1—4, то можно утверждать следующее. Система аксиом 1—4 исчисления высказываний полна в широком смысле (в смысле возможности вывода всех всегда истинных формул); эта система аксиом 1—4 также полна в узком смысле, т. е. при добавлении к аксиомам 1—4 какой-нибудь невыводимой формулы мы всегда будем приходить к противоречивой системе.

Вопросы и упражнения

1. Докажите, что если $\alpha \to \beta$ доказуема, то доказуема также формула $\alpha \vee \nu \to \beta \vee \nu$.

2. Докажите, что если $\alpha \vee \beta$ доказуема, то формула $\beta \vee \alpha$ также доказуема.

Пример 2. Исчисление предикатов. О предикатах и операциях над ними

Другим примером символического исчисления может служить так называемое *исчисление предикатов*, обобщающее рассмотренное выше исчисление высказываний.

В исчислении высказываний предложения рассматриваются лишь с точки зрения их истинности или ложности без учета внутренней структуры самого предложения. Однако мы часто пользуемся в математике такими предложениями, которые получаются из двух данных высказываний с учетом структуры последних.

Рассмотрим, например, следующие два высказывания:

1. Всякое рациональное число есть вещественное число.
2. Число два — рациональное число.

Оставаясь в рамках исчисления высказываний, мы не сможем вывести из высказываний 1—2 утверждение «Число два есть вещественное число». Чтобы прийти к этому выводу, надо учесть внутреннюю структуру высказываний 1—2. Только путем связки первой части предложения 2 со второй частью предложения 1 можно прийти к указанному выводу. Этот пример показывает необходимость построения исчисления, учитывающего внутреннюю структуру отдельных высказываний. Исчислением таким и является исчисление предикатов. Об этом исчислении речь будет идти в следующем пункте, а теперь мы пока остановимся на предикатах и алгебре предикатов в содержательном смысле.

В математике и других областях знания приходится постоянно иметь дело с предложениями, которые не являются высказываниями.

Например, предложение «x меньше y» не является высказыванием и потому не рассматривается в исчислении высказываний. Данное предложение будет высказыванием, если указать, какие конкретно числа x, y имеются в виду. Полагая $x = 2$, $y = 3$ или $x = 5$, $y = 4$, мы получим предложения соответственно «2 меньше 3», «5 меньше 4», которые будут уже высказываниями. Можно сказать, что предложение «x меньше y» является неопределенным высказыванием (предикатом) и зависит от двух предметных переменных.

Предикатами называются предложения $A(x)$, $B(x)$, $Q(x, y)$, $R(x, y, z)$, содержащие одну или несколько предметных переменных x, y, z, ..., которые при фиксировании последних (из допустимых областей значений) переходят в высказывания. Приведем примеры предикатов.

1. $P(x) =$ (число x делится на 3),
2. $Q(x) =$ (число x — нечетно),

где x принадлежит множеству N натуральных чисел.

Вставляя в $P(x)$, $Q(x)$ вместо x определенные натуральные числа, получим высказывания; очевидно, высказывания $P(6)$, $Q(15)$ истинны, $P(4)$, $Q(2)$ ложны.

Предикаты могут быть простыми и составными. Составные предикаты, как и высказывания, образуются из простых с помощью логических связок. Например, по двум предикатам $A(x)$ и $B(x)$, определенным на множестве M, можно построить составные предикаты, именуемые соответственно конъюнкцией, дизъюнкцией и импликацией предикатов $A(x)$ и $B(x)$. Приведем определение этих операций.

Конъюнкцией $A(x) \wedge B(x)$ *данных предикатов* $A(x)$ и $B(x)$, определенных на множестве M, называется предикат, который истинен для тех и только тех элементов $x \in M$, для которых данные предикаты одновременно истинны.

Дизъюнкцией предикатов $A(x)$ и $B(x)$ называется *предикат* $A(x) \vee B(x)$, который истинен для тех и только тех элементов $x \in M$, для которых истинен по крайней мере один из предикатов $A(x)$, $B(x)$.

Таким образом, множество истинности предиката $A(x) \wedge B(x)$ является пересечением множеств истинности сомножителей $A(x)$, $B(x)$; множество истинности предиката $A(x) \vee B(x)$ будет объединением множеств истинности слагаемых предикатов $A(x)$ и $B(x)$.

Переходим к импликации предикатов. *Импликацией данных предикатов* $A(x)$ и $B(x)$ называется предикат $A(x) \rightarrow B(x)$, который принимает ложное значение при тех значениях $x \in M$, при которых $A(x)$ истинно, а $B(x)$ обращается в ложное высказывание. При всех других значениях $x \in M$ предикат $A(x) \rightarrow B(x)$ обращается в истинное высказывание. Предикаты $A(x)$ и $B(x)$ в записи $A(x) \rightarrow B(x)$ называются соответственно *условием* и *заключением импликации*.

Также просто переносится на предикаты и операция отрицания. В самом деле, пусть на множестве M задан предикат $A(x)$. *Отрицанием предиката* $A(x)$ называется предикат $\overline{A}(x)$ с той же областью определения M, что и $A(x)$, который принимает значение истины при $x \in M$ тогда и только тогда, когда данный предикат $A(x)$ для данного x обращается в ложное высказывание.

Остановимся еще на двух очень важных операциях над предикатами, называемых *квантором всеобщности* и *квантором существования*; обозначаются эти кванторы символами $\forall x$ и $\exists x$ соответственно.

В высказываниях часто встречаются слова «каждый», «любой», «все» и др., выражающие всеобщность. При записи таких высказываний в виде формул указанные слова заменяются на символ $\forall x$ — квантор всеобщности. Символ $\forall$ вместе с предметной переменной x записывается впереди предиката, к которому он относится. Например: $(\forall x)\ A(x)$, $(\forall x)\ B(x)$, где $A(x)$, $B(x)$ — указанные выше предикаты. Формулы эти читаются соответственно так: для всякого x выполняется $A(x)$, $B(x)$. Формула $\forall x\, A(x)$ выражает истинное высказывание, если $A(x)$ истинно для каждого x, и ложное в противном случае.

Рассмотрим пример. Предположим, что нам дан предикат $A(x) =$ $=$ (треугольник x — равнобедренный), определенный на множестве M всех треугольников. Тогда формула $(\forall x)\, A(x)$ выражает высказывание «всякий треугольник x равнобедренный», принимающее значение лжи.

В общем случае на квантор всеобщности, стоящий впереди предиката с n предметными переменными (n — местный предикат), можно смотреть как на операцию, которая позволяет получить предикат с $n-1$ предметными переменными ($n-1$ — местный предикат).

В приведенном выше примере мы из одноместного предиката $A(x)$ с помощью квантора общности $\forall$ получили 0 — местный предикат, высказывание.

Переходим ко второму квантору $\exists x$. В высказываниях часто встречаются такие слова, как «существует», «найдется» и др., выражающие наличие объекта с определенными свойствами. При записи таких высказываний в виде формул указанные слова вместе с x заменяются на символ $\exists x$ — квантор существования; квантор $\exists x$ пишется также впереди формулы, к которой он относится. Так, например, формула $(\exists x)\, A(x)$, где $A(x)$ — одноместный предикат, обозначает высказывание, которое является истинным, если в множестве элементов M можно найти такой элемент $x = a$, что $A(a)$ истинно. Если же в множестве M нет ни одного элемента $x = a$, для которого $A(a)$ истинно, то высказывание $(\exists x)\, A(x)$ считается ложным. Таким образом, на символ $\exists$ можно смотреть как на операцию, позволяющую из предиката $A(x)$ получить высказывание.

Вопросы и упражнения

Постарайтесь выяснить смысл формул:

а) $a = b \approx \forall A\, [p_1(A, a) \to p_1(A, b)] \wedge \forall A\, [p_1(A, b) \to p_1(A, a)]$;

б) $\alpha = \beta \approx \forall A\, [p_2(A, \alpha) \to p_2(A, \beta)] \wedge \forall A\, [p_2(A, \beta) \to p_2(A, \alpha)]$;

в) $p_3(A, B, C) \to (\exists a)\, [p_1(A, a) \wedge p_1(B, a) \wedge p_1(C, a) \wedge A \neq B \wedge A \neq C \wedge \wedge B \neq C]$, где $p_1(A, a)$, $p_2(A, \alpha)$ — соответственно предикаты инцидентности точки A и прямой a, точки A и плоскости α, предикат $p_3(A, B, C)$ — точка B — лежит между точками A, C.

Определение исчисления предикатов

При построении исчисления предикатов используются знаки $\vee$, —, $\wedge$, $\to$, из которых первые два описываются аксиомами, а остальные определяются через них.

В этом исчислении вводятся три рода переменных:

а) Предметные переменные $x, y, z, \ldots$. Значения этих переменных принадлежат некоторому множеству M (или нескольким множествам).

б) Переменные высказывания $A, B, C, \ldots, X, Y, Z, \ldots$ (эти переменные встречались у нас при построении исчисления высказываний).

в) Предикатные переменные $P(\ \ )$, $Q(,)$, $R(,,)$, ...

Затем определяется индуктивно понятие формулы, подобно тому как это делалось в исчислении высказываний:

1. Переменное высказывание по определению является формулой.

2. Переменный предикат есть формула.

3. Если α и β — формулы, то $\alpha \vee \beta$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$, $\overline{\alpha}$ являются формулами.

4. Если $\alpha (x)$ — формула, содержащая переменную x, то $(\exists x)\, \alpha (x)$, $(\forall x)\, \alpha (x)$ также формулы.

5. Никаких других формул не существует. В этом определении предполагается, что в формуле $\alpha (x)$ переменная x содержится свободно, т. е. она не связана ни квантором общности, ни квантором существования. Из приведенного определения формулы следует, что предметное переменное не является формулой.

Приведем еще определение формулы, истинной на поле M, и всегда истинной формулы.

Формула называется истинной на некотором множестве (поле) элементов M, если она переходит в истинное высказывание при любых подстановках значений переменных при предположении, что предметные переменные принадлежат полю M. Говорят также, что формула всегда истинна, если она истинна на любом поле M; такая формула называется законом логики предикатов.

Рассматриваемое исчисление предикатов называется также исчислением предикатов первой ступени или узким исчислением предикатов. Символы и формулы, описанные выше, символы логических связок, скобки и запятые образуют язык исчисления предикатов первой ступени.

Переходим к аксиомам исчисления предикатов. Основные формулы (аксиомы) этого исчисления составляются так, чтобы при содержательном чтении их получались всегда истинные формулы:

Аксиомы исчисления предикатов

1. $X \vee X \rightarrow X$;
2. $X \rightarrow X \vee Y$;
3. $X \vee Y \rightarrow Y \vee X$;
4. $(X \rightarrow Y) \rightarrow ((Z \vee X) \rightarrow (Z \vee Y))$;
5. $(\forall x)\, P (x) \rightarrow P (y)$;
6. $P (x) \rightarrow (\exists y)\, P (y)$.

Аксиомы 1—4 по форме совпадают с аксиомами исчисления высказываний; в последних двух аксиомах явно содержатся кванторы общности и существования.

Правила вывода подбираются так, чтобы они позволяли переходить от аксиом 1—6 к другим истинным формулам.

Приведем формулировку важнейших правил вывода: правила отделения, подстановки и связывания кванторами.

1. Правило отделения. Если из аксиом 1—6 выводимы форму-

лы α, $\alpha \to \beta$, то формула β считается выводимой из аксиом 1—6.

2. Правило подстановки. На место высказывательных и предикатных переменных в выведенной формуле можно подставлять другие (соответствующие) формулы, не допуская при этом коллизии букв. Например, в подставляемой формуле не должны встречаться буквы, которые в первоначальной формуле уже содержатся под знаком действия квантора общности или существования.

Полученная в результате подстановки формула также считается выводимой из аксиом.

3. Правила связывания кванторами.

а) Если из аксиом выводима формула $\alpha(x) \to \beta$, где β не зависит от x, то формула $(\exists x)\, \alpha(x) \to \beta$ считается выводимой.

б) Если из аксиом выводима формула $\beta \to \alpha(x)$, где β не зависит от x, то формула $\beta \to (\forall x)\, \alpha(x)$ считается выводимой.

Мы не даем здесь сводку всех правил подстановки, а также других вспомогательных правил вывода.

Нетрудно убедиться, что всякая выводимая из аксиом 1—6 формула по указанным выше правилам вывода является всегда истинной.

Например, рассмотрим правило отделения. Если формулы α, $\alpha \to \beta$ всегда истинные формулы, то формула β всегда истинна. В самом деле, если бы β была ложной, то α также была бы ложной, что невозможно по условию.

Очевидно, правило подстановки также позволяет получать из всегда истинных формул только всегда истинные.

Пусть далее нам дано, что формула

$$\alpha \to \beta(x) \tag{1.13}$$

всегда истинна. Нетрудно убедиться, что правило связывания квантором общности дает формулу

$$\alpha \to (\forall x)\, \beta(x), \tag{1.14}$$

снова всегда истинную; в самом деле, если (1.14) была ложной на некотором поле M, то:

а) $\alpha = И$; б) $(\forall x)\, \beta(x) = Л$.

Из (б) следовало бы тогда, что существует такой элемент $x_0 \in M$, что $\beta(x_0) = Л$; однако в этом случае формула (1.13) при $x = x_0$ имела бы значение

$$(\alpha \to \beta(x_0)) = Л, \tag{1.15}$$

что невозможно по условию. Следовательно, формула (1.14) всегда истинна.

Наконец, предположим, что формула

$$\alpha(x) \to \beta \tag{1.16}$$

всегда истинна, и докажем, что

$$(\exists x)\, \alpha(x) \to \beta \tag{1.17}$$

также всегда истинна. В самом деле, предположим, что (1.17) принимает на некотором поле M значение $Л$. Последнее в свою очередь означает, что: а) $(\exists x)\, \alpha(x) = И$; б) $\beta = Л$.

Из а) следует, что существует элемент $x_0 \in M$, обладающий свойством $\alpha(x) : \alpha(x_0) = И$; из (б) выводим, что (1.16) принимает при x_0 ложь, что невозможно.

Учитывая далее, что аксиомы 1—6 являются всегда истинными и правила вывода из всегда истинных формул позволяют получить только всегда истинные формулы, совсем просто убедиться, что система аксиом исчисления предикатов непротиворечива.

Действительно, из аксиом 1—6 исчисления предикатов невозможно вывести противоречия, т. е. вывести некоторую формулу α и ее отрицание $\overline{\alpha}$ (формулы α и $\overline{\alpha}$ не могут быть одновременно истинными ни в каком поле).

В исчислении предикатов полноту аксиом 1—6 можно понимать, как в исчислении высказываний, в широком смысле. Такая полнота имеет место (теорема Геделя): из аксиом 1—6 указанными правилами вывода выводятся все всегда истинные формулы.

Что касается полноты системы аксиом 1—6 в узком смысле, то вопрос этот решается отрицательно.

Вопросы и упражнения

Выпишите на языке исчисления предикатов первой ступени аксиомы принадлежности 1—8 аксиоматики Гильберта евклидовой геометрии.

Пример 3. Исчисление предикатов с равенством

Из одних лишь аксиом 1—6 исчисления предикатов невозможно вывести никаких математических предложений; к аксиомам 1—6 надо присоединить математические аксиомы. Эти дополнительные аксиомы будут вводить символы индивидуальных предикатов и предметов.

Добавляя к аксиомам исчисления предикатов аксиомы, описывающие свойства индивидуального двухместного предиката $T(x, y)$, мы получим третий пример символического исчисления — аксиоматическую теорию равенства (исчисление предикатов первой ступени с равенством).

Аксиомы равенства

7. $(\forall x)\, T(x, x)$; (1.18)
8. $(\forall xyP)\, [T(x, y) \rightarrow (P(x) \rightarrow P(y))]$. (1.19)

Первые шесть аксиом равенства являются аксиомами исчисления предикатов. Предикат $T(x, y)$ в аксиомах 7, 8 обозначает некоторый индивидуальный предикат, предикат равенства, а $P(x)$ обозначает переменный предикат.

В теории равенства сохраняются правила вывода исчисления предикатов: правило отделения, правила подстановки и связывания кванторами.

Необходимо лишь сделать одно замечание относительно этих правил. Оно касается правила подстановки: вместо предиката $T(x, y)$ не разрешается подставлять никакой другой предикат. Другими словами, правило подстановки не должно применяться к индивидуальному предикату $T(x, y)$.

Из аксиом 1—8 исчисления предикатов с равенством следует, что $T(x, y)$ симметричен и транзитивен, т. е.

$$T(x, y) \rightarrow T(y, x), \tag{1.20}$$

$$T(x, y) \wedge T(y, z) \rightarrow T(x, z). \tag{1.21}$$

Отсюда и из аксиомы 7 теории равенства следует, что предикат $T(x, y)$ определяет в поле M отношение эквивалентности. Переходим к определению символического исчисления.

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИМВОЛИЧЕСКОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Мы познакомились с примерами символических исчислений. В исчислении высказываний указывались символы, правила образования формул, аксиомы и правила вывода.

В исчислении высказываний и исчислении предикатов с равенством в основном повторялась одна схема построения. Существенно новым обстоятельством в исчислении предикатов является наличие трех родов символов, а именно символов предметных переменных, переменных высказываний и предикатных переменных.

Символическое исчисление в общем случае также *определяется*: 1) заданием символов; 2) правилами образования формул из этих символов; 3) заданием базисных формул (аксиом); 4) заданием правил преобразований (правил вывода). Совокупность используемых символов и формул образует так называемый *язык исчисления*.

Предложения в символических исчислениях представляются в виде выражений, т. е. в виде конечных линейных последовательностей знаков. Некоторые из этих выражений являются формулами, построенными из символов по указанным правилам образования. Совокупность построенных формул в свою очередь содержит совокупность доказуемых формул — формул, которые получаются из данных базисных (аксиомных) формул по заданным правилам преобразования.

Очевидно, множество базисных формул, а также множества доказуемых и всех формул можно изобразить наглядно в множестве всех выражений символического исчисления.

Получение теорем и выводов сводится к механическим операциям над формулами, отысканию конечных цепочек формул, аналогичных доказательствам и выводам в исчислениях высказываний и предикатов.

Это свойство обычно используется при применении символических исчислений к решению математических задач и задач из области техники. Особо важную роль в указанных приложениях играют исчисления, языком которых является язык рассмотренного выше исчисления предикатов, язык первой ступени.

Дадим определение непротиворечивости исчисления. Символическое исчисление называется *непротиворечивым* (совместным), если в нем невыводимы никакие два предложения, из которых одно является отрицанием другого. Здесь речь идет о символических исчислениях, в которых используется язык исчисления предикатов первой ступени, т. е. существуют отрицания, а кванторы общности и существования применяются для связывания лишь предметных переменных.

Говорят также, что система базисных формул символического исчисления *независима*, если ни одна из формул этой системы не может быть получена из остальных по правилам преобразования данного символического исчисления.

Два исчисления называются *эквивалентными*, если они состоят из одних и тех же формул и наименьшая совокупность доказуемых формул, содержащая базисные формулы и замкнутая относительно правил преобразования одного исчисления, совпадает с соответствующей совокупностью формул другого исчисления.

В эквивалентных исчислениях базисные формулы будут, вообще говоря, различными.

Приведем еще один пример символического исчисления, языком которого является язык исчисления предикатов с равенством. Предположим, что нам даны два рода символов предметных переменных

$$A,\ B,\ \ldots,\ X,\ Y,\ Z,\ U,\ V,\ \ldots \tag{2.1}$$

$$a,\ b,\ \ldots,\ x,\ y,\ z,\ u,\ v,\ \ldots \tag{2.2}$$

и два специальных двуместных предикатных символа $p\,(,)$, $=$. Отметим, что в действительности мы опираемся на язык исчисления предикатов с двумя родами символов предметных переменных; в частности, кванторы всеобщности и существования должны пониматься как соответствующие ограничения. Простейшие формулы будут вида $p\,(X,\ u)$, $X = Y$, $a = b$; все другие получаются из простейших с помощью логических связок.

Базисные формулы исчисления

1. $\forall XY \exists a\, [p\,(X,\ Y,\ a)]$,
2. $\forall XY\, (X \neq Y)\, [p\,(X,\ Y,\ a) \to (p\,(X,\ Y,\ b) \to (a = b))]$,
3. $\forall u\, \exists XY\, [p\,(X,\ Y,\ u)]$,
4. $\exists XYZ \forall u\, [\overline{p\,(X,\ Y,\ Z,\ u)}]$.

Символ $p\,(X,\ u)$ является предикатной постоянной и характеризуется базисными формулами 1—4. В этом исчислении отсутствуют символы операций (отображений вида $M^k \to M$) и совокупность предметных символов совпадает с множеством так называемых термов исчисления.

В базисных формулах 1—4 мы применили следующие сокращения:

$$p(X, u) \wedge p(Y, u) = p(X, Y, u), \ p(X, u) \wedge p(X, v) = p(X, u, v),$$
$$p(X, u) \wedge p(Y, u) \wedge p(Z, u) = p(X, Y, Z, u),$$
$$p(X, u) \wedge p(X, v) \wedge p(Y, u) \wedge p(Y, v) = p(X, Y, u, v).$$

Любая формула рассматриваемого исчисления является формулой исчисления предикатов с равенством, содержащего предикатную постоянную $p(X, u)$.

Формула является теоремой тогда и только тогда, когда для нее можно найти цепочку формул, представляющую собой доказательство данной формулы.

Доказательство же, как мы видели на примерах 1—3 исчислений, рассмотренных выше, представляет цепочку формул, каждая из которых является либо базисной (аксиомой) формулой, либо ранее доказанной формулой, либо получается из них по правилам преобразований (вывода) исчисления предикатов с равенством. Последней формулой в наборе формул, составляющем доказательство, должна быть доказываемая формула.

В качестве примера доказательства формулы в этом исчислении рассмотрим формулу

$$(\forall uvXY)\ \overline{u = v}\ [p(X, Y, u, v) \to (X = Y)]. \qquad (2.3)$$

Убедимся, что выписанную формулу можно получить из базисных формул 1—4 правилами преобразований (вывода), используемыми в исчислении предикатов (с равенством) первой ступени.

В самом деле, рассмотрим формулу

$$(\forall XYuv)\ [\overline{X = Y} \wedge p(X, Y, u, v) \to (u = v)]. \qquad (2.4)$$

Она доказуема согласно второй базисной формуле. Из формулы (2.4) следует, что формула под знаком кванторов общности

$$\overline{X = Y} \wedge p(X, Y, u, v) \to (u = v)$$

также доказуема. Применяя далее правило обобщенной контрапозиции [14], получим еще одну доказуемую формулу вида

$$\overline{u = v} \wedge p(X, Y, u, v) \to X = Y.$$

Наконец, вводя кванторы общности согласно правилам вывода, заключаем:

$$(\forall\ uvXY)\ [\overline{u = v} \wedge p(X, Y, u, v) \to X = Y],$$

т. е. формула (2.3) действительно доказуема.

При построении этого исчисления мы полностью отвлекались от конкретной природы основных образов и отношений и конкретного смысла предиката $p(X, u)$.

Условимся теперь считать, что символы

$$A,\ B,\ \ldots,\ X,\ Y,\ \ldots$$

обозначают точки, а символы a, b, ..., u, v, ...

прямые. Тогда базисные (аксиомные) формулы 1—4 будут совпадать с аксиомами рода структуры инцидентности.

Будем считать далее, например, цифры 1, 2, 3 точками, а множества $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ прямыми; предикат $p(X, u)$ точки X и прямой u описывает отношение инцидентности. В нашем случае оно понимается как отношение принадлежности в теоретико-множественном смысле точки X к подмножеству u.

Нетрудно убедиться, что формулы 1—4 в этой системе объектов выполняются, причем базисные формулы оказываются символической записью аксиом рода структуры инцидентности (с. 25).

Система выбранных объектов из цифр и предиката $p(X, u)$ дает модель аксиом 1—4 (структуру рода структур, определенного аксиомами 1—4).

В заключение параграфа отметим, что важную роль играют символические исчисления, использующие язык исчисления предикатов с аксиомами равенства. Они приводят к понятию математической теории и позволяют более точно определить понятия предложения, системы аксиом, непротиворечивости и др. Приведем определения некоторых из этих понятий.

Математической теорией или просто *теорией* называется всякая совокупность Γ формул, замкнутая относительно выводимости в исчислении предикатов с равенством. Замкнутость понимается в том смысле, что всякая формула, выводимая из формул совокупности Γ, принадлежит этой же совокупности. В частности, выводимые формулы исчисления предикатов содержатся в теории Γ (они выводятся из пустого множества формул теории Γ). Однако в собственно математической теории имеются формулы, не выводимые в исчислении предикатов.

Пусть Σ обозначает совокупность всех формул, полученных из символов данной теории Γ. Всякая формула $\varphi \in \Sigma$ может принадлежать или не принадлежать теории Γ. Предложением теории Γ называется формула $\varphi \in \Gamma$, не содержащая свободных переменных. Естественно, определяется понятие системы аксиом, модели, непротиворечивости и полноты.

Предположим, что нам дана теория Γ. Совокупность формул $\mathfrak{A} \subset \Gamma$ называется системой аксиом теории Γ, если множество формул, выводимых из формул системы $\mathfrak{A}$, совпадает с множеством формул Γ.

Моделью теории Γ называется одно или несколько множеств, на которых определены основные предикаты теории Γ так, что все предложения теории Γ будут истинными. Например, всякая конкретная группа может служить моделью теории групп.

Теория Γ называется *непротиворечивой* (совместной), если в ней не содержится никакого предложения вместе с его отрицанием.

Теория Γ называется *полной*, если для всякого ее предложения $\varphi \in \Sigma$ выполняется одно из включений: $\varphi \in \Gamma$ или $\overline{\varphi} \in \Gamma$.

Исчисление предикатов, которое мы вкратце рассмотрели выше, называется *исчислением предикатов первого порядка*. В этом исчислении кванторы общности и существования употребляются лишь для связывания предметных переменных.

Если же кванторы общности и существования применяются также для связывания предметных переменных и переменных предикатов, то исчисление называется *исчислением предикатов второго порядка*. Примером формулы исчисления предикатов второго порядка является формула, выражающая принцип Дедекинда разбиения точек прямой на два класса (с. 89). Разбиение точек прямой на классы описывается предикатом, и в формулировке принципа Дедекинда используется квантор общности по отношению к этому предикату.

Теория, в которой используется лишь исчисление предикатов первого порядка, называется элементарной теорией. Элементарными теориями, например, являются теория групп, теория колец и полей, теория структур рода инцидентности.

Теория, в которой применяется исчисление предикатов второго порядка, называется *неэлементарной*. Примерами неэлементарных теорий являются известные читателю теории — евклидова геометрия и геометрия Лобачевского. Неэлементарной теорией является теория Пеано натурального ряда, так как в аксиоме математической индукции речь идет о любых свойствах натуральных чисел, в том числе и невыразимых средствами языка исчисления предикатов первого порядка.

Если из аксиом Гильберта исключить аксиомы непрерывности, то оставшиеся аксиомы определяют элементарную теорию, называемую иногда элементарной теорией евклидовой геометрии.

Справедлива следующая интересная теорема относительно элементарных теорий: если элементарная теория допускает модель M бесконечной мощности $|M| = \mu$, то она допускает также модели M_1, M_2 данных бесконечных мощностей соответственно μ_1, μ_2, причем $\mu_0 \leqslant \mu_1 < \mu < \mu_2$, где данное $\mu_0 < \mu$; кроме того, $M_1 \subset \subset M \subset M_2$.

Этот результат принадлежит Левенгейму, Сколему и Тарскому. Мы приводим его без доказательств.

Из приведенной теоремы следует, в частности, что всякая элементарная теория, имеющая модель бесконечной мощности, является некатегоричной (см. следующий пункт).

Категоричность и дедуктивная полнота теории

В первой главе при рассмотрении аксиоматических теорий мы ввели понятие категоричности и дедуктивной полноты системы аксиом. Теперь можно убедиться, что эти понятия не эквивалентны. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим теорию, в которой используется предикат равенства «$x = y$» и предикат меньше или равно «$x \leqslant y$».

Объединение второго предиката с отрицанием первого определяет предикат меньше, т. е. «$x < y$».

Предположим также, что эти предикаты удовлетворяют следующим аксиомам теории плотных линейно упорядоченных множеств без первого и последнего элемента:

1. $(\forall x)\,[x \leqslant x]$;
2. $(\forall xy)\,[(x \leqslant y) \wedge (y \leqslant x) \to (x = y)]$;
3. $(\forall xyz)\,[(x \leqslant y) \wedge (y \leqslant z) \to (x \leqslant z)]$;
4. $(\forall xy)\,[(x \leqslant y) \vee (y \leqslant x)]$.
5. Если $\overline{x = y}$, то существует такое z, что

$$(x < z < y) \vee (y < z < x).$$

6. Для любого x существует такое z, что $z < x$;
7. Для любого x существует такое z, что $x < z$.

Данная система аксиом, очевидно, определяет элементарную теорию и не имеет конечных моделей; далее, совокупность вещественных чисел интервала (0, 1) является моделью аксиом 1—7 мощности континуума. С другой стороны, совокупность рациональных чисел этого интервала также будет моделью счетной мощности этих аксиом, причем нетрудно показать, что любые две модели счетной мощности изоморфны.

Мы видим, что модели эти разной мощности и, следовательно, они неизоморфны. Система аксиом 1—7 некатегорична, однако можно доказать, что эта система аксиом является дедуктивно полной.

Этот вывод вытекает из следующей интересной теоремы Воота: если элементарная теория Г не имеет конечных моделей и категорична в некоторой бесконечной мощности (т. е. все модели теории Г некоторой данной бесконечной мощности изоморфны друг другу), то теория будет дедуктивно полной.

Наметим идею доказательства. Пусть дана некоторая элементарная теория Г, которая не имеет конечных моделей и категорична, например, в бесконечной мощности μ. Надо доказать, что эта теория является дедуктивно полной. Пусть теория Г дедуктивно неполна, т. е. существует некоторое предложение X, которое не доказуемо и неопровержимо в теории Г. В этом случае, как известно, существуют две модели M_1, M_2 бесконечной мощности теории Г, такие, что в модели M_1 предложение X истинно, а в модели M_2 оно ложно.

Предположим теперь, что для мощностей $|M_1|$, $|M_2|$ множеств соответственно M_1, M_2 выполняются соотношения $\mu \leqslant |M_1|$, $\mu \leqslant |M_2|$. В этом случае по теореме Левенгейма — Сколема — Тарского существуют модели M_1', M_2' данной бесконечной мощности μ, такие, что

$$M_1' \subset M_1,\ M_2' \subset M_2.$$

Кроме того, по условию теоремы модели M_1', M_2' изоморфны. Поэтому предложение X в M_1' и M_2' имеет одно и то же значение истинности.

С другой стороны, M_1' и M_2' являются подмоделями в моделях M_1 и M_2 соответственно, т. е. предложение истинно в M_1' (M_2') тогда и только тогда, когда оно истинно в самой модели M_1 (M_2).

Таким образом, предложение X будет иметь одинаковое значение истинности в моделях M_1 и M_2, что невозможно. Следовательно, предположение о том, что теория Г дедуктивно неполна, приводит к противоречию. Другие случаи связей μ, $|M_1|$, $|M_2|$ сводятся к разобранному случаю.

§ 4. О ФОРМАЛИЗОВАННОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И ФОРМАЛИЗОВАННОЙ ГЕОМЕТРИИ (ОБЗОР)

1. Формализованная теория множеств и геометрия

Ниже приводится аксиоматика Цермело — Френкеля теории множеств, в которой основными понятиями являются понятия «множества» и «содержит» (синонимы «принадлежит», «есть член», «элемент»). Понятие «содержит» обозначается символом $\in$. Опираясь на эти основные понятия, можно определить понятие подмножества (включение) следующим образом.

Предположим, что нам даны два множества y, z, и если любой член (элемент) первого множества является членом второго множества, т. е. $x \in y$ влечет $x \in z$, то y называется *подмножеством множества* z (y включается в z); затем вводится понятие собственного подмножества (если y включается в z и множество z содержит некоторый элемент, а множество y его не содержит, то y называется *собственным подмножеством* множества z). Эти понятия обозначаются символами $y \subseteq z$ соответственно $y \subset z$.

Аксиомы теории множеств

1. Два множества равны, если они имеют в точности одни и те же элементы. В символической записи $\forall AB\ (\forall x\ (x \in A \leftrightarrow x \in B) \to \to A = B)$.

2. Существует по крайней мере одно пустое множество. В символической записи $\exists x\ \forall y\ (y \notin x)$.

3. Если A и B являются множествами, то неупорядоченная пара $\{A, B\}$ является множеством, состоящим из элементов A и B. В символической записи $\forall AB\, \exists C\ \forall x\ (x \in C \leftrightarrow x = A \vee x = B)$.

4. Если A — множество, то B — множество, элементы которого являются элементами множеств, принадлежащих A. В символической записи $\forall A\ \exists B\ \forall x\ (x \in B \leftrightarrow \exists X(x \in X \wedge X \in A))$.

5. Существует множество, имеющее бесконечно много элемен-

тов. В символической записи $\exists X (\varnothing \in X \wedge \forall Y (Y \in X \rightarrow Y \vee \vee \{Y\} \in X))$.

6. Если для фиксированных $t_1, t_2, \ldots, t_k$ справедливо, что $A_n (x, y, t_1, \ldots, t_n)$ однозначно определяет y как функцию x ($y = f(x)$), то для каждого u значение функции f на u является множеством. В символической записи $\forall t_1 \ldots t_k \forall x \exists y! (A_n (x, y, t_1, \ldots, t_k) \rightarrow \forall u \exists v B(u, v))$, где $B(u, v) \equiv \forall r (r \in v \leftrightarrow \exists s (s \in u \wedge A_n (s, r, t_1, \ldots, t_k)))$, и формула $B(u, v)$ не содержит свободных вхождений переменной y.

7. Совокупность всех подмножеств данного множества A является множеством. В символической записи $\forall A \exists X \forall B (B \in X \leftrightarrow B \subseteq A)$.

8. Если I — непустое множество, $\{X_i\}_{i \in I}$ — непустое семейство непустых множеств и если задано отображение, например, $\{<i, X_i>\}_{i \in I}$, то существует другое отображение $\{<i, f(i)>\}$, такое, что $\forall i \in I (f(i) \in X_i)$. Таким образом, для всех $i \in I$ можно одновременно выбрать по одному элементу $x_i \in X_i$.

9. Не существует бесконечных убывающих последовательностей $\{x_n\}$ ($n \in N$), таких, что $x_{n+1} \in x_n$ для всех $n \in N$ (из нее следует, что $\forall x (x \notin x)$). В символической записи $\forall x \exists y (x = \varnothing \vee y \in x \wedge \forall z (z \in x \rightarrow \overline{z \in y}))$ [16].

Аксиомами 1—9 исчерпывается аксиоматика Цермело—Френкеля теории множеств.

Исключительная роль в теории множеств принадлежит аксиоме 8, называемой также аксиомой выбора. Эта аксиома впервые была сформулирована Цермело, и, подобно пятому постулату Евклида, она вызвала появление большого количества исследований.

В отличие от других аксиом теории множеств этой аксиомой выбора гарантируется существование множества без указания характеристических свойств, которым должны удовлетворять его элементы. Поэтому можно утверждать, что аксиома выбора опирается на очевидность другого вида, чем остальные аксиомы.

С аксиомой выбора начиная с 1904 г. связана большая история. Это вторая аксиома в математике после эксиомы параллельности Евклида, ставшая предметом многочисленных исследований математиков. Подобно пятому постулату, она допускает несколько равносильных друг другу формулировок.

Обратим внимание читателя на аксиому 6, называемую аксиомой подстановки. Эта аксиома требует бесконечного числа высказываний, в ней речь идет о том, что если $y = f(x)$ — функция, определяемая свойством A, то область значений f на любом множестве u является множеством. Для того чтобы аксиоматизировать понятие «свойство», необходимо бесконечное число высказываний. Аксиомы 1—9 составляют наиболее распространенный вариант аксиоматического определения теории множеств. Мы привели их здесь потому, что на русском языке еще мало имеется пособий, из которых читатель мог бы получить простейшие представления по вопросу обоснования теории множеств.

Присоединяя к аксиомам 1—8 исчисления предикатов с равенством выписанные аксиомы 1—9 теории множеств, мы получим систему аксиом формализованной теории множеств.

Более того, если к аксиомам формализованной теории множеств мы присоединим аксиомы некоторой математической дисциплины, выраженные в терминах теории множеств, то получим аксиоматику соответствующей формализованной теории.

Например, присоединяя к аксиомам исчисления предикатов с равенством и аксиомам 1—9 теории множеств аксиомы А. Н. Колмогорова, мы получим аксиоматику формализованной евклидовой геометрии.

Разумеется, что понятия формулы и доказуемой формулы в формализованной геометрии должны быть уточнены. Соответствующим образом уточняются и правила вывода.

В конечном итоге формализованная геометрия представляется в виде символического исчисления.

2. О дедуктивной полноте элементарной теории евклидовой геометрии

Важные результаты в области формализации математики принадлежат Д. Гильберту. Он рассчитывал путем формализации арифметики и теории множеств доказать формальную их непротиворечивость и дать тем самым строгое и эффективное обоснование всей математики.

Но программа Д. Гильберта оказалась невыполнимой. Такой вывод следует из теоремы К. Геделя о несуществовании исчисления, выводимые формулы которого интерпретировались бы в виде всех истинных предложений элементарной теории арифметики целых чисел. Последняя не является дедуктивно полной. Дедуктивная полнота означает, что всякое предложение теории можно доказать или опровергнуть при помощи формально-логического вывода из аксиом (предложение называется опровержимым, если отрицание этого предложения является теоремой в данной теории).

В формализованной арифметике можно найти формулу, которая выражает истинное утверждение, но ни она, ни ее отрицание не являются теоремами формализованной арифметики.

Присоединяя такую формулу к аксиомам, мы найдем в расширенной системе новую формулу, истинную, но формально недоказуемую и неопровержимую. Теория будет по-прежнему дедуктивно неполной.

Таким образом, при формализации категоричной неэлементарной аксиоматической теории средствами исчисления предикатов первой ступени можно прийти к различным элементарным дедуктивно неполным исчислениям (обычная теория Пеано неэлементарна). Элементарная арифметика и дедуктивно неполна, и некатегорична.

Но теория групп третьего порядка, например, дедуктивно полна и категорична; для теории групп четвертого порядка ни категоричность, ни дедуктивная полнота не имеют места.

Евклидова геометрия, как отмечалось выше, является неэлементарной теорией из-за неэлементарности аксиомы непрерывности. Геометрия N, определенная аксиомами Гильберта без группы аксиом непрерывности, будет элементарной теорией.

Возникает вопрос: можно ли присоединить к аксиомам геометрии N предложение теоретико-множественного характера, выраженное на языке первой ступени так, чтобы полученная новая система аксиом N' была дедуктивно полной? Ответ на него положительный, как следует из теоремы Швабхойзера, доказанной в 1956 г. В основе доказательства лежит теорема Тарского о дедуктивной полноте элементарной теории вещественных чисел.

Заметим, что вопрос о категоричности систем аксиом элементарных теорий арифметики и геометрии решается отрицательно (как известно, обычная евклидова геометрия категорична).

Этот результат следует из приведенной выше теоремы Левенгейма — Сколема — Тарского, согласно которой элементарная теория, допускающая бесконечную модель, не является категоричной, т. е. она допускает неизоморфные друг другу модели.

Однако элементарная теория N' евклидовой геометрии (с так называемой аксиомой непрерывности Тарского, элементарной), будучи некатегоричной, является все же дедуктивно полной системой (доказательство не приводим).

3. Заключительные замечания

В первой главе было введено понятие математической структуры на языке теории множеств. Теперь это понятие можно обобщить в следующих двух направлениях.

А. Если заменить используемый в определении структуры язык теории множеств на язык L исчисления предикатов с равенством, то придем к структурам первого порядка. В языке таких структур используются следующие символы:

1) Символы объектов или так называемые *предметные* символы a, b, c, ... В каждом конкретном случае их запас уточняется. При применении к структурам, например, с одним базисным множеством M рассматриваемые символы обозначают элементы этого множества. Символы переменных x, y, z, ..., которые при применении к конкретным структурам S имеют своей областью значений базисное множество структуры.

2) Символы специальных отношений, называемые также предикатными символами p_i ($i \in I$). В структурах они интерпретируются как основные отношения (предикаты) соответствующей n_i -арности. Нульарные предикатные символы являются высказываниями.

3) Логические символы — отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации, квантора существования и квантора всеобщности.

4) Вспомогательные символы — скобки, запятые и другие знаки.

Затем определяется по индукции понятие формулы:

1. Предикатные символы с подставленными предметными символами или символами переменных являются формулами (примитивными). Нульарные предикатные символы также являются формулами.

2. Если $\alpha(x)$ — формула, x — символ свободной предметной переменной (т. е. x не связана ни квантором существования ни квантором всеобщности), то $\exists x\, \alpha(x)$, $\forall x\, \alpha(x)$ — формулы.

3. Если α, β — формулы, то $\alpha \vee \beta$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$ — формулы (предполагается, что в формулах α и β нет такой переменной, которая бы в одной из формул была свободной, а в другой — связанной).

4. Если α — формула, то $\bar{\alpha}$ также формула.

Правилами 1—4 определяются всевозможные формулы языка. В итоге мы приходим к расширению L' языка L, получаемому присоединением к L специальных предикатных символов.

В случае добавления символов операций в формулы могут входить на местах предметных символов и символов переменных еще так называемые термы — символы результатов операций. Если же операции отсутствуют, множество термов будет совпадать с множеством предметных символов; отметим, что выражения вида $x = y$, $a = y$ являются формулами нашего языка.

Говорят, что расширенный язык L' задан на структуре S с базисным множеством M и основными отношениями p_i $(i \in I)$, если указано некоторое однозначное отображение f, относящее: 1) каждому предметному символу языка некоторый элемент из базисного множества M структуры S; 2) каждому предикатному символу — предикат (отношение) соответствующего числа аргументов из S; каждому нульарному предикатному символу языка — определенное значение *И*, *Л* на структуре S.

В отдельных случаях имеет смысл отождествить предикатные символы языка на структуре с предикатами на этой структуре, но отображение f, осуществляющее указанное отождествление, не является взаимнооднозначным.

Следует отметить также, что структуры первого порядка усиленно изучаются в настоящее время. Рамки пособия не позволяют нам углубиться в эту интересную тематику.

Б. Важные классы математических структур можно получить при надлежащем расширении языка теории множеств. Такие понятия, как топологические пространства, дифференцируемые многообразия, группы Ли и алгебры Ли, римановы пространства, пространства аффинной связности, расслоенные пространства со связностями, представляют собой множества, наделенные структурами определенного рода. Указанные структуры на базисных множествах определяются заданием полей геометрических объектов. Некоторые из этих структур рассматриваются во втором разделе книги.

РАЗДЕЛ II
ОБОБЩЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Глава VI
НЕЕВКЛИДОВЫ ГЕОМЕТРИИ

§ 1. ЭЛЕМЕНТЫ СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

В этом параграфе мы рассмотрим элементы так называемой сферической геометрии — геометрии сферы евклидова пространства. Роль прямых линий на сфере играют большие окружности, т. е. такие окружности, плоскости которых проходят через центр данной сферы.

Так как любые два больших круга пересекаются, то в сферической геометрии не осуществляется ни постулат Евклида, ни аксиома параллельности Лобачевского. В этой геометрии не выполняется также ряд других фактов абсолютной геометрии.

Например, прямые в сферической геометрии замкнуты, и на них невозможно установить понятие точки, лежащей «между» для трех точек, инцидентных прямой, так как каждую из этих точек на окружности можно считать точкой, лежащей между двумя другими. Две точки на большом круге определяют два отрезка, и прямые имеют конечную длину. Таким образом, аксиомы порядка в сферической геометрии должны описывать свойства циклического расположения точек на прямой. И все же, несмотря на указанные различия в сферической геометрии, имеется много свойств, аналогичных соответствующим свойствам в евклидовой геометрии и геометрии Лобачевского. Эти геометрии, включая и геометрию достаточно малых кусков сферы, в основных вопросах не противопоставляются между собой, а копируют друг друга.

Возьмем на сфере три точки A, B, C, не лежащие в одной плоскости с центром O данной сферы. Совокупность этих точек и дуг AB, BC и AC больших окружностей (меньшие полуокружности) называется *сферическим треугольником* ABC. Точки A, B, C называются *вершинами* сферического треугольника, а дуги AB, BC, AC — его сторонами. *Углом* A сферического треугольника ABC называется *угол между касательными*, проведенными к дугам AB и AC в точке их пересечения A. Очевидно, этот угол является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями больших окружностей AB и AC. Ясно, что сферический треугольник можно получить с помощью трехгранного угла, если пересечь его сферой, центр которой будет совпадать с вершиной данного угла. В самом деле, в пересечении сферы с гранями данного трехгранного угла мы получим сферический треугольник.

Расстоянием между точками A, B на сфере называется длина той из дуг AB большой окружности, которая не больше полуокружности.

Из школьного курса геометрии известно, что в трехгранном угле любой его плоский угол меньше суммы двух других плоских углов и больше их разности. В геометрии сферы этому предложению соответствует следующая теорема. Во всяком сферическом треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других его сторон и больше их разности.

На основании этой теоремы, как и в обычной планиметрии, доказывается, что в сферическом треугольнике против большей стороны лежит больший угол и, обратно, против большего угла лежит большая сторона.

В этой геометрии имеются сферические двуугольники — фигуры более простые, чем сферические треугольники. Сферический двуугольник по определению представляет часть сферы, ограниченную двумя большими полуокружностями, пересекающимися в двух диаметрально противоположных точках.

Симметрия сферы относительно диаметральной плоскости и поворот ее вокруг диаметра на данный угол, очевидно, представляют собой примеры преобразований сферы, при которых расстояние между любыми двумя точками равно расстоянию между их образами. Приведем общее определение.

Преобразования сферы, при которых сохраняются расстояния между любыми двумя точками, называются *движениями*. Сферическая геометрия изучает свойства фигур, сохраняющиеся при любых движениях сферы.

1. Полярные треугольники

Всякая плоскость α, проходящая через центр сферы, пересекает эту сферу по большой окружности. Концы A, A' диаметра, перпендикулярного плоскости α, называются *полюсами* этой окружности. В этом случае большая окружность называется *полярой точек A и A'*.

Очевидно, все точки поляры удалены от своего полюса на расстояние, равное $\pi R/2$, где R обозначает радиус данной сферы. Ясно также, что если данная точка удалена от двух точек большой окружности на расстояние $\pi R/2$, то она является полюсом этой большой окружности. Перейдем теперь к определению полярного треугольника.

Если вершины треугольника ABC являются полюсами сторон другого сферического треугольника $A_1B_1C_1$ (рис. 51), то этот по-

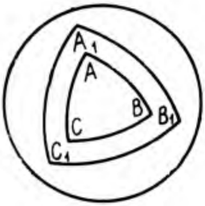


Рис. 51

следний называется *полярным треугольником* по отношению к данному.

Таким образом, радиус-вектор $\overrightarrow{OA}$ перпендикулярен векторам $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OC_1}$, т. е. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC_1} = 0$.

Аналогично будем иметь:

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB_1} = 0.$$

Отсюда следует, что если треугольник $A_1B_1C_1$ будет полярным к треугольнику ABC, то треугольник ABC в свою очередь будет полярным по отношению к треугольнику $A_1B_1C_1$.

Таким образом, сферические треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ взаимно полярны друг другу.

Будем обозначать вершины и углы сферического треугольника большими буквами латинского алфавита A, B, C, а противоположные им стороны — соответствующими малыми буквами того же алфавита a, b, c. Вершины и противоположные им стороны полярного треугольника будем обозначать теми же буквами с индексами A_1, B_1, C_1 соответственно a_1, b_1, c_1.

Угол A сферического треугольника ABC (т. е. угол между касательными в точке A к сторонам b и c) равен углу между плоскостями AOB и AOC. Он равен углу между векторами $[\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OB}]$ и $[\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OC}]$, т. е.

$$\cos A = \frac{[\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OB}]\,[\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OC}]}{|[\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OB}]| \cdot |[\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OC}]|}. \tag{1.1}$$

Линейные элементы треугольника здесь и в дальнейших формулах входят в виде отношений к радиусу сферы, поэтому целесообразно ввести следующее понятие приведенной длины. Расстояние между двумя точками на сфере, отнесенное к ее радиусу, будем называть приведенным расстоянием.

Докажем следующее предложение о взаимно полярных треугольниках.

Теорема. Угол одного сферического треугольника и соответствующая ему приведенная сторона взаимно полярного треугольника дополняют друг друга до π, т. е.

$$A + \frac{a_1}{R} = A_1 + \frac{a}{R} = \pi \tag{1.2}$$

и т. д.

Так как

$$\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OC} = R^2 \cos\frac{a}{R}, \tag{*}$$

то из (*) следует, что

$$\cos\frac{a_1}{R}=\frac{[\overrightarrow{OC}\,\overrightarrow{OA}]\,[\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OB}]}{|[\overrightarrow{OC}\,\overrightarrow{OA}]|\cdot|[\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OB}]|};\qquad \cos\frac{a_1}{R}=-\cos A.$$

Таким образом, выводим:

$$\cos\frac{a_1}{R}=\cos(\pi-A),\ \frac{a_1}{R}+A=\pi. \tag{1.3}$$

Аналогично доказываются остальные равенства:

$A_1+\frac{a}{R}=B+\frac{b_1}{R}=B_1+\frac{b}{R}=C+\frac{c_1}{R}=C_1+\frac{c}{R}=\pi.$ Перейдем к выводу некоторых формул сферической геометрии.

2. Метрические соотношения в треугольниках сферической геометрии

Наша ближайшая цель — вывести основные формулы сферического треугольника.

а) Прежде всего докажем так называемую теорему косинусов. Предположим, что нам дан сферический треугольник ABC, вершины которого определяются радиус-векторами $\overrightarrow{OA}$ $(\vec{x})$, $\overrightarrow{OB}$ $(\vec{y})$, $\overrightarrow{OC}$ $(\vec{z})$. Стороны, противолежащие вершинам A, B, C, обозначим соответственно через a, b, c (рис. 52).

Очевидно, стороны треугольника ABC связаны с радиус-векторами вершин следующими равенствами:

$$\cos\frac{a}{R}=\frac{\vec{y}\,\vec{z}}{R^2},\ \cos\frac{b}{R}=\frac{\vec{z}\,\vec{x}}{R^2},\ \cos\frac{c}{R}=\frac{\vec{x}\,\vec{y}}{R^2}. \tag{1.4}$$

Предположим сначала, что каждая из приведенных сторон $\frac{a}{R}$, $\frac{b}{R}$ сферического треугольника ABC меньше $\frac{\pi}{2}$. Касательная плоскость к сфере в точке C пересекает $[OA)$ и $[OB)$ в точках A_1 $(\lambda\vec{x})$ и B_1 $(\mu\vec{y})$. Числовые множители λ и μ радиус-векторов точек A_1 и B_1 определяются нетрудно из условия ортогональности векторов $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{CA_1}$ и $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{CB_1}$. Действительно, $\overrightarrow{OC}\,\overrightarrow{CA_1}=$
$=(\vec{z},\ \lambda\vec{x}-\vec{z})=0;$
следовательно, $\lambda\vec{x}\vec{z}=R^2$.

Учитывая далее (1.4), заключаем:

$$\lambda=1/\cos\frac{b}{R}. \tag{1.5}$$

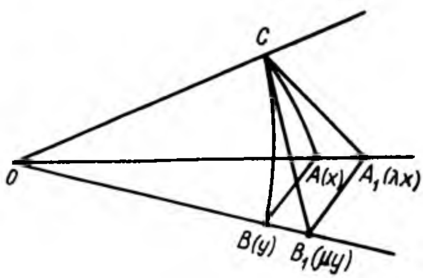


Рис. 52

Повторяя приведенные рассуждения для другой пары $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{CB_1}$ ортогональных векторов, мы получим:

$$\mu = 1/\cos\frac{a}{R}. \tag{1.6}$$

Найдем теперь скалярное произведение векторов $\overrightarrow{CA_1}$ и $\overrightarrow{CB_1}$. С одной стороны, имеем:

$$\overrightarrow{CA_1}\overrightarrow{CB_1} = |\overrightarrow{CA_1}| \cdot |\overrightarrow{CB_1}| \cos C, \tag{1.7}$$

где

$$|\overrightarrow{CA_1}|^2 = (\lambda\vec{x} - \vec{z})^2, \ |\overrightarrow{CA_1}|^2 = (\lambda^2 - 1) R^2,$$
$$|\overrightarrow{CB_1}|^2 = (\mu\vec{y} - \vec{z})^2, \ |\overrightarrow{CB_1}|^2 = (\mu^2 - 1) R^2.$$

Следовательно, на основании (1.5) и (1.6) окончательно выводим:

$$|CA_1| = R\,\mathrm{tg}\,\frac{b}{R}, \ |CB_1| = R\,\mathrm{tg}\,\frac{a}{R}.$$

Таким образом, получаем:

$$\overrightarrow{CA_1}\overrightarrow{CB_1} = R^2\,\mathrm{tg}\,\frac{a}{R}\,\mathrm{tg}\,\frac{b}{R}\cos C. \tag{1.8}$$

С другой стороны, $\overrightarrow{CA_1}\overrightarrow{CB_1} = (\lambda\vec{x} - \vec{z}, \ \mu\vec{y} - \vec{z})$, т. е.

$$\overrightarrow{CA_1}\,\overrightarrow{CB_1} = \lambda\mu\vec{x}\vec{y} - \lambda\vec{x}\,\vec{z} - \mu\vec{z}\,\vec{y} + \vec{z}^2.$$

Применяя далее формулы (1.5), (1.6) и (1.4), мы получим:

$$\overrightarrow{CA_1}\overrightarrow{CB_1} = R^2\,\frac{\cos\frac{c}{R} - \cos\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R}}{\cos\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R}}. \tag{1.9}$$

Приравнивая правые части (1.8) и (1.9), заключаем:

$$\sin\frac{a}{R}\sin\frac{b}{R}\cos C = \cos\frac{c}{R} - \cos\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R},$$

или

$$\cos\frac{c}{R} = \cos\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R} + \sin\frac{a}{R}\sin\frac{b}{R}\cos C. \tag{1.10}$$

Если одна из приведенных сторон $\frac{a}{R}$, $\frac{b}{R}$ треугольника ABC, например сторона a, больше $\frac{\pi}{2}$, то рассмотрим сферический треугольник $AB'C$, где точка B' диаметрально противоположна точке B. В этом сферическом треугольнике две приведенные стороны CB'/R и CA/R меньше $\pi/2$; формула (1.10) для треугольника $AB'C$ справедлива, причем угол $B'CA$, смежный с углом BCA, равен $\pi - C$.

Применяя к сферическому треугольнику $AB'C$ формулу (1.10), получим:

$$\cos\left(\pi-\frac{c}{R}\right)=\cos\left(\pi-\frac{a}{R}\right)\cos\frac{b}{R}-\sin\frac{a}{R}\sin\frac{b}{R}\cos C;$$

таким образом,

$$-\cos\frac{c}{R}=-\cos\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R}-\sin\frac{a}{R}\sin\frac{b}{R}\cos C,$$

т. е. формула (1.10) в этом случае остается справедливой для треугольника ABC.

Если обе приведенные стороны $\frac{a}{R}$, $\frac{b}{R}$ сферического треугольника ABC больше $\pi/2$, то продолжим указанные стороны до пересечения в точке C', диаметрально противоположной точке C.

В полученном сферическом треугольнике ABC' каждая из приведенных сторон $\frac{AC'}{R}=\pi-\frac{b}{R}$, $\frac{BC'}{R}=\pi-\frac{a}{R}$ меньше $\pi/2$. Таким образом, формула (1.10) справедлива для этого треугольника $AC'B$. Учитывая далее, что угол $AC'B$ равен углу C, получим:

$$\cos\frac{c}{R}=\cos\left(\pi-\frac{a}{R}\right)\cos\left(\pi-\frac{b}{R}\right)+\sin\left(\pi-\frac{a}{R}\right)\sin\left(\pi-\frac{b}{R}\right)\cos C.$$

Следовательно, $\cos\frac{c}{R}=\cos\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R}+\sin\frac{a}{R}\sin\frac{b}{R}\cos C$, т. е. формула (1.10) также справедлива для сферического треугольника ABC.

Формула (1.10), определяющая сторону сферического треугольника через две другие стороны и косинус противолежащего угла, называется теоремой косинусов.

б) Переходим к выводу теоремы синусов. Вычислим квадрат отношения $\sin\frac{c}{R}/\sin C$. На основании теоремы косинусов (1.10) имеем:

$$\frac{\sin^2\frac{c}{R}}{\sin^2 C}=\frac{\sin^2\frac{c}{R}}{1-\cos^2 C}=\frac{\sin^2\frac{a}{R}\sin^2\frac{b}{R}\sin^2\frac{c}{R}}{\sin^2\frac{a}{R}\sin^2\frac{b}{R}-\left(\cos\frac{c}{R}-\cos\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R}\right)^2}. \qquad (*)$$

Мы видим, что числитель правой части является симметричным выражением относительно переменных a, b, c. Легко убедиться, что знаменатель $(*)$ также симметричен относительно указанных линейных элементов. В самом деле,

$$\sin^2\frac{a}{R}\sin^2\frac{b}{R}-\left(\cos\frac{c}{R}-\cos\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R}\right)^2=\left(1-\cos^2\frac{a}{R}\right)\left(1-\cos^2\frac{b}{R}\right)-$$
$$-\left(\cos\frac{c}{R}-\cos\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R}\right)^2=1-\cos^2\frac{a}{R}-\cos^2\frac{b}{R}-\cos^2\frac{c}{R}+$$
$$+2\cos\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R}.$$

Таким образом, квадрат искомого отношения (*) симметричен относительно сторон a, b, c. Это означает, что, заменяя обозначения сторон a, b, c и углов A, B, C в круговом порядке (*), мы получим отношения $\sin^2 \frac{a}{R} \Big/ \sin^2 A$, $\sin^2 \frac{b}{R} \Big/ \sin^2 B$, равные $\sin^2 \frac{c}{R} \Big/ \sin^2 C$. Извлекая из этих отношений квадратные корни, получим формулы

$$\frac{\sin \frac{a}{R}}{\sin A} = \frac{\sin \frac{b}{R}}{\sin B} = \frac{\sin \frac{c}{R}}{\sin C}, \tag{1.11}$$

выражающие теорему синусов сферического треугольника: синусы приведенных сторон сферического треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

3. Формулы прямоугольного сферического треугольника

Предположим, что угол C сферического треугольника ABC является прямым. Применяя теорему косинусов (1.10), получим:

$$\cos \frac{c}{R} = \cos \frac{a}{R} \cos \frac{b}{R}. \tag{1.12}$$

Это равенство выражает теорему Пифагора в сферической геометрии: косинус приведенной гипотенузы прямоугольного треугольника равняется произведению приведенных косинусов катетов. Применяя формулу (1.11), получим:

$$\begin{aligned} \sin \frac{a}{R} &= \sin \frac{c}{R} \cos A, \\ \sin \frac{b}{R} &= \sin \frac{c}{R} \cos B. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Доказанные формулы прямоугольного треугольника можно выписать, пользуясь так называемым *правилом Непера*. Чтобы сформулировать это правило, мы условимся располагать элементы прямоугольного треугольника в циклическом порядке: a, B, c, A, b (рис. 53).

Для каждого из этих элементов предшествующий и последующий элементы называются *прилежащими*, а остальные два элемента — *противолежащими*. Для катета b, например, элементы a, A будут прилежащими, а элементы c, B — противолежащими. Прилежащими элементами для гипотенузы являются углы A и B, а противолежащими — катеты a и b.

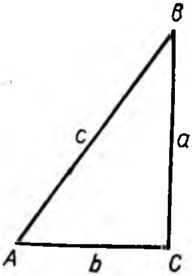


Рис. 53

Сформулируем теперь правило Непера. Косинус любого элемента сферического прямоугольного треугольника равняется произведению синусов противолежащих элементов или произведению котангенсов прилежащих элементов. Если под знаком функции стоит катет, то тригонометрическая функция меняется на смежную — синус на косинус, тангенс на котангенс и наоборот. Заметим также, что во всех формулах длины катетов и гипотенузы делятся на радиус сферы R.

4. Вторая теорема косинусов

Предположим, что сферический треугольник $A_1B_1C_1$ является полярным к данному треугольнику ABC. Применяя к нему теорему косинусов, мы получим:

$$\cos\frac{c_1}{R} = \cos\frac{a_1}{R}\cos\frac{b_1}{R} + \sin\frac{a_1}{R}\sin\frac{b_1}{R}\cos C_1.$$

Но в силу формул (с. 135) имеем:

$$\frac{a_1}{R} = \pi - A,\ \frac{b_1}{R} = \pi - B,\ \frac{c_1}{R} = \pi - C,\ C_1 = \pi - \frac{c}{R}.$$

Заменяя в предыдущем равенстве стороны и углы только что выписанными выражениями, получим:

$$\cos(\pi - C) = \cos(\pi - A)\cos(\pi - B) + \\ + \sin(\pi - A)\sin(\pi - B)\cos\left(\pi - \frac{c}{R}\right),$$

или

$$\cos C = -\cos A\cos B + \sin A\sin B\cos\frac{c}{R}. \qquad (*)$$

Формула (*) составляет содержание 2-й теоремы косинусов. Косинус угла сферического треугольника равен произведению косинусов двух других углов, взятому с обратным знаком и сложенному с произведением синусов тех же углов на косинус приведенной противоположной стороны. Аналогичные две формулы можно получить круговой заменой линейных и угловых элементов данного треугольника ABC.

Из второй теоремы косинусов следует, что в сферической геометрии не существует неравных треугольников с соответственно равными углами. Другими словами, если углы одного сферического треугольника равны соответствующим углам другого сферического треугольника, то такие треугольники конгруэнтны.

Наше знакомство со сферической геометрией подходит к концу. В заключение мы установим лишь совпадение формул сферической геометрии для фигур с малыми линейными размерами с соответствующими формулами евклидовой геометрии.

5. О сферической геометрии в малом

Пусть линейные размеры a, b, c сферического треугольника малы по сравнению с радиусом сферы R. Очевидно, эти условия можно осуществить за счет малости указанных линейных размеров или за счет выбора достаточно большого значения R. Из формулы, выражающей теорему косинусов, следует:

$$1-\frac{a^2}{2R^2}+\ldots=\left(1-\frac{b^2}{2R^2}+\ldots\right)\left(1-\frac{c^2}{2R^2}+\ldots\right)+\left(\frac{b}{R}-\ldots\right)\left(\frac{c}{R}-\ldots\right)\cos A.$$

Учитывая в этом равенстве члены до второго порядка малости включительно, мы получим теорему косинусов евклидовой геометрии:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A. \tag{1.14}$$

В случае прямоугольного сферического треугольника с углом $A=\frac{\pi}{2}$ имеем: $\cos A = 0$, и формула (1.12) в пределе приводит к соотношению $a^2 = b^2 + c^2$, составляющему теорему Пифагора в геометрии Евклида. Это равенство следует также из (1.14) при $A = \frac{\pi}{2}$.

Так как при малых размерах приведенных сторон их синусы в первом приближении пропорциональны аргументам, то из (1.11) следуют две связи: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$, выражающие теорему синусов в евклидовой геометрии.

Следовательно, формулы сферической геометрии для фигур с малыми линейными размерами по сравнению с радиусом сферы совпадают с соответствующими формулами евклидовой геометрии. Аналогичный результат мы получим ниже при рассмотрении формул геометрии Лобачевского.

Вопросы и упражнения

1. Перечислите основные теоремы сферической геометрии.
2. Докажите теорему Пифагора для прямоугольного сферического треугольника. Как получается из нее соответствующая теорема для прямоугольного треугольника евклидовой плоскости?
3. Докажите теорему косинусов, 2-ю теорему косинусов. Приведите примеры применения этих теорем.
4. Докажите теорему синусов для сферического треугольника.
5. Какой вывод можно сделать о свойствах фигур в сферической геометрии при предположении, что сфера будет достаточно большого радиуса?

§ 2. ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Мы познакомились с простейшими фактами сферической геометрии — геометрии, в которой всякие две прямые пересекаются в двух диаметрально противоположных точках. Для того чтобы освободиться от указанного недостатка и прийти к новой геометрии, в которой прямые имели бы не более одной общей точки, условимся считать всякую пару диаметрально противоположных точек сферы за одну точку. Полученное фактор-множество после такого отождествления пар точек сферы будем называть эллиптической плоскостью и обозначать символом S_2.

Ясно, что мы получим ту же плоскость, если будем строить фактор-множество множества ненулевых векторов евклидова пространства по отношению эквивалентности, в которой $\vec{x}$ эквивалентен $\vec{y}$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ пропорциональны.

Прямые эллиптической плоскости получаются из больших кругов в результате указанного отождествления пар точек и будут по-прежнему замкнутыми линиями. Но построенная плоскость стала принципиально новым объектом математического исследования.

Оставаясь замкнутой поверхностью, она утратила свойство двусторонности. Эллиптическая плоскость является односторонней поверхностью, т. е., раскрашивая какую-нибудь одну сторону этой поверхности, раскрасим ее с обеих сторон. В эллиптической геометрии отсутствует понятие точки, лежащей между двумя другими, если они инцидентны прямой, так как две точки на прямой определяют два взаимно дополнительных отрезка. В этой геометрии можно установить понятие разделения двух пар точек A, B и M, N, инцидентных прямой. Пара A, B разделяет пару M, N, если точки M, N лежат в разных отрезках, определенных на данной прямой точками A и B. Можно убедиться, что пара точек A, B разделяет пару M, N тогда и только тогда, когда двойное отношение $(ABMN) = AM/BM : AN/BN$ четырех точек A, B, M, N отрицательно.

Разумеется, эллиптическую плоскость можно представить себе также в виде полусферы, у которой диаметрально противоположные точки экватора считаются за одну точку (рис. 54). Объекты новой модели находятся в определенных сопоставлениях с объектами известной модели на сфере. Благодаря этому без обращения к аксиомам мы выводим, что эти две модели реализуют одну и ту же геометрию.

Проектирование из центра O евклидова пространства на плоскость, касательную к сфере в точке C, где $OC \perp \alpha$, переводит прямые эллиптической плоскости в прямые евклидовой плоскости α. Если к точкам касательной плоскости присоединить несобственные точки, то построенное центральное проектирование будет взаимно однозначным отображением всех точек эллиптической плоскости на все точки расширенной евклидовой (проективной) плоскости. Мы не будем выписывать систему аксиом эллиптической геометрии и заметим лишь, что ее можно получить из аксиом проективной геометрии и аксиом конгруэнтности.

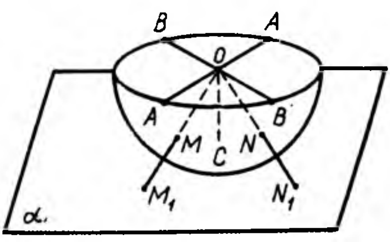


Рис. 54

Все понятия плоскости S_2 переводятся по отображению в некоторые понятия двумерной проективной геометрии. Сопоставление соответствующих геометрических образов полученной проективной модели характеризуется следующей таблицей:

«точка»	точка проективной плоскости
«прямая»	прямая проективной плоскости
«конгруэнтность отрезков»	конгруэнтность прообразов отрезков

Большое достоинство проективной модели состоит в том, что точки и прямые в ней изображаются привычными для нас образами. Однако при изучении свойств конгруэнтных фигур сферическая модель становится более удобной.

Заметим также, что прямые и плоскости связки O евклидова пространства определяют новую модель плоскости S_2, соответствующие геометрические образы которой представляются следующей таблицей:

S_2	Связка прямых и плоскостей в E_3
«точка»	плоскость связки
«разделение двух пар точек»	разделение двух пар прямых одного и того же пучка прямых
«расстояние между двумя точками»	величина, пропорциональная углу, между двумя прямыми связки

Реализация эллиптической плоскости в виде сферы, у которой диаметрально противоположные точки отождествлены, позволяет на этой плоскости ввести координаты (x, y, z), связанные соотношением $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, где R называется радиусом кривизны, а обратная величина квадрата радиуса — кривизной. В этих координатах расстояние d между двумя точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ определяется по формуле

$$R^2 \cos \frac{d}{R} = \pm (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2). \tag{2.1}$$

Отношение расстояния между точками к радиусу кривизны называется приведенным расстоянием. Две точки плоскости S_2 называются полярными, если соответствующие этим точкам прямые трехмерного евклидова пространства ортогональны. Другими словами, полярные точки характеризуются тем, что приведенное расстояние между ними равняется $\pi/2$. Отрезок прямой, ограниченный полярно сопряженными точками, называется *полупрямой*. Прямая состоит из двух полупрямых и имеет длину, равную π. Очевидно, геометрическое место точек, полярных данной точке A (x_1, y_1, z_1), образует прямую

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = 0. \tag{2.2}$$

Эта прямая называется полярой точки A, а точка A — полюсом прямой (2.2).

Прямые, перпендикулярные прямой, пересекаются в ее полюсе. Обратно, всякая прямая, проходящая через полюс данной прямой, будет перпендикулярна к этой прямой. Отсюда следует, что через каждую точку плоскости, отличную от полюса данной прямой, можно провести единственный перпендикуляр к этой прямой. Эти свойства непосредственно вытекают из определения полюсов и поляр.

В геометрии S_2 можно построить взаимно однозначное отображение между точками и прямыми, при котором каждой точке соответствует ее полярная прямая, а каждой прямой — ее полюс. Такое отображение называется *полярным отображением*. В эллиптической плоскости единичной кривизны полярное отображение переводит две прямые a, b в такие точки A, B, что расстояние между этими точками равняется углу между данными прямыми. Отсюда вытекает так называемый *принцип двойственности в эллиптической планиметрии*: если в какой-нибудь теореме эллиптической геометрии заменить слова «точка», «прямая», «расстояние» и «угол» соответственно на слова «прямая», «точка», «угол» и «расстояние», то в результате получим также справедливое предложение в этой геометрии. Примерами двойственных предложений, т. е. предложений, получающихся одно из другого указанным правилом, являются следующие: любые две точки определяют прямую, им инцидентную; любые две прямые определяют точку, им инцидентную.

1. Площади треугольников в эллиптической геометрии

Пусть в эллиптической плоскости дан треугольник ABC, обозначенный на рис. 55 номером I. Как известно, на данной плоскости порождаются еще три треугольника с теми же вершинами. Эти треугольники обозначены на рисунке номерами II, III, IV. Так как вся эллиптическая плоскость конечна и имеет площадь, равную $2\pi R^2$, то площадь части плоскости, ограниченной вертикальными углами A треугольника I, равняется: $\frac{2\pi R^2}{\pi} A = 2R^2 A$. Аналогично площади частей эллиптической плоскости, ограничен-

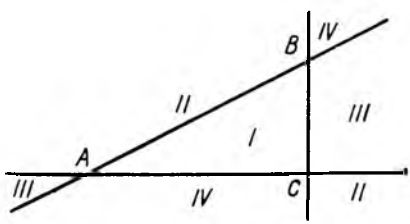


Рис. 55

ных вертикальными углами B и C треугольника ABC, равны $2R^2B$, $2R^2C$. С другой стороны, сумма всех трех найденных площадей составляет площадь всей эллиптической плоскости с добавленной удвоенной площадью S данного треугольника ABC. В результате получаем: $2R^2(A + B + C) = 2\pi R^2 + 2S_{ABC}$. Отсюда вытекает, что

$$S_{ABC} = R^2(A + B + C - \pi). \tag{2.3}$$

Эта формула показывает, что площадь треугольника пропорциональна его дефекту. Можно доказать, что в геометрии Лобачевского площадь треугольника ABC определяется по формуле, аналогичной (2.3) $S_{ABC} = k^2(\pi - A - B - C)$, где k — радиус кривизны плоскости Лобачевского.

2. Окружность

Окружностью называется множество точек $M(x, y, z)$ сферы, отстоящих от данной точки A сферы на данное расстояние r. Точка A называется центром окружности, r — ее радиусом.

К понятию окружности можно прийти другим путем, отправляясь от пучков прямых и соответствующих точек на прямых данного пучка. Совокупность прямых, пересекающихся в данной точке A, называется пучком прямых первого рода. Точка A называется центром пучка. Пучком прямых второго рода называется совокупность прямых плоскости, перпендикулярных данной прямой a. Нетрудно убедиться, что эти пучки двойственны друг другу. В самом деле, поляра центра пучка прямых первого рода ортогонально пересекает все прямые пучка и рассматриваемая совокупность прямых является пучком прямых второго рода. Обратно, прямые пучка второго рода проходят через полюс оси пучка и составляют пучок прямых первого рода. Таким образом, всякий пучок прямых одновременно является пучком первого и второго рода. Предположим, что точки M и N лежат соответственно на прямых m и n данного пучка прямых. Эти точки M, N называются соответствующими, если отрезок MN образует равные односторонние углы с прямыми m и n. Простейшая кривая [6] определяется так же, как в планиметрии Лобачевского. Эта кривая по определению является множеством точек, соответствующих точке M на прямой m данного пучка. Полученная таким образом простейшая кривая одновременно является окружностью радиуса r с центром в точке A и эквидистантой с высотой $r' = \pi R/2 - r$. Можно установить, что окружность ортогонально рассекает прямые своего пучка.

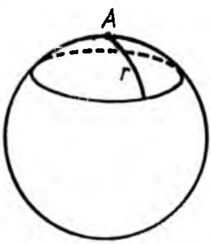


Рис. 56

Из (2.1) следует, что уравнение окружности (рис. 56) с центром в точке $A(x_1, y_1, z_1)$ и радиусом $r < \frac{\pi R}{2}$ приводится к виду:

$$\pm (xx_1 + yy_1 + zz_1) = R^2 \cos \frac{r}{R}. \qquad (2.4)$$

Наличие двойного знака объясняется тем, что правая часть положительна, а выражение в скобках может иметь значения разных знаков.

Заметим, что множество точек, равноудаленных от двух точек A, B, состоит из двух взаимно перпендикулярных прямых, проходящих через полюс прямой, определенной данными точками. Одна из этих прямых делит пополам один отрезок AB, а другая — дополнительный. Отсюда вытекает существование одной и только одной окружности, описанной около заданного треугольника ABC. В частности, три точки, не принадлежащие прямой, определяют на эллиптической плоскости четыре треугольника. Таким образом, через три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, можно провести четыре окружности, которые на сферической модели определяются следующими тройками точек: ABC, ABC', $AB'C$, $A'BC$, где A', B', C' обозначают точки, диаметрально противоположные соответственно точкам A, B, C.

Рассмотрим вкратце свойства пар окружностей в эллиптической плоскости. В сферической геометрии две окружности, как и в евклидовой плоскости, могут не пересекаться друг с другом, касаться и пересекаться в двух точках. В эллиптической геометрии свойства пар окружностей более многообразны. Чтобы убедиться в этом, мы предположим, что эллиптическая плоскость интерпретирована в виде сферы, у которой диаметрально противоположные точки отождествлены, факторизованы. В этом случае окружность эллиптической плоскости представляется на такой сфере в виде двух окружностей, лежащих в параллельных и равноудаленных от центра сферы плоскостях. Обратно, две окружности, полученные от пересечения сферы симметрическими относительно ее центра плоскостями, изображают в эллиптической геометрии одну окружность. Сделанные замечания позволяют читателю составить представление о новых случаях взаимных положений двух окружностей по сравнению с сферической или евклидовой планиметрией. На рис. 57, понятном без дополнительных объяснений, изображены две окружности, пересекающиеся в четырех точках (до факторизации эти окружности пересекались в восьми точках). На других двух рисунках изображены две окружности с тремя общими

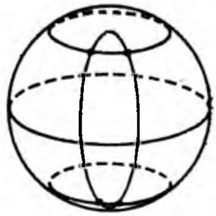


Рис. 57

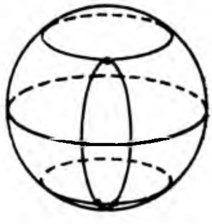


Рис. 58

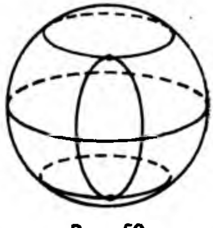


Рис. 59

точками и касающиеся друг друга в одной из них (рис. 58) соответственно с двумя общими точками и касающиеся друг друга в этих точках (рис. 59).

Вопросы и упражнения

Перечислите возможные случаи взаимного расположения двух окружностей (C_1, r_1) и (C_2, r_2) с центрами в точках C_1, C_2 и радиусами соответственно r_1, r_2.

3. Определение эллиптической плоскости в системе Вейля

Мы познакомились с некоторыми фактами эллиптической геометрии как геометрии сферы, факторизованной по парам диаметрально противоположных точек.

Приведем теперь аксиоматическое определение эллиптической плоскости, в основе которого лежит понятие векторного пространства.

Множество E_2 элементов, именуемых точками, называется *эллиптическим двумерным пространством* над полем вещественных чисел $\boldsymbol{R}$, если существует такое отображение π на это множество ненулевых элементов трехмерного евклидова векторного пространства V_3 над $\boldsymbol{R}$, что выполняются следующие три аксиомы:

1) Отображение π: $V_3 \to E_2$, сюръективно, т. е. $\pi(V_3) = E_2$.

2) $\pi(\vec{x}) = \pi(\vec{y})$ тогда и только тогда, когда векторы коллинеарны, т. е. $\vec{y} = \lambda\vec{x}$, где $\lambda \neq 0$ $(\lambda \in \boldsymbol{R})$.

3) $\forall X(\vec{x})\, Y(\vec{y}) \in E_2$ сопоставляется $d(X, Y) > 0$ (расстояние) такое, что $\cos(d(X, Y)/r) = |\vec{x}\vec{y}/|\vec{x}||\vec{y}||$, $(X = \pi(\vec{x}), Y = \pi(\vec{y}), r > 0)$.

Другими словами, аксиомы 1—3 характеризуют род структур в теории трехмерных евклидовых векторных пространств, называемых двумерными эллиптическими пространствами.

Эллиптическая двумерная геометрия определяется как теория указанного рода структур. На дальнейших построениях — введениях понятий прямой, отрезка, угла и др. — останавливаться не будем.

Вопросы и упражнения

1. а) Дайте определение n-мерного эллиптического пространства E_n. б) Приведите модели теории n-мерного эллиптического пространства.

2. а) Найдите длину C окружности радиуса r в эллиптической плоскости E_2. б) Чему равно в этой геометрии отношение длины окружности к диаметру?

§ 3. ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО В СИСТЕМЕ ВЕЙЛЯ

1. О псевдоевклидовой планиметрии

а) В евклидовой плоскости, как известно, формула квадрата расстояния между двумя точками $M(x_1, x_2)$ и $N(y_1, y_2)$ в декартовой прямоугольной системе координат представляется в виде

$$d(M, N)^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2. \qquad (3.1)$$

Угол φ между векторами $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$ вычисляется из соотношения

$$\cos\varphi = \frac{x_1y_1 + x_2y_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}. \tag{3.2}$$

Первая формула по существу выражает теорему Пифагора для прямоугольного треугольника с катетами, равными абсолютным величинам $|y_1 - x_1|$, $|y_2 - x_2|$, и гипотенузой MN. Вторая же формула представляет собой формулу косинуса разности углов, образованных соответственно OM и ON с координатным вектором $\vec{e}_1$.

Теперь мы изменим формулы (3.1) и (3.2) и будем определять расстояние между указанными двумя точками и величины данных углов по формулам соответственно

$$d\,(M,\,N)^2 = (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2, \tag{3.3}$$

$$\cos\varphi = \frac{x_1y_1 - x_2y_2}{\sqrt{x_1^2 - x_2^2}\sqrt{y_1^2 - y_2^2}}. \tag{3.4}$$

Прежние пары точек теперь будут иметь другие расстояния, а прежние углы — другие величины. Мы имеем дело по существу с новой своеобразной двумерной геометрией.

Чтобы подчеркнуть наличие другой метрики и не путать новые расстояния и величины углов со старыми, мы условимся называть координатную плоскость $(x_1,\, x_2)$ с формулами (3.3), (3.4) псевдоевклидовой плоскостью.

б) Для большей аналогии с евклидовой геометрией целесообразно ввести новое скалярное произведение векторов как произведение их длин на косинус угла между ними; длины векторов (расстояние между начальной его и конечной точками) и косинус угла понимаются в смысле псевдоевклидовой геометрии.

Мы не будем далее перечислять следствий из формул (3.3), (3.4) и дадим аксиоматическое определение псевдоевклидовой геометрии. Делается это следующим образом.

Вместо аксиомы IV_3 вейлевской аксиоматики, в которой говорится о том, что скалярный квадрат вектора неотрицательный, вводится другая аксиома $\mathrm{IV}_{3'}$ о существовании ненулевых векторов первого, второго и третьего типа, скалярные квадраты которых соответственно положительны, отрицательны и равны нулю.

Аксиому эту сформулируем в следующем виде $\mathrm{IV}_{3'}$. Существует базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, для которого $\vec{e}_1^{\,2} = 1$, $\vec{e}_2^{\,2} = -1$, $\vec{e}_1\vec{e}_2 = 0$.

Все другие аксиомы Вейля сохраняются без изменения в псевдоевклидовой геометрии. Конечно, мы предполагаем, что аксиомы размерности III соответствующим образом согласованы друг с другом. Если речь идет о плоскости, то в аксиоме III_1 утверждается существование двух линейно независимых векторов, а в аксиоме III_2 утверждается, что всякие три вектора линейно зависимы.

Совокупность точек называется *псевдоевклидовой плоскостью*, если эти точки и их упорядоченные пары (свободные векторы) удовлетворяют аксиомам групп I—III, $IV_{1,\ 2,\ 3'}$, V. Очевидно, векторы псевдоевклидовой плоскости удовлетворяют аксиомам I— III—$IV_{1,\ 2,\ 3'}$ и образуют двумерное псевдоевклидово векторное пространство.

В псевдоевклидовой геометрии аффинная часть полностью совпадает с аффинной частью евклидовой геометрии. Но в метрических вопросах эти геометрии значительно отличаются друг от друга, метрика пространства по существу определяется аксиомами скалярного произведения векторов, и среди них важную роль играет именно аксиома $IV_{3'}$.

в) Скалярное произведение двух векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ в смысле псевдоевклидовой геометрии мы будем обозначать символом $\vec{x}\Pi\vec{y}$. Векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$ называются перпендикулярными, если их скалярное произведение равно нулю.

По-прежнему *число* $\vec{x}\,\Pi\,\vec{x}$ *называется скалярным квадратом вектора* $\vec{x}$; корень квадратный из $\vec{x}\,\Pi\,\vec{x}$ называется также *длиной вектора* $\vec{x}$ и обозначается через $|\vec{x}|$. Таким образом,

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x}\,\Pi\,\vec{x}}, \tag{3.5}$$

причем предполагается, что если $\vec{x}\,\Pi\,\vec{x} > 0$ или $\vec{x}\,\Pi\,\vec{x} < 0$, то соответственно длина вектора $|\vec{x}|$ положительна или $|\vec{x}| = \alpha i$ ($\alpha \in \boldsymbol{R}$), где $\alpha > 0$. Векторы положительной и чисто мнимой длины называются также соответственно *векторами* 1-го и 2-го *рода* (*пространственными* и *временными*). *Вектор называется единичным, если* $\vec{x}\,\Pi\,\vec{x} = 1$; $\vec{x}$ *называется мнимоединичным, если* $\vec{x}\,\Pi\,\vec{x} = -1$.

Ненулевые векторы, длины которых равны нулю, называются *изотропными векторами* (векторами нулевого рода).

Введем понятие прямоугольной декартовой системы координат. *Прямоугольной декартовой системой координат* или просто прямоугольной системой координат псевдоевклидовой плоскости называется такая аффинная система координат, векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ которой перпендикулярны, один из них единичный, а другой мнимоединичный. Для определенности мы будем считать в дальнейшем, что $\vec{e}_1$ единичный, $\vec{e}_2$ мнимоединичный. Таким образом, скалярное произведение координатных векторов прямоугольной системы координат определяется равенствами:

$$\vec{e}_1\,\Pi\,\vec{e}_1 = -\vec{e}_2\,\Pi\,\vec{e}_2 = 1,\ \ \vec{e}_1\,\Pi\,\vec{e}_2 = 0. \tag{3.6}$$

Скалярное произведение двух векторов $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$, $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2$ и квадрат длины вектора $\vec{x}$ в прямоугольной системе координат вычисляются по формулам вида

$$\vec{x}\,\Pi\,\vec{y} = x_1y_1 - x_2y_2, \tag{3.6'}$$

$$\vec{x}\,\Pi\,\vec{x} = x_1^2 - x_2^2. \tag{3.7}$$

За расстояние между двумя точками $M(x_1, x_2)$ и $N(y_1, y_2)$ по определению принимается длина вектора $\overrightarrow{MN}$:

$$d(M, N)^2 = (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2. \tag{3.7'}$$

Таким образом, расстояние $d(M, N)$ между двумя точками M, N в псевдоевклидовой плоскости может быть: 1) либо положительное $d(M, N) > 0$; 2) либо чисто мнимое $d(M, N) = \alpha i$, где $\alpha > 0$; 3) либо нулевое $d(M, N) = 0$.

П р и м е р 1. Дана совокупность векторов:

$$\vec{a} = (1, 2),\ \vec{b} = (2, 1),\ \vec{c} = (1, 1),\ \vec{d} = (5, 3). \tag{*}$$

Какие из векторов этой совокупности будут 1-го или 2-го рода? Имеются ли в системе (*) векторы нулевого рода?

Так как координаты векторов заданы в П-прямоугольной декартовой системе координат, то скалярные квадраты определяются согласно (3.7). Вставляя в эту формулу координаты данных векторов, получим:

$$\vec{a}\,\Pi\,\vec{a} = -3,\ \vec{b}\,\Pi\,\vec{b} = 3,$$

$$\vec{c}\,\Pi\,\vec{c} = 0,\ \vec{d}\,\Pi\,\vec{d} = 16.$$

Таким образом, векторы $\vec{b}$, $\vec{d}$ 1-го рода, $\vec{a}$ — вектор 2-го рода, $\vec{c}$ — изотропный вектор.

П р и м е р 2. Вычислить длину векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, данных в примере 1.

Длина вектора определяется в П-прямоугольной системе координат согласно (3.5); следовательно,

$$|\vec{a}| = 3i,\quad |\vec{b}| = \sqrt{3},$$

$$|\vec{c}| = 0,\quad |\vec{d}| = 4.$$

П р и м е р 3. Вычислить скалярные произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{a}$ и $\vec{c}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ для векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, данных в примере 1.

Подставляя координаты данных пар векторов в (3.6), находим:

$$\vec{a}\,\Pi\,\vec{b} = 0,\ \vec{a}\,\Pi\,\vec{c} = -1,\ \vec{b}\,\Pi\,\vec{c} = 1.$$

П р и м е р 4. Найти длину сторон треугольника ABC, вершины которого заданы координатами (в П-прямоугольной декартовой системе координат) $A(1, 1)$, $B(4, 6)$, $C(5, 6)$.

Применяя формулу (3.7′), получим:

$$|AB| = 4i, \ |AC| = 3i, \ |BC| = 1.$$

П р и м е р 5. Верно ли, что в псевдоевклидовой плоскости существуют точки M, N, что расстояние $d\ (M, N) = 1 + 3i$?

Нет, неверно. Таких точек не существует, так как расстояние $d\ (M, N)$ между точками M, N должно быть числом вещественным, или чисто мнимым, или нулем.

Величиной угла между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$ называется число φ, определенное по формуле

$$\cos^2\varphi = \frac{(\vec{x}\,\Pi\,\vec{y})^2}{\vec{x}\,\Pi\,\vec{x}\,\vec{y}\,\Pi\,\vec{y}}. \qquad (3.8)$$

В правой части (3.8) числитель положительный, а знаменатель при неизотропных векторах $\vec{x}$, $\vec{y}$ может быть положительным и отрицательным.

Если векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$ одной природы, т. е. оба множителя в знаменателе одновременно пространственные или временные, то $\cos^2\varphi > 0$; если же один из векторов пространственный, а другой временной, то $\cos^2\varphi < 0$.

Нетрудно далее доказать, что числитель в (3.8) не меньше знаменателя. Действительно, если координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ будут соответственно (x_1, x_2) и (y_1, y_2) в некоторой прямоугольной системе координат, то

$$(\vec{x}\,\Pi\,\vec{y})^2 - \vec{x}\,\Pi\,\vec{x}\,\vec{y}\,\Pi\,\vec{y} = (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geqslant 0.$$

Следовательно, если векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$ одновременно будут пространственными или временными, то

$$\cos^2\varphi = \frac{(\vec{x}\,\Pi\,\vec{y})^2}{\vec{x}\,\Pi\,\vec{x}\,\vec{y}\,\Pi\,\vec{y}} \geqslant 1. \qquad (3.9)$$

Полагая $\cos^2\varphi = m^2\ (m \geqslant 1)$, получим:

$$\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = m, \ e^{2i\varphi} - 2me^{i\varphi} + 1 = 0. \qquad (^{**})$$

Из последнего уравнения, квадратного относительно $e^{i\varphi}$, находим: $e^{i\varphi} = m + \sqrt{m^2 - 1}$, $e^{-i\varphi} = m - \sqrt{m^2 - 1}$, т. е. величина $\rho = i\varphi$ вещественная и положительная; величина угла φ между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$ чисто мнимая. Из (**) следует, что

$$\varphi = \frac{1}{2i}\ln\frac{m + \sqrt{m^2 - 1}}{m - \sqrt{m^2 - 1}}, \ \ \cos\varphi = \operatorname{ch}\rho.$$

В псевдоевклидовой плоскости существуют три типа прямых в зависимости от природы направляющего вектора прямой: если направляющий вектор будет пространственным, временным или изотропным, то *прямая* называется соответственно *пространственной*, *временной* или *изотропной*.

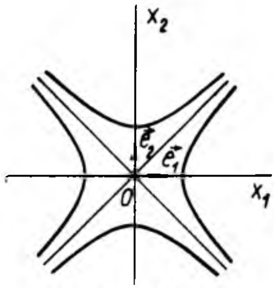


Рис. 60

г) Перейдем теперь к определению понятия окружности.

Окружностью в псевдоевклидовой плоскости называется множество ее точек, отстоящих от данной точки, называемой *центром*, на одно и то же расстояние r; величина r называется *радиусом окружности*. Выбирая прямоугольную систему координат с началом в центре окружности, мы убедимся, что координаты текущей точки (x_1, x_2) данной окружности удовлетворяют уравнению

$$x_1^2 - x_2^2 = r^2. \tag{3.10}$$

В этой геометрии существуют три типа окружностей — окружности вещественного, чисто мнимого и нулевого радиусов. На рис. 60 окружности нулевого радиуса изображаются с точки зрения евклидовой геометрии биссектрисами координатных углов, окружности вещественного радиуса — гиперболами, пересекающими ось Ox_1, и окружности чисто мнимого радиуса — гиперболами, пересекающими ось Ox_2.

Пример 1. а) Найти центр и радиус окружности, заданной уравнением (в П-прямоугольной декартовой системе координат)

$$x_1^2 - x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 - 6 = 0. \tag{***}$$

б) Верно ли, что множество L точек $M(x_1, x_2)$, определенное уравнением $x_1^2 - x_2^2 = (1 + 2i)^2$, является окружностью?

Решение. а) Уравнение (***) приводится к виду: $(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2 = -9$.

Данная линия действительно является окружностью, координаты центра которой (1, 2) и радиус $r = \alpha i$, где $\alpha = 3$.

б) Нет, неверно. Множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $x_1^2 - x_2^2 = (1 + 2i)^2$, не является окружностью (в противном случае вещественное число $\pm r^2$ будет равняться $(1 + 2i)^2$, что невозможно). Очевидно, множество точек L пустое.

Пример 2. Определить род окружности с центром в точке A (1, 2), если известно, что она проходит через точку B (4, 7) (система координат П-прямоугольна).

Решение. Согласно определению радиус окружности $r = |\overrightarrow{AB}|$: 1) либо положительный: $r > 0$; 2) либо чисто мнимый: $r = \alpha i$, где $\alpha > 0$; 3) либо нулевой: $r = 0$.

В нашем случае $\overrightarrow{AB} = (3, 5)$, следовательно, $|\overrightarrow{AB}|^2 = \overrightarrow{AB} \, \Pi \, \overrightarrow{AB}$, $|\overrightarrow{AB}|^2 = -16$, откуда $r = 4i$; данная окружность 2-го рода.

Пример 3. Вычислить величину угла между векторами $\vec{a} = (3, 5)$, $\vec{b} = (16/3, 20/3)$, базис репера ортонормированный.

Решение. Пользуясь формулами (3.6′) и (3.7), находим: $\vec{a}\,\Pi\,\vec{a} = -16$, $\vec{b}\,\Pi\,\vec{b} = -16$, $\vec{a}\,\Pi\,\vec{b} = -52/3$. Таким образом, $\cos\varphi = \frac{13}{12}$, $m = \frac{13}{12} > 1$, $\varphi = \frac{1}{i}\ln\frac{3}{2}$.

В заключение рассмотрим движения в псевдоевклидовой плоскости $E_2^1 = \alpha$.

Предположим, что $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ и $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ — две П-прямоугольные декартовы системы координат в плоскости α. Согласно закону инерции в теории квадратичных форм один из векторов любого ортонормированного базиса является единичным, а другой — мнимоединичным. В дальнейшем мы считаем, что векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_1'$ реперов $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ и $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ единичны, а векторы $\vec{e}_2$, $\vec{e}_2'$ мнимоединичны.

Движением (перемещением) плоскости α называется такое преобразование этой плоскости, которое каждой точке $M(x_1, x_2) \in \alpha$ с координатами x_1, x_2 в системе $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ сопоставляет точку M', имеющую те же координаты x_1, x_2 в системе $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$.

Получим формулы, связывающие координаты x_1, x_2 точки M с координатами x_1', x_2' образа M' в системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$.

С этой целью рассмотрим разложение вектора $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ по векторам $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$: $x_1'\vec{e}_1 + x_2'\vec{e}_2 = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + x_1\vec{e}_1' + x_2\vec{e}_2'$, где a_1, a_2 — координаты вектора $\overrightarrow{OO'}$ в первом базисе. Учитывая далее, что $\vec{e}_1' = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2$, $\vec{e}_2' = \gamma\vec{e}_1 + \delta\vec{e}_2$ имеем:

$$\begin{aligned} x_1' &= \alpha x_1 + \gamma x_2 + a_1, \\ x_2' &= \beta x_1 + \delta x_2 + a_2 \end{aligned} \qquad \left(\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0\right). \tag{3.11}$$

Как и в евклидовой геометрии, доказывается, что движение является изометрией и, обратно, всякая изометрия является движением. Изометрия определяется как преобразование, сохраняющее расстояние между двумя произвольными точками.

Движения могут быть собственными (движения с определителем $\Delta = 1$) и несобственными (движения с определителем $\Delta = -1$). Но теперь каждую из этих совокупностей движений в свою очередь можно разбить на две совокупности.

В самом деле, $\vec{e}_1'(\alpha, \beta)$, $\vec{e}_2'(\gamma, \delta)$ в (3.11) являются векторами ортонормированного репера, поэтому справедливы равенства:

а) $\alpha^2 - \beta^2 = 1$, б) $\gamma^2 - \delta^2 = -1$, в) $\alpha\gamma - \beta\delta = 0$.

Из а)—в) следует, что $\alpha \neq 0$, $\delta \neq 0$, и мы приходим к одному из следующих четырех случаев: 1) $\alpha > 0$ и $\delta > 0$; 2) $\alpha > 0$ и $\delta < 0$; 3) $\alpha < 0$ и $\delta > 0$; 4) $\alpha < 0$ и $\delta < 0$.

(1). Если $\alpha > 0$ и $\delta > 0$, то можно положить

$$\alpha = \operatorname{ch}\varphi,\ \delta = \operatorname{ch}\Theta. \qquad (*)$$

Далее из условий а), б) находим, что

$$\beta = \operatorname{sh}\varphi,\ \gamma = \operatorname{sh}\Theta. \qquad (**)$$

Вставляя $(*)$ и $(**)$ в равенство (в), получим: $\operatorname{sh}\varphi\operatorname{ch}\Theta - \operatorname{ch}\varphi\operatorname{sh}\Theta = \operatorname{sh}(\varphi - \Theta) = 0$, т. е. $\varphi=\Theta$. Итак, матрица $\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{pmatrix}$ в рассматриваемом случае приводится к виду:

$$\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\operatorname{ch}\varphi & \operatorname{sh}\varphi\\ \operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi\end{pmatrix}. \qquad (A)$$

(2). Если $\alpha > 0$ и $\delta < 0$, то (повторяя аналогичные рассуждения) получим:

$$\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\operatorname{ch}\varphi & -\operatorname{sh}\varphi\\ \operatorname{sh}\varphi & -\operatorname{ch}\varphi\end{pmatrix}. \qquad (B)$$

(3). Если $\alpha < 0$, $\delta > 0$, то

$$\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\operatorname{ch}\varphi & \operatorname{sh}\varphi\\ -\operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi\end{pmatrix}. \qquad (C)$$

(4). Если $\alpha < 0$, $\delta < 0$, то

$$\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\operatorname{ch}\varphi & -\operatorname{sh}\varphi\\ -\operatorname{sh}\varphi & -\operatorname{ch}\varphi\end{pmatrix}. \qquad (D)$$

Непосредственная проверка показывает, что в случае (1): $\Delta = 1$, $\alpha > 0$; в случае (2): $\Delta = -1$, $\alpha > 0$; в случае (3): $\Delta = -1$, $\alpha < 0$; в случае (4): $\Delta = 1$, $\alpha < 0$.

Итак, каждое движение в псевдоевклидовой плоскости принадлежит одному из четырех типов (A) — (D) в зависимости от значения определителя Δ преобразования ($\Delta = 1$ или $\Delta = -1$) и знака α ($\alpha > 0$ или $\alpha < 0$).

Представителями этих четырех типов будут, например, движения с матрицами:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Вопросы и упражнения

1. Верно ли: если в псевдоевклидовом пространстве $\vec{x}\,\Pi\,\vec{x} = 0$, то $\vec{x} = \vec{\Theta}$?

2. Какие надо внести изменения в аксиомы IV скалярного произведения векторов в E_2, чтобы получить аксиомы скалярного произведения векторов в псевдоевклидовом пространстве E_2^1?

3. Последней аксиомой в списках аксиом Гильберта и школьного курса планиметрии является аксиома параллельности. Имеется ли аксиома параллельности в аксиоматике Вейля?

4. Докажите, что в двумерной полуевклидовой геометрии, в которой по определению скалярный квадрат вектора $\vec{x}\,(x_1, x_2)$ равен $\vec{x}^2 = x_2^2$, большая сторона треугольника равна сумме двух других его сторон.

2. Псевдоевклидово трехмерное пространство

а) Мы обобщим построения псевдоевклидовой плоскости на трехмерные пространства. Аксиомы псевдоевклидова трехмерного пространства совпадают с аксиомами Вейля псевдоевклидовой плоскости, за исключением аксиом размерности III. Теперь в аксиоме III_1 речь идет о существовании трех линейно независимых векторов, а в аксиоме III_2 всякие четыре вектора линейно зависимы.

Скалярное произведение двух векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ в псевдоевклидовом пространстве мы будем обозначать, как и в случае псевдоевклидовой плоскости, символом $\vec{x}\,\Pi\,\vec{y}$. Векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$ *ортогональны*, если их скалярное произведение равно нулю; вектор $\vec{x}$ единичный (мнимоединичный), если $\vec{x}\,\Pi\,\vec{x} = 1$ $(\vec{x}\,\Pi\,\vec{x} = -1)$.

Число $\vec{x}\,\Pi\,\vec{x}$ называется скалярным квадратом вектора. Длиной вектора $\vec{x}$ называется корень квадратный из скалярного квадрата этого вектора и обозначается через $|\vec{x}|$: $|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x}\,\Pi\,\vec{x}}$. Подкоренное выражение может быть $\vec{x}\,\Pi\,\vec{x} > 0$, $\vec{x}\,\Pi\,\vec{x} < 0$ и $\vec{x}\,\Pi\,\vec{x} = 0$. Длины векторов соответственно этим случаям будут вещественные, чисто мнимые и нулевые. Векторы вещественной длины $(|\vec{x}| > 0)$ называются также векторами 1-го рода, векторы чисто мнимой длины $|\vec{x}| = \alpha i$ $(\alpha > 0)$ — 2-го рода (временными) и векторы нулевой длины — изотропными.

В псевдоевклидовом пространстве вводится *прямоугольная система координат*. По определению так называется *аффинная система координат*, векторы которой $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ единичны или мнимоединичны и взаимно перпендикулярны. Мы будем рассматривать так называемое пространство Минковского, в котором из трех векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ любой П-прямоугольной системы координат два единичные, а третий — мнимоединичный (согласно закону инерции). Будем считать, что

$$\vec{e}_1\,\Pi\,\vec{e}_1 = \vec{e}_2\,\Pi\,\vec{e}_2 = -\vec{e}_3\,\Pi\,\vec{e}_3 = 1,\ \vec{e}_i\,\Pi\,\vec{e}_j = 0\ (i \neq j). \tag{3.12}$$

В этой системе координат скалярное произведение двух векторов

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3,$$
$$\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3$$

и квадрат длины вектора $\vec{x}$, очевидно, вычисляются по формулам вида:

$$\vec{x}\,\Pi\,\vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3, \tag{3.13}$$
$$\vec{x}\,\Pi\,\vec{x} = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2. \tag{3.14}$$

За расстояние между двумя точками M (x_1, x_2, x_3) и N (y_1, y_2, y_3)

по определению принимается длина вектора $\overrightarrow{MN}$, т. е.

$$d(M, N) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 - (y_3 - x_3)^2}. \qquad (3.15)$$

Величиной угла между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$ называется число φ, определенное по формуле

$$\cos^2\varphi = \frac{(\vec{x}\,\Pi\,\vec{y})^2}{\vec{x}\,\Pi\vec{x}\,\vec{y}\,\Pi\vec{y}}. \qquad (3.16)$$

Если векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$ одного рода, т. е. оба пространственные или временные, то $\cos^2\varphi > 0$. Более того, $\cos^2\varphi \leqslant 1$, если для $\vec{x}$, $\vec{y}$ выполняется неравенство Коши, и $\cos^2\varphi \geqslant 1$, если неравенство это не выполняется. Полагая в последнем случае $\cos\varphi = \operatorname{ch}\psi$, мы получим: $\varphi = i\psi$.

б) В псевдоевклидовом пространстве существуют три типа прямых в зависимости от направляющего вектора прямой. Здесь существуют также три вида плоскостей в зависимости от нормального вектора плоскости.

в) Рассмотрим теперь вопрос о сферах. *Сферой псевдоевклидова пространства* E_3^1 называется множество точек этого пространства, отстоящих от данной точки A, называемой *центром* сферы, на одно и то же расстояние r. Величина r называется *радиусом* сферы.

Выбирая прямоугольную систему координат с началом в центре сферы, мы убедимся в том, что координаты x_1, x_2, x_3 текущей точки сферы радиуса r удовлетворяют уравнению

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = r^2. \qquad (3.17')$$

Ясно, что первые два координатных вектора прямоугольной системы здесь предполагаются единичными, а третий вектор — мнимоединичным.

В псевдоевклидовом пространстве существуют три типа сфер: вещественного, чисто мнимого и нулевого радиуса.

Уравнение сферы вещественного радиуса r ($r > 0$) совпадает с (3.17'), в котором величина r вещественная. Если сфера чисто мнимого радиуса $r = ki$, где вещественное $k > 0$, то уравнение (3.17') приводится к виду:

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -k^2. \qquad (3.17)$$

Если же сфера будет нулевого радиуса, то из (3.15) следует, что

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0. \qquad (3.18)$$

Уравнение (3.18) в евклидовом пространстве является уравнением конуса, а предыдущие два — уравнениями гиперболоидов.

Ясно, что конус (3.18) состоит из асимптот сфер (3.17,3.17'), имеющих центр в начале координат. Очевидно, асимптотический конус сферы совпадает с изотропным конусом ее центра. Из уравнения (3.17′) следует также, что на сферах псевдоевклидова пространства имеются прямолинейные образующие — прямые, целиком лежащие на сфере.

Очевидно, линией пересечения сферы с плоскостью является окружность. Если секущая плоскость проходит через начало координат, то радиус окружности принимает значение, равное радиусу сферы. Получаемые таким образом окружности сферы называются большими окружностями.

За сферическое расстояние ρ между двумя точками $M(\vec{x})$, $N(\vec{y})$ сферы мы принимаем длину дуги большой окружности, соединяющей данные точки. Очевидно, это расстояние равняется произведению радиуса сферы на значение угла, образованного радиус-векторами $\vec{x}$, $\vec{y}$. Следовательно, сферическое расстояние ρ определяется по формуле

$$\cos\frac{\rho}{r} = \frac{\vec{x}\,\Pi\,\vec{y}}{r^2}. \tag{3.19}$$

Если сфера чисто мнимого радиуса $r = ki$, то формула (3.19) приводится к виду:

$$\operatorname{ch}\frac{\rho}{k} = -\frac{\vec{x}\,\Pi\,\vec{y}}{k^2}. \tag{3.20}$$

Вопросы и упражнения

1. Какая из совокупностей четырех типов вращений псевдоевклидовой плоскости вокруг начала координат образует подгруппу?

2. Откуда следует, что совокупность вращений со значением определителя $\Delta = 1$ образует подгруппу H_0?

3. Постройте фактор-множество множества всех вращений псевдоевклидовой плоскости вокруг данной точки, считая два вращения эквивалентными, если они принадлежат одному из полученных выше четырех типов (A—D) вращений.

4. а) Приведите определение окружности. б) Приведите рисунки окружностей вещественного, чисто мнимого и нулевого радиусов.

5. Как обобщаются понятия и теоремы псевдоевклидовой плоскости на трехмерное псевдоевклидово пространство?

6. Докажите, что расстояние в псевдоевклидовой плоскости между двумя точками не может равняться $5 + i$.

7. Приведите примеры пар точек, расстояние между которыми равняется соответственно 3, $2i$, 0.

8. Докажите, что радиус окружности в псевдоевклидовой плоскости не может быть вида $r = 2 + 3i$.

9. Проверьте, что пространство, в котором расстояние между точками (x_1, x_2), (y_1, y_2) определяется по формуле $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2$, не является метрическим пространством.

10. а) Найдите тип структуры Вейля псевдоевклидовой плоскости. б) Будет ли эта структура однотипна со структурой Вейля евклидовой плоскости?

11. Будут ли структуры Вейля псевдоевклидовой плоскости и псевдоевклидова пространства одного типа?

12. Приведите примеры прямых, на каждой из которых расстояние между любыми двумя точками равняется нулю.

13. Приведите примеры прямых, на каждой из которых расстояния между двумя точками вещественные (чисто мнимые).

14. Какими будут (пространственными, временными, изотропными) направляющие векторы осей Ox_1, Ox_2, если $\vec{x}\,\Pi\,\vec{x} = x_1^2 - x_2^2$?

15. Будут ли координатные оси Ox_1, Ox_2 прямыми в псевдоевклидовой плоскости ($\vec{x}\,\Pi\,\vec{x} = x_1^2 - x_2^2$)?

16. Откуда следует, что расстояния между любыми двумя точками в E_2^1 одной и той же прямой будут одного типа (вещественные, чисто мнимые, нулевые)·

17. На аффинной плоскости (x_1, x_2) с координатными векторами $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ можно ввести две структуры, в которых соответственно

$$\vec{e}_1^{\,2} = \vec{e}_2^{\,2} = 1,\ \vec{e}_1\vec{e}_2 = 0,$$

$$\vec{e}_1\,\Pi\,\vec{e}_1 = -\vec{e}_2\,\Pi\,\vec{e}_2 = 1,\ \vec{e}_1\,\Pi\,\vec{e}_2 = 0.$$

а) Будут ли эти структуры изоморфны?

б) Докажите, что прямые одной плоскости являются прямыми второй плоскости.

18. Опирается ли понятие прямой в структуре Вейля на скалярное произведение векторов?

19. Можно ли определить прямые на основе лишь аксиом расстояний как множества точек A, B и всех точек X, для которых: 1) либо $\overset{\times}{X}AB$; 2) либо $\overset{\times}{A}XB$; 3) либо $\overset{\times}{B}XA$?

20. В чем состоит отличие аксиом Вейля евклидовой плоскости от аксиом Вейля евклидова пространства?

21. Чем отличаются аксиомы Вейля евклидова пространства от аксиом псевдоевклидова пространства?

3. Геометрия Лобачевского

В главе III мы перечислили аксиомы Гильберта плоскости Лобачевского. Убедимся теперь, что геометрия сферы чисто мнимого радиуса в псевдоевклидовом пространстве является двумерной геометрией Лобачевского. Ограничиваясь лишь, например, верхней частью сферы ($x_3 > 0$), покажем, что в множестве ее точек и больших окружностей осуществляется планиметрия Лобачевского. Для простоты эти точки можно спроектировать из центра O сферы (рис. 61) на касательную к ней плоскость в точке N. Кривую пересечения касательной плоскости с изотропным конусом будем называть *абсолютом*.

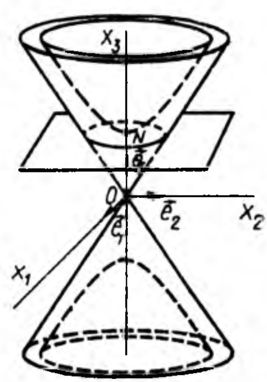


Рис. 61

При проектировании точки полусферы перейдут во внутренние точки круга, ограниченного абсолютом, а большие окружности — в хорды абсолюта. Очевидно, последние являются линиями пересечения плоскостей больших окружностей с внутренностью абсолюта. Инцидентность точек и прямых понимается в обычном смысле.

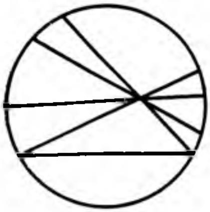


Рис. 62

Ясно, что в системе точек внутренности абсолюта и его хорд аксиомы I_{1-8} выполняются. Аналогично аксиомы II порядка и IV непрерывности переходят в истинные предложения геометрии касательной плоскости. Что касается аксиом III группы — аксиом конгруэнтности, то они также переходят в истинные предложения трехмерной псевдоевклидовой геометрии. При этом мы считаем конгруэнтными те отрезки (углы), которым на сфере чисто мнимого радиуса отвечают совмещающиеся при некоторых вращениях сферы дуги больших окружностей (углы между большими окружностями).

Выясним теперь, какая выполняется аксиома параллельности: V или V'. Предположим, что нам дана на верхней полусфере большая окружность и не лежащая на ней точка. В связке прямых и плоскостей, центр которой совпадает с центром сферы, этой большой окружности и точке отвечают соответственно плоскость α и прямая a связки.

Очевидно, что через прямую a можно провести бесчисленное множество плоскостей связки, рассекающих полусферу по большим окружностям, не пересекающимся с данной большой окружностью. Таким образом, в рассматриваемой модели выполняется аксиома параллельности Лобачевского (рис. 62). Другими словами, плоскостная геометрия Лобачевского совпадает с геометрией сферы чисто мнимого радиуса.

Эти рассуждения позволяют принять следующее общее определение n-мерных неевклидовых геометрий.

Неевклидовыми геометриями n-измерений называются геометрии, которые порождаются на n-мерных сферах S_n вещественного или чисто мнимого радиуса в $(n+1)$-мерном евклидовом соответственно псевдоевклидовом пространстве (любой сигнатуры). Предполагается также, что диаметрально противоположные точки этих сфер отождествлены, т. е. такие пары точек принимаются за одну точку.

Из этого определения следует, что при возрастании n число типов неевклидовых пространств также растет. Неевклидовы геометрии являются геометриями простейших римановых пространств определенной и неопределенной метрики, составляющих так называемый класс пространств постоянной ненулевой кривизны. Каждое из таких n-мерных пространств допускает совокупность движений, зависящую от $n(n+1)/2$ параметров.

Очевидно, при $n = 2$ мы получим эллиптическую плоскость и плоскость Лобачевского. Геометрия этих плоскостей будет соответственно геометрией сферы евклидова пространства и геометрией сферы чисто мнимого радиуса в псевдоевклидовом пространстве. На рис. 63 изображена верхняя часть сферы чисто мнимого радиуса. Вся сфера изображается в виде двухполостного гиперболоида.

Наша ближайшая задача — вывести основные формулы сферического треугольника (так называется треугольник на сфере, образованный тремя дугами больших окружностей). Эти формулы выражают основные математические соотношения в треугольниках геометрии Лобачевского.

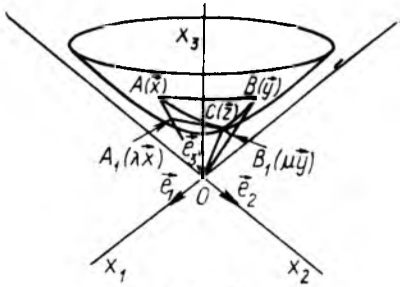


Рис. 63

а) Сначала докажем так называемую теорему косинусов. Предположим, что нам дан сферический треугольник с вершинами $A\,(\vec{x})$, $B\,(\vec{y})$, $C\,(\vec{z})$, углами A, B, C и противолежащими сторонами соответственно a, b, c. На основании формулы (3.20) эти стороны связаны с радиус-векторами вершин сферического треугольника следующими равенствами:

$$\operatorname{ch}\frac{a}{k} = -\frac{\vec{z}\,\Pi\,\vec{y}}{k^2},\quad \operatorname{ch}\frac{b}{k} = -\frac{\vec{x}\,\Pi\,\vec{z}}{k^2},\quad \operatorname{ch}\frac{c}{k} = -\frac{\vec{x}\,\Pi\,\vec{y}}{k^2}. \qquad (3.21)$$

Предположим далее, что касательная плоскость к сфере в точке C пересекает радиусы OA и OB в точках $A_1\,(\lambda\vec{x})$ и $B_1\,(\mu\vec{y})$. Эти числовые множители λ, μ радиусов векторов точек A_1 и B_1 определяются совсем просто, если учесть ортогональность векторов $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{CA_1}$ и $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{CB_1}$. Действительно, $\overrightarrow{OC}\,\Pi\,\overrightarrow{CA_1} = \vec{z}\,\Pi\,(\lambda\vec{x} - \vec{z}) = 0$, т. е.

$$\lambda\vec{z}\,\Pi\,\vec{x} = \vec{z}\,\Pi\,\vec{z} = -k^2.$$

Отсюда на основании (3.21) следует, что

$$\lambda = 1/\operatorname{ch}\frac{b}{k}. \qquad (3.22)$$

Повторяя приведенные рассуждения для другой пары $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OB_1}$ ортогональных векторов, мы получим:

$$\mu = 1/\operatorname{ch}\frac{a}{k}. \qquad (3.23)$$

Найдем теперь скалярное произведение векторов $\overrightarrow{CA_1}$ и $\overrightarrow{CB_1}$. С одной стороны, имеем:

$$\overrightarrow{CA_1}\;\Pi\,\overrightarrow{CB_1} = |\overrightarrow{CA_1}|\cdot|\overrightarrow{CB_1}|\cos C,$$

где

$$\overrightarrow{CA}_1^2 = (\vec{z} - \lambda\vec{x})\,\Pi\,(\vec{z} - \lambda\vec{x}) = k^2\,(1 - \lambda^2),$$
$$\overrightarrow{CB}_1^2 = (\vec{z} - \mu\vec{y})\,\Pi\,(\vec{z} - \mu\vec{y}) = k^2\,(1 - \mu^2).$$

Следовательно, на основании (3.22, 3.23) имеем:

$$|\overrightarrow{CA_1}| = k\,\mathrm{th}\,\frac{b}{k}, \quad |\overrightarrow{CB_1}| = k\,\mathrm{th}\,\frac{a}{k}; \tag{3.24}$$

поэтому $\overrightarrow{CA_1}\Pi\overrightarrow{CB_1} = k^2\,\mathrm{th}\,\frac{a}{k}\,\mathrm{th}\,\frac{b}{k}\cos C$. С другой стороны, $\overrightarrow{CA_1}\,\Pi\,\overrightarrow{CB_1} = (\vec{z} - \lambda\vec{x})\,\Pi\,(\vec{z} - \mu\vec{y}) = -k^2 - \mu\vec{y}\,\Pi\,\vec{z} - \lambda\vec{x}\,\Pi\,\vec{z} + \lambda\mu\vec{x}\,\Pi\,\vec{y}$. Применяя затем (3.21), (3.22), (3.23), мы получим:

$$\overrightarrow{CA_1}\Pi\,\overrightarrow{CB_1} = k^2\left(\mathrm{ch}\,\frac{a}{k}\,\mathrm{ch}\,\frac{b}{k} - \mathrm{ch}\,\frac{c}{k}\right)\Big/\mathrm{ch}\,\frac{a}{k}\,\mathrm{ch}\,\frac{b}{k}. \tag{3.25}$$

Сравнивая (3.24) и (3.25), заключаем: $\mathrm{sh}\,\frac{a}{k}\mathrm{sh}\,\frac{b}{k}\cos C = \mathrm{ch}\,\frac{a}{k}\mathrm{ch}\,\frac{b}{k} - \mathrm{ch}\,\frac{c}{k}$ или

$$\mathrm{ch}\,\frac{c}{k} = \mathrm{ch}\,\frac{a}{k}\,\mathrm{ch}\,\frac{b}{k} - \mathrm{sh}\,\frac{a}{k}\,\mathrm{sh}\,\frac{b}{k}\cos C. \tag{3.26}$$

Формула (3.26) не зависит от нашего предположения о точках пересечения A_1 и B_1. Эта формула выражает теорему косинусов сферического треугольника сферы чисто мнимого радиуса: косинус гиперболический стороны сферического треугольника равен произведению косинусов гиперболических двух других сторон без произведения синусов гиперболических этих же сторон на косинус угла между ними.

б) Переходим теперь к выводу теоремы синусов. Вычислим для этого квадрат отношения $\mathrm{sh}\frac{c}{k}\Big/\sin C$. На основании (3.26) имеем:

$$\frac{\mathrm{sh}^2\,\frac{c}{k}}{\sin^2 C} = \frac{\mathrm{sh}^2\,\frac{c}{k}}{1-\cos^2 C} = \frac{\mathrm{sh}^2\,\frac{a}{k}\,\mathrm{sh}^2\,\frac{b}{k}\,\mathrm{sh}^2\,\frac{c}{k}}{\mathrm{sh}^2\,\frac{a}{k}\,\mathrm{sh}^2\,\frac{b}{k} - \left(\mathrm{ch}\,\frac{a}{k}\,\mathrm{ch}\,\frac{b}{k} - \mathrm{ch}\,\frac{c}{k}\right)^2} \tag{*}$$

Мы видим, что числитель правой части является симметричным выражением относительно переменных a, b, c. Нетрудно убедиться, что такой же симметричностью относительно этих переменных обладает и знаменатель. В самом деле,

$$\mathrm{sh}^2\,\frac{a}{k}\,\mathrm{sh}^2\,\frac{b}{k} - \left(\mathrm{ch}\,\frac{a}{k}\,\mathrm{ch}\,\frac{b}{k} - \mathrm{ch}\,\frac{c}{k}\right)^2 = \left(\mathrm{ch}^2\,\frac{a}{k} - 1\right)\left(\mathrm{ch}^2\,\frac{b}{k} - 1\right) - \left(\mathrm{ch}\,\frac{a}{k}\,\mathrm{ch}\,\frac{b}{k} - \mathrm{ch}\,\frac{c}{k}\right)^2 = 1 - \mathrm{ch}^2\,\frac{a}{k} - \mathrm{ch}^2\,\frac{b}{k} - \mathrm{ch}^2\,\frac{c}{k} + 2\,\mathrm{ch}\,\frac{a}{k}\,\mathrm{ch}\,\frac{b}{k}\,\mathrm{ch}\,\frac{c}{k}. \tag{3.27}$$

Таким образом, квадрат искомого отношения симметричен относительно сторон a, b, c. Это означает, что, заменяя обозначения сторон a, b, c и углов A, B, C в круговом порядке в (*), мы получим отношения $\mathrm{sh}^2\frac{a}{k}/\sin^2 A$, $\mathrm{sh}^2\frac{b}{k}/\sin^2 B$, равные $\mathrm{sh}^2\frac{c}{k}/\sin^2 C$. Извлекая из этих отношений квадратные корни, получим формулы:

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{a}{k}}{\sin A} = \frac{\operatorname{sh}\frac{b}{k}}{\sin B} = \frac{\operatorname{sh}\frac{c}{k}}{\sin C}, \tag{3.28}$$

выражающие теорему синусов сферического треугольника в геометрии сферы чисто мнимого радиуса: синусы гиперболические сторон сферического треугольника относятся как синусы противолежащих углов.

в) Заметим, что формулы (3.26) и (3.28) геометрии сферы чисто мнимого радиуса $r = ki$ в псевдоевклидовом пространстве можно получить из соответствующих формул сферического треугольника в евклидовом пространстве, заменяя $\cos\frac{x}{r}$ на $\operatorname{ch}\frac{x}{k}$, $\sin\frac{x}{r}$ на $i\operatorname{sh}\frac{x}{k}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{r}$ на $i\operatorname{th}\frac{x}{k}$.

Применяя это правило к (*) (с. 139), мы получим вторую теорему косинусов для сферического треугольника в случае сферы мнимого радиуса:

$$\cos C = -\cos A\cos B + \sin A\sin B\operatorname{ch}\frac{c}{k}. \tag{3.29}$$

Иначе, косинус угла сферического треугольника равен произведению синусов двух других углов на косинус гиперболический противоположной стороны без произведения косинусов двух других углов.

Отсюда следует, что если углы одного сферического треугольника равны соответствующим углам другого сферического треугольника, то такие треугольники равны.

4. Формулы прямоугольного треугольника

Предположим, угол C треугольника ABC (рис. 64) является прямым. Применяя теорему косинусов (3.26), получим:

$$\operatorname{ch}\frac{c}{k} = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k}. \tag{3.30}$$

Это равенство выражает теорему Пифагора в геометрии Лобачевского: косинус гиперболический гипотенузы прямоугольного треугольника равен произведению косинусов гиперболических катетов. Применяя формулу (3.28), будем иметь:

$$\operatorname{sh}\frac{a}{k} = \operatorname{sh}\frac{c}{k}\sin A, \tag{3.31}$$

$$\operatorname{sh}\frac{b}{k} = \operatorname{sh}\frac{c}{k}\sin B. \tag{3.32}$$

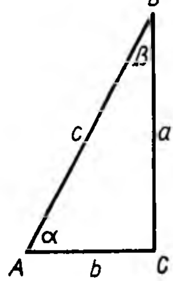


Рис. 64

Полученные формулы можно выписать по мнемони-

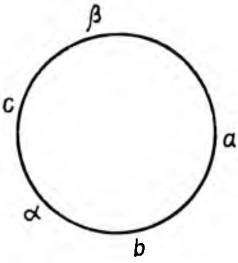


Рис. 65

ческому правилу, аналогичному правилу Непера в сферической геометрии. В этих формулах связываются пять элементов прямоугольного треугольника, которые можно рассматривать в циклическом порядке c, β, a, b, α (рис. 65). Для каждого элемента предшествующий и последующий элементы называются прилежащими, а остальные два элемента — противолежащими элементами. Мнемоническое правило формулируется следующим образом.

Косинус элемента прямоугольного треугольника в геометрии Лобачевского равняется произведению синусов противолежащих элементов или произведению котангенсов прилежащих элементов.

Если под знак функции входит угол, то функция понимается как тригонометрическая. Если же входит длина, то она делится на радиус кривизны и функция понимается как гиперболическая. Наконец, в случае, когда под знаком функции стоит катет, функция меняется на смежную: синус — на косинус, тангенс — на котангенс и наоборот.

Пользуясь приведенным правилом, мы получим для каждого элемента соответствующие выражения через прилежащие и противолежащие элементы прямоугольного треугольника:

$$\begin{gathered}
\operatorname{ch}\frac{c}{k}=\operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k}=\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta,\\
\operatorname{sh}\frac{a}{k}=\operatorname{sh}\frac{c}{k}\sin\alpha=\operatorname{th}\frac{b}{k}\operatorname{ctg}\beta,\\
\operatorname{sh}\frac{b}{k}=\operatorname{sh}\frac{c}{k}\sin\beta=\operatorname{th}\frac{a}{k}\operatorname{ctg}\alpha,\\
\cos\alpha=\sin\beta\operatorname{ch}\frac{a}{k}=\operatorname{ctg}\frac{c}{k}\operatorname{th}\frac{b}{k},\\
\cos\beta=\sin\alpha\operatorname{ch}\frac{b}{k}=\operatorname{cth}\frac{c}{k}\operatorname{th}\frac{a}{k}.
\end{gathered}\tag{3.33}$$

Часть этих формул мы доказали — (3.30), (3.31), (3.32). Вывод других формул читателю рекомендуется произвести самостоятельно.

5. Основная формула Лобачевского

Пусть даны на плоскости Лобачевского прямая a и точка A, не инцидентная ей. Опустим из точки A перпендикуляр AB на прямую a (рис. 66). Проведем также через точку A прямую AO, параллельную прямой a в каком-нибудь направлении. Угол BAO, называется углом параллельности, соответствующим отрезку AB. Для получения основной формулы Лобачевского, связывающей угол параллельности $BAO=\Pi(p)$ с отрезком $p=AB$, мы возьмем

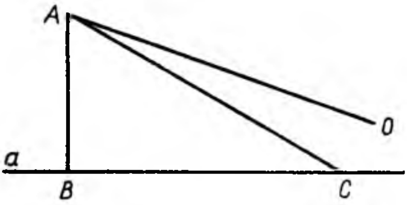


Рис. 66

на луче BO какую-нибудь точку C. Для прямоугольного треугольника ABC имеем: $\operatorname{th}\frac{p}{k} = \operatorname{th}\frac{AC}{k}\cos\alpha$, $\alpha = \angle BAC$. Будем удалять теперь точку C по лучу до бесконечности, $\operatorname{th}\frac{AC}{k}$ стремится при этом к 1, и в пределе мы получим: $\operatorname{th}\frac{p}{k} = \cos\Pi(p)$.

Отсюда следует, что

$$\operatorname{tg}\frac{\Pi(p)}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\Pi(p)}{1+\cos\Pi(p)}} = \sqrt{\frac{1-\operatorname{th}\frac{p}{k}}{1+\operatorname{th}\frac{p}{k}}} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}\frac{p}{k}-\operatorname{sh}\frac{p}{k}}{\operatorname{ch}\frac{p}{k}+\operatorname{sh}\frac{p}{k}}}.$$

Вставляя в последнее равенство

$$\operatorname{ch}\frac{p}{k} = \left(e^{\frac{p}{k}} + e^{-\frac{p}{k}}\right)\Big/2,\ \operatorname{sh}\frac{p}{k} = \left(e^{\frac{p}{k}} - e^{-\frac{p}{k}}\right)\Big/2,$$

мы окончательно получим:

$$\operatorname{tg}\frac{\Pi(p)}{2} = e^{-\frac{p}{k}}. \tag{3.34}$$

Эта формула, связывающая угол параллельности $\Pi(p)$ с соответствующим отрезком p, называется *основной формулой Лобачевского*. Из нее следует, что угол параллельности является монотонно убывающей функцией. Если отрезок параллельности p стремится к нулю, то угол параллельности стремится к прямому углу, если же p стремится к бесконечности, то угол $\Pi(p)$ стремится к нулю.

6. Геометрия сферы пространства Лобачевского

Возьмем в трехмерном пространстве Лобачевского сферу радиуса R с центром в некоторой точке O. На этой сфере индуцируется некоторая геометрия. Получающаяся совокупность предложений называется *геометрией сферы* в пространстве Лобачевского. Рассмотрим в этой геометрии прямоугольный треугольник ABC, образованный из дуг $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ больших кругов. Большие круги здесь, как и в сферической геометрии обычного пространства, играют роль прямых линий.

Углы между большими кругами понимаются как линейные углы двугранных углов, образованных плоскостями больших кругов. Предположим, что угол C данного треугольника прямой. Опустим далее из точки B перпендикуляры BA_1 и BC_1 на радиусы OA и OC

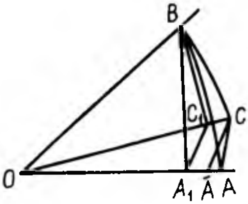


Рис. 67

соответственно. Применяя известные формулы к прямоугольному треугольнику OBC_1 (рис. 67), мы получим: $\operatorname{sh}\frac{BC_1}{k}=\operatorname{sh}\frac{R}{k}\sin\frac{a}{R}$. Аналогично из треугольников OBA_1 и A_1BC_1 следует, что

$$\operatorname{sh}\frac{BA_1}{k}=\operatorname{sh}\frac{R}{k}\sin\frac{c}{R},$$

$$\operatorname{sh}\frac{BC_1}{k}=\operatorname{sh}\frac{BA_1}{k}\sin A.$$

Исключая из этих трех соотношений BC_1 и BA_1, мы получим формулу $\sin\frac{a}{R}=\sin\frac{c}{R}\sin A$, совпадающую с соответствующей формулой для прямоугольного сферического треугольника в евклидовом пространстве. Выведем теперь теорему Пифагора для прямоугольного треугольника ABC в геометрии сферы в пространстве Лобачевского. Из треугольника OBC_1 имеем: $\operatorname{th}\frac{OC_1}{k}=\operatorname{th}\frac{R}{k}\cos\frac{a}{R}$. Аналогично из треугольников OBA_1 и OA_1C_1 соответственно следует, что $\operatorname{th}\frac{OA_1}{k}=\operatorname{th}\frac{R}{k}\cos\frac{c}{R}$, $\operatorname{th}\frac{OA_1}{k}=\operatorname{th}\frac{OC_1}{k}\cos\frac{b}{R}$. Исключая из полученных трех равенств отрезки OC_1 и OA_1, мы выводим: $\cos\frac{c}{R}=\cos\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R}$.

Эта формула совпадает с соответствующей формулой для прямоугольного треугольника обычной сферической геометрии. Указанным способом можно убедиться, что в целом геометрия сферы пространства Лобачевского совпадает с геометрией сферы евклидова пространства.

7. О геометрии Лобачевского в малом

Предположим теперь, что в треугольнике линейные размеры a, b, c малы по сравнению с радиусом кривизны k пространства (рис. 68). Это предположение заведомо выполняется для треугольников с малыми линейными размерами или в пространстве достаточно малой кривизны $1/k^2$. Разлагая в степенные ряды гиперболические функции в формуле (3.26), выражающей теорему косинусов в геометрии Лобачевского, получим:

$$1+\frac{c^2}{2k^2}+\ldots=\left(1+\frac{a^2}{2k^2}+\ldots\right)\left(1+\frac{b^2}{2k^2}+\ldots\right)-$$
$$-\left(\frac{a}{k}+\ldots\right)\left(\frac{b}{k}+\ldots\right)\cos C.$$

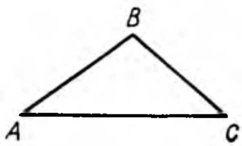


Рис. 68

Учитывая здесь члены до второго порядка малости включительно, будем иметь:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$. Эта зависимость между элементами треугольника выражает теорему косинусов в евклидовой геометрии. В случае прямоугольного треугольника $\cos A = 0$; следовательно, $c^2 = a^2 + b^2$, т. е. справедлива теорема Пифагора. Далее при наших предположениях синусы гиперболические в формуле (3.28) в первом приближении пропорциональны аргументам, поэтому

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

т. е. стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов. Последние три равенства позволяют утверждать, что формулы геометрии Лобачевского для фигур с малыми линейными размерами совпадают с соответствующими формулами евклидовой геометрии.

8. Определение геометрии Лобачевского в системе аксиом Вейля

Приведем теперь аксиоматическое определение плоскости Лобачевского, опираясь на понятие векторного пространства.

Множество L_2 элементов, именуемых точками, называется *двумерным пространством Лобачевского над полем вещественных чисел* $\boldsymbol{R}$, если существует такое отображение π на это множество L_2 временных элементов трехмерного псевдоевклидова векторного пространства V_3^1 над $\boldsymbol{R}$ сигнатуры Минковского (++—), что выполняются следующие три аксиомы:

1. Отображение $\pi : V_3^1 \to L_2$ сюръективно, т. е. $\pi\,(V_3^1) = L_2$;

2. $\pi\,(\vec{x}) = \pi\,(\vec{y})$ тогда и только тогда, когда временные векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$ коллинеарны, т. е. $\vec{y} = \lambda\vec{x}$, где $\lambda \neq 0$ ($\lambda \in \boldsymbol{R}$).

3. $\forall X(\vec{x})\,Y(\vec{y}) \in L_2$ сопоставляется $d(X, Y) > 0$ (расстояние) такое, что $\operatorname{ch}(d(X, Y)/k) = |\vec{x}\,\Pi\,\vec{y}/|\vec{x}|\cdot|\vec{y}||$, $(X = \pi(\vec{x})$, $Y = \pi(\vec{y})$, $k > 0)$.

Другими словами, аксиомы 1—3 характеризуют в теории трехмерных псевдоевклидовых векторных пространств род структур, называемых двумерными пространствами Лобачевского. Геометрия Лобачевского определяется как теория структур этого рода.

Вопросы и упражнения

1. По какому отношению факторизуются точки сферы чисто мнимого радиуса пространства Минковского при построении плоскости Лобачевского?

2. Дайте определение n-мерного пространства Лобачевского. Приведите модели n-мерной геометрии Лобачевского.

3. Откуда следует, что расстояние в псевдоевклидовой плоскости между двумя точками не может равняться $5 + 12i$?

4. Проверьте, что псевдоевклидова и полуевклидова плоскости являются однородными и симметрическими пространствами (с. 198).

Глава VII
ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ МНОГООБРАЗИЯ, ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ

В настоящей главе рассматриваются некоторые понятия из теорий топологических пространств, дифференцируемых многообразий и групп Ли. Они используются в следующей главе при изучении римановых пространств и пространств аффинной связности, обобщающих пространства Евклида, Лобачевского и Римана (пространство эллиптической геометрии).

Эти понятия применяются также и в добавлении, в котором рассматриваются расслоенные пространства и связности в них.

§ 1. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

1. Топологические пространства

Дадим определение топологического пространства: *топологическим пространством* называется любое множество элементов M, в котором выделены некоторые подмножества, называемые открытыми множествами, так, что выполняются следующие две аксиомы:

1. Данное множество M и пустое множество открыты;
2. Объединение любой совокупности открытых множеств открыто; пересечение конечного числа открытых множеств открыто.

Элементы топологического пространства называются точками. Систему открытых подмножеств множества M, определяемую аксиомами 1—2, будем обозначать символом τ. Таким образом, топологическое пространство есть пара (M, τ), состоящая из многообразия M и топологии τ, другими словами, аксиомы 1—2 определяют на M род структур, называемых топологическими пространствами. Типизации на M задаются подмножествами τ множества всех подмножеств M.

Если система τ открытых подмножеств данного множества X содержит всевозможные его подмножества, то пространство X и топология τ называются *дискретными*. Если же система τ содержит лишь само множество и пустое подмножество, т. е. $\tau = \{\varnothing, X\}$, то топологическое пространство называется *тривиальным*.

Предположим, что на множестве X введены две топологии соответственно τ_1, τ_2 и одна из них, например τ_1, содержится в τ_2: $\tau_1 \subset \tau_2$. В этом случае мы будем говорить, что *топология* τ_1 *слабее топологии* τ_2 или топология τ_2 сильнее топологии τ_1.

Таким образом, дискретная топология является сильнейшей топологией из всевозможных топологий на X, а тривиальная топология — слабейшей.

Аксиомы 1—2 позволяют определить понятие замкнутого множества, окрестности точки, точки прикосновения данного множества и др. Приведем определение этих понятий.

Множество точек топологического пространства называется *замкнутым*, если его дополнение является открытым множеством. *Окрестностью* точки называется всякое открытое множество, содержащее эту точку.

Пусть в топологическом пространстве X дано некоторое множество точек M. Точка x топологического пространства называется *точкой прикосновения* данного множества M, если в любой ее окрестности содержится точка этого множества. Объединение множества с множеством его точек прикосновения называется *замыканием* множества M и обозначается оно той же буквой с чертой наверху $\overline{M}$. Точка x топологического пространства называется *предельной* для множества M, если всякая ее окрестность содержит принадлежащую множеству M точку y, отличную от x.

Топологическое пространство X называется *хаусдорфовым пространством*, если для любых двух его различных точек существуют окрестности без общих точек. Совокупность B открытых множеств называется *базой пространства* X, если всякое открытое множество будет объединением некоторых множеств, принадлежащих B.

Если существует база, состоящая из счетной совокупности открытых множеств B, то пространство X называется *топологическим пространством со счетной базой*.

Примером топологического пространства является евклидово пространство, в котором внутренности шаров и всевозможные их объединения приняты в качестве открытых множеств. Топологическим пространством является также аффинное пространство, если в роли открытых множеств принять внутренности параллелепипедов $a_i < x_i < b_i$ и всевозможные их объединения.

Важнейшим классом топологических пространств являются метрические пространства. В качестве открытых множеств можно принять внутренности шаров с центрами $x_0 \in X$, т. е. множества точек x, удовлетворяющие неравенству $\rho(x, x_0) < \varepsilon$, и всевозможные их объединения.

Отображение $f: X \to Y$, где X, Y — топологические пространства, называется *непрерывным в точке* $x \in X$ $(y = f(x))$, если для каждой окрестности V точки y существует такая окрестность U точки x, что $f(U) \subset V$. *Отображение f называется непрерывным*, если оно непрерывно в любой точке топологического пространства X.

Топологические пространства X и Y называются *гомеоморфными*, если существует взаимно однозначное и непрерывное отображение пространства X на Y, для которого обратное отображение второго пространства на первое также является непрерывным; отображение f, с помощью которого устанавливается гомеоморфность пространств X и Y, называется *гомеоморфизмом*.

Предположим, что нам дано некоторое отображение

$$f: X \to Y \tag{1.1}$$

топологического пространства X в топологическое пространство Y.

Это отображение является непрерывным тогда и только тогда, когда полный прообраз $f^{-1}(V)$ любого открытого множества $V \subset Y$ будет открытым в пространстве X.

Ясно, что если в записи (1.1) по крайней мере одно из пространств X или Y является лишь множеством и не есть топологическое пространство, говорить в этом случае о непрерывности отображения f не имеет смысла.

Если f является отображением множества X на топологическое пространство Y, то на X порождается топология τ, слабейшая из топологий, в которых отображение f непрерывно.

В частности, когда $X \subset Y$ и отображение f является вложением X в Y (т. е. $f(x) = x$, $\forall x \in X$), то $f^{-1}(\tau) = \{G \cap X\}$ для любого $G \in \tau$. Топология, которая возникает на X, называется относительной топологией или топологическим подпространством.

Предположим теперь, что отображение

$$f : X \to Y \tag{1.2}$$

является отображением топологического пространства X на множество Y. В этом случае на множестве Y однозначным образом возникает сильнейшая топология из топологий, в которых отображение f непрерывно.

В частности, если T является отношением эквивалентности на множестве X и отображение

$$f : X \to X/T \tag{1.3}$$

является каноническим отображением топологического пространства X на фактор-множество X/T, то сильнейшая топология в X/T, при которой f остается непрерывным отображением, называется *фактор-топологией*.

Приведем еще одно понятие — компактности, играющей важную роль в теории дифференцируемых многообразий. Предварительно определим понятие покрытия пространства X открытыми множествами.

Пусть X — топологическое пространство. Покрытие данного пространства по определению есть совокупность открытых множеств в X, объединение которых совпадает с X.

Топологическое пространство называется *компактным*, если из каждого его открытого покрытия можно выбрать конечное покрытие.

Говорят также, что *покрытие* пространства X *локально конечное*, если каждая точка пространства допускает окрестность, пересекающуюся лишь с конечным числом подмножеств этого покрытия.

2. Дифференцируемые многообразия

Топологическое пространство со счетной базой называется n-мерным топологическим многообразием, если каждая точка этого пространства обладает окрестностью, гомеоморфной n-мерному евклидову пространству. Число n называется числом измерения многообразия.

Иногда приходится рассматривать так называемые многообразия с краем. Чтобы привести определение этого понятия, обозначим символом R_+^n множество точек $x(x^1, \ldots, x^n)$ пространства R^n, для которых $x^n \geqslant 0$. Топологическое пространство со счетной базой называется n-мерным топологическим многообразием с краем X_n, если каждая его точка имеет окрестность, гомеоморфную R^n или R_+^n. *Краем многообразия* X_n называется множество всех его точек, которые имеют окрестность, гомеоморфную R_+^n, но не имеют окрестности, гомеоморфной R^n. Например, отрезок $[0, 1]$ числовой прямой R является одномерным многообразием с краем (край состоит из двух точек $0,1$ — концов отрезка).

Свойства гомеоморфности каждой окрестности U счетной базы евклидову пространству позволяет ввести в U координаты. Окрестность и указанный в определении гомеоморфизм h образуют пару (U, h), называемую *локальной картой*. Множество U пары (U, h) называется *областью определения карты*, а декартовы координаты $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ точки $h(p) \in R^n$ $(p \in U)$ — *локальными координатами точки* $p \in U$ в этой карте. Короче, координатами точки $p \in U$ называются декартовы координаты ее образа в гомеоморфизме h.

Совокупность локальных карт, области определения которых покрывают некоторую область, называется *атласом этой области*. Топологическое n-мерное *многообразие* X_n *называется дифференцируемым класса* C^p, если существует атлас, удовлетворяющий следующим двум аксиомам:

1. Области определения карт атласа покрывают все X_n.

2. Если U_α и U_β — две области определения карт (U_α, h_α) и (U_β, h_β) атласа и точка q принадлежит пересечению этих областей, то локальные координаты $x^i(q)$ точки q в одной карте являются функциями класса C^p от локальных координат $y^i(q)$ той же точки q в другой карте, причем якобиан преобразования не равняется нулю (если эти функции аналитические, то X_n называется аналитическим).

Атлас, удовлетворяющий аксиомам 1—2, называется атласом класса C^p данного многообразия X_n.

Два атласа класса C^p данного многообразия называются *эквивалентными*, если их объединение будет также атласом класса C^p. Ясно, что эквивалентные атласы определяют на многообразии одну и ту же структуру дифференцируемого многообразия класса C^p.

Примеры дифференцируемых многообразий

Пример 1. Евклидово пространство R^n, очевидно, является дифференцируемым многообразием, причем оно может быть покрыто одной координатной окрестностью. Открытое подмножество евклидова пространства также является дифференцируемым многообразием.

Пример 2. Другим примером дифференцируемого многообразия является сфера — множество точек R^{n+1}, координаты которых удовлетворяют условию: ${x^1}^2 + {x^2}^2 + \ldots + {x^{n+1}}^2 = 1$. Пусть U_i^+, U_i^- обозначают множества точек сферы, в которых x^i соответственно больше и меньше нуля. Тогда открытые множества U_1^+, U_1^-, U_2^+, U_2^-, ..., U_{n+1}^+, U_{n+1}^- покрывают всю сферу, и каждое из них гомеоморфно области евклидова пространства R^n. Координатные гомеоморфизмы на U_i определяются координатами $(x^1, x^2, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^{n+1})$.

Пример 3. Пространство вещественных $m \times n$ матриц, рассматриваемое как R^{mn}, допускает структуру аналитического многообразия [22].

Совокупность p-мерных подпространств векторного пространства E^n также допускает структуру аналитического многообразия размерности $p\,(n - p)$. Это так называемое *грассманово многообразие* p-мерных подпространств в E^n.

3. О дифференцируемых функциях на многообразии

Пусть нам задано дифференцируемое многообразие X_n класса C^p. Функцией f на X_n по определению является отображение $X_n \to \mathbf{R}$. Эта функция f называется *функцией класса* C^v $(v \leqslant p)$ в некоторой области $D \subset X_n$, если функция с числовыми аргументами в локальных координатах $f \circ h^{-1} = f\,(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ является дифференцируемой функцией до порядка v включительно в области $h\,(D)$ евклидова пространства. Ясно, что если перейти к другим допустимым локальным координатам, то f будет также класса C^v, т. е. определение класса функции не зависит от выбора координатных карт, покрывающих область D. В частности, если функция f определена на $U_i \cap U_j$ и $f \circ h_i^{-1}$ дифференцируема, то функция $f \circ h_j^{-1}$ также дифференцируема. В самом деле, это утверждение следует из разложения $f \circ h_j^{-1} = f \circ h_i^{-1} \circ h_i \circ h_j^{-1}$, в котором $h_i \circ h_j^{-1}$ по определению является дифференцируемым преобразованием.

Множество функций класса C^v будем обозначать символом $F\,(D)$. В дальнейшем удобно ввести также следующее определение. Функция f называется *функцией класса* C^v *в точке* $p \in X_n$, если существует окрестность этой точки p, на которой она определена и принадлежит классу C^v.

§ 2. ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО, КАСАТЕЛЬНОЕ В ТОЧКЕ МНОГООБРАЗИЯ

В произвольном дифференцируемом многообразии X_n класса C^p $(p \geqslant 0)$ понятие кривой вводится следующим образом.

Сначала определяется понятие параметрической кривой: *пара-*

метрической кривой l класса C^v в X_n называется отображение класса C^v ($v \leqslant p$) одномерного многообразия (или одномерного многообразия с краем) I, принадлежащего числовой прямой $\boldsymbol{R}$, в многообразие X_n:

$$l : x = f(t) \; (t \in I). \tag{2.1}$$

Затем в множестве всех параметрических кривых, обозначаемых $P(X_n)$, вводится отношение g (отношение эквивалентности): две параметрические кривые $l_1 : x = f_1(t)$, $l_2 : x = f_2(\tau)$ ($t \in I_1$, $\tau \in I_2$) по определению находятся в отношении g, если существует такой диффеоморфизм класса C^v $g : I_1 \to I_2$, что при любом $t \in I_1$ выполняется равенство

$$f_2(g(t)) \equiv f_1(t). \tag{2.2}$$

Далее строим фактор-множество $P(X_n)/g$ множества всех параметрических кривых многообразия X_n по отношению g; элементы фактор-множества $P(X_n)/g$ называются *кривыми класса C^v многообразия X_n*.

Параметрическая кривая, соответствующая случаю, когда I является многообразием с краем вида $I = [a, b] \subset \boldsymbol{R}$, называется *путем*. Для определенности мы предположим в дальнейшем, что $I = [a, b]$. Рассмотрим теперь путь класса C^v ($v \leqslant p$), проходящий через точку $x_0 \in X_n$. Последнее условие означает, что существует такое $t_0 \in [a, b]$, для которого значение $f(t_0) = x_0$. Пусть P_{x_0} означает множество путей, проходящих через точку x_0. Предположим далее, что (U, φ) — некоторая карта из атласа и точка $x_0 \in U$. Очевидно, для t_0 найдется такое $U_1 \subset [a, b]$, что $f(U_1) \subset U$.

Таким образом, можно построить отображение $\bar{f} = \varphi f | U_1 : U_1 \to R^n$, определяемое функциями

$$x^1 = f^1(t), \; x^2 = f^2(t), \; \ldots, \; x^n = f^n(t) \tag{2.3}$$

класса C^v, где $t \in U_1$.

Вектор арифметического пространства $A_n(x^i)$ (с топологией прямого произведения)

$$\frac{dx^1}{dt}, \; \frac{dx^2}{dt}, \; \ldots, \; \frac{dx^n}{dt} \tag{2.4}$$

называется *касательным вектором* к пути l в точке $x_0 \in X_n$ по отношению к карте (U, φ). Совокупность векторов, касательных относительно карты (U, φ) к всевозможным путям из P_{x_0} в точке x_0, обычно обозначается символом $T_{x_0}(U, \varphi)$.

Нетрудно убедиться, что это множество $T_{x_0}(U, \varphi)$ совпадает с множеством векторов арифметического векторного пространства. В самом деле, если $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ — локальные координаты точки x_0 относительно карты (U, φ) и $(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)$ — произвольные вещественные числа, то функции

$$f^1 = x_0^1 + \xi^1(t - t_0), \; f^2 = x_0^2 + \xi^2(t - t_0), \; \ldots, \; f^n = x_0^n + \xi^n(t - t_0)$$

определяют путь, проходящий через точку x_0, и набор $(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)$ является касательным вектором к пути l в точке x_0 относительно карты (U, φ).

Рассмотрим на многообразии X_n две карты (U_1, φ_1) и (U_2, φ_2) и предположим, что точка $x_0 \in U_1 \cap U_2$. Возьмем затем из множества P_{x_0} некоторый путь $l : [a, b] \to X_n$, считая, что $l([a, b]) \subset \subset U_1 \cap U_2$.

Допустим, что связь локальных координат x^i, y^i осуществляется с помощью диффеоморфизма $\psi_{12} = \varphi_2\varphi_1^{-1}$, при котором

$$\varphi_1 (U_1 \cap U_2) \to \varphi_2 (U_1 \cap U_2).$$

Таким образом, формула перехода

$$y^i = \psi_{12}^i (x^1, \ldots, x^n) \tag{2.5}$$

определяется функциями класса C^v, определенными в области $\varphi (U_1 \cap U_2)$.

Очевидно, что если путь l в картах (U_1, φ_1), (U_2, φ_2) определяется соответственно уравнениями:

$$x^i = f_1^i (t),\ y^i = f_2^i (t), \tag{2.6}$$

то векторы

$$\frac{dx^i}{dt},\ \frac{dy^i}{dt} \tag{2.7}$$

являются касательными векторами соответственно в картах (U_1, φ_1) и (U_2, φ_2) к пути l в точке $x_0 \in X_n$.

Вставляя $x^i = f^i (t)$ в (2.5) и дифференцируя почленно эти равенства по t, получим:

$$\frac{dy^i}{dt} = \frac{\partial \psi_{12}^i}{\partial x^k} \frac{dx^k}{dt}. \tag{2.8}$$

Таким образом, вектор dy^i/dt получается из вектора dx^i / dt линейным преобразованием, причем матрицей преобразования является матрица, соответствующая переходу от локальных координат x^i к локальным координатам y^i.

Нас интересует объединение всевозможных касательных пространств $T_x (U_\alpha, \varphi_\alpha)$ точки x относительно карт $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, где $\alpha \in I$, $x \in U_\alpha$: $T_x = \bigcup_{\alpha \in I} T_x (U_\alpha, \varphi_\alpha)$.

В этом объединении рассмотрим отношение эквивалентности между элементами: отношение S считается выполненным для любых двух элементов: $(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)$, $(\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n) \in T_x$, если эти элементы отнесены к одной и той же карте, т. е. $\alpha = \beta$ и $\xi^i = \eta^i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; отношение S считается также выполненным, если элементы отнесены к координатным окрестностям U_α, U_β $(\alpha \neq \beta)$ и набор $\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n$ получается из набора $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n$ по формулам (2.8).

Непосредственная проверка показывает, что бинарное отношение S рефлексивно, взаимно и транзитивно, т. е. действительно является отношением эквивалентности.

Отношение S производит разбиение множества T_x на классы эквивалентности и позволяет, следовательно, построить фактор-множество T_x/S пространства T_x по отношению эквивалентности S.

Элементы этого фактор-пространства называются *касательными векторами* (контравариантными) *в точке* x многообразия X_n; совокупность всех касательных векторов называется касательным пространством в точке $x \in X_n$ и обозначается символом $T_x(X_n)$.

Векторы построенного касательного пространства $T_x(X_n)$ можно умножать на элементы поля $\boldsymbol{R}$ и складывать. Операции эти определяются с помощью представителей, отнесенных к одной и той же карте (U, φ), причем $x \in U$.

Если $\vec{\xi}, \vec{\eta}$ являются векторами T_x, т. е. классами эквивалентности, обозначаемыми соответственно символами $\vec{\xi} = [(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)]$, $\vec{\eta} = [(\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^n)]$, где $(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)$ и $(\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^n)$— представители этих классов в некоторой карте (U, φ) максимального атласа $\mathfrak{A}$, то суммой $\vec{\xi} + \vec{\eta}$ векторов $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$ по определению является класс эквивалентности, содержащий в той же карте представителя $\xi^1 + \eta^1, \xi^2 + \eta^2, \dots, \xi^n + \eta^n$ и, следовательно, $\vec{\xi} + \vec{\eta} = [(\xi^1 + \eta^1, \xi^2 + \eta^2, \dots, \xi^n + \eta^n)]$; аналогично произведение $\lambda\vec{\xi}$ вектора $\vec{\xi}$ на элемент $\lambda \in \boldsymbol{R}$ определяется как класс эквивалентности, содержащий в карте (U, φ) представителя $(\lambda\xi^1, \lambda\xi^2, \dots, \lambda\xi^n)$; иными словами, мы полагаем по определению: $\lambda\vec{\xi} = [(\lambda\xi^1, \lambda\xi^2, \dots, \lambda\xi^n)]$.

Нетрудно убедиться, что множество T_x векторов касательного пространства в точке x допускает относительно указанных операций структуру n-мерного векторного пространства. Объединение $T(X_n) = \bigcup\limits_{x \in X_n} T_x(X_n)$ называется *касательным расслоением над* X_n. Элементом касательного расслоения является точка x и вектор $\vec{\xi}$ в ней, т. е. пара $(x, \vec{\xi})$, определяемая координатами (x^i, ξ^j). Это расслоение будет $2n$-мерным дифференцируемым многообразием класса C^{p-1}, где C^p— класс X_n; допустимые преобразования в $T(X_n)$ имеют вид: $x^{i'} = x^{i'}(x^1, \dots, x^n)$, $\xi^{i'} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\xi^i$.

В качестве базисов касательных пространств здесь выбраны касательные векторы к координатным линиям локальной системы координат x^i, проходящим через точку $x \in X_n$. Определяемый таким образом базис называется натуральным базисом (репером).

Касательный вектор к j-й координатной линии $x^i = x_0^i$ $(i \neq j)$, $x^j = x_0^j + t$ определяет оператор

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (j = 1, 2, \dots, n). \tag{2.9}$$

Введем теперь сопряженное (дуальное) касательное пространство $T^*_{x_0}$ как пространство линейных отображений $T_{x_0} \to \boldsymbol{R}$.

Элементы пространства $T^*_{x_0}$ называются ковариантными векторами (ковекторами), касательными к многообразию X_n в точке x_0.

Совокупность всех векторов $T^*_x(X_n)$ образует сопряженное по отношению к $T_x(X_n)$ касательное пространство. В качестве натурального базиса в любой точке $x \in U$ можно взять систему ковекторов
$$dx^i \ (i = 1, 2, \dots, n). \qquad (2.10)$$

Очевидно, ковекторы этого базиса связаны с векторами естественного репера (2.9) соотношениями $X_j(dx^i) = \delta^i_j$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$.

Объединение сопряженных касательных пространств $T^*(X_n) = \bigcup\limits_{x \in X_n} T^*_x(X_n)$ называется *кокасательным расслоением над* X_n. Элементом кокасательного расслоения является совокупность точки x и приложенного к ней ковектора ω_α, т. е. пара (x, ω_α). Кокасательное расслоение является дифференцируемым многообразием $2n$-измерений.

Сопряженные пространства T_{x_0} и $T^*_{x_0}$ позволяют ввести понятие тензора (в точке $x_0 \in X_n$). Действительно, определим тензорное произведение элементов $\vec{u} \in T_{x_0}$ и $\vec{v} \in T^*_{x_0}$, которые обозначим символом $\vec{u} \otimes \vec{v}$, требованием линейности этой операции по обоим переменным. Дополним далее полученное множество всевозможных произведений $\vec{u} \otimes \vec{v}$ до векторного пространства $T^1_1 = T_{x_0} \otimes T^*_{x_0}$, вводя символы вида:
$$u_1 \otimes v_1 + \dots + u_s \otimes v_s.$$
Если $\vec{e}_i, \vec{e}^j$ — сопряженные базисы T_{x_0} и $T^*_{x_0}$ $(\vec{e}^j(\vec{e}_i) = \delta^j_i)$ и $\vec{u} = u^i \vec{e}_i$, $\vec{v} = v_j \vec{e}^j$, то $\vec{u} \otimes \vec{v} = u^i v_j \vec{e}_i \otimes \vec{e}^j$. Произведения $\vec{e}_i \otimes \vec{e}^j$ образуют базис пространства T^1_1 n^2-измерений. Тензорные произведения (степени) можно ввести для любого числа векторных пространств. Рассмотрим, например, тензорное произведение $T^p_q = T_{x_0} \otimes \dots \otimes T^*_{x_0}$, содержащее p сомножителей T_{x_0} и q сомножителей $T^*_{x_0}$. Тензором p раз контравариантным и q раз ковариантным (короче, тензором типа $\binom{p}{q}$) называется элемент пространства T^p_q. В предыдущем случае двух сомножителей $T_{x_0} \otimes T^*_{x_0}$ элементами являлись тензоры типа $\binom{1}{1}$.

Разложение тензора T по базису пространства T^p_q записывается в виде $\quad T = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_p} \otimes \vec{e}^{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}^{j_q}$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что если базисные векторы $\vec{e}_i, \vec{e}^j$ преобразуются по формулам $\vec{e}_{i'} = A^i_{i'} \vec{e}_i$, то координаты тензора преобразуются по закону:
$$T^{i'_1 \dots i'_p}_{j'_1 \dots j'_q} = A^{i'_1}_{i_1} \dots A^{i'_p}_{i_p} A^{j_1}_{j'_1} \dots A^{j_q}_{j'_q} T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}.$$

Прямая сумма пространств различных тензорных степеней определяет *тензорную алгебру* $T(T_x, T_x^*)$ векторных пространств T_x и T_x^*.

В частности, тензоры одного типа будут элементами одного векторного пространства, и, следовательно, их можно складывать и умножать на вещественные числа.

1. Векторные поля

Предположим, что нам дано дифференцируемое многообразие X_n. Объединение $T(X_n)$ (с. 173) допускает структуру дифференцируемого многообразия [20].

Векторным полем называется дифференцируемое отображение $\vec{v}: X_n \to T(X_n)$, относящее каждой точке $x \in X_n$ касательный вектор $\vec{v} \in T_x \subset T(X_n)$. Пусть $\vec{v}$ — векторное поле; рассмотрим функцию (производную по направлению) $\vec{v}\varphi \equiv d\varphi(\vec{v})$, где φ — дифференцируемая функция на X_n. Если функция $\vec{v}\varphi$ дифференцируема для любой дифференцируемой функции φ, то векторное поле $\vec{v}$ называется дифференцируемым.

Для двух векторных полей $\vec{v}$, $\vec{w}$ можно определить так называемую *скобку Пуассона*:

$$[\vec{v}\vec{w}]\varphi = \vec{v}(\vec{w}\varphi) - \vec{w}(\vec{v}\varphi), \tag{2.11}$$

которая будет также дифференцируемым векторным полем.

В локальных координатах мы имеем: $\vec{v}\varphi = v^i \partial_i \varphi$, $\vec{w}\varphi = w^i \partial_i \varphi$ $\left(\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\right)$, а координаты скобки $[\vec{v}\vec{w}]^i$ в натуральном репере приводятся к виду: $[\vec{v}\vec{w}]^i = v^\alpha \partial_\alpha w^i - w^\alpha \partial_\alpha v^i$. Если векторам $\vec{v}$, $\vec{w}$ сопоставить операторы $v^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$, $w^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$, то вектору $[\vec{v}\vec{w}]$ соответствует оператор $(v^\alpha \partial_\alpha w^\beta - w^\alpha \partial_\alpha v^\beta)\frac{\partial}{\partial x^\beta}$. Скобки эти обладают легко проверяемым свойством антисимметрии и удовлетворяют тождеству Якоби:

1) $[\vec{v}\vec{w}] = -[\vec{w}\vec{v}]$, $\qquad$ (2.12)

2) $[[\vec{u}\vec{v}]\vec{w}] + [[\vec{v}\vec{w}]\vec{u}] + [[\vec{w}\vec{u}]\vec{v}] = 0.$ $\qquad$ (2.13)

Рассмотрим еще одно свойство скобок. Предположим, что нам дано два дифференцируемых многообразия M и N и дифференцируемое отображение $\Phi: M \to N$.

Предположим также, что в M и N заданы векторные поля соответственно $\vec{u}$ и $\vec{v}$. Если окажется, что $d\Phi\vec{u}_x = \vec{v}_{\varphi(x)}$, то $\vec{u}$ и $\vec{v}$ называются Φ-соответствующими векторными полями. Нетрудно убедиться в справедливости следующего предложения.

Если $\vec{u}_1$ и $\vec{v}_1$, а также $\vec{u}_2$ и $\vec{v}_2$ будут Ф-соответствующие векторные поля, то скобки $[\vec{u}_1\vec{u}_2]$ и $[\vec{v}_1\vec{v}_2]$ также являются Ф-соответствующими.

2. Тензорные поля

Важнейшим понятием геометрии дифференцируемых многообразий является понятие тензорного поля. Предположим, что в некоторой координатной области многообразия X_n определена совокупность n^{p+q} функций $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}(x)$ класса C^p от независимых переменных $x^1, x^2, \dots, x^n$, занумерованных p-верхними и q-нижними индексами. Эта совокупность функций называется *тензорным полем* (короче, тензором) валентности $p+q$, p раз контравариантными и q раз ковариантными, если при любом допустимом преобразовании координат

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2, \dots, x^n), \ \left|\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right| \neq 0 \ (i, j = 1, \dots, n) \qquad (*)$$

функции $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}(x)$ преобразуются по закону:

$$T^{i'_1 \dots i'_p}_{j'_1 \dots j'_q}(x') = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}} T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}(x). \quad (**)$$

Функции $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}(x)$ называются натуральными координатами тензора относительно поля реперов $e^1 \otimes \dots \otimes e_{j_q}$, отвечающего системе (x^i).

В правой части $(**)$ предполагается суммирование по индексам $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q$, принимающим значения $1, 2, \dots, n$. Здесь и в дальнейшем условимся считать, что по повторяющемуся нижнему и верхнему индексу производится суммирование.

Из закона преобразования координат тензора при преобразовании локальных координат (x^i) следует, что каждая координата тензора в одной системе координат является линейной комбинацией всех его координат в другой системе координат. Следовательно, если координаты тензора равняются нулю в некоторой системе координат, то они равняются нулю в другой системе координат. Тензор с нулевыми координатами называется нулевым тензором.

Из закона преобразования координат тензора легко следует также, что: 1) при тождественном преобразовании локальных координат $x^{i'} = x^i$ имеем: $T^{i'_1 \dots i'_p}_{j'_1 \dots j'_q} = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$; 2) закон преобразования координат тензора удовлетворяет следующему свойству транзитивности.

Непосредственный переход от системы x^i к системе $x^{i''}$ и последовательный переход от x^i к $x^{i'}$ и от $x^{i'}$ к $x^{i''}$ приводят к одним и тем же координатам $T^{i''_1 \ldots i''_p}_{j''_1 \ldots j''_q}$ тензора $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$. Из этих свойств закона преобразования координат тензора при преобразовании координат класса C^v ($v \leqslant p$) следует равноправие рассматриваемых систем координат. Каждую из них можно принять в качестве исходной. *Два тензора* данного порядка и одной структуры *равны*, если равны их соответствующие координаты в некоторой системе координат (в соответствующем натуральном репере).

Приведем примеры тензорных полей. Простейшим примером является поле тензора нулевой валентности. Такой тензор называется *скаляром*. Скаляр имеет лишь одну координату $T(x)$. Закон преобразования (**) при преобразовании координат (*) приводится к виду: $T'(x') = T(x)$.

Другим примером один раз ковариантного тензорного поля является совокупность частных производных первого порядка от скаляра $T(x)$. В самом деле, дифференцируя последнее соотношение почленно по $x^{i'}$, получим: $\partial_{i'} T'(x') = \partial_\alpha T(x) \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}} \left(\partial_\alpha = \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)$. Полученный ковариантный тензор называется также *ковариантным полем* или *ковектором*. Наряду с ковекторным полем существует один раз контравариантный тензор с координатами $dx^1, dx^2, \ldots, dx^n$. Действительно, из формул (*) преобразования координат следует, что $dx^{i'} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha$.

Этот тензор часто называется *контравариантным вектором бесконечно малого перемещения*. Если $P^{i_1}(x)$, $Q^{i}(x)$ — два контравариантных векторных поля и $R_{j_1}(x)$ — ковектор, то нетрудно убедиться, что

$$S^{i_1 i_2}_{j_1} = P^{i_1} Q^{i_2} R_{j_1}, \quad T^{i_1 i_2} = P^{i_1} Q^{i_2}, \quad U_{j_1 j_2} = R_{j_1} R_{j_2}$$

являются тензорами указанной положением индексов структуры. Два раза ковариантный тензор $U_{j_1 j_2}$, очевидно, обладает симметрией по индексам j_1, j_2, т. е. $U_{j_1 j_2} = U_{j_2 j_1}$.

Здесь, так же как и в предыдущем пункте, можно прийти к понятию расслоенного пространства. В самом деле, рассмотрим в каждой точке x дифференцируемого многообразия X_n всевозможные тензоры (T^p_q) типа $\binom{p}{q}$. Объединение всех пространств (T^p_q) многообразия X_n называется *тензорным расслоением над* X_n: $T^p_q(X_n) = \bigcup\limits_{x \in X_n} (T^p_q)_x$.

Тензорные поля типа $\binom{p}{q}$ над многообразием X_n теперь можно определить как сечения соответствующего тензорного расслоения $T^p_q(X_n)$; сечением расслоения называется такое отображение s: $X_n \to T^p_q(X_n)$, что отображение πs есть тождественное отображение многообразия X_n на себя (π обозначает отображение $T^p_q(X_n) \to \to X_n$, определенное по закону: $\pi\,(T^p_q)_x = x$).

Все операции над тензорами могут быть перенесены на тензорные поля; в конечном итоге мы получим *тензорную алгебру* над многообразием X_n.

§ 3. ГРУППЫ ЛИ И АЛГЕБРЫ ЛИ

1. О некоторых понятиях теории групп

Напомним определение группы, которое было дано в первой главе (с. 16). *Группой называется структура* (G, f), состоящая из множества элементов G и отображения $f : G \times G \to G$, определяющего групповую операцию так, что выполняются аксиомы 1—4.

Часть элементов группы, образующая относительно той же групповой операции самостоятельную группу, называется *подгруппой* данной группы. Например, совокупность четных чисел в группе всех целых чисел относительно операции сложения образует подгруппу; совокупность параллельных переносов также образует подгруппу в группе всех изометрий плоскости.

Нетрудно убедиться, что множество элементов H из группы тогда и только тогда составляет подгруппу, если для любых двух элементов $a, b \in H$ следует $ab^{-1} \in H$.

Умножим теперь элементы подгруппы H справа (слева) на некоторый элемент $c \in G$, принадлежащий группе. Полученное множество элементов обычно обозначается через Hc (cH) и называется правым (левым) классом смежности. Эти классы смежности обладают замечательным свойством. Любые два правых (левых) класса смежности или совсем не имеют общих элементов, или они совпадают. Отсюда следует, что группу G можно разложить по правым (левым) классам смежности. Этот факт позволяет сделать следующий вывод, в случае если группа конечного порядка. Порядок группы делится на порядок любой своей подгруппы (теорема Лагранжа).

Совокупность элементов $a^{-1}Ha$, где H — подгруппа, a — некоторый элемент группы G, образует подгруппу группы G. *Подгруппа* $a^{-1}Ha$ называется *сопряженной* с H подгруппой. Подгруппа H, совпадающая со всеми своими сопряженными подгруппами, называется нормальным делителем или инвариантной подгруппой группы G. Ясно, что для нормального делителя H правые и левые классы смежности совпадают, т. е. $aH = Ha$ для любого $a \in G$.

Определим теперь понятие фактор-группы. Пусть нам задана группа G и некоторый ее нормальный делитель H. Образуем левые классы смежности группы G по подгруппе H:

$$H,\ aH,\ bH,\ cH,\ \ldots\ . \qquad (*)$$

Можно убедиться, что эта совокупность классов в свою очередь допускает структуру группы. Произведением классов aH и bH будем называть класс cH, содержащий элемент $ab = c$; иными словами, операция умножения классов вводится посредством умножения представителей: $aH \cdot bH = cH$ $(ab = c)$. Докажем прежде всего, что так определенная операция умножения классов не зависит от выбора представителей. В самом деле, предположим, что $a_1 \in aH$, $b_1 \in bH$, т. е. $a_1 = ah_1$, $b_1 = bh_2$, где h_1, h_2 принадлежат нормальному делителю H. В таком случае имеем: $a_1b_1 = ah_1bh_2 = abh_3h_2$, где $h_3 = b^{-1}h_1b$; следовательно, $a_1b_1 \in abH$ и произведение классов не зависит от выбора представителей.

Очевидно также, что эта операция умножения классов ассоциативна. Более того, легко установить, что класс H является единицей новой группы: для любого смежного класса aH мы имеем:

$$aH \cdot H = aH \cdot eH = aeH = aH.$$

Далее непосредственной проверкой убеждаемся, что обратным элементом к смежному классу aH является $a^{-1}H$. В самом деле,

$$aH \cdot a^{-1}H = aa^{-1}H = H.$$

Итак, все аксиомы 1—4 теории групп выполнены, и совокупность (*) смежных классов допускает относительно введенной операции структуру группы.

Построенная группа смежных классов называется *фактор-группой* или дополнительной группой G по H и обозначается символом G/H.

Остановимся в заключение пункта на понятиях изоморфизма и гомоморфизма двух групп G_1 и G_2. *Группа* G_1 называется *изоморфной группе* G_2, если существует взаимно однозначное отображение f элементов первой группы на элементы второй, сохраняющее операцию умножения, т. е. для любых элементов a_1, b_1 первой группы, мы имеем: $f(a_1b_1) = f(a_1)f(b_1)$ во второй группе. Структурными свойствами данной группы называются свойства, общие для всех изоморфных с ней групп. Такие свойства, как коммутативность группы или существование в группе подгруппы, являются структурными свойствами.

С каждым элементом a данной группы можно сопоставить преобразование элементов той же группы следующим образом: $\widetilde{a_\alpha} = aa_\alpha$. Это отображение элементов называется *левым сдвигом*. Согласно известной теореме Вейля любую абстрактную группу можно представить с точностью до изоморфизма в виде группы преобразований, например группы левых сдвигов. Изменяя в левых сдвигах порядок следования сомножителей, мы получим представление данной группы в виде группы преобразований правыми сдвигами.

Группа G_1 называется *гомоморфной группе* G_2, если существует отображение f элементов первой группы на элементы второй группы, сохраняющее операцию умножения. Последнее означает, что для любых двух элементов a_1, b_1 из первой группы имеет место следующее равенство во второй группе: $f(a_1b_1) = f(a_1)f(b_1)$. Это отображение в отличие от изоморфизма в общем случае не является взаимно однозначным отображением G_1 на G_2. Совокупность элементов группы G_1, отображающихся при гомоморфизме в единицу второй группы G_2, называется *ядром гомоморфизма*. Ядро гомоморфизма является нормальным делителем группы G_1. Ядром гомоморфизма в указанном выше примере служит нормальный делитель H. При гомоморфизме, так же как и при изоморфизме, единица первой группы переходит в единицу второй группы, а элемент, обратный к a_1, переходит в элемент, обратный к $f(a_1)$. Например, группа G гомоморфна со своей фактор-группой G/H. Гомоморфизм в этом случае канонический, и осуществляется он по следующему закону: всякому элементу из группы сопоставляется в качестве соответствующего элемента из фактор-группы тот смежный класс, в котором этот элемент содержится.

Всякий гомоморфизм группы G_1 на G_2 может быть таким образом описан, т. е. если группа G_1 гомоморфна группе G_2, то существует в первой группе такой нормальный делитель H_1, что фактор-группа G_1/H_1 изоморфна с группой G_2.

2. Прямое произведение двух групп

Предположим, что даны G_1 и G_2 — две группы: $G_1 = \{a_1, b_1, c_1, \ldots\}$, $G_2 = \{a_2, b_2, c_2, \ldots\}$. Образуем декартово произведение множеств G_1 и G_2, т. е. множество упорядоченных пар (a_1, a_2), (a_1, b_2), ..., (b_1, a_2), ..., где на первом месте стоит элемент из первой группы, а на втором — элемент из второй группы. Введем теперь операцию умножения пар следующим образом: $(a_1, a_2) \times (b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$. Легко проверить, что все групповые аксиомы при таком умножении выполняются и построенная совокупность пар является группой G, которая и называется *прямым произведением данных групп* G_1, G_2: $G = G_1 \times G_2$.

Ясно, что единицей прямого произведения служит пара (e_1, e_2), где e_1, e_2 являются единицами групп сомножителей соответственно G_1 и G_2. Очевидно также, что обратной парой для пары (a_1, a_2) является пара (a_1^{-1}, a_2^{-1}), где a_1^{-1} — обратный элемент к a_1, a_2^{-1} — обратный элемент к a_2.

3. Присоединенная группа. Центр группы

Взаимно однозначное отображение группы G на себя, сохраняющее операцию умножения, называется *автоморфизмом группы*. Нетрудно проверить, например, что преобразование

$$\tilde{a}_\alpha = b^{-1} a_\alpha b \quad (a_\alpha \in G), \qquad (**)$$

где $b \in G$ является автоморфизмом группы. Автоморфизмы вида (**) называются *внутренними*. Из определения следует, что совокупность всех автоморфизмов составляет группу, называемую гомоморфом группы G. Совокупность всех внутренних автоморфизмов также составляет группу, она называется *присоединенной группой*. Группа G, вообще говоря, лишь гомоморфна с присоединенной группой.

Чтобы найти ядро гомоморфизма, мы рассмотрим элементы, которые отображаются в единицу присоединенной группы:

$$a_\alpha \doteq b^{-1} a_\alpha b. \tag{3.1}$$

Умножая (3.1) слева на b, получим: $ba_\alpha = a_\alpha b$, т. е. искомые элементы перестановочны со всеми элементами группы. Совокупность таких элементов по определению является центром данной группы. На этом мы заканчиваем сводку понятий из общей теории групп и переходим к группам Ли.

4. Группы Ли

Приведем определение важнейшего понятия — группы Ли. *Группой Ли называется дифференцируемое многообразие* G вместе с умножением — дифференцируемым отображением (класса C^3) $\varphi : G \times G \to G$, удовлетворяющим следующим трем условиям:

1) $\varphi(a, \varphi(b, c)) = \varphi(\varphi(a, b), c)$; (3.2)

2) существует такое $e \in G$, что для всех $a \in G$ имеем:

$$\varphi(a, e) = a; \tag{3.3}$$

3) существует дифференцируемое отображение $G \to G$, переводящее $a \to a^{-1}$ так, что

$$\varphi(a, a^{-1}) = e. \tag{3.4}$$

Таким образом, группа Ли есть группа G, наделенная структурой дифференцируемого многообразия, в которой отображение $G \times G \to G$, определенное формулой

$$(a, b) \to ab^{-1}, \tag{3.5}$$

является дифференцируемым. Обратно, из (3.5) следует 3) и дифференцируемость φ.

В самом деле, отображение $a \to a^{-1}$ можно представить в виде $(e, a) \to ea^{-1}$, и условие 3) выполняется.

Кроме того, отображение φ: $(a, b) \to ab$ тоже дифференцируемо, так как оно является композицией двух отображений: $(a, b) \to (a, b^{-1})$, $(a, b^{-1}) \to ab$, каждое из которых дифференцируемо. На всякой группе Ли, как известно, можно ввести структуру аналитического многообразия, совместимую с групповой структурой.

Важным примером группы Ли является группа невырожденных квадратных матриц n-го порядка относительно операции умножения матриц. Закон умножения матриц $a = (a^i_j)$ и $b = (b^i_j)$ осуществляется по правилу $c = ab$, где $c^i_j = a^i_\alpha b^\alpha_j$. Очевидно, условия 1—3, определяющие группу Ли, выполняются.

В дальнейшем мы часто будем изучать лишь некоторую окрестность единичного элемента группы Ли, называемую иногда *локальной группой Ли*. Определение этого понятия дается ниже. На локальную группу Ли следует смотреть как на самостоятельный объект изучения; особо отметим, что локальная группа Ли не является группой.

Локальной группой Ли G_r называется пара (U, ψ), где U — открытое множество евклидова E_r, содержащее начало координат, а $\psi : U \times U \to E_r$ — отображение, удовлетворяющее условиям: 1) отображение $(a, b) \to \psi(a, b)$ $(a, b \in U)$ три раза непрерывно дифференцируемо; 2) для любых $a, b, c \in U$ выполняется равенство $\psi(\psi(a, b), c) = \psi(a, \psi(b, c))$; 3) $\psi(0, a) = \psi(a, 0) = a$; 4) существует отображение ε класса $C^3 : U \to E_r$, что $\psi(a, \varepsilon(a)) = \psi(\varepsilon(a), a) = 0$. Свойства в условиях 1—4 предполагаются выполненными в той области, в которой имеют смысл входящие в равенства выражения. *Множество U называется ядром локальной группы.* Таким образом, операция умножения определена на точках ядра, произведение же может принадлежать или не принадлежать ядру.

Рассмотрим теперь отображение ядра при помощи правого сдвига

$R_b : \widetilde{a^\alpha} = \psi^\alpha(a, b)$ при предположении, что элемент b достаточно близок к единице локальной группы G, т. е. $b^\lambda = e^\lambda + \delta^\lambda$, где δ^λ — достаточно малые приращения координат e^λ единичного элемента.

Нетрудно показать, что приращения координат при правом сдвиге на элемент b с точностью до величин первого порядка малости δ^λ определяются равенствами:

$$\widetilde{a^\mu} = a^\mu + \alpha^\mu_\lambda(a)\,\delta^\lambda; \quad \alpha^\mu_\lambda(a) = \left(\frac{\partial \varphi^\mu(a, b)}{\partial b^\lambda}\right)_{b=e}.$$

Отсюда следует, что $\det(\alpha^\mu_\lambda(e)) = 1$ и матрица $\alpha^\mu_\lambda(a)$ вблизи единичной точки $e \in G$ допускает обратную матрицу $(\omega^\lambda_\tau(a))$:

$$\alpha^\mu_\lambda(a)\,\omega^\lambda_\tau(a) = \delta^\mu_\tau.$$

Из невырожденности этих матриц следует, что элементы ядра, близкие к e, имеют обратные элементы, также принадлежащие ядру.

Элементы матрицы $(\alpha^\mu_\lambda(a))$ определяют r базисных операторов группы G (локальной группы ${}^1G$):

$$A_\lambda = \alpha^\mu_\lambda(a)\,\frac{\partial}{\partial a^\mu} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, r), \tag{3.6}$$

а элементы обратной матрицы определяют r базисных форм группы G:

$$\omega^\mu(a, da) = \omega^\mu_\lambda(a)\,da^\lambda. \tag{3.7}$$

Аналогичные операторы и формы порождаются левыми сдвигами.

Вопросы и упражнения

1. Левые сдвиги коммутативны с правыми. Докажите.
2. Докажите инвариантность форм $\omega^\mu(a, da)$ при левых сдвигах.

5. Три основные теоремы о группах Ли

Теорема 1. Функции $\widetilde{a}^{\alpha} = \psi^{\alpha}(a, b)$, определяющие групповое умножение в локальной группе, удовлетворяют следующей системе уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial \widetilde{a}^{\mu}}{\partial b^{\lambda}} = \alpha^{\mu}_{\rho}(\widetilde{a})\,\omega^{\rho}_{\lambda}(b). \tag{3.8}$$

Этот вывод следует из соотношений (3.2) при условии, что c вблизи e. Полагая в них $c = e + \delta\ (\delta^{\lambda})$ и учитывая члены до второго порядка малости относительно δ^{λ}, получим:

$$\alpha^{\mu}_{\lambda}(\widetilde{a}) = \frac{\partial \widetilde{a}^{\mu}}{\partial b^{\sigma}}\,\alpha^{\sigma}_{\lambda}(b). \tag{3.9}$$

Если равенства (3.9) разрешить относительно $\frac{\partial \widetilde{a}^{\mu}}{\partial b^{\lambda}}$, то придем к равенствам (3.8)

Теорема 2. Скобки Пуассона $[A_{\lambda}, A_{\mu}]$ любых двух базисных операторов A_{λ} и A_{μ} группы Ли G раскладываются по базисным операторам A_{λ} с постоянными коэффициентами: $[A_{\lambda}\ A_{\mu}] = C^{\nu}_{\lambda\mu}A_{\nu}$. Постоянные $C^{\nu}_{\lambda\mu}$ называются структурными постоянными группы Ли.

Теорема 3. Структурные постоянные $C^{\nu}_{\lambda\mu}$ локальной группы антисимметричны по нижним индексам и удовлетворяют тождествам Якоби, т. е.

$$1)\ C^{\nu}_{\lambda\mu} = -C^{\nu}_{\mu\lambda}; \tag{3.10}$$

$$2)\ C^{\alpha}_{\lambda\mu}C^{\tau}_{\alpha\nu} + C^{\alpha}_{\mu\nu}C^{\tau}_{\alpha\lambda} + C^{\alpha}_{\nu\lambda}C^{\tau}_{\alpha\mu} = 0. \tag{3.11}$$

В теории групп Ли доказываются также обратные теоремы для каждой из этих теорем Ли. В частности, обратная третья теорема Ли утверждает, что если трехиндексные числа $C^{\nu}_{\lambda\mu}$ антисимметричны по нижним индексам и удовлетворяют соотношениям Якоби (3.11), то существует локальная группа Ли такая, что данные постоянные $C^{\nu}_{\lambda\mu}$ будут ее структурными постоянными.

Отметим еще одно следствие, вытекающее из (3.8). Умножая почленно обе части этого равенства на $\omega^{\nu}_{\mu}(\widetilde{a})\,db^{\lambda}$ и суммируя по индексам μ и λ, получим:

$$\omega^{\nu}_{\mu}(\widetilde{a})\,d\widetilde{a}^{\mu} = \omega^{\nu}_{\mu}(\widetilde{a})\,\alpha^{\mu}_{\rho}(\widetilde{a})\,\omega^{\rho}_{\lambda}(b)\,db^{\lambda}.$$

Но $\omega^{\nu}_{\mu}(\widetilde{a})\,\alpha^{\mu}_{\rho}(\widetilde{a}) = \delta^{\nu}_{\rho}$, где $\delta^{\nu}_{\rho} = 0\ (\nu \neq \rho)$, $\delta^{\nu}_{\rho} = 1\ (\nu = \rho)$; поэтому предыдущие равенства можно переписать в виде $\omega^{\nu}_{\mu}(\widetilde{a})\ d\widetilde{a}^{\mu} = \omega^{\nu}_{\mu}(b)\,db^{\mu}$. Таким образом, формы $\omega^{\nu}_{\mu}(b)\,db^{\mu}$ и определяемые ими векторные поля A_{λ} $(\lambda = 1, 2, \ldots, r)$ будут инвариантными при левых сдвигах группы: $L_a : \widetilde{x} = ax\ (a,\ x \in G)$.

Векторное поле v_x на группе G называется левоинвариантным, если $(dL_a)_x v_x = v_{ax}$,
где dL_a — дифференциал точечного отображения L_a.

Левоинвариантное векторное поле на группе G определяется своим значением в каком-нибудь элементе группы, например в единице $e \in G$.

Множество всех левоинвариантных векторных полей на группе Ли G образует векторное пространство, изоморфное касательному пространству T_e к группе G в точке e.

6. Группа Ли преобразований

Дадим определение группы Ли преобразований. Группа Ли G называется группой Ли преобразований дифференцируемого многообразия X_n, если выполняются следующие условия:

1) каждому $a \in G$ отвечает дифференцируемое преобразование многообразия X_n в себя: $x \to xa$ $(\forall x \in X_n)$;

2) для любых $a, b \in G$ и любого $x \in X_n$ выполняются равенства $x(ab) = (xa)b$;

3) отображение $\bar{x} = xa$ является дифференцируемым C^3-отображением $X_n \times G \to X_n$.

В этом случае говорят также, что группа Ли G действует в X_n и что многообразие X_n является пространством представления группы G. Здесь аналогичным образом вводятся понятия локальной группы Ли преобразований и ядра.

Говорят, что локальная группа G_r есть локальная группа Ли преобразований области $V \subset X_n$, если для $\forall a \in G_r$ сопоставлено дифференцируемое преобразование $x \to f(x, a)$ области V в некоторую область X_n так, что: 1) $f(x, a)$ три раза непрерывно дифференцируемы по переменным x, a; 2) $f(f(x, a), b) = f(x, c)$, $c = \psi(a, b)$ $(\forall ab \in G)$; 3) $f(x, 0) = x$ $(e(0, \ldots, 0) \in G)$. В локальных координатах x^c в области V и координатах (a^λ) в локальной группе G_r отображения $x \to f(x, a)$ представляются в виде

$$\bar{x}^i = f^i(x^j, a^\lambda), \begin{pmatrix} i, j = 1, 2, \ldots, n \\ \lambda, \mu, \alpha = 1, 2, \ldots, r \end{pmatrix}, \tag{3.12}$$

где $f^i(x^j, a^\lambda)$ — дифференцируемые функции координат точек многообразия X_n или его открытого куска, причем

$$f^i(f(x, a), b) = f^i(x, \psi(a, b)). \tag{3.13}$$

Так как элементу $e(0, 0, \ldots, 0)$ отвечает тождественное преобразование точек области V, то достаточно малым значениям $a^\lambda = \delta^\lambda$ сопоставляются согласно (3.12) преобразования

$$\bar{x}^i = x^i + \xi^i_\lambda(x) a^\lambda + \ldots \left(\xi^i_\lambda(x) = \left(\frac{\partial f^i(x, a)}{\partial a^\lambda}\right)_{a=e}\right),$$

близкие к тождественному. В дальнейшем мы имеем дело в основном с группами преобразований в локальном смысле. Эти локальные группы мы называем ниже для краткости также группами преобразований без упоминания локальности. Приведем без доказательства теоремы о группах Ли преобразований.

Теорема 1. Функции $\overline{x^i} = f^i(x, a)$, определяющие в локальных координатах группу Ли преобразований, удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений в частных производных: $\dfrac{\partial \overline{x^i}}{\partial a^\lambda} = \xi^i_\mu(\overline{x})\omega^\mu_\lambda(a)$.

Утверждение вытекает из условий (3.13), если в последних положить $b = e + \delta$ $(b^\lambda = \delta^\lambda)$: $f^i(\overline{x}, \delta) = f^i(x, \psi(a, \delta))$ $(\overline{x} = f(x, a))$. В самом деле, учитывая при разложении обеих частей равенства по степеням приращений δ^λ члены до первого порядка малости включительно, получим:

$\xi^i_\lambda(\overline{x}) = \dfrac{\partial \overline{x^i}}{\partial a^\mu}\alpha^\mu_\lambda(a)$, где $\xi^i_\lambda(\overline{x}) = \left(\dfrac{\partial f^i(\overline{x}, b)}{\partial b^\lambda}\right)_{b=e}$. Если эти равенства разрешить относительно производных $\partial^j x^i/\partial a^\mu$, то придем к интересующей нас системе уравнений. Справедливо обратное предложение.

Построим теперь операторы группы преобразований:

$$X_\lambda = \xi^i_\lambda(x)\,p_i\left(p_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\right). \tag{3.14}$$

Скобка Пуассона операторов X_λ X_μ определяет оператор

$$[X_\lambda X_\mu] = \left(\xi^j_\lambda \frac{\partial \xi^i_\mu}{\partial x^j} - \xi^j_\mu \frac{\partial \xi^i_\lambda}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{3.15}$$

называемый коммутатором операторов X_λ и X_μ.

Теорема 2. Коммутатор любых двух базисных операторов группы Ли преобразований разлагается по самим базисным операторам этой группы с постоянными коэффициентами $C^\nu_{\lambda\mu}$:

$$[X_\lambda X_\mu] = C^\nu_{\lambda\mu} X_\nu. \tag{3.16}$$

Справедливо обратное предложение. Его формулировку здесь мы не приводим.

Теорема 3. Постоянные $C^\nu_{\lambda\mu}$ являются структурными постоянными группы, т. е. они антисимметричны по нижним индексам и удовлетворяют тождествам Якоби (с. 183).

Группа Ли преобразований называется *транзитивной*, если в ней существуют преобразования, переводящие любую данную точку a пространства в любую данную его точку b. *Группа преобразований называется просто транзитивной*, если переход точки a в любую заданную точку b осуществляется единственным преобразованием группы.

Группа, не являющаяся транзитивной, называется *интранзитивной*. Она расслаивает пространство на совокупность поверхностей интранзитивности, на каждой из которых группа транзитивна. Так, например, группа вращений вокруг некоторой точки x_0 евклидова пространства (группа изометрий, оставляющих неподвижной точку x_0) интранзитивна, а группа параллельных переносов транзитивна.

Совокупность транзитивных групп преобразований разделяется в свою очередь на два класса. Транзитивные группы, для которых существует семейство многообразий, объединение которых дает все пространство, такое, что если при преобразованиях данной группы точка какого-нибудь многообразия переходит в точку другого, то все точки первого многообразия переходят в точки другого. Так обстоит дело, например, для группы вращений и гомотетий вокруг точки E_3 или группы параллельных переносов. Семействами многообразий, о которых говорится в определении, здесь будут соответственно концентрические сферы и любое семейство параллельных друг другу плоскостей. Такие транзитивные группы преобразований называются *импримитивными*, а многообразия семейств — *системой импримитивности*.

В противном случае транзитивные группы преобразований называются *примитивными*. В качестве примера примитивных групп преобразований можно привести группу изометрий евклидовой плоскости. Эта группа примитивна в вещественной области; если перейти в комплексную область, то группа будет импримитивной (системой импримитивности являются семейства изотропных прямых).

Множество точек, которое получается из данной точки под действием преобразований локальной группы, называется ее *орбитой*.

В случае транзитивной группы преобразований орбита группы совпадает с пространством представления. В противном случае орбиты совпадают с поверхностями системы интранзитивности.

Совокупность преобразований группы, оставляющих на месте данную точку x_0 пространства, образует так называемую *стационарную подгруппу* H_{x_0} этой точки. Для любого оператора стационарной подгруппы выполняется равенство: $[\xi^i(x)]_{x=x_0} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Обратное предложение также справедливо: если в точке x_0 координаты оператора $\xi^i(x)\,p_i$ группы Ли преобразований обращаются в нуль, то $X = \xi^i(x)\,p_i$ является оператором стационарной подгруппы H_{x_0}.

Вопросы и упражнения

1. Стационарные подгруппы данной группы преобразований для различных точек пространства сопряжены. Докажите.

2. Вычислите операторы группы движений евклидовой плоскости:

$$\tilde{x}^1 = x^1 \cos a^3 - x^2 \sin a^3 + a^1,$$
$$\tilde{x}^2 = x^1 \sin a^3 + x^2 \cos a^3 + a^2.$$

3. Вычислите коммутаторы базисных операторов группы вращений евклидова пространства:

$$X_1 = x^2 p_3 - x^3 p_2,\quad X_2 = x^3 p_1 - x^1 p_3,$$
$$X_3 = x^1 p_2 - x^2 p_1.$$

4. Вычислите операторы и постоянные $C^{\nu}_{\lambda\mu}$ группы проективных преобразований на плоскости:

$$\widetilde{x^1} = \frac{a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + a_{13}}{a_{31}x^1 + a_{32}x^2 + a_{33}}, \quad \widetilde{x^2} = \frac{a_{21}x^1 + a_{22}x^2 + a_{23}}{a_{31}x^1 + a_{32}x^2 + a_{33}}, \ \det(a_{ij}) \neq 0.$$

7. Алгебры Ли

Алгеброй Ли называется такое векторное пространство над полем $\boldsymbol{R}$, в котором наряду с операциями сложения векторов и умножения векторов на число введена также операция $[\vec{a}\vec{b}]$ коммутирования векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, линейная по обоим переменным, знакопеременная, т. е. $[\vec{a}\vec{b}] = -[\vec{b}\vec{a}]$, и удовлетворяющая тождеству Якоби:

$$[[\vec{a}\vec{b}]\ \vec{c}] + [[\vec{b}\vec{c}]\ \vec{a}] + [[\vec{c}\vec{a}]\ \vec{b}\,] = 0. \tag{3.17}$$

Возьмем в алгебре Ли некоторый базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_r$. Разложим далее векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ по векторам базиса $\vec{e}_\alpha$:

$$\vec{a} = a^\alpha\, \vec{e}_\alpha, \quad \vec{b} = b^\beta\, \vec{e}_\beta, \quad \vec{c} = c^\gamma\, \vec{e}_\gamma.$$

Очевидно, если $[\vec{a}\vec{b}] = \vec{c}$, то

$$c^\nu = [\vec{a}\vec{b}]^\nu = c^\nu_{\alpha\beta}\, a^\alpha b^\beta, \ [\vec{e}_\alpha \vec{e}_\beta] = c^\gamma_{\alpha\beta}\, \vec{e}_\gamma. \tag{3.18}$$

Таким образом, операция коммутирования в алгебре Ли определяется набором постоянных $C^\lambda_{\alpha\beta}$. Эти постоянные антисимметричны по нижним индексам и удовлетворяют квадратичным тождествам Якоби (3.11).

Отсюда следует, что с каждой алгеброй Ли можно связать по третьей обратной теореме Ли локальную группу Ли. Обратное предложение также справедливо на основании прямой второй и третьей теорем Ли.

В самом деле, предположим, что $X_\lambda = \xi^i_\lambda(x)\, p_i \left(p_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)$ являются операторами некоторой локальной группы Ли преобразований G с обычными операциями сложения операторов и умножения оператора на число.

Линейные комбинации $X = a^\alpha X_\alpha$, $Y = b^\beta X_\beta$ операторов X_λ с постоянными коэффициентами a^α, b^β порождают r-мерное векторное пространство — пространство операторов локальной группы преобразований. Составляя коммутатор операторов X, Y, получим: $Z = [XY] = c^\nu X_\nu$, $c^\nu = C^\nu_{\alpha\beta}\, a^\alpha\, b^\beta$, где $C^\nu_{\alpha\beta}$ являются структурными постоянными данной группы. Теперь по определению операции коммутирования векторов в алгебре Ли мы положим: $Z = [XY]$.

Построенная таким образом операция коммутирования является линейной по каждому аргументу и антикоммутативной. Тождества

Якоби также выполняются, так как структурные постоянные группы Ли связаны соответствующими соотношениями. Приведем определения некоторых понятий из теории алгебр Ли.

Подпространство H алгебры Ли E_r называется *подалгеброй*, если оно замкнуто относительно операции коммутирования, т. е.

$$[HH] \subset H, \tag{3.19}$$

где символом $[HH]$ обозначается множество векторов $[\vec{x}\vec{y}]$ при условии, что $\vec{x}$, $\vec{y}$ — любые векторы, принадлежащие H.

Подалгебра H называется идеалом алгебры E_r, если

$$[HE_r] \subset H, \tag{3.19'}$$

т. е. коммутатор любых двух векторов $\vec{x} \in H$ и $\vec{y} \in E_r$ принадлежит H: $[\vec{x}\vec{y}] \in H$.

Дадим еще определение так называемой редуктивной алгебры. *Алгебра Ли E_r* называется *редуктивной*, если она допускает разложение вида:

$$E_r = H + M, \tag{3.20}$$

где H — подалгебра, а M — некоторое дополнительное подпространство, удовлетворяющее условию:

$$[MH] \subset M. \tag{3.20'}$$

Переходим к понятиям коммутанта и разрешимой алгебры.

Рассмотрим множество коммутаторов базисных векторов данной алгебры Ли E_r. Очевидно, совокупность линейных комбинаций этих коммутаторов образует в алгебре E_r некоторое подпространство E_r', называемое *коммутантом алгебры* E_r или производной алгеброй.

Нетрудно убедиться непосредственной проверкой, что подпространство E_r' является подалгеброй.

В самом деле, коммутаторы вида $[[X_\lambda X_\mu]\,[X_\nu X_\rho]] = C^\alpha_{\lambda\mu} C^\beta_{\nu\rho}$ $[X_\alpha X_\beta]$ принадлежат подпространству E_r', т. е. E_r' замкнуто относительно операции коммутирования и, следовательно, является подалгеброй алгебры E_r. Совсем просто также проверить, что E_r' является идеалом. Действительно, $[[X_\lambda X_\mu]X_\nu] = C^\rho_{\lambda\mu}\,[X_\rho X_\nu]$, т. е. $[E_r'E_r] \subset$ $\subset E_r'$; коммутант E_r' является идеалом E_r.

Повторяя построение коммутанта для алгебры E_r', мы получим коммутант второго порядка $E_r^{(2)}$ (вторую производную алгебру) алгебры E_r и т. д. В результате придем к цепочке вложенных производных алгебр:

$$E_r \supset E_r^{(1)} \supset E_r^{(2)} \supset \ldots \supset E_r^{(k)} \supset \ldots . \tag{3.21}$$

Ясно, что с некоторого коммутанта $E_r^{(k)}$ порядка k последующие коммутанты в цепочке будут повторяться. Если повторяющийся коммутант состоит из одного лишь нулевого вектора, то говорят, что цепочка коммутантов обрывается и данная *алгебра E_r называется разрешимой*. Если же повторяющийся коммутант не будет сводиться только к нулевому вектору, то данная алгебра Ли называется *неразрешимой*. Все алгебры Ли первого и второго порядка разрешимы.

Прежде чем перейти к рассмотрению свойств разрешимых алгебр, определим понятие полупростой алгебры. Алгебры эти связаны с матрицей $(C_{\alpha\beta})$, определяющей в E_r метрику Картана — Киллинга:

$$\Phi(x, y) = C_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta \quad (x = x^\alpha X_\alpha,\ y = y^\beta X_\beta), \qquad (3.22)$$
$$C_{\alpha\beta} = C^\mu_{\alpha\lambda} C^\lambda_{\beta\mu}.$$

Алгебры, для которых матрицы $(C_{\alpha\gamma})$ невырожденны, называются *полупростыми алгебрами*. Всякая полупростая алгебра распадается на прямую сумму простых алгебр. *Простой алгеброй* называется алгебра, не имеющая собственных идеалов H, т. е. идеалов $H \neq 0$, $H \neq E_r$. Полупростая алгебра может содержать лишь неразрешимые идеалы.

Свойства разрешимых алгебр Ли. Мы рассмотрим основные свойства разрешимых алгебр.

1. Предположим, что в алгебре Ли E_r существуют подалгебры E_s и E_t. Очевидно, что пересечение этих подалгебр $E_s \cap E_t$ является также подалгеброй в E_r. В самом деле, коммутатор $[\vec{u}\vec{v}]$ векторов $\vec{u}$, $\vec{v}$, принадлежащих одновременно E_s и E_t, также будет вектором этих подалгебр E_s, E_t, т. е. $[\vec{u}\vec{v}] \in E_s \cap E_t$.

2. Отметим, что объединение подалгебр (т. е. наименьшее подпространство $E_s + E_t$, содержащее данные подалгебры E_s, E_t), вообще говоря, не является подалгеброй; если же одна из подалгебр E_s, E_t будет идеалом, то

$$E_s + E_t \qquad (\text{A})$$

будет подалгеброй. Действительно, пусть E_s является идеалом, тогда $[E_s E_r] \subset E_s$.

Следовательно, имеем:

$$[E_s + E_t, E_s + E_t] = [E_s E_s] + [E_s E_t] + [E_t E_s] + [E_t E_t],$$

где векторы первых трех слагаемых принадлежат идеалу E_s, а векторы из последнего слагаемого принадлежат E_t, так как по условию E_t — подалгебра.

3. Если оба слагаемых в (A) будут идеалами в E_r, то объединение $E_s + E_t$ является также идеалом, т. е. коммутаторы векторов $\vec{u} \in E_s + E_t$, $\vec{v} \in E_r$ принадлежат $E_s + E_t$.

В самом деле,

$$[E_s + E_t, E_r] = [E_s E_r] + [E_t E_r],$$

где

$$[E_s E_r] \subset E_s,\ [E_t E_r] \subset E_t;$$

таким образом, $[E_s + E_t, E_r] \subset E_s + E_t$.

4. Подалгебра разрешимой алгебры разрешима.

Утверждение очевидно: из условия $E_s \subset E_r$ следует, что коммутанты их связаны тем же знаком включения, т. е. $E_s' \subset E_r'$.

5. Если E_s, E_t будут разрешимыми идеалами, то их объединение $E_s + E_t$ также является разрешимым идеалом.

В самом деле,

$$(E_s + E_t)' = [E_s E_s] + [E_s E_t] + [E_t E_s] + [E_t E_t] \subset E_s' + E_t' + E_p,$$

где $E_p = E_s \cap E_t$. Аналогичным образом получим:

$$(E_s + E_t)^{(2)} \subset E_s^{(2)} + E_t^{(2)} + E_p.$$

Продолжая этот процесс далее k раз ($k \geqslant s$, $k \geqslant t$), выводим: $(E_s + E_t)^{(k)} \subset E_p$. Отсюда следует, что $(E_s + E_t)^{(k+p)} = 0$ и алгебра $E_s + E_t$ разрешима. Из этого свойства следует, что во всякой алгебре Ли существует максимальный разрешимый идеал (называемый иногда радикалом). Очевидно, если радикал совпадает с E_r, то алгебра E_r разрешима.

Если радикал сводится к нулевому вектору, то алгебра E_r есть полупростая.

В общем случае радикал не сводится к нулевому вектору и не совпадает со всей алгеброй. Имеет место следующая теорема Леви.

Фактор-алгебра E_r/R всякой алгебры Ли E_r по максимальному разрешимому идеалу (радикалу) R полупроста.

Более того, всегда можно предполагать, что существует такой базис $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m, X_1, X_2, \ldots, X_{r_0}$ ($r = m + r_0$) алгебры E_r, что $[YY] \subset P$, $[YX] \subset R$, $[XX] \subset R$, где $Y_1, \ldots, Y_m$ — базис полупростой подалгебры P; $X_1, \ldots, X_{r_0}$ — базис максимального разрешимого идеала R. Другими словами, произвольная алгебра Ли разлагается в сумму двух подалгебр, одна из которых — радикал, а другая — полупростая.

Вопросы и упражнения

1. Составьте таблицу коммутаторов операторов

$$X_1 = p_1,\ X_2 = x^1 p_1,\ X_3 = (x^1)^2 p_1 \left(p_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}\right)$$

проективной группы G_3 на прямой. Разрешима ли соответствующая алгебра E_3?

2. Найдите операторы и структурные постоянные аффинной группы преобразований:

$$\tilde{x}^1 = a_3 x^1 + a_4 x^2 + a_1, \qquad \tilde{x}^2 = a_5 x^1 + a_6 x^2 + a_2, \qquad \begin{vmatrix} a_3 a_4 \\ a_5 a_6 \end{vmatrix} \neq 0.$$

3. Выясните, будет ли алгебра E_6 предыдущей задачи редуктивна, если в качестве H принять операторы стационарной группы точки (0, 0), а в качестве операторов плоскости M — операторы переносов.

4. Докажите, что совокупность левоинвариантных векторных полей определяет алгебру Ли (алгебра операторов правых сдвигов).

5. Докажите, что структурные постоянные, определяющие операцию коммутирования в алгебре Ли, преобразуются при преобразовании базиса $\vec{e}_{\alpha'} = A^{\alpha}_{\alpha'} \vec{e}_{\alpha}$ по тензорному закону: $C^{\nu'}_{\alpha\beta} = A^{\alpha}_{\alpha'} A^{\beta}_{\beta'} A^{\nu'}_{\nu} C^{\nu}_{\alpha\beta}$.

6. Докажите, что: 1) $C_{\beta\alpha} = C^{\mu}_{\alpha\lambda} C^{\lambda}_{\beta\mu}$ образуют тензор типа $\binom{0}{2}$ и 2) $C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}$.

8. О дифференцированиях алгебр Ли

Дифференцированием D алгебры Ли называется *линейное отображение* E_r в себя, удовлетворяющее условию:

$$D\,[\vec{x}\vec{y}] = [D\vec{x}\vec{y}] + [\vec{x}D\vec{y}]. \tag{B}$$

Из тождества Якоби для элементов $\vec{a}, \vec{x}, \vec{y} \in E_r$

$$[[\vec{a}\vec{x}]\vec{y}] + [[\vec{x}\vec{y}]\vec{a}] + [[\vec{y}\vec{a}]\vec{x}] = 0$$

следует, что

$$[\vec{a}[\vec{x}\vec{y}]] = [[\vec{a}\vec{x}]\vec{y}] + [\vec{x}\,[\vec{a}\vec{y}]], \tag{C}$$

т. е. $\tilde{\vec{x}} = [\vec{a}\vec{x}] \equiv (\vec{a}d\vec{a})\vec{x}$ является дифференцированием, соответствующим элементу $\vec{a}$. Дифференцирования такого вида называются внутренними. *Алгебра Ли* E_r называется *совершенной*, если все ее дифференцирования внутренние и ее центр нулевой.

Примером совершенной алгебры E_2 является алгебра, в которой $[X_1X_2] = X_1$ (используем операторную запись).

Действительно, пусть D — произвольное дифференцирование этой алгебры E_2, докажем, что оно внутреннее. Из формулы (B) следует, что $DE_2' \subset E_2'$, где $E_2' = [E_2E_2]$. В рассматриваемом случае, следовательно, DX_1 пропорционален вектору X_1:

$$DX_1 = c_1X_1.$$

Дифференцируя $[X_1X_2] = X_1$ почленно, имеем:

$$[DX_1,\, X_2] + [X_1,\, DX_2] = C_1X_1,\ [X_1,\, DX_2] = 0;$$

таким образом, $DX_2 = c_2X_1$. Итак, матрицу любого дифференцирования можно привести к виду:

$$D = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{*}$$

С другой стороны, внутреннее дифференцирование D_1 вида $D_1 = ad\,(c_1X_2 - c_2X_1)$ также имеет матрицу преобразования (*). Итак, всякое дифференцирование неабелевой алгебры 2-го порядка является внутренним. Кроме того, центр ее нулевой. Следовательно, алгебра E_2 совершенная.

Вопросы и упражнения

1. Приведите примеры простых и полупростых алгебр Ли E_3 и E_4.

2. Приведите примеры алгебр Ли E_3, допускающих лишь внутренние дифференцирования.

3. Докажите, что алгебра Ли E, допускающая инволютивный автоморфизм S ($S^2 = e$), редуктивна. Что представляет собой подалгебра H в этом случае? Каким образом определяется дополнительное подпространство M?

(Указание: подпространства H, M являются корневыми по отношению к автоморфизму S.)

4. Если алгебра Ли E: 1) редуктивна, т. е. $E = H + M$, $[HM] \subset M$, 2) $[MM] \subset H$, то отображение $S : E \to E$, определенное по формуле

$$\vec{x} = \vec{x}_H + \vec{x}_M \to \vec{x}' = \vec{x}_H - \vec{x}_M,$$

является: 1) инволюционным, т. е. $S^2 = E$; 2) автоморфизмом алгебры E, т. е. $S[\vec{x}\vec{y}] = [S\vec{x}, S\vec{y}]$; 3) $\Phi(\vec{x}, \vec{y}) = 0$, если $\vec{x} \in M$, $\vec{y} \in H$, $\Phi(\vec{x}, \vec{y})$ — метрика Картана — Киллинга.

9. О классификации алгебр Ли E_r по действительным структурам ($r \leqslant 3$)

1. Если алгебра E одномерна, то базис состоит лишь из одного вектора X и коммутаторы пропорциональных векторов равны нулю.

2. Предположим теперь, что алгебра Ли двумерная. Если производная алгебра $E_2' = 0$, то алгебра Ли E_2 абелева и коммутаторы базисных операторов равны нулю:

$$[X_1X_2] = 0. \tag{3.23}$$

Если же $E_2' \neq 0$, то производная алгебра одномерна. Выбирая в этой подалгебре базисный вектор $X_1 \in E_2'$, мы выводим: $[X_1X_2] = cX_1$ ($c \neq 0$). Заменяя в последнем равенстве $X_2 \to \frac{1}{c} X_2$, получим окончательно:

$$[X_1X_2] = X_1. \tag{3.24}$$

Итак, двумерные алгебры Ли E_2 могут быть лишь двух типов структур: (3.23), (3.24).

3. Пусть теперь алгебра Ли E_3 трехмерная. Если производная алгебра $E_3' = 0$, то E_3 абелева. Коммутаторы любых операторов равны нулю, и следовательно, при любом выборе базисных векторов X_1, X_2, X_3 имеем:

а) $[X_1X_2] = [X_1X_3] = [X_2X_3] = 0.$ (3.25)

б) Если производная алгебра одномерна, то структура трехмерной алгебры Ли приводится к виду:

$$[X_1X_2] = aX_1,\ [X_1X_3] = bX_1,\ [X_2X_3] = cX_1, \tag{3.26'}$$

где вектор X_1 — базисный вектор алгебры E_3', а постоянные a, b, c не обращаются одновременно в нуль.

Если $a \neq 0$, то, полагая aX_2 вместо X_2, получим $a = 1$ и формулы структуры будут вида:

$$[X_1X_2] = X_1, \ [X_1X_3] = bX_1, [X_2X_3] = cX_1. \tag{3.26}$$

Выбирая затем вектор $X_3 - bX_2 + cX_1$ в качестве базисного вектора X_3', получим (опуская штрих и заменяя X_2 на X_3 и X_3 на X_2):

$$[X_1X_2] = 0, \ [X_1X_3] = X_1, [X_2X_3] = 0. \tag{3.27}$$

Если в (3.26′) $a = 0$, но $b \neq 0$, то предыдущие рассуждения приводят к коммутаторам (3.27).

Предположим теперь, что в (3.26′) постоянные $a = b = 0$, тогда постоянная $c \neq 0$.

В этом случае, очевидно, c приводится к единице и структура трехмерной алгебры получается непосредственно:

$$[X_1X_2] = 0, \ [X_1X_3] = 0, \ [X_2X_3] = X_1. \tag{3.28}$$

Итак, в случае одномерной производной алгебры E_3' структура трехмерной алгебры приводится к одному из двух типов (3.27) и (3.28).

Полученные типы различны: во втором из этих типов производная алгебра E_3' совпадает с центром Z алгебры $E_3 : E_3' = Z$, а в первом случае $E_3' \neq Z$.

в) Предположим теперь, что производная алгебра будет двумерной. Нетрудно доказать, что этот идеал абелев.

В самом деле, если алгебра E_3' (X_1, X_2) неабелева, то всегда можно предполагать, что

$$[X_1X_2] = X_1, [X_1X_3] = aX_1 + bX_2, [X_2X_3] = cX_1 + dX_2.$$

Далее из тождества Якоби

$$[[X_1X_2]X_3] + [[X_2X_3]X_1] + [[X_3X_1]X_2] = 0$$

следует, что $bX_2 - dX_1 = 0$, т. е. $b = d = 0$, что невозможно. Таким образом, $[X_1X_2] = 0$, и следовательно, $ad\, X_3$ индуцирует взаимно однозначное линейное отображение в E_3'. Коммутаторы базисных операторов всегда можно привести к виду: $[X_1X_2] = 0$, $[X_1X_3] = \alpha X_1 + \beta X_2$, $[X_2X_3] = \gamma X_1 + \delta X_2$, где $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ — невырожденная матрица. Очевидно, эта матрица определяется с точностью до сомножителя, и ее можно привести к одному из следующих трех видов:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ $(\alpha \neq 0)$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(\beta \neq 0)$; 3) $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ $(\beta \neq 0)$.

В случае матриц первого вида приходим к следующим алгебрам двух типов:

$$[X_1X_2] = 0, [X_1X_3] = X_1, [X_2X_3] = X_2, \tag{3.29}$$

$$[X_1X_2] = 0, \ [X_1X_3] = X_1, \ [X_2X_3] = qX_2 \ (q \notin \{0, 1\}). \tag{3.30}$$

Если матрица второго вида, то $[X_1X_2] = 0$, $[X_1X_3] = X_1 + \beta X_2$, $[X_2X_3] = X_2$ $(\beta \neq 0)$. Выбирая $X_1' = \beta X_2$, $X_2' = X_1$, $X_3' = X_3$ и отбрасывая штрихи, получим окончательно алгебру со структурой:

$$[X_1X_2] = 0,\ [X_1X_3] = X_1,\ [X_2X_3] = X_1 + X_2. \qquad (3.31)$$

В случае матрицы третьего вида, вводя замену $X_3 \to X_3/\beta$, будем иметь:

$$[X_1X_2] = 0,\ [X_1X_3] = \gamma X_1 + X_2, [X_2X_3] = -X_1 + \gamma X_2 \left(\gamma = \frac{\alpha}{\beta}\right).$$

Полагая далее

$$X_1' = \sqrt{1+\gamma^2}\, X_1,\ X_2' = \gamma X_1 + X_2,\ X_3' = X_3/\sqrt{1+\gamma^2}$$

и отбрасывая штрихи, получим окончательно:

$$\begin{gathered}[X_1X_2] = 0,\ \ [X_1X_3] = X_2,\\ [X_2X_3] = -X_1 + qX_2\ (q^2 < 4).\end{gathered} \qquad (3.32)$$

Итак, всякая трехмерная разрешимая алгебра Ли приводится к одному из семи типов: (3.25), (3.27), (3.28), (3.29), (3.30), (3.31), (3.32).

г) **Неразрешимые алгебры** E_3. Искомые структуры трехмерных алгебр такие, что производные алгебры E_3' будут также трехмерными. В этом случае вектор структуры $c_i = C^{\alpha}_{\alpha i}$ обращается в нуль; в противном случае производная алгебра содержалась бы в алгебре, определяемой совокупностью операторов: $\{e_1X_1 + e_2X_2 + + e_3X_3 | c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 = 0\}$.

Условия обращения в нуль координат вектора структуры эквивалентны равенствам: $C^2_{21} = -C^3_{31}$, $C^3_{32} = -C^1_{12}$, $C^1_{13} = -C^2_{23}$.

Далее удобнее рассмотреть симметрический тензор $C_{\alpha\beta}$ второй валентности (с. 204). В нашем случае координаты тензора $C_{\alpha\beta}$ будут вида:

$$\begin{gathered}C_{11} = 2\,(C^3_{31})^2 - 2C^2_{31}C^3_{12},\\ C_{12} = -2C^1_{12}C^3_{31} + 2C^2_{23}\ C^3_{12};\end{gathered}$$

другие координаты получаются из этих выписанных циклированием индексов. Перейдем к базису, в котором координаты $C_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$. За счет выбора базиса можно добиться того, что коэффициенты при первых двух квадратах будут равны: $C_{11} = C_{22}$ (обозначим этот базис через X_1, X_2, X_3).

Введем теперь еще один базис $\overline{X}_i$ по формулам:

$$\begin{gathered}X_1 = \cos\Theta\,\overline{X}_1 - \sin\Theta\,\overline{X}_2,\\ X_2 = -\sin\Theta\,\overline{X}_1 + \cos\Theta\,\overline{X}_2,\ X_3 = \overline{X}_3.\end{gathered}$$

При переходе к этому базису канонический вид $C_{\alpha\beta}$ будет прежний, причем $\overline{C}^1_{12} = \cos\Theta\, C^1_{12} + \sin\Theta\, C^2_{12}$. Из последнего равенства следует, что при надлежащем выборе параметра Θ можно $\overline{C}^1_{12}$ обратить в нуль. И нетрудно проверить, что инвариантность канонического вида тензора $C_{\alpha\beta}$ характеризуется равенствами: $C^3_{12}C^2_{23} = C^3_{31}C^2_{23} = C^1_{23}C^3_{31} = 0$. Отсюда сразу выводим, что возможны лишь два выбора структурных постоянных: $C^1_{12} = C^2_{23} = C^3_{31} = 0$ или $C^1_{12} = C^3_{31} = C^2_{12} = 0$. Искомые неразрешимые трехмерные алгебры Ли, соответствующие этим решениям, приводятся к одному из следующих двух типов:

$$[X_1X_2] = X_3,\ [X_2X_3] = X_1,\ [X_3X_1] = X_2, \tag{3.33}$$
$$[X_1X_2] = X_3,\ [X_2X_3] = X_1,\ [X_3X_1] = -X_2. \tag{3.34}$$

Собирая полученные результаты, приходим к следующим типам алгебр Ли E_3:

А) Все одномерные алгебры Ли изоморфны друг другу $[XX] = 0$.

Б) Каждая двумерная алгебра Ли изоморфна одной из следующих двух алгебр:

I. $[X_1X_2] = 0$;

II. $[X_1X_2] = X_1$.

В первом случае алгебра абелева, во втором — неабелева.

В) Трехмерные алгебры Ли принадлежат к одному из следующих типов:

Разрешимые алгебры

I. $[X_1X_2] = 0,\quad [X_1X_3] = 0,\quad [X_2X_3] = 0;$
II. $[X_1X_2] = 0,\quad [X_1X_3] = 0,\quad [X_2X_3] = X_1;$
III. $[X_1X_2] = 0,\quad [X_1X_3] = X_1,\quad [X_2X_3] = 0;$
IV. $[X_1X_2] = 0,\quad [X_1X_3] = X_1,\quad [X_2X_3] = X_1 + X_2;$
V. $[X_1X_2] = 0,\quad [X_1X_3] = X_1,\quad [X_2X_3] = X_2;$
VI. $[X_1X_2] = 0,\quad [X_1X_3] = X_1,\quad [X_2X_3] = qX_2\ (q \notin \{0, 1\});$
VII. $[X_1X_2] = 0,\quad [X_1X_3] = X_2,\quad [X_2X_3] = -X_1 + qX_2\ (q^2 < 4).$

Неразрешимые алгебры

VIII. $[X_1X_2] = X_3,\quad [X_2X_3] = X_1,\quad [X_3X_1] = X_2;$
IX. $[X_1X_2] = X_3,\quad [X_2X_3] = -X_1,\quad [X_3X_1] = X_2.$

Типами I—IX исчерпываются все структуры вещественных трехчленных алгебр Ли.

Обратим внимание на типы VI и VII разрешимых алгебр E_3. Каждый из этих типов содержит бесчисленное множество алгебр, зависящих от параметра q.

Возникает вопрос: все ли алгебры, принадлежащие типу VI или VII, неизоморфны, т. е. является ли параметр q существенным? Напомним, что две алгебры изоморфны, если при некотором выборе базисных векторов структуры этих алгебр будут совпадать.

Сначала рассмотрим алгебры типа VI.

Возьмем алгебру из этого типа, соответствующую значению параметра p:

$$[X_1X_2] = 0,\ [X_1X_3] = X_1,\ [X_2X_3] = pX_2, \tag{α}$$

и допустим, что она изоморфна алгебре того же типа со значением параметра q. Таким образом, по предположению существуют базисные векторы:

$$Y_i = a_i^k X_k,\ |a_i^k| \neq 0, \tag{$*$}$$

для которых

$$[Y_1Y_2] = 0,\ [Y_1Y_3] = Y_1,\ [Y_2Y_3] = qY_2.$$

Выражая в коммутаторах векторы Y_i по формулам $(*)$ через векторы X_i и учитывая (α) и линейную независимость базисных векторов, мы получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} a_1^1a_3^3 &= a_1^1,\ a_2^2a_3^3p = qa_2^2,\\ a_1^2a_3^3 &= a_1^2,\ a_1^3 = 0,\\ a_2^1a_3^3 &= qa_2^1,\ a_2^3 = 0. \end{aligned} \tag{$**$}$$

Следовательно, матрица (a_i^k) приводится к виду:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & 0\\ a_2^1 & a_2^2 & 0\\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix}, \tag{3.35'}$$

где $a_3^3 \neq 0$. Нетрудно доказать, что $a_2^2 = 0$. Действительно, допустим, что $a_2^2 \neq 0$, тогда из $(**)$ имеем: $a_3^3 = q/p \neq 1$. Далее из первого равенства $(**)$ получаем в этом случае, что $a_1^1 = 0$. Кроме того, из невырожденности матрицы (a_i^k) следует, что $a_1^2 \neq 0$, $a_2^1 \neq 0$. Таким образом, из второго равенства $(**)$ следует $a_3^3 = 1$, т. е. $p = 1$, что невозможно. Итак, окончательно имеем: $a_2^2 = 0$.

Очевидно, условие невырожденности здесь также приводит к тому, что $a_1^2 \neq 0$, $a_2^1 \neq 0$, откуда в свою очередь следует: $a_3^3 = q$, $a_1^1 = 0$, $pq = 1$. Так как мы интересуемся лишь какой-нибудь невырожденной матрицей перехода, удовлетворяющей условиям изоморфизма, то в искомой матрице (3.35′) можно положить $a_1^2 = a_2^1 = 1$, $a_1^3 = a_3^1 = 0$. Таким образом, матрица перехода приводится к виду:

$$(a_i^k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & q \end{pmatrix}. \tag{3.35}$$

Эта матрица показывает, что параметр q в типе VI можно выбирать на полусегменте $[-1, 0)$ и интервале $(0, 1)$: всякому $p \notin \{0, 1\}$, не принадлежащему этим множествам, отвечает значение q из $[-1, 0)$ или $(0, 1)$.

Рассмотрим теперь алгебры типа VII:

$$[X_1X_2] = 0,\ [X_1X_3] = X_2,\ [X_2X_3] = -X_1 + qX_2. \tag{3.36}$$

Выясним, будет ли эта алгебра изоморфна алгебре с параметром $p \neq q$. Допустим, что такой изоморфизм имеет место. Тогда существует базис

в котором $$Y_i = a_i^k X_k\ (i, k = 1, 2, 3),\ |a_i^k| \neq 0, \tag{3.37}$$

$$[Y_1Y_2] = 0,\ [Y_1Y_3] = Y_2,\ [Y_2Y_3] = -Y_1 + pY_2. \tag{3.38}$$

Выражая здесь векторы Y_i по формулам (3.37) и учитывая (3.38) и линейную независимость векторов X_i, мы приходим аналогично предыдущим рассуждениям к соотношениям:

$$\begin{gathered} a_1^2a_3^3 = -a_2^1,\ a_1^1a_3^3 + a_1^2a_3^3q = a_2^2, \\ a_2^2a_3^3 = a_1^1 - pa_2^1,\ a_1^3 = 0,\ a_2^3 = 0, \\ a_2^1a_3^3 + a_2^2a_3^3q = -a_1^2 + pa_2^2. \end{gathered} \tag{***}$$

Из этих соотношений и невырожденности матрицы (a_i^k) следует, что $a_3^3 \neq 0$. Далее, если $a_2^2 = 0$, то $a_1^2 \neq 0$, $a_2^1 \neq 0$, в противном случае матрица (a_i^k) будет также вырожденной. Из (***) получаем также, что $a_1^2a_3^3 = -a_2^1$, $a_2^1a_3^3 = -a_1^2$; следовательно, $(a_3^3)^2 = 1$, $a_3^3 = \pm 1$. Очевидно, случай $a_3^3 = 1$ приводит к равенству $p = q$, что невозможно.

Если же $a_3^3 = -1$, то $p = -q$ и алгебра, соответствующая значению параметра p, принадлежащего интервалу $(0, 2)$, изоморфна алгебре с параметром q из интервала $(0, 2)$.

Итак, матрицу перехода от операторов X_i к операторам Y_i можно взять в виде

$$(a_i^k) = \begin{pmatrix} -q & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.39}$$

В итоге мы приходим к следующему результату.

Т е о р е м а. Если параметры p и q в алгебрах типов VI и VII связаны соответственно формулами: $pq = 1$, $p = -q$, то алгебры эти изоморфны, а матрицы перехода можно взять в виде (3.35) и (3.39).

Продолжая таким образом исследования, можно доказать, что структура любой трехчленной вещественной алгебры Ли приводится к одному из следующих четырех типов алгебр:

1. $[X_1X_2] = 0,\ [X_1X_3] = 0,\ [X_2X_3] = 0;$
2. $[X_1X_2] = 0,\ [X_1X_3] = 0,\ [X_2X_3] = X_1;$
3. $[X_1X_2] = 0,\ [X_1X_3] = X_1,\ [X_2X_3] = qX_2\ (q \in \boldsymbol{R});$
4. $[X_1X_2] = 0,\ [X_1X_3] = X_2,\ [X_2X_3] = -X_1 + qX_2\ (q \in [0, 2]).$

Вопросы и упражнения

1. Проверьте, что операторы

$$X_1 = p_1 - x^1(x^1p_1 + x^2p_2),\quad X_2 = p_2 - x^2(x^1p_1 + x^2p_2),\quad X_3 = x^2p_1 - x^1p_2$$

$$\left(p_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

определяют алгебру Ли E_3.

2. Докажите, что алгебра E_3 в предыдущей задаче допускает редуктивное разложение вида:

$$E_3 = H + M, \text{ где}$$

$$H = \{X_3\},\ M = \{X_1, X_2\}.$$

3. К какому из девяти типов трехмерных алгебр Ли принадлежит алгебра Ли операторов:

$X_1 = p_1 + x^1(x^1p_1 + x^2p_2),\quad X_2 = p_2 + x^2(x^1p_1 + x^2p_2),\quad X_3 = x^2p_1 - x^1p_2$?

Допускает ли эта алгебра Ли редуктивное разложение с подалгеброй $H = \{X_3\}$?

4. Какие типы алгебр Ли E_4, содержащие параметры, допускают дублирующие структуры?

10. Об однородных и симметрических пространствах

К понятию однородных пространств приходят при рассмотрении групп, транзитивным образом действующих в данном пространстве. Например, действия группы движений в евклидовой плоскости описываются в декартовой системе координат формулами:

$$\begin{aligned}\widetilde{x^1} &= x^1\cos a^3 - x^2\sin a^3 + a^1,\\ \widetilde{x^2} &= x^1\sin a^3 + x^2\cos a^3 + a^2.\end{aligned}\tag{*}$$

Параметры a^1, a^2, a^3 данного движения определяют точку в так называемом групповом пространстве $G(a^1, a^2, a^3)$. Чтобы определить в этом пространстве групповую операцию (умножения точек), осуществим сначала в плоскости (x^1, x^2) преобразование (*), соответствующее параметрам a^1, a^2, a^3, а затем преобразование (*), соответствующее параметрам a_1^1, a_1^2, a_1^3. Легко убедиться, что результирующее преобразование будет также вида (*):

$$\begin{aligned}\widetilde{x^1} &= x^1\cos(a^3 + a_1^3) - x^2\sin(a^3 + a_1^3) + \widetilde{a^1},\\ \widetilde{x^2} &= x^1\sin(a^3 + a_1^3) + x^2\cos(a^3 + a_1^3) + \widetilde{a^2};\end{aligned}\tag{**}$$

композиция элементов $g = (a^1, a^2, a^3)$, $g_1 = (a_1^1, a_1^2, a_1^3)$ определяется формулами:

$$\begin{aligned}\widetilde{a^1} &= a^1\cos a_1^3 - a^2\sin a_1^3 + a_1^1,\\ \widetilde{a^2} &= a^1\sin a_1^3 + a^2\cos a_1^3 + a_1^2,\\ \widetilde{a^3} &= a^3 + a_1^3,\end{aligned}\tag{3.40}$$

где $\widetilde{a^1}, \widetilde{a^2}, \widetilde{a^3}$ — координаты элемента $\widetilde{g} = gg_1$. Другими словами, формулы (3.40) определяют закон умножения в группе $G(a^1, a^2, a^3)$, соответствующей группе преобразований (*). Следует отметить также, что точки группового пространства с координатами (a^1, a^2, a^3),

$(a^1, a^2, a^3 + 2\pi)$ в дальнейшем удобно отождествить, так как им отвечает одно и то же движение. Таким образом, групповое пространство является слоем трехмерного координатного пространства $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} = \{(a^1, a^2, a^3)\}$ при предположении, что параметр a^3 изменяется в промежутке $0 \leqslant a^3 < 2\pi$.

Возьмем далее на плоскости какую-нибудь точку, например начало координат. Движения, оставляющие эту точку на месте, очевидно, характеризуются тем, что для них параметры $a^1 = a^2 = 0$. Вставляя эти значения параметров в формулы (*), получим все движения:

$$\tilde{x}^1 = x^1 \cos a^3 - x^2 \sin a^3,$$
$$\tilde{x}^2 = x^1 \sin a^3 + x^2 \cos a^3, \tag{3.41}$$

оставляющие точку (0, 0) на месте. Преобразования (3.41) образуют самостоятельную группу, которая называется стационарной подгруппой H точки (0, 0). Очевидно, преобразования (3.41) являются вращениями вокруг точки (0, 0) и отражениями относительно прямых, проходящих через эту точку.

Рассмотрим теперь совокупность преобразований вида sH $(s \in G)$. Такие множества элементов называются *смежными классами* группы G по подгруппе H. Очевидно, каждое преобразование sh из данного смежного класса переводит точку O в одну и ту же точку $O' = sO$ с координатами (a^1, a^2), так как $sh\,O = sO$. Все такие движения sH изображаются в групповом пространстве (a^1, a^2, a^3) точками отрезка $0 \leqslant a^3 \leqslant 2\pi$, расположенного на прямой, «параллельной» третьей оси.

Нетрудно убедиться также, что геометрия совокупности отрезков, изображающих смежные классы sH $(s \in G)$, является двумерной геометрией Евклида.

В самом деле, мы видели, что если осуществить сначала преобразование a^1, a^2, a^3, соответствующее параметрам (a^1, a^2, a^3), а потом преобразование $(\overset{1}{a}_1, \overset{2}{a}_1, \overset{3}{a}_1)$, то параметры $\tilde{a}^1, \tilde{a}^2, \tilde{a}^3$ результирующего преобразования определяются по формулам:

$$\tilde{a}^1 = a^1 \cos \overset{3}{a}_1 - a^2 \sin \overset{3}{a}_1 + \overset{1}{a}_1,$$
$$\tilde{a}^2 = a^1 \sin \overset{3}{a}_1 + a^2 \cos \overset{3}{a}_1 + \overset{2}{a}_1, \tag{3.42}$$
$$\tilde{a}^3 = a^3 + \overset{3}{a}_1,$$

где $a^3, \overset{3}{a}_1, \tilde{a}^3$ рассматриваются с точностью до 2π. Из (3.42) следует, что первые две координаты a^1, a^2 любого элемента G группы G при умножении на элемент $(\overset{1}{a}_1, \overset{2}{a}_1, \overset{3}{a}_1)$ преобразуются в точности так же, как точки плоскости (x^1, x^2) в формулах (5.8) (с. 55), следовательно, геометрия множества отрезков (смежных классов) (a^1, a^2, a^3) $(0 \leqslant a^3 < 2\pi)$ совпадает с геометрией евклидовой плоскости. Итак, мы приходим к следующей модели евклидовой плоскости в групповом пространстве. Точками в этой модели являются классы смежности sH ($s \in G_3$) группы движений G_3 (a^1, a^2, a^3); в качестве векторов мы принимаем упорядоченные пары точек A, B, считая две пары точек A, B и C, D эквивалентными тогда и только тогда, когда найдется такой элемент s (a^1, a^2, $a^3 = 0$) $\in G_3$, который переводит A в B и в то же время C в D, т. е. когда эти пары точек задают один и тот же параллельный перенос.

Факторизация группового пространства по указанным отрезкам (смежным классам), очевидно, приводит нас к координатной плоскости (a^1, a^2). Каждому смежному классу (a^1, a^2, a^3) H однозначно сопоставляется точка (a^1, a^2) координатной плоскости a^1, a^2.

С другой стороны, мы убедились выше, что на плоскости a^1, a^2, т. е. в множестве смежных классов, осуществляется евклидова геометрия. Полученную модель евклидовой плоскости будем называть групповой моделью.

Обобщая эти построения, приходим к понятию однородного пространства.

Множество E элементов, именуемых точками, называется однородным пространством G/H, порожденным группой G и подгруппой H, если существует отображение π: $G \to E$ группы G на множество E, такое, что выполняются следующие три свойства (аксиомы).

1. Отображение π группы G на E сюръективно.

2. $\pi(g_1) = \pi(g_2)$ тогда и только тогда, когда элементы $g_1, g_2 \in G$ принадлежат одному и тому же классу смежности: $g_1H = g_2H$.

3. Классы смежности sH при умножении их слева на g преобразуются по группе G_1, изоморфной G (т. е. H не содержит инвариантных подгрупп группы G).

Из этого определения следует, что однородное пространство получается в результате факторизации группового пространства по смежным классам sH (по отношению эквивалентности, по которому два элемента считаются эквивалентными тогда и только тогда, когда они принадлежат одному смежному классу).

Вопросы и упражнения

1. Приведите примеры однородных пространств, содержащих конечное число точек.

2. а) Постройте групповую модель аффинной плоскости. б) Какое множество подвергается факторизации при получении групповой модели? в) Укажите отношение, по которому производится факторизация шестимерного пространства параметров — множества всех аффинных преобразований переменных (x^1, x^2).

11. Евклидово E_2 как симметрическое пространство

Мы рассмотрели свойства однородности евклидовой плоскости и определили важнейшее понятие современной геометрии — понятие однородного пространства.

Теперь обратим внимание на другое свойство евклидовой плоскости E_2: она допускает так называемые симметрии s относительно любой своей точки O — центра симметрии. Эти движения являются инволютивными поворотами вокруг данных точек O, т. е. квадраты их равняются тождественному преобразованию $e : s^2 = e$. Кроме того, как мы убедимся, симметрия s позволяет определить автоморфизм в группе движений G_3, так что евклидовой плоскости можно дать вполне определенную характеристику в групповом пространстве.

В самом деле, под действием симметрии s относительно точки (0, 0) преобразуются не только точки и другие фигуры плоскости, *но и сами движения*. Легко убедиться, что движение $f(a, b, \varphi)$ с параметрами a, b, φ переходит при симметрии $\widetilde{x^1} = -x^1, \widetilde{x^2} = -x^2$ в движение

$$s^{-1} fs = (-a, -b, \varphi) \tag{3.43}$$

с параметрами $-a$, $-b$, φ.

Итак, всякое движение

$$\widetilde{x^1} = x^1 \cos \varphi - x^2 \sin \varphi + a,$$
$$\widetilde{x^2} = x^1 \sin \varphi + x^2 \cos \varphi + b$$

с параметрами a, b, φ преобразуется симметрией s в движение с параметрами $-a$, $-b$, φ. Таким образом, в групповом пространстве $G(a, b, \varphi)$ порождается отображение S, такое, что

$$s : (a, b, \varphi) \to (-a, -b, \varphi). \tag{3.44}$$

Докажем, что s является автоморфизмом. В самом деле, точки группового пространства $A = (a, b, \varphi)$, $B = (a_1, b_1, \varphi_1)$ отображаются соответственно на точки

$$A^s = (-a, -b, \varphi), \; B^s = (-a_1, -b_1, \varphi_1), \tag{3.45}$$

причем точка

$$B \cdot A = (a \cos \varphi_1 - b \sin \varphi_1 + a_1, a \sin \varphi_1 + + b \cos \varphi_1 + b_1, \varphi + \varphi_1)$$

отображается при этом на точку

$$(B \cdot A)^s = (-a \cos \varphi_1 + b \sin \varphi_1 - a_1, - a \sin \varphi_1 - b \cos \varphi_1 - - b_1, \varphi + \varphi_1).$$

Мы убеждаемся, таким образом, что

$$(B \cdot A)^s = B^s \cdot A^s, \tag{3.46}$$

т. е. отображение s действительно является автоморфным.

Отображение s показывает также, что точка $(-a, -b, \varphi)$ в свою очередь переходит в исходную точку (a, b, φ). Но точка (a, b, φ) произвольна, поэтому отображение s инволютивно.

Наша цель — обобщить эти построения и определить понятие симметрического пространства.

Предположим, что некоторая группа G допускает отображение $S : G \to G$, которое обладает следующими тремя свойствами:

1) S является автоморфизмом группы G, т. е. если элемент $z = xy$ является произведением элементов $x, y \in G$, то соответствующие элементы по автоморфизму $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ связаны аналогичным соотношением $\tilde{z} = \tilde{x}\tilde{y}$.

2) Отображение S является инволютивным отображением группового пространства, т. е. квадрат этого отображения равен тождественному отображению G на себя:

$$S^2 = e. \tag{3.47}$$

Чтобы сформулировать третье свойство, мы обозначим предварительно через H множество элементов $h \in G$, которые при автоморфизме S переходят в себя (остаются неподвижными): $h = Sh$ $(\forall h \in H)$. Совокупность H элементов h, очевидно, является подгруппой. Построим далее пространство левых смежных классов данной группы G по подгруппе H:

$$G/H = \{(gH) \mid g \in G\}. \tag{3.48}$$

3) Пространство G/H допускает группу преобразований смежных классов, изоморфную данной группе G. Это свойство выполняется тогда и только тогда, когда H не содержит инвариантных подгрупп группы G.

При выполнении свойств 1—3 говорят, что множество смежных классов разложения G по подгруппе H определяет симметрическое пространство G/H. В развернутом виде это определение можно сформулировать так: *множество G/H смежных классов* (3.48) *называется симметрическим пространством*, если существует отображение S группы G на себя, такое, что: 1) S является автоморфизмом; 2) S — инволютивное отображение, оставляющее неподвижными элементы подгруппы H; 3) подгруппа H не содержит инвариантных подгрупп группы G.

Рассуждения, которые мы провели в начале этого пункта, показывают, что евклидова плоскость является простейшим примером симметрического пространства.

В заключение пункта обратим внимание читателя на следующие три замечания:

Во-первых, при определении симметрического пространства мы не требовали никакой метрики от исходного (родового) пространства. Пространство это может быть каким угодно, метрическим и даже неметрическим, лишь бы выполнялись свойства 1—3.

Во-вторых, понятие симметрического пространства по существу является теоретико-групповым понятием.

Наконец, третье замечание исторического характера. К понятию симметрического пространства впервые (в другой форме) пришли в 20-х годах независимо П. А. Широков (1895—1944) в Казани и французский математик Э. Картан (1869—1951).

Вопросы и упражнения

1. Докажите, что аффинная плоскость является симметрическим пространством.

2. По каким смежным классам надо факторизовать аффинную группу G_6, чтобы прийти к симметрическому пространству?

3. Найдите инволютивный автоморфизм S аффинной группы G_6, который используется при построении симметрического пространства.

4. Какие инволютивные автоморфизмы допускает аффинная группа G_6?

5. Какому дополнительному требованию должна удовлетворять подгруппа H, чтобы однородное пространство G/H топологической группы G было хаусдорфовым? (Группа G называется топологической группой, если: 1) G есть топологическое пространство; 2) групповые операции непрерывны в топологическом пространстве G. Более полно последнее требование формулируется так: а) если $a, b \in G$, то для всякой окрестности W элемента ab существуют такие окрестности U и V элементов a и b, что $UV \subset W$; б) если $a \in G$, то для всякой окрестности V элемента a^{-1} найдется такая окрестность U элемента a, что $U^{-1} \subset V$.)

Глава VIII
РИМАНОВЫ ПРОСТРАНСТВА И ПРОСТРАНСТВА АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

§ 1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ

При рассмотрении многих вопросов в геометрии вполне достаточно иметь интуитивное представление о геометрических объектах. Но если мы желаем сделать какие-либо заключения о таких объектах, например о существовании геометрического объекта предписанной структуры, то необходимо располагать точным содержанием этого понятия. Приведем следующее определение геометрического объекта.

Предположим, что в некоторой области дифференцируемого многообразия X_n класса C^p определена совокупность N функций

$$\Omega^a (x^1, x^2, \ldots, x^n) \; (a = 1, 2, \ldots, N) \tag{1.1}$$

от независимых переменных $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Мы будем говорить, что эта совокупность функций определяет *поле геометрического объекта класса* C^l $(l \leqslant p)$, если указанные функции при любом допустимом преобразовании локальных координат

$$x^{\alpha'} = f^{\alpha'} (x^1, x^2, \ldots, x^n) \; (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.2}$$

преобразуются по следующему закону:

$$\Omega^{\alpha'} = F^{a'}(\Omega, x, x', \partial_{\beta_1} x^{\alpha'}, \ldots, \partial_{\beta_l \ldots \beta_1} x^{\alpha'}) \left(\partial_{\beta_k \ldots \beta_1} x^{\alpha'} = \frac{\partial^k x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta_1} \ldots \partial x^{\beta_k}} \right), \tag{1.3}$$

причем функции $F^{a'}$ от указанных переменных удовлетворяют следующим двум условиям:

Во-первых, если преобразование координат тождественное, т. е. $x^{\alpha'} = x^{\alpha}$, то $\Omega^{a'} = \Omega^a$. Другими словами, при тождественном преобразовании координат функции Ω^a испытывают лишь тождественное преобразование. Это свойство означает, что

$$\Omega^a = F^a(\Omega, x, x, \delta^\alpha_\beta, 0, \ldots, 0).$$

Во-вторых, функции F^a подобраны так, что определяемый ими закон обладает свойством транзитивности, т. е. если осуществить переход от первой системы x^α ко второй $x^{\alpha'}$ и от второй системы $x^{\alpha'}$ к третьей $x^{\alpha''}$, то по предположению можно осуществить переход сразу от первой системы координат к третьей, не изменяя результата. Таким образом, функции F^a удовлетворяют также следующим тождествам:

$$F^a\left(\Omega', x', x'', \frac{\partial x''}{\partial x^\beta}, \ldots, \partial_{\beta'_l \ldots \beta'_1} x''\right) =$$

$$= F^a\left(\Omega, x, x'', \frac{\partial x''}{\partial x^{\beta_1}}, \ldots, \partial_{\beta_l \ldots \beta_1} x''\right).$$

В этом состоят вторые условия, которые накладываются на функции F^a.

Точки многообразия, скалярные и тензорные поля, очевидно, являются примерами геометрических объектов. Геометрические объекты появляются также при оснащении вложенных многообразий, построении теории пространств аффинной и проективной связности и их обобщений.

В связи с формулами (1.3) сделаем некоторые замечания. Формулы (1.3) показывают, что геометрический объект в точке $x \in X_n$ является конкретным представлением общей группы дифференцируемых преобразований. Пространством значений геометрического объекта является область N-мерного евклидова пространства.

Если в формулах преобразований (1.3) правые части $F^a(\Omega, x, x', \partial_{\alpha_1} x', \ldots, \partial_{\alpha_l \ldots \alpha_1} x')$ не содержат x, x', то *геометрический объект называется дифференциально-геометрическим объектом.* Примерами дифференциально-геометрических объектов являются векторные и тензорные поля, объект аффинной связности, рассматриваемый ниже, и др.

Выделим еще один важный класс геометрических объектов. Предположим, что в (1.3) функции $F^a(\Omega, x, x')$ линейны относительно координат объекта Ω, т. е. приводятся к виду:

$$F^a(\Omega, x, \bar{x}) = F^a_b(x, \bar{x})\,\Omega^b + G^b(x, \bar{x}). \tag{1.4}$$

Очевидно, при тождественном преобразовании координат коэффициенты F^a_b обращаются в символы Кронекера, а свободные члены $G^b(x, \bar{x})$ в нули. В этом случае преобразование координат объекта сводится к тождественному преобразованию, как требуется по определению геометрического объекта.

Геометрический объект с законом преобразования (1.4) называется *линейным.* Кроме того, если $G^b(x, \bar{x}) = 0$, то линейный геометрический объект называется линейным однородным геометрическим объектом.

Линейные геометрические и линейные дифференциально-геометрические объекты являются обобщениями понятия тензора.

В заключение параграфа введем еще одно понятие.

Пусть даны два геометрических объекта S^a и T^b, такие, что координаты S^a являются функциями координат T^b:

$$S^a = S^a(T), \tag{1.5}$$

где правые части не зависят от выбора системы координат. В случае (1.5) говорят, что объект S является функцией геометрического объекта T.

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЛИ. ПРИМЕРЫ

Предположим сначала, что в многообразии X_n заданы дифференциально-геометрический объект Ω^a класса C^l и некоторое точечное преобразование класса C^l ($l \leqslant p$), переводящее некоторую область U в область $\widetilde{U}$. Сохраняя за каждой точкой $\widetilde{p}$ области $\widetilde{U}$ координаты точки $p \in U$ — прообраза точки $\widetilde{p}$, мы получим в $\widetilde{U}$ преобразованную локальную систему координат. Последнюю часто называют также увлеченной системой координат. При рассматриваемом точечном преобразовании вместе с точками преобразуются по соответствующим индуцированным законам и связанные с ними касательные пространства и геометрические объекты.

Геометрический объект Ω^a в точке p преобразуется в объект $\widetilde{\Omega^a}$ в точке $\widetilde{p}$ так, что координаты последнего в увлеченной системе координат по определению принимаются равными соответствующим координатам данного объекта Ω^a в исходной системе координат. Конечно, по известным формулам преобразования локальных координат обычным образом определяются координаты преобразованного объекта в исходной системе координат.

Перейдем теперь к определению производной Ли. Пусть $v^\alpha(x)$ является вектором инфинитезимального преобразования, т. е. преобразования, при котором точки $p(x^\alpha)$ переходят в $\widetilde{p}(\widetilde{x^\alpha})$ по закону:

$$\widetilde{x^\alpha} = x^\alpha + v^\alpha(x)\, dt, \tag{2.1}$$

где dt обозначает приращение некоторого независимого переменного t. Точке $p(x^\alpha)$ сопоставляется точка $\widetilde{p}(\widetilde{x^\alpha})$. *Производной Ли заданного дифференциально-геометрического объекта* $\Omega(p)$ в точке p называется такой объект, координаты которого являются пределами разностей соответствующих координат в точке $\widetilde{p}$ данного объекта $\Omega(\widetilde{p})$ и увлеченного объекта $\widetilde{\Omega}(\widetilde{p})$, отнесенных к приращению Δt ($t = 0$), вызвавшему переход точки p в точку $\widetilde{p}$, при условии, что Δt стремится к нулю. Обозначая производную Ли от объекта Ω символом $D\,\Omega$, имеем:

$$D\Omega(p) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Omega(\widetilde{p}) - \widetilde{\Omega}(\widetilde{p})}{\Delta t}. \tag{2.2}$$

Производная Ли, как следует из (2.2), характеризует степень отклонения естественного значения объекта от увлеченного. Следует также оговорить, что при составлении разностей соответствующих координат естественного значения дифференциально-геометрического объекта $\Omega(\widetilde{p})$ и увлеченного объекта $\widetilde{\Omega}(\widetilde{p})$, координаты последнего предполагаются вычисленными в исходной системе координат.

Из (2.2) следует также закон преобразования $D\,\Omega^b$ при преобразовании локальных координат:

$$D\Omega^{a'} = \frac{\partial F^a}{\partial \Omega^b} D\Omega^b. \tag{2.3}$$

Из формулы (2.3) следует прежде всего, что свойство обращения в нуль всех $D\Omega^a$ не зависит от выбора координат. Эти же формулы определяют закон преобразования производной Ли при преобразовании локальных координат (x^α). Так как частные производные от функции F^a по Ω^b содержат в общем случае координаты самого объекта Ω, то производная Ли от геометрического объекта, вообще говоря, не является геометрическим объектом.

Правые части (2.3) показывают, что производная Ли от геометрического объекта тогда и только тогда является геометрическим объектом, когда частные производные от правых частей формул (1.3) по Ω^a не зависят от Ω. Следовательно, данный геометрический объект должен быть линейным объектом:

$$\Omega^a = A^a_b\,(x, \bar{x}, \bar{f}^\alpha_{\beta_1}, \ldots, \bar{f}^\alpha_{\beta_1 \ldots \beta_l})\,\Omega^b + B^a\,(x, \bar{x}, f^\alpha_{\beta_1}, \ldots, f^\alpha_{\beta_1 \ldots \beta_l}). \tag{2.4}$$

Ясно, что в этом случае при тождественном преобразовании координат коэффициенты A^a_b в формулах преобразования линейного объекта обращаются в символы Кронекера, B^a — в нули. При этих значениях коэффициентов преобразование координат объекта Ω^a тождественное.

Кроме того, из (2.3) мы заключаем также, что координаты производной Ли линейного дифференциально-геометрического объекта преобразуются по следующему закону:

$$D\Omega^{a'} = A^{a'}_a\,(x, \bar{x}, \bar{f}^\alpha_{\beta_1}, \ldots, \bar{f}^\alpha_{\beta_1 \ldots \beta_l})\,D\Omega^a. \tag{2.5}$$

Таким образом, (2.5) показывает, в частности, что производная Ли от тензора является тензором того же типа.

В заключение приведем краткую историческую справку. Термины «производная» и «дифференциал Ли» ввел Ван Данциг (*дифференциалом Ли объекта* Ω называется $D\Omega\ dt$ — произведение производной Ли этого объекта на приращение dt).

Операцию дифференцирования Ли в применении к векторным и тензорным полям впервые рассмотрели в 1931—1933 гг. Слебодзинский, Ван Данциг и Дейвис. К этой операции пришли также Схоутен и Ван Кампен в 1933 г., изучая инвариантные дифференциалы и вариации геометрических объектов при деформации многообразия.

Но необходимо отметить также, что по существу к указанной операции пришел еще Фубини в 1903 г. в работе, посвященной проективным преобразованиям в римановых пространствах. В этой работе он вычисляет производные Ли от фундаментального тензора пространства, символа Кристофеля и тензора кривизны. Производную Ли от указанных объектов он обозначал штрихом: $g'_{ij} = Dg_{ij}$ и т. д.

Примеры вычислений производной Ли

Перейдем к вычислению производной Ли для простейших геометрических объектов.

1. Производная Ли от скалярной функции $f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$. Составляющая скалярной функции одна, и она равна той же самой функции при различных допустимых преобразованиях локальных координат. Разность естественного и увлеченного значений является просто приращением скалярной функции в направлении поля $v^\alpha(x)$. Следовательно, производная Ли от скалярной функции $f(x)$ равняется направленной производной от данной функции вдоль линий тока вектора $v^\alpha(x)$ бесконечно малого преобразования:

$$Df = v^\alpha(x)\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}. \tag{2.6}$$

2. Производная Ли от контравариантного вектора $u^\alpha(x)$. В этом случае увлеченное значение вычисляется по формуле

$$u^\sigma(x)\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\sigma} = u^\sigma\,(\delta^\alpha_\sigma + \partial_\sigma v^\alpha dt) = u^\alpha + u^\sigma \partial_\sigma v^\alpha dt.$$

Естественное же значение равняется: $u^\alpha(x + v\,dt) = u^\alpha(x) + v^\sigma \partial_\sigma u^\alpha dt$. Следовательно, для производной Ли от контравариантного векторного поля u^α получаем:

$$Du^\alpha = v^\sigma \partial_\sigma u^\alpha - \partial_\sigma v^\alpha u^\sigma. \tag{2.7}$$

3. Производная Ли от ковекторного поля w_α. Увлеченное значение в точке $x + vdt$ определяется формулой

$$w_\sigma \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\alpha'}} = w_\sigma(\delta^\sigma_\alpha - \partial_\alpha v^\sigma dt).$$

Естественное значение вычисляется, как в предыдущем случае:

$$w_\alpha(x + vdt) = w_\alpha(x) + v^\sigma \partial_\sigma w_\alpha dt.$$

Таким образом, производная Ли для ковекторного поля приводится к виду:

$$Dw_\alpha = v^\sigma \partial_\sigma w_\alpha + \partial_\alpha v^\sigma w_\sigma. \tag{2.8}$$

В заключение приведем еще производную Ли для тензора $g_{\alpha\beta}$ и линейного дифференциально-геометрического объекта $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$, для которого

$$\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} = x^{\alpha'}_{\alpha}\, x^{\beta}_{\beta'}\, x^{\gamma}_{\gamma'}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + x^{\alpha'}_{\alpha}\, x^{\alpha}_{\beta'\gamma'} \left(x^{\alpha'}_{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}, \quad x^{\alpha}_{\beta'\gamma'} = \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}} \right). \quad (2.9)$$

Повторяя предыдущие рассуждения, мы получим:

$$Dg_{\alpha\beta} = v^{\sigma}\partial_{\sigma}\, g_{\alpha\beta} + \partial_{\alpha}\, v^{\sigma}\, g_{\sigma\beta} + \partial_{\beta}\, v^{\sigma}\, g_{\alpha\sigma}, \quad (2.10)$$

$$D\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \partial_{\beta\gamma}v^{\alpha} + v^{\sigma}\partial_{\sigma}\,\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \partial_{\beta}\, v^{\sigma}\,\Gamma^{\alpha}_{\sigma\gamma} + \partial_{\gamma}\, v^{\sigma}\,\Gamma^{\alpha}_{\beta\sigma} - \partial_{\sigma}\, v^{\alpha}\,\Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma}, \quad (2.11)$$

где положили

$$\partial_{\sigma}\, g_{\alpha\beta} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\sigma}}, \quad \partial_{\sigma}\,\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}}{\partial x^{\sigma}}, \quad \partial_{\gamma}\, v^{\sigma} = \frac{\partial v^{\sigma}}{\partial x^{\gamma}}.$$

Векторное поле v^{α} тогда и только тогда переводит тензор $g_{\alpha\beta}$ или объект $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ в себя, когда соответственно

$$Dg_{\alpha\beta} = 0, \quad (2.12)$$

$$D\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0. \quad (2.13)$$

§ 3. РИМАНОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Чтобы прийти к понятию римановых пространств, остановимся на строении линейного элемента евклидовой планиметрии.

Предположим, что нам дана евклидова плоскость. Если в этой плоскости взять декартову систему координат (x, y), то квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками $M\ (x, y)$ и $M'\ (x + dx, y + dy)$ равняется сумме квадратов приращений или дифференциалов координат точки, т. е. $ds^2 = dx^2 + dy^2$.

Выписанная формула выражает теорему Пифагора для бесконечно малого треугольника с катетами, равными абсолютным величинам dx, dy, и гипотенузой MM'. Правая часть равенства называется основной метрической формой или линейным элементом евклидовой плоскости.

Введем теперь полярную систему координат (ρ, φ) с полюсом в начале декартовой системы координат и полярной осью, совпадающей с осью OX. Так как полярные и декартовы координаты произвольной точки плоскости связаны формулами: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, то линейный элемент в полярных координатах приводится к виду: $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\, d\varphi^2$. В правой части мы снова имеем лишь члены с квадратами дифференциалов координат точки. Эти квадраты дифференциалов входят с коэффициентами, равными соответственно 1 и ρ^2. Обратим внимание на то, что коэффициент при $d\varphi^2$ переменный и равняется квадрату координаты ρ.

Можно убедиться, что линейный элемент этой плоскости в криволинейной системе координат (x^1, x^2) представляет собой квадратичную форму относительно дифференциалов независимых переменных с коэффициентами, зависящими от локальных координат точки:

$$ds^2 = A(x^1, x^2)\,dx^{1^2} + 2B(x^1, x^2)\,dx^1dx^2 + C(x^1, x^2)\,dx^{2^2}. \qquad (*)$$

Метрическая форма позволяет определить длины дуг линий, а также углы между линиями и площади фигур. В частности, длина дуги линии $x^1 = x^1(t)$, $x^2 = x^2(t)$, ограниченной точками $M_0(t_0)$ и $M(t)$, определяется по формуле $s = \int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{A\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 + 2B\frac{dx^1}{dt}\frac{dx^2}{dt} + C\left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2}\,dt.$

Другими словами, евклидова геометрия на координатной плоскости (x^1, x^2) определяется метрической формой (*). Очевидно, полученную метрическую форму можно снова привести заменой переменных к сумме квадратов дифференциалов.

Произвольная квадратичная форма не обладает таким свойством: ни в какой локальной системе координат заданная невырожденная дифференциальная квадратичная форма, вообще говоря, не может быть приведена к сумме квадратов дифференциалов. Это свойство и приводит нас к двумерной римановой геометрии.

Двумерное риманово пространство V_2 есть такое дифференцируемое пространство, в котором квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками $M(x^1, x^2)$, $M'(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2)$ задается при помощи невырожденной квадратичной формы:

$$ds^2 = g_{11}(x^1, x^2)\,dx^{1^2} + 2g_{12}(x^1, x^2)\,dx^1dx^2 + g_{22}(x^1, x^2)\,dx^{2^2}.$$

Мы считаем, что эта форма инвариантна при обратимых преобразованиях переменных. Она часто называется метрической формой или линейным элементом римановой геометрии. Если положить $g_{11} = g_{22} = 1$, $g_{12} = 0$, то риманово пространство V_2 будет евклидовой плоскостью.

Важным примером римановой геометрии является внутренняя геометрия поверхности. В самом деле, предположим, что поверхность задается уравнением $z = f(x, y)$, где x, y, z — декартовы координаты текущей точки поверхности. Вставляя $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ в выражение линейного элемента евклидова пространства $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, мы убедимся, что метрическая форма поверхности приводится к виду:

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]dx^2 + 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}dx\,dy + \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]dy^2.$$

Так как эта форма невырожденна, то она порождает в некоторой области переменных (x, y) риманову геометрию.

Метрическая форма поверхности определяет так называемую внутреннюю геометрию поверхности. Свойства фигур здесь рассматриваются с точностью до изгибаний поверхности, т. е. таких ее преобразований, при которых сохраняются длины кривых.

Например, такие понятия, как длина дуги линии, угол между линиями и площадь фигуры, являются понятиями внутренней геометрии. В этой геометрии изучаются кратчайшие линии (геодезические) на поверхности, соединяющие на ней любые две достаточно близкие точки.

Метрическая форма поверхности позволяет построить понятие полной кривизны — важнейшее понятие внутренней геометрии. К этому понятию обычно приходят путем рассмотрения кривизны нормальных сечений. Так называются линии пересечения поверхности с плоскостями, проходящими через нормаль к поверхности в некоторой ее точке. Среди кривизн этих плоских линий существуют экстремальные кривизны. Они называются главными кривизнами, а их произведение — полной кривизной поверхности в данной ее точке.

Необходимо отметить, что коэффициенты метрической формы изменяются при переходе к новой координатной системе, однако полная кривизна поверхности в каждой точке остается инвариантной.

Обратим теперь внимание на поверхность S постоянной кривизны: полная кривизна в каждой точке S равняется одному и тому же числу. Поверхности, налагающиеся на плоскость, имеют нулевую кривизну. На таких поверхностях в малом осуществляется евклидова геометрия. Сфера есть пример поверхности постоянной положительной кривизны. На ней в малом осуществляется эллиптическая геометрия. Роль прямых играют дуги больших кругов.

Существуют также и поверхности постоянной отрицательной кривизны. Чтобы получить одну из таких поверхностей, возьмем в евклидовой плоскости кривую, обладающую следующим свойством. Отрезок касательной к этой кривой в любой ее точке, заключенный между точкой касания и точкой пересечения касательной с некоторой прямой, имеет одну и ту же длину, не зависящую от выбора точки касания. Эта кривая называется трактрисой, а данная прямая — осью. Если трактрису вращать вокруг ее оси, то она опишет поверхность, называемую псевдосферой. Эта поверхность вращения обладает замечательным свойством. Она является поверхностью постоянной отрицательной кривизны $K = -1/a^2$, где a означает длину касательной трактрисы. На псевдосфере локально осуществляется геометрия Лобачевского. Роль отрезков прямых здесь играют дуги кратчайших линий.

Итак, обе неевклидовы геометрии (эллиптическая и геометрия Лобачевского) являются римановыми геометриями V_2 — геометриями поверхностей соответственно постоянной положительной и отрицательной кривизны. Отсюда вытекает, что поверхности постоянной кривизны (в том числе и поверхности нулевой кривизны) обладают большой метрической однородностью. Они допускают по себе перемещения без растяжений и складок малых кусков с тремя степенями подвижности.

В случае сферы такие перемещения реализуются даже без изменения формы фигуры. Но вращения достаточно малого куска на цилиндре вокруг какой-нибудь его точки сопровождаются изменением формы. Аналогичное положение имеет место при перемещении куска кругового конуса вдоль образующей или куска псевдосферы.

Мы задержались на внутренней геометрии поверхностей потому, что она по существу является двумерной римановой геометрией. Все понятия внутренней геометрии поверхности формально переносятся в риманову геометрию. Так, например, длины дуг линий, углы между ними и площади фигур в римановой геометрии вводятся по формулам, выражающим одноименные понятия во внутренней геометрии поверхности через коэффициенты ее метрической формы.

Кривизна риманова пространства двух измерений определяется по формуле, выражающей полную кривизну поверхности через коэффициенты ее метрической формы. Геодезические линии определяются также формально уравнениями, выражающими кратчайшие линии на поверхности, и т. д.

Обратим внимание еще на одно обстоятельство. Две метрические формы могут порождать одну и ту же риманову геометрию. В этом случае одна форма переходит в другую при помощи обратимого преобразования переменных.

Очевидно, риманово пространство будет евклидовым, если его метрическая форма приводится заменой переменных к форме с постоянными коэффициентами. Новые переменные определяют декартову систему координат. Эта система прямоугольная, если форма приводится к виду, содержащему лишь квадраты дифференциалов, причем коэффициенты при квадратах равны единице. Таким образом, декартовы системы координат существуют лишь в пространствах, в которых в малом осуществляется евклидова геометрия.

До сих пор речь шла о римановых пространствах двух измерений. Если ввести квадратичную дифференциальную форму от переменных $x^1, x^2, \ldots, x^n$, то придем к риманову пространству n-измерений. Другое определение риманова пространства приводится в следующем пункте.

1. Определение риманова пространства

Римановым пространством V_n называется n-мерное дифференцируемое многообразие X_n, на котором задано ковариантное симметрическое тензорное поле второго порядка, определяющее билинейное невырожденное отображение:

$$g : B(X_n) \times B(X_n) \to F(X_n), \tag{3.1}$$

где $B(X_n)$ есть F — модуль множества векторных полей; $F(X_n)$ — кольцо дифференцируемых функций на X_n [20].

Если (U, x) — карта на X_n с областью определения локальных координат U и $\vec{e}_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i} \in B(U)$, то полагая $\vec{a} = a^\alpha(x)\vec{e}_\alpha$, $\vec{b} = b^\beta(x)\vec{e}_\beta$, мы определим следующим образом скалярное произведение полей $\vec{a}, \vec{b} \in B(U): \vec{a}\vec{b} = g_{\alpha\beta}(x)\, a^\alpha(x)\, b^\beta(x)$, где функции $g_{\alpha\beta} = \vec{e}_\alpha \vec{e}_\beta \in F(U)$ называются координатами тензорного поля (g_u) — ограничения поля g на область U с локальными координатами (x^i). Условие невырожденности билинейного отображения g означает, что

$$\det\,(g_{\alpha\beta}(x)) \neq 0.$$

Таким образом, задание римановой метрики на многообразии X_n означает задание на дифференцируемом многообразии X_n евклидовой или псевдоевклидовой структуры, дифференцируемо зависящей от точки $x \in X_n$. Тензорное поле g в координатах (x^i) представляется в виде

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x)\, dx^\alpha dx^\beta. \tag{3.2}$$

В целом метрика риманова многообразия получится в результате «склеивания» локальных метрик. Доказательства того, что такие склеивания (в конкретных случаях) локальных метрик приводят к глобальной метрике на всем многообразии, обычно опираются на так называемое дифференцируемое разложение единицы на X_n [22].

Простейшим примером риманова пространства V_n является n-мерное евклидово пространство. В этом случае в основу построения аффинной системы координат можно положить базис $\vec{e}_\alpha$. Фундаментальный тензор $g_{\alpha\beta}$ в точках пространства в аффинной карте имеет постоянные координаты: $g_{\alpha\beta} = \vec{e}_\alpha \vec{e}_\beta$, $|g_{\alpha\beta}| \neq 0$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$. Другим примером римановой геометрии n-измерений является внутренняя геометрия гиперповерхности $(n+1)$-мерного евклидова пространства E_{n+1}.

Понятия тензорных полей и алгебраических операций над тензорами принадлежат теории дифференцируемых многообразий и, таким образом, автоматически переносятся в теорию римановых пространств.

Пусть нам задано риманово пространство n-измерений с метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$. Определим по координатам этого тензора *символы Кристофеля первого рода*:

$$\Gamma_{\gamma\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\right). \tag{3.3}$$

Формула эта совпадает с аналогичной формулой для поверхности евклидова пространства E_3, отнесенной к криволинейной системе координат.

Построим далее *символы Кристофеля второго рода* $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$, т. е.

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = g^{\gamma\sigma}\Gamma_{\sigma\alpha\beta}. \tag{3.4}$$

Легко получить законы преобразований символов Кристофеля риманова пространства при преобразовании системы координат. В самом деле, при переходе к другим локальным координатам имеем:

$g'_{\alpha'\beta'}(x') = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} g_{\alpha\beta}$, откуда следует, что

$$\partial_{\gamma'} g_{\alpha'\beta'}(x) = \partial_{\gamma} g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}} + g_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'} \partial x^{\gamma'}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} + \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\gamma'}} \right).$$

Комбинируя из $\partial_{\gamma} g_{\alpha\beta}$ символы $\Gamma_{\gamma\alpha\beta}$ и $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$, получим:

$$\Gamma'_{\gamma'\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}} \Gamma_{\gamma\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\gamma'}} \frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x^{\alpha'} \partial x^{\beta'}},$$

$$\Gamma^{\gamma'}_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\gamma}} \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} + \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial^2 x^{\gamma}}{\partial x^{\alpha'} \partial x^{\beta'}}. \tag{3.5}$$

Таким образом, $\Gamma_{\lambda\alpha\beta}$, $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$ преобразуются при преобразовании локальных координат так же, как символы Кристофеля первого и второго рода поверхности трехмерного евклидова пространства.

Ковариантный дифференциал векторного поля u^{α} определяется по формуле

$$\delta u^{\alpha} = du^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} u^{\beta} dx^{\gamma}. \tag{3.6}$$

Учитывая формулы преобразования $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$, при переходе к другим локальным координатам, получим, что δu^{α} — контравариантное векторное поле. Аналогично ковариантный дифференциал от ковариантного вектора является ковариантным вектором. Ковариантный дифференциал δv_{α} определяется по формуле

$$\delta v_{\alpha} = dv_{\alpha} - \Gamma^{\tau}_{\alpha\sigma} v_{\tau}\, dx^{\sigma}. \tag{3.7}$$

Приведем в качестве примера ковариантные дифференциалы ковариантного, смешанного и контравариантного тензора второго порядка:

$$\delta a_{\alpha\beta} = da_{\alpha\beta} - \Gamma^{\tau}_{\alpha\mu} a_{\tau\beta} dx^{\mu} - \Gamma^{\tau}_{\beta\mu} a_{\alpha\tau} dx^{\mu},$$

$$\delta b^{\alpha}_{\beta} = db^{\alpha}_{\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\tau\mu}\, b^{\tau}_{\beta} dx^{\mu} - \Gamma^{\tau}_{\beta\mu}\, b^{\alpha}_{\tau} dx^{\mu},$$

$$\delta c^{\alpha\beta} = dc^{\alpha\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\tau\mu}\, c^{\alpha\beta} dx^{\mu} + \Gamma^{\beta}_{\tau\mu}\, c^{\alpha\tau} dx^{\mu}.$$

Если векторное поле задано в каждой точке некоторой области дифференцируемого многообразия, то ковариантным дифференциалам δu^{α}, δv_{α} можно придать также следующий вид:

$$\delta u^{\alpha} = \left(\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\alpha}_{\tau\beta} u^{\tau} \right) dx^{\beta}, \quad \delta v_{\alpha} = \left(\frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \Gamma^{\tau}_{\alpha\beta} v_{\tau} \right) dx^{\beta}.$$

Выражение в круглых скобках называется ковариантной производной от u^{α}, (v_{α}) по переменной x^{β} и обозначается символом $u^{\alpha}_{,\beta}$, ($v_{\alpha,\beta}$); таким образом,

$$u^{\alpha}{}_{,\beta} = \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\alpha}_{\tau\beta} u^{\tau}, \tag{3.8}$$

$$v_{\alpha,\beta} = \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \Gamma^{\tau}_{\alpha\beta} v_{\tau}. \tag{3.9}$$

Ковариантная производная тензора $a_{\alpha\beta}$ определяется так: $a_{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma} a_{\mu\beta} - \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma} a_{\alpha\mu}$. Аналогично вводится ковариантная производная для тензора порядка $p+q$; она является тензором порядка $p+(q+1)$. Можно установить, что ковариантная производная от фундаментального тензора равна нулю. Действительно, так как согласно (3. 3) $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} = \Gamma_{\beta\gamma\alpha} + \Gamma_{\alpha\gamma\beta}$,

то

$$g_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma} g_{\sigma\beta} - \Gamma^{\sigma'}_{\beta\gamma} g_{\alpha\sigma} = 0.$$

2. Параллельное перенесение вектора вдоль кривой

Пусть в римановом пространстве задана кривая уравнением

$$x = x(t)$$

и вдоль нее задано векторное поле

$$\vec{u} = \vec{u}(t).$$

Поле векторов называется *параллельно переносимым вдоль данной кривой*, если ковариантный дифференциал вдоль нее обращается в нуль: $\delta u^{\alpha} = du^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} u^{\beta} dx^{\gamma} = 0$. Из теоремы существования решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений следует, что, какой бы мы ни взяли вектор в некоторой точке кривой, его однозначно можно перенести в другие точки этой кривой.

Убедимся, что при параллельном переносе по кривой сохраняются длины векторов и углы между векторами. Допустим, что векторные поля u^{α} и v^{α} переносятся параллельно, т. е. в точках кривой $\delta u^{\alpha} = 0$, $\delta v^{\alpha} = 0$; нетрудно проверить также, что величины $\vec{u}^2 = g_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta}$, $\vec{u}\vec{v} = g_{\alpha\beta} u^{\alpha} v^{\beta}$ постоянны. В самом деле, утверждения эти следуют из того, что

$$\delta(\vec{u}^2) = \delta(g_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta}) = 0, \quad \delta(\vec{u}\vec{v}) = \delta(g_{\alpha\beta} u^{\alpha} v^{\beta}) = 0.$$

Параллельный перенос векторов по бесконечно малым замкнутым контурам приводит к понятию группы голономии риманового пространства. Очевидно, свойства обычного дифференцирования суммы и произведения распространяются и на ковариантное дифференцирование, но следует помнить, что вторая ковариантная производная $u^{\alpha}_{,\lambda\mu}$ зависит от порядка дифференцирования, т. е. $u^{\alpha}_{,\lambda\mu} \neq u^{\alpha}_{,\mu\lambda}$. Нетрудно проверить, что

$$u^{\alpha}_{,\lambda\mu} - u^{\alpha}_{,\mu\lambda} = -R^{\alpha}_{\varepsilon\lambda\mu} U^{\varepsilon}, \tag{3.10}$$

$$v_{\alpha,\lambda\mu} - v_{\alpha,\mu\lambda} = R^{\varepsilon}_{\alpha\lambda\mu} v_{\varepsilon}, \tag{3.11}$$

где

$$R^{\varepsilon}_{\alpha\lambda\mu} = \frac{\partial \Gamma^{\varepsilon}_{\alpha\mu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial \Gamma^{\varepsilon}_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\varepsilon}_{\sigma\lambda} \Gamma^{\sigma}_{\alpha\mu} - \Gamma^{\varepsilon}_{\sigma\mu} \Gamma^{\sigma}_{\alpha\lambda} \tag{3.12}$$

является тензором один раз контравариантным и три раза ковариантным; $R^{\varepsilon}_{\alpha\lambda\mu}$ называется *тензором кривизны риманова пространства*. Координаты тензора кривизны $R^{\varepsilon}_{\alpha\lambda\mu}$ и их ковариантные производные удовлетворяют следующим *тождествам Риччи и Бианки* соответственно:

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} + R^{\alpha}_{\gamma\delta\beta} + R^{\alpha}_{\delta\beta\gamma} = 0, \tag{3.13}$$

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta,\,\varepsilon} + R^{\alpha}_{\beta\delta\varepsilon,\,\gamma} + R^{\alpha}_{\beta\varepsilon\gamma,\,\delta} = 0. \tag{3.14}$$

Обратим внимание на римановы пространства любой размерности, для которых тензор кривизны $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ множителем K отличается от тензора $\delta^{\alpha}_{\gamma}g_{\beta\delta} - \delta^{\alpha}_{\delta}g_{\beta\gamma}$, т. е.

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = K\,(\delta^{\alpha}_{\gamma}g_{\beta\delta} - \delta^{\alpha}_{\delta}g_{\beta\gamma}). \tag{3.15}$$

Можно убедиться, что коэффициент пропорциональности K в предыдущей формуле необходимо является постоянным. В самом деле, дифференцируя эти равенства ковариантным образом по x^{ε}, получим: $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta,\,\varepsilon} = \frac{\partial K}{\partial x^{\varepsilon}}(\delta^{\alpha}_{\gamma}g_{\beta\delta} - \delta^{\alpha}_{\delta}g_{\beta\gamma})$. Применяя затем тождество Бианки, будем иметь:

$$\frac{\partial K}{\partial x^{\varepsilon}}(\delta^{\alpha}_{\gamma}g_{\beta\delta} - \delta^{\alpha}_{\delta}g_{\beta\gamma}) + \frac{\partial K}{\partial x^{\gamma}}(\delta^{\alpha}_{\delta}g_{\beta\varepsilon} - \delta^{\alpha}_{\varepsilon}g_{\beta\delta}) + \\ + \frac{\partial K}{\partial x^{\delta}}(\delta^{\alpha}_{\varepsilon}g_{\beta\gamma} - \delta^{\alpha}_{\gamma}g_{\beta\delta}) = 0.$$

Складывая почленно равенства, в которых $\alpha = \gamma$, и умножая затем полученные связи на $g^{\beta\delta}$ и суммируя их по индексам β, δ, получим: $(n-1)\frac{\partial K}{\partial x^{\varepsilon}} = 0$, т. е. множитель K является постоянным.

Римановы пространства, в которых тензор кривизны выражается через метрический тензор согласно (3.15), называются *пространствами постоянной кривизны K*.

Вопросы и упражнения

1. Проверьте, что на сфере $x^{1^2} + \ldots + x^{(n+1)^2} = R^2$ евклидова пространства ($ds^2 = dx^{1^2} + \ldots + dx^{n+1^2}$) порождается риманово пространство V_n постоянной положительной кривизны $K = \frac{1}{R^2}$ (см. гл. VI).

2. Докажите, что геометрия Лобачевского является римановой геометрией пространства V_n постоянной отрицательной кривизны. (Указание: найти линейный элемент сферы чисто мнимого радиуса $x^{1^2} + \ldots + x^{n^2} - x^{n+1^2} = -k^2$ в псевдоевклидовом пространстве $ds^2 = dx^{1^2} + dx^{2^2} + \ldots + dx^{n^2} - dx^{n+1^2}$.)

3. Пространства Эйнштейна

Римановы пространства имеют важные применения в общей теории относительности. Физические свойства пространства (так называемого пространства-времени) существенным образом определяют его метрику, которая в каждой точке пространства-времени порождает псевдоевклидово пространство сигнатуры $(---+)$.

Пространства общей теории относительности являются четырехмерными римановыми пространствами указанной сигнатуры; координаты линейного элемента

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x)\,dx^\alpha dx^\beta \tag{3.16}$$

зависят от распределения и движения материи; поэтому часто $g_{\alpha\beta}(x)$ называют потенциалами гравитационного поля.

Задача определения поля в зависимости от распределения и движения материи является основной задачей общей теории относительности. После длительных поисков уравнения поля были получены Эйнштейном в 1915 г. в виде

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = -\lambda T_{\alpha\beta}, \tag{3.17}$$

где $T_{\alpha\beta}$ обозначает *тензор энергии-импульса*, λ — некоторая постоянная, $R_{\alpha\beta} = R^{\delta}_{\alpha\beta\delta}$ — тензор Риччи, $R = R_{\alpha\beta}\,g^{\alpha\beta}$— скалярная кривизна пространства. Замечательно, что левая часть этих уравнений определяется геометрией пространства-времени; правая часть содержит постоянную λ и тензор $T_{\alpha\beta}$, определяемые физическими соображениями.

При получении уравнения поля (3.17) Эйнштейн исходил из следующих основных предположений:

1. При наличии гравитации геометрия пространства-времени является римановой геометрией, причем в каждой точке x пространства матрица $(g_{\alpha\beta})$ невырожденна и ее элементы линейными преобразованиями можно привести к виду: $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -g_{44} = -1$, остальные $g_{\alpha\beta} = 0$.

2. Распределение энергии и импульса описывается симметрическим тензором $T_{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3, x^4)$, удовлетворяющим так называемому закону сохранения:

$$T^{\alpha\beta}_{.\alpha} = 0. \tag{3.18}$$

3. Уравнения поля должны иметь тензорный характер.

4. Уравнения должны быть линейными относительно вторых частных производных от координат $g_{\alpha\beta}(x)$.

5. Тензор энергии-импульса должен определяться геометрией четырехмерного пространства-времени.

Из перечисленных предложений 1—5 и некоторых граничных условий можно вывести уравнения поля (3.17) и, обратно, из предположения, что уравнения поля тяготения имеют указанный вид, можно получить как следствие все эти предпосылки 1—5.

Если тензор энергии-импульса обращается в нуль, то уравнения поля вне точечных масс будут иметь вид:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = 0; \tag{3.18'}$$

скалярная кривизна R в этом случае равна нулю. В самом деле, умножая обе части равенства (3.18') на $g^{\alpha\beta}$ и суммируя по индексам α, β, получим: $R - 2R = 0$, $R = 0$.
Таким образом, уравнения поля в рассматриваемом случае приводятся к виду:

$$R_{\alpha\beta} = 0. \tag{3.19}$$

Эти уравнения определяют геометрию пространства-времени в так называемых областях, свободных от масс ($T_{\alpha\beta} = 0$). Непосредственным обобщением этих уравнений являются уравнения поля вида:

$$R_{\alpha\beta} = \varkappa\, g_{\alpha\beta}, \tag{3.20}$$

где $\varkappa$ необходимо будет постоянной величиной. Очевидно, последние уравнения можно рассматривать как уравнения поля для того случая, когда тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$ лишь постоянным множителем отличается от метрического тензора $g_{\alpha\beta}$. Такой моделью поля может служить пространство, однородное на всем протяжении с постоянной плотностью материи во всем пространстве.

Пространства (3.19) и (3.20) встречаются во многих вопросах геометрии и играют важную роль в теории римановых пространств независимо от теории тяготения.

Римановы пространства V_n, в которых тензор Риччи пропорционален метрическому тензору $g_{\alpha\beta}(x)$, называются *пространствами Эйнштейна*. Отметим, что эйнштейновы пространства могут быть любого числа измерений и иметь любую сигнатуру метрики.

Если $n = 4$ и сигнатура имеет вид $(- - - +)$, то пространства Эйнштейна (3.19) и (3.20) связаны соответственно с уравнениями поля в свободном пространстве (т. е. в таком пространстве, в котором тензор энергии-импульса обращается в нуль) и уравнениями так называемого *однородного поля*.

4. Движения в римановых пространствах

Рассмотрим сначала пространство двух измерений и допустим, что оно реализовано в виде двумерного слоя жидкости. Под действием преобразований, составляющих однопараметрическую группу Ли преобразований, точки перемещаются по определенным кривым, называемым траекториями данной группы преобразований. Точки при этом передвигаются в новые положения с предписанными им скоростями. Предположим, что координаты вектора скорости $v^1 = v^1(x^1, x^2)$, $v^2 = v^2(x^1, x^2)$ вычислены в момент нулевого значения параметра, отвечающего тождественному преобразованию. Текущая точка (x^1, x^2) за бесконечно малое приращение времени переходит с точностью до величин второго порядка малости в точку, приращения координат которой определяются равенствами: $\bar{x}^1 - x^1 = v^1(x^1, x^2)\, dt$, $\bar{x}^2 - x^2 = v^2(x^1, x^2)\, dt$; точки произвольной кривой за время dt перейдут в этом потоке жидкости в точки преобразований кривой. Инфинитезимальное преобразование риманова V на себя, сохраняющее метрику пространства с точностью до второго порядка малости относительно dt, называется инфинитезимальным движением. Координаты вектора $v^\alpha(x)$ инфинитезимального движения удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$v^\sigma \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial v^\sigma}{\partial x^\alpha} g_{\sigma\beta} + \frac{\partial v^\sigma}{\partial x^\beta} g_{\alpha\sigma} = 0. \qquad (3.21)$$

Система уравнений (3.21) выражает, что производная Ли вдоль $v^\alpha(x)$ от тензора $g_{\alpha\beta}(x)$ равна нулю (с. 208). Совокупность движений составляет группу, так как произведение двух движений и преобразования, обратные движениям, снова являются движениями.

Предположим теперь, что риманово пространство допускает транзитивную группу движений, т. е. группу, которая общую точку пространства переводит также в общую точку пространства. (Нетранзитивная группа называется также интранзитивной.) Так как по предположению группа движений транзитивна, то кривизна пространства постоянна и группа необходимо содержит три параметра. В этом случае риманово пространство в малом наложимо на одну из плоскостей — евклидову, плоскость Лобачевского и Римана (см. гл. VI).

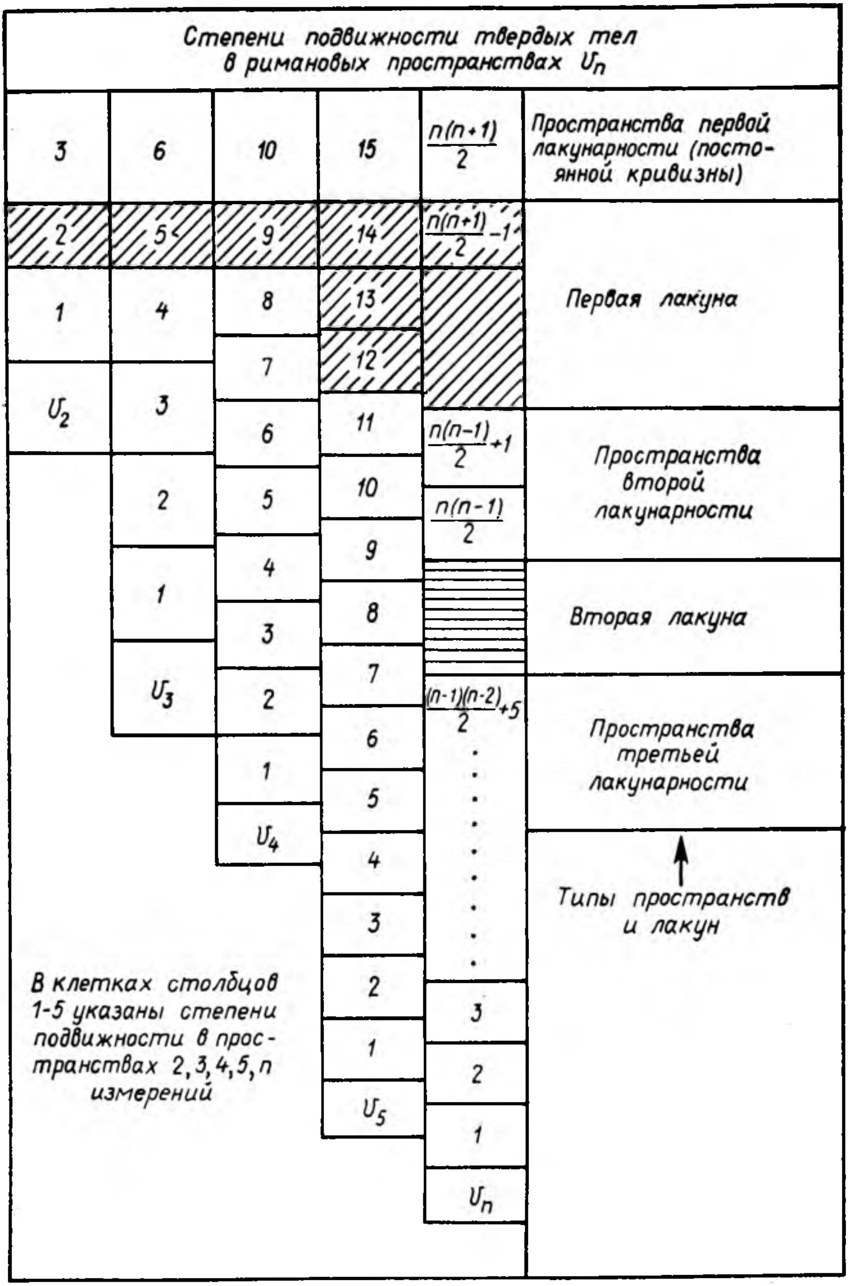
Если группа интранзитивна, то метрическая форма пространства может быть приведена к виду: $ds^2 = g_{11}(x^2)\, dx^{1^2} \pm dx^{2^2}$. Пространство в этом случае наложимо на поверхность вращения, и группа содержит лишь один параметр. Итак, мы приходим к следующему выводу.

Фигуры в двумерных римановых пространствах допускают или три степени подвижности, или одну. (Здесь и в дальнейшем речь пойдет о порядках полных групп движения — синонимах степени подвижности, степени свободы твердых тел.) Пространства, допускающие три степени подвижности, имеют постоянную кривизну. Если же пространства допускают одну степень подвижности, то они наложимы в малом на поверхность вращения. Таким образом, случай пространств с двумя степенями подвижности твердых тел не имеет места. Этот вывод наглядно изображен в первом столбце таблицы I. В его клетках отмечены возможные степени подвижности. Штриховка означает отсутствие римановых пространств с указанной в клетке степенью подвижности.

Аналогичная картина наблюдается в римановых пространствах трех и четырех измерений. Эти пространства имеют лишь одну лакуну длиной 1, что наглядно изображено штриховкой одной клетки во втором и третьем столбцах указанной таблицы. В случае римановых пространств пяти измерений лакуна имеет длину, равную 3.

С ростом числа измерений длина интервала запрещенных степеней свободы также растет. Длина первого интервала (лакуны) равняется $n - 2$. Любопытно также отметить, что при достаточно боль-

Таблица I



Степени подвижности твердых тел в римановых пространствах V_n
3
6
10
15
$\frac{n(n+1)}{2}$
Пространства первой лакунарности (постоянной кривизны)
2
5
9
14
$\frac{n(n+1)}{2}-1$
1
4
8
13
7
12
V_2
3
6
11
Первая лакуна
$\frac{n(n-1)}{2}+1$
2
5
10
$\frac{n(n-1)}{2}$
Пространства второй лакунарности
1
4
9
8
3
Вторая лакуна
V_3
2
7
$\frac{(n-1)(n-2)}{2}+5$
1
6
Пространства третьей лакунарности
V_4
5
4
Типы пространств и лакун
3
2
1
V_5
3
2
1
V_n
В клетках столбцов 1-5 указаны степени подвижности в пространствах 2, 3, 4, 5, n измерений

шом n появляются другие запрещенные интервалы (другие лакуны). В предпоследнем столбце таблицы I второй интервал запрещенных степеней (вторая лакуна) изображен штриховкой горизонтальными отрезками. Этот интервал имеет длину $n - 7$. В последнем столбце таблицы указаны типы пространств, реализующих указанные в предыдущем столбце подвижности.

В первой строке таблицы отвечают n-мерные римановы пространства, в которых твердые тела допускают максимальное число степеней свободы, равное $n(n+1)/2$. Это пространства постоянной кривизны — евклидово пространство, пространства Лобачевского и эллиптические пространства.

Далее следуют пространства с непосредственно предшествующими степенями подвижности: $n(n-1)/2$, $n(n-1)/2+1$. В таблице они именуются пространствами второй лакунарности.

Несколько слов о римановых пространствах, допускающих преобразования подобия, т. е. преобразования, при которых фигуры переходят в подобные. При преобразованиях подобия сохраняются углы, а длины соответствующих линий пропорциональны, причем коэффициент растяжения не зависит от точки пространства. Совокупность всех преобразований подобия составляет группу. Движения образуют инвариантную подгруппу этой группы подобий, причем число параметров подгруппы на единицу меньше числа параметров всей группы.

Вопрос об определении возможных степеней подвижности твердых и подобно изменяемых тел частично решен для пространств знакоположительной метрики. В общем случае известны лишь степени подвижности и реализующие их пространства, отмеченные в таблице I.

§ 4. ПРОСТРАНСТВА АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Прежде чем дать общее определение пространства аффинной связности, рассмотрим два примера.

1. Предположим, что E_2 обозначает евклидову плоскость. Совокупность прямых линий этой плоскости в декартовой системе координат записывается уравнениями, линейными относительно параметра t: $x = at + c$, $y = bt + d$, где t — аффинный параметр, a, b, c, d — произвольные постоянные, причем первые две постоянные одновременно не равны нулю. Отсюда следует, что правые части этих уравнений являются решениями следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

Эта система уравнений сохраняет свой вид при линейных невырожденных преобразованиях переменных x, y. При более же общих преобразованиях координат вид указанной системы уравнений меняется. Например, совокупность прямых линий евклидовой плоскости в полярной системе координат характеризуется системой уравнений:

$$\frac{d^2x^1}{dt^2}=x^1\left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2,\ \frac{d^2x^2}{dt^2}=-\frac{2}{x^1};\ \frac{dx^1}{dt}\ \frac{dx^2}{dt},$$

где через x^1, x^2 обозначены соответственно ρ и φ.

Аналогичную систему дифференциальных уравнений получим в другой криволинейной системе координат:

$$\frac{d^2x^1}{dt^2}=-\Gamma^1_{11}(x^1,\ x^2)\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2-2\Gamma^1_{12}(x^1,\ x^2)\ \frac{dx^1}{dt}\cdot\frac{dx^2}{dt}-\Gamma^1_{22}(x^1,\ x^2)\left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2,$$

$$\frac{d^2x^2}{dt^2}=-\Gamma^2_{11}(x^1,\ x^2)\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2-2\Gamma^2_{12}(x^1,\ x^2)\frac{dx^1}{dt}\cdot\frac{dx^2}{dt}-\Gamma^2_{22}(x^1,\ x^2)\left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2.$$

Обратим внимание на то, что правые части этой системы уравнений представляют собой однородные многочлены второй степени относительно производных первого порядка. Эта система уравнений задается шестью функциями $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}=\Gamma^\alpha_{\gamma\beta}$ $(\alpha,\ \beta,\ \gamma=1,\ 2)$ — каждая от двух переменных. Совокупность указанных функций составляет объект, называемый объектом аффинной связности.

Легко убедиться, что при преобразовании локальных координат $x^{\alpha'}=x^{\alpha'}(x^1,\ x^2)$ функции $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$, определяющие систему дифференциальных уравнений прямых линий, преобразуются по закону:

$$\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}(x')=\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}\ \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}}\ \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x)+\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}\ \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}}. \tag{4.1}$$

Следует отметить, что два объекта аффинной связности могут порождать изоморфные геометрии. В этом случае один объект переходит в другой при помощи некоторого обратимого преобразования координат. Обратное предложение также очевидно.Объект аффинной связности обычной плоскости обладает тем свойством, что в некоторых системах координат все его координаты обращаются в нуль. Такие системы координат называются *аффинными*.

2. В качестве другого примера двумерного пространства аффинной связности можно привести поверхность трехмерного евклидова пространства.

Все геометрические свойства и величины, выражаемые в терминах геодезических линий и аффинного параметра t на них, принадлежат геометрии аффинной связности.

Закон преобразования коэффициентов $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ в уравнениях геодезических линий поверхности совпадает с законом (4.1).

Рассмотренные примеры позволяют определить двумерное пространство аффинной связности следующим образом. Это дифференцируемое многообразие, в котором задан объект аффинной связности $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x)$ с законом преобразования (4.1). Таким образом, в достаточно малой окрестности любой точки пространства аффинной связности задается система дифференциальных уравнений линий (геодезических), обобщающих прямые евклидова пространства, причем на этих линиях определен аффинный параметр t.

Пространства аффинной связности n-измерений определяются заданием в n-мерном дифференцируемом пространстве X_n объекта $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ с законом преобразования (4.1), характеризующего семейства линий и аффинного параметра на них, обобщающих геодезические двумерных пространств. Фактически в простых кусках многообразия задается совокупность $n^2(n+1)/2$ функций $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}=\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}$ от $x^1, x^2, \ldots, x^n$, определяющих правые части системы обыкновенных дифференциальных уравнений (геодезических) указанного выше вида. Из этой системы уравнений следует, что через каждую точку пространства в заданном направлении проходит лишь одна геодезическая. Другие определения пространства аффинной связности приводятся ниже.

1. Второе определение пространства аффинной связности

Аффинную связность можно определить глобально, сразу на всем дифференцируемом многообразии X_n.

Обозначим, как и раньше, через $F(X_n)$ кольцо дифференцируемых функций на X_n, а через $B(X_n)$ — совокупность всех дифференцируемых векторных полей, представляющую собой F-модуль.

Аффинной связностью на дифференцируемом многообразии X_n называется отображение

$$\nabla:\ B(X_n)\times B(X_n)\to B(X_n), \tag{4.2}$$

которое обозначается в виде $\nabla(\vec{u},\vec{v})=\nabla_{\vec{u}}\vec{v}$ и обладает следующими четырьмя свойствами:

$$\begin{aligned}
&1)\ \nabla_{\vec{u}}(\vec{v}+\vec{w})=\nabla_{\vec{u}}\vec{v}+\nabla_{\vec{u}}\vec{w},\\
&2)\ \nabla_{\vec{u}}(f\vec{v})=(\vec{u}f)\vec{v}+f\nabla_{\vec{u}}\vec{v},\\
&3)\ \nabla_{\vec{u}+\vec{v}}\vec{w}=\nabla_{\vec{u}}\vec{w}+\nabla_{\vec{v}}\vec{w},\\
&4)\ \nabla_{f\vec{u}}\vec{v}=f\nabla_{\vec{u}}\vec{v},
\end{aligned} \tag{4.3}$$

где $f\in F(X_n)$, $\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}\in B(X_n)$.

Аффинная связность $\nabla_{\vec{u}}\vec{v}$, так определенная, часто называется ковариантной производной векторного поля $\vec{v}$ вдоль поля $\vec{u}$.

Последние два свойства показывают, что отображение ∇ по первому аргументу линейно и осуществляет F-эндоморфизм модуля $B(X_n)$ всех векторных полей многообразия X_n. Из свойств 1)—2) следует, что по второму аргументу ∇ действует как производная.

Предположим теперь, что точки некоторой координатной окрестности U многообразия X_n снабжены полем реперов $\{\vec{e}_i\}$. Разлагая $\nabla_{\vec{e}_i}\vec{e}_j$ по векторам $\vec{e}_k$, получим:

$$\nabla_{\vec{e}_i}\vec{e}_j = \gamma_{ij}^k \vec{e}_k. \tag{4.4}$$

Если в области U задано другое поле реперов $\{\vec{e}_{i'}\}$, то $\vec{e}_{i'} = A_{i'}^{\alpha}\vec{e}_\alpha$; кроме того,

$$\nabla_{\vec{e}_{i'}}\vec{e}_{j'} = \gamma_{i'j'}^{k'}\vec{e}_{k'}. \tag{4.5}$$

Найдем зависимость величин γ_{ij}^k и $\gamma_{i'j'}^{k'}$. По определению аффинной связи

$$\nabla_{A_{i'}^{\alpha}e_\alpha}(A_{j'}^{\beta}\vec{e}_\beta) = A_{i'}^{\alpha}\nabla_{\vec{e}_\alpha}(A_{j'}^{\beta}\vec{e}_\beta) = A_{i'}^{\alpha}[A_{j'}^{\beta}\nabla_{\vec{e}_\alpha}\vec{e}_\beta +$$
$$+ (\nabla_{\vec{e}_\alpha}A_{j'}^{\beta})\vec{e}_\beta] = (A_{i'}^{\alpha}A_{j'}^{\beta}\gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} + A_{i'}^{\alpha}\partial_\alpha A_{j'}^{\sigma})\vec{e}_\sigma =$$
$$= (A_{i'}^{\alpha}A_{j'}^{\beta}\gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} + A_{i'}^{\alpha}\partial_\alpha A_{j'}^{\sigma})A_\sigma^{k'}\vec{e}_{k'},$$

откуда заключаем, что

$$\gamma_{i'j'}^{k'} = A_\sigma^{k'}A_{i'}^{\alpha}A_{j'}^{\beta}\gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} + A_\sigma^{k'}A_{i'}^{\alpha}\partial_\alpha A_{j'}^{\sigma}. \tag{4.6'}$$

Очевидно, эти формулы можно переписать в виде

$$\gamma_{i'j'}^{k'} = A_\sigma^{k'}A_{i'}^{\alpha}A_{j'}^{\beta}\gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} + A_\sigma^{k'}\partial_{i'}A_{j'}^{\sigma}. \tag{4.6}$$

Обратно, если в координатных окрестностях U, снабженных полями реперов и покрывающих многообразие X_n, заданы функции γ_{ij}^k так, что при переходе к другим полям реперов эти функции преобразуются по закону (4.6), то они определяют на многообразии некоторую аффинную связность $\nabla_{\vec{u}}\vec{v}$.

2. Третье определение пространства аффинной связности

Предположим, что каждой точке x некоторого n-мерного дифференцируемого многообразия X_n сопоставлено n-мерное аффинное пространство, дифференцируемо зависящее от точки $x \in X_n$.

Предположим также, что $\{\vec{e}_i\}$, $\{\Theta^i\}$ являются соответственно полями репера и корепера в открытых множествах некоторого покрытия данного дифференцируемого многообразия X_n.

Аффинное отображение касательных пространств в бесконечно близких точках x и x' многообразия определяется заданием в $(X_n)_x$ образов точки x' и векторов репера в ней. Разлагая эти образы по векторам репера в касательном пространстве $(X_n)_x$, мы получим:

$$\vec{dx} = \Theta^i\vec{e}_i, \tag{4.7}$$
$$\vec{de}_j = \omega_j^i\vec{e}_i,$$

где Θ^i и ω_j^i — линейные дифференциальные формы относительно координат перемещения точки x в образ точки x'. Эта связность должна быть инвариантной при переходе к другим реперам; формы Θ^i и ω_j^i должны преобразовываться по вполне определенным законам.

Чтобы выяснить закон преобразования Θ^i и ω_j^i, возьмем произвольное дифференцируемое преобразование реперов:

$$\vec{e}\,'_\alpha = A^\alpha_{\alpha'} \vec{e}_\alpha, \quad |A^\alpha_{\alpha'}| \neq 0, \tag{4.8}$$

где $A^\alpha_{\alpha'}$ обозначают n^2 функций от $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Нетрудно убедиться, что главные формы Θ^i при этом преобразуются по формулам:

$$\Theta^{\alpha'} = A^{\alpha'}_\alpha \Theta^\alpha \quad (A^\alpha_{\sigma'} A^{\sigma'}_\beta = \delta^\alpha_\beta). \tag{4.9}$$

Получим теперь закон преобразования форм ω^α_β. Так как реперы $\{\vec{e}_\alpha\}$ подвергаются преобразованию (4.8), то имеем:

$$d\vec{e}_{\alpha'} = dA^\alpha_{\alpha'} \vec{e}_\alpha + A^\alpha_{\alpha'} d\vec{e}_\alpha.$$

Исключая из этого равенства дифференциалы векторов репера $\{\vec{e}_\alpha\}$ и учитывая, что $d\vec{e}_{\alpha'} = \omega^{\beta'}_{\alpha'} \vec{e}_{\beta'} = \omega^{\beta'}_{\alpha'} A^\alpha_{\beta'} \vec{e}_\alpha$, мы получим:

$$\omega^{\beta'}_{\alpha'} A^\alpha_{\beta'} = dA^\alpha_{\alpha'} + A^\beta_{\alpha'} \omega^\alpha_\beta. \tag{4.10$'$}$$

Умножая (4.10′) почленно на $A^{\varepsilon'}_\alpha$ и суммируя по α, получим окончательно:

$$\omega^{\beta'}_{\alpha'} = A^{\beta'}_\beta dA^\beta_{\alpha'} + A^\alpha_{\alpha'} A^{\beta'}_\beta \omega^\beta_\alpha. \tag{4.10}$$

Обратно, если при преобразовании реперов (4.8) формы Θ^α и ω^β_α преобразуются по закону (4.9) и (4.10), то эти формы определяют инвариантным образом отображения касательных пространств в бесконечно близких точках (x^α) и $(x^\alpha + dx^\alpha)$ данного многообразия. Переходим к третьему определению пространства аффинной связности.

Пространством аффинной связности называется такое дифференцируемое многообразие X_n, в котором заданы дифференциальные формы Θ^α, ω^α_β, где формы Θ^α линейно несвязные и преобразующиеся при замене реперов $\vec{e}_{\alpha'} = A^\alpha_{\alpha'} \vec{e}_\alpha$, $|A^\alpha_{\alpha'}| \neq 0$ по законам:

$$\Theta^{\alpha'} = A^{\alpha'}_\alpha \Theta^\alpha, \tag{4.11}$$

$$\omega^{\alpha'}_{\beta'} = A^{\alpha'}_\alpha A^\beta_{\beta'} \omega^\alpha_\beta + A^{\alpha'}_\alpha dA^\alpha_{\beta'}. \tag{4.12}$$

Докажем, что построенная связность является аффинной. Для этого разложим формы связности ω^α_β по формам корепера Θ^α:

$$\omega^\alpha_\beta = \gamma^\alpha_{\beta\gamma} \Theta^\gamma. \tag{4.13$'$}$$

В другом поле реперов $\{\vec{e}_{\alpha'}\}$ получим формулы того же вида:

$$\omega^{\alpha'}_{\beta'} = \gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} \Theta^{\gamma'}. \tag{4.13}$$

На основании (4.9) убеждаемся, что $\Theta^{\alpha'} = A^{\alpha'}_{\alpha}\omega^{\alpha}$. С другой стороны, из (4.12) выводим:

$$\gamma^{\alpha'}_{\beta'\sigma'}\Theta^{\sigma'} = A^{\alpha'}_{\alpha}\,\partial_{\alpha'}A^{\alpha}_{\beta'}\Theta^{\sigma'} + A^{\alpha'}_{\alpha}A^{\beta}_{\beta'}\,\gamma^{\alpha}_{\beta\sigma}\Theta^{\sigma}.$$

Следовательно,

$$\gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} = A^{\alpha'}_{\alpha}A^{\beta}_{\beta'}A^{\sigma}_{\sigma'}\,\gamma^{\alpha}_{\beta\sigma} + A^{\alpha'}_{\alpha}\partial_{\alpha'}A^{\alpha}_{\beta'}, \tag{4.14}$$

т. е. построенная связность с помощью форм Θ^{α}, $\omega^{\alpha}_{\beta} = \gamma^{\alpha}_{\beta\sigma}\,\Theta^{\sigma}$ совпадает с линейной связностью (4.6).

3. Абсолютный дифференциал в аффинной связности

Предположим, что нам даны покрытие X_n, снабженное локальными полями реперов, и векторное поле $\vec{w}$; пусть координаты $\vec{w}$ в окрестности U определяются функциями w^{α}, причем для точек $x \in$ $\in U \cap V$ справедливы формулы $w^{\alpha'} = A^{\alpha'}_{\alpha}w^{\alpha}$. Дифференцируя эти формулы почленно, получим: $dw^{\alpha'} = dA^{\alpha'}_{\alpha}w^{\alpha} + A^{\alpha'}_{\alpha}dw^{\alpha}$. Отсюда и из формулы (4.12) преобразования форм связности следует, что

$$dw^{\alpha'} + \omega^{\alpha'}_{\sigma'}w^{\sigma'} = A^{\alpha'}_{\alpha}\,(d\,w^{\alpha} + \omega^{\alpha}_{\sigma}w^{\sigma}). \tag{4.15}$$

Величины $\delta w^{\alpha} = dw^{\alpha} + \omega^{\alpha}_{\beta}w^{\delta}$ называются *координатами абсолютного дифференциала векторного поля* w^{α}. Полагая в формулах (4.10)

$$\Theta^{\alpha} = dx^{\alpha},\ \ \Theta^{\alpha'} = dx^{\alpha'},\ \ \omega^{\alpha}_{\beta} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}dx^{\gamma},\ \ \omega^{\alpha'}_{\beta'} = \nu^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}dx^{\gamma'}$$

и учитывая, что $A^{\alpha}_{\alpha'} = \dfrac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} = x^{\alpha}_{\alpha'}$, получим закон преобразования координат $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(x)$ объекта аффинной связности при преобразовании координат:

$$\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} = x^{\alpha'}_{\alpha}\,x^{\beta}_{\beta'}\,x^{\gamma}_{\gamma'}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + x^{\alpha'}_{\alpha}\,x^{\alpha}_{\beta'\gamma'}. \tag{4.16}$$

Формулы (4.16) совпадают с (3.5) предыдущего параграфа, из них следует, что

$$R^{\alpha'}_{\beta'\gamma'\varepsilon'} = A^{\alpha'}_{\alpha}A^{\beta}_{\beta'}A^{\gamma}_{\gamma'}A^{\varepsilon}_{\varepsilon'}R^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon},$$

где

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon} = \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\beta\varepsilon}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}}{\partial x^{\varepsilon}} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\gamma}\Gamma^{\sigma}_{\beta\varepsilon} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\varepsilon}\Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma}.$$

Тензор $R^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon}$ называется *тензором кривизны пространства аффинной связности*; его координаты удовлетворяют тождествам (3.13) и (3.14).

4. Развертка на аффинное пространство. Геодезические линии

Возьмем в пространстве аффинной связности кривую $x\ (t)$, проходящую через точку x_0, причем значение параметра t для x_0 будем считать равным 0. Вдоль этой линии рассмотрим уравнения

$$d\vec{x} = \Theta^\alpha\ (t,\ dt)\ \vec{e}_\alpha\,, \tag{4.17}$$

$$de_\beta = \omega^\alpha_\beta(t,\ dt)\ \vec{e}_\alpha\ . \tag{4.18}$$

Это система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций. Она определяет единственное решение, которое удовлетворяет начальным условиям при $t = 0$: $x = x_0$, $\vec{e}_\alpha = (\vec{e}_\alpha)_0$. В результате в аффинном пространстве X_{x_0} мы получим так называемую *развертку*-кривую:

$$\vec{x} = x^\alpha\ (t)\ \vec{e}_\alpha\,, \tag{4.19}$$

в каждой точке которой фиксирован вполне определенный репер $\vec{e}_\alpha = \vec{e}_\alpha\ (t)$. Перейдем к определению геодезической линии.

Геодезической линией пространства аффинной связности называется кривая дифференцируемого многообразия, которая развертывается на аффинное пространство, касательное в точке x_0 в виде прямой или отрезка прямой.

Очевидно, развертка является прямой тогда и только тогда, когда вектор ускорения пропорционален вектору скорости. Следовательно, в локальных координатах геодезические линии пространства аффинной связности являются интегральными кривыми следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{dt}\ \frac{dx^\gamma}{dt} = \varphi\ (t)\ \frac{dx^\alpha}{dt}\,, \tag{4.20}$$

где $\varphi\ (t)$ — некоторая функция параметра t. Выбирая новый параметр

$$s = \int \frac{dt}{\varphi\ (t)} + c, \tag{4.21}$$

мы добьемся того, что функция $\varphi\ (t)$ в предыдущей системе дифференциальных уравнений обратится в нуль:

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{ds}\ \frac{dx^\gamma}{ds} = 0. \tag{4.22}$$

Полученный параметр s определяется с точностью до линейного преобразования и называется каноническим или аффинным параметром на геодезической линии. Множество геодезических линий пространства описывается системой (4.22). По теореме о существовании и единственности решений этой системы можно утверждать при наших предположениях непрерывной дифференцируемости

$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(x)$ существование и единственность геодезической, удовлетворяющей при $s = s_0$ следующим начальным условиям:

$$x^i = x^i_0, \quad \frac{dx^i}{ds} = \xi^i_0.$$

Геометрически эти условия выражают существование и единственность геодезической линии, проходящей через заданную точку (x^i_0) и имеющую с ней заданный касательный вектор $\vec{\xi}^i_0$. Нетрудно доказать также, что в действительности можно ограничиться заданием вектора $\vec{\xi}^i_0$ с точностью до множителя. Интегральная линия однозначно определяется лишь по заданной точке x^i_0 и заданному в ней направлению.

Для аффинного пространства уравнения геодезических в аффинных координатах приводятся к виду: $\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} = 0$ $(x^\alpha = x^\alpha_0 + \xi^\alpha_0 s)$, и геодезическими являются прямые линии.

Мы уже видели, что определенные аффинной связностью отображения касательных пространств, ассоциированных с точками произвольной дифференцируемой кривой, описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Представляет интерес рассмотреть случай замкнутых кривых.

В самом деле, предположим, что в пространстве аффинной связности нам дана произвольная замкнутая кривая и точка (x) — одна из точек нашей кривой. Отображая касательные пространства в точках рассматриваемой кривой на аффинное пространство E точки x, мы получим в последнем, вообще говоря, незамкнутую кривую (развертку). Последний и первый реперы в концах этой полученной кривой соответствуют одному и тому же реперу точки x пространства аффинной связности. Иными словами, порождаются перемещения и повороты, возвращающие репер конечной точки развертки в репер начальной точки x. Совокупность всех аффинных преобразований касательного пространства точки x, порождаемых различными замкнутыми путями, проходящими через нее, составляет группу, называемую группой голономии точки x. Нетрудно проверить, что группы g, g' голономии, построенные для различных точек x, x' пространства, гомологичны относительно аффинной группы G, т. е. g, g' подгруппы G, и существует такое $t \in G$, что g' совпадает с подгруппой tgt^{-1}.

5. О движениях в пространствах аффинной связности

Предположим, что нам дано пространство аффинной связности A_n, определенное коэффициентами $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$, симметрическими по нижним индексам.

Отображение пространства A_n на себя, сохраняющее объект $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(x)$, называется движением данного пространства аффинной связности. Очевидно, совокупность движений составляет группу, так как произведение двух движений и преобразование, обратное для данного движения, являются движениями.

Инфинитезимальное преобразование $x'^i = x^i + v^i(x^1, \ldots, x^n)dt$ является движением тогда и только тогда, когда объект $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ переводится в себя, т. е. $D\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0$ (с. 208).

Таким образом, координаты вектора $v^\alpha(x^1, \ldots, x^n)$ движения удовлетворяют системе уравнений:

$$D\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{\partial^2 v^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} + v^\sigma \partial_\sigma \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \frac{\partial v^\sigma}{\partial x^\beta}\Gamma^\alpha_{\sigma\gamma} + \frac{\partial v^\sigma}{\partial x^\gamma}\Gamma^\alpha_{\beta\sigma} - \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\sigma}\Gamma^\sigma_{\beta\gamma} = 0.$$

Обычное аффинное пространство n-измерений допускает группу движений, содержащую $r = n^2 + n$ параметров. Изучая движения в пространствах с числом параметров, непосредственно предшествующих $r = n^2 + n$, автор пришел к следующему результату. Максимальное число параметров в группах движений пространств аффинной связности ненулевой кривизны равняется точно $r = n^2$. Другими словами, не существует кривых пространств аффинной связности, в которых бы твердые тела имели r степеней подвижности, где $n^2 < r < n^2 + n$ (табл. II).

В качестве иллюстрации сказанного рассмотрим пространства двух измерений. Фигуры в двумерных пространствах допускают не более шести степеней подвижности. Если степень подвижности равняется точно шести, то пространство является обычной аффинной плоскостью. Число степеней подвижности в кривых пространствах аффинной связности не более четырех. Таким образом, не существует пространств аффинной связности двух измерений, в которых бы фигуры имели пять степеней подвижности. Это следствие мы наглядно изобразили в первом столбце таблицы II. Штриховка клетки здесь означает отсутствие пространства с указанным в ней числом степеней подвижности. Аналогичное положение наблюдается в трехмерных пространствах аффинной связности. Здесь также имеется лишь одна лакуна, но длина ее равняется 2. Случаи пространств с числом степеней подвижности 11 или 10 отсутствуют. Этот факт наглядно изображен наклонной штриховкой соответствующих клеток во втором столбце таблицы II.

Любопытно отметить, что с ростом числа измерений пространства растет длина интервала запрещенных степеней. Длина первого запрещенного интервала (первой лакуны) равняется $n - 1$. С другой стороны, при больших значениях n наряду с этой первой лакуной появляются другие запрещенные интервалы. С ростом числа измерений пространства n растет также и число таких интервалов. Так, в предпоследнем столбце таблицы II вторая лакуна отмечена штриховкой клеток горизонтальными отрезками. Этот интервал имеет длину $n - 2$. Третья лакуна имеет длину $n - 7$. В таблице она изображена штриховкой вертикальными отрезками.

Степени подвижности твердых тел в пространствах аффинной связности

6	12	n^2+n	Пространства первой лакунарности (обычные аффинные пространства)
5	11	n^2+n-1	Первая лакуна
4	10		
	9		
3	8		
2	7		
1	6	n^2 n^2-1	Пространства второй лакунарности
	5		Вторая лакуна
A_2	4		
	3	n^2-n+1 n^2-n	Пространства третьей лакунарности
	2	n^2-n-1 n^2-n-2	
	1		Третья лакуна
	A_3	n^2-2n+5 ⋮ 3	Пространства четвертой лакунарности
		2	↑ Типы пространств и лакун
		1	
		A_n	

В клетках столбцов 1-3 указаны степени подвижности в пространствах 2, 3 измерений

В последнем столбце приведены типы пространств первой, второй и т. д. лакунарностей. Степени подвижности их указаны в предшествующем столбце.

Еще одно замечание по поводу таблицы второй. Первой строке таблицы соответствуют обычные аффинные пространства, степень подвижности которых равняется $n^2 + n$. Далее следуют пространства с непосредственно предшествующей подвижностью. В таблице II указаны интервалы возможных степеней подвижности, известные до настоящего времени. Необходимо отметить, что в целом проблема отыскания этих интервалов для пространств n-измерений остается еще открытой.

6. О глобальной структуре максимально подвижных пространств аффинной связности

Существуют три типа максимально подвижных пространств аффинной связности: эллиптический, гиперболический и параболический. Выяснена [17] локальная структура этих пространств и определены соответствующие им локальные группы Ли движений G_r $(r = n^2)$.

Пространства эти локально однородны. Глобальная топологическая и аналитическая структура согласована соответствующим образом с топологической и аналитической структурой группы.

Центры алгебр L_{n^2} групп G_{n^2} в каждом из типов сводятся к нулевому вектору и, таким образом, L_{n^2} допускают изоморфные присоединенные представления (каждому вектору $X = \lambda^\alpha X_\alpha$ соответствует $n^2 \times n^2$ матрица $(C^\sigma_\alpha) = (\lambda^\beta C^\sigma_{\beta\alpha})$, где $C^\sigma_{\beta\alpha}$ — структурные постоянные рассматриваемой алгебры Ли в выбранном базисе X_α). Далее можно построить инъективное экспотенциальное отображение в линейную группу невырожденных $n^2 \times n^2$ матриц и установить для каждого типа возможную топологическую структуру так называемой односвязной накрывающей группы. Другие возможные топологические и дифференцируемые структуры получаются из универсальной односвязной группы G стандартным путем — путем факторизации по ее дискретному центральному нормальному делителю.

Учитывая затем возможную стационарную подгруппу H_{r_0} $(r_0 = n^2 - n)$, мы приходим к искомым глобальным пространствам A_n аффинной связности как пространствам классов смежности разложения C_r по H_{r_0}. Таким образом, выясняется структура искомых пространств в целом. На определении условий, при которых факторизация возможных групповых структур, наделенных естественным образом аффинной связностью или метрикой риманова пространства, приводит снова к аффинной связности или римановой метрике, мы не будем останавливаться.

§ 5. ОБОБЩЕНИЯ. ПРОСТРАНСТВА ПУТЕЙ. ФИНСЛЕРОВЫ ПРОСТРАНСТВА

1. Обобщенные пространства путей

Обобщенное пространство путей является дифференцируемым многообразием, точками которого будут линейные элементы (*линейным элементом* называется совокупность точки x и выходящего из нее двустороннего направления p). Совокупность локальных координат точки x^i и направления p^i составляют локальные координаты линейного элемента.

Координаты p^i здесь определены с точностью до ненулевого множителя (пропорциональные величины p и σp определяют один и тот же объект).

Очевидно, координаты этого объекта при преобразовании координат будут преобразовываться по векторному закону. Свойства линейных элементов и других объектов, инвариантные относительно группы дифференцируемых преобразований продолженных на направления, составляют предмет исследования теории пространств линейных элементов. В этой теории вводится понятие тензора и других дифференциально-геометрических объектов. Координаты тензора $T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}$ преобразуются при преобразовании локальных координат по обычному закону, но они теперь могут быть функциями координат линейного элемента. Так как координаты тензора $T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}$ инвариантны при преобразовании координат направления, то они необходимо являются однородными функциями нулевого измерения относительно p. Если же при преобразовании переменных $x^{\alpha'} = f^{\alpha}(x^1, x^2, \dots, x^n)$, $p^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\sigma}} p^{\sigma}$ и преобразовании $\overline{p}^{\alpha} = \lambda p^{\alpha}$ координаты тензора $T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_{l_1}}$ приобретают множитель λ^k, то $T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_{l_1}}$ называется тензором класса k. Его координаты являются однородными функциями измерения k относительно координат направления. Необходимо отметить, что в пространствах линейных элементов частное дифференцирование по переменным $\dot{x}^{\alpha}$ координат тензора представляет инвариантную операцию и приводит к новым тензорам, причем порядок ковариантных индексов увеличивается на единицу, а класс тензора на единицу уменьшается.

Обобщенное пространство путей по определению является *пространством линейных элементов* (т. е. пар $(x, \dot{x})$, где $x\,(x^{\alpha})$ — точка X_n, а $\dot{x}(\dot{x}^{\alpha})$ — элемент касательного векторного пространства T_x), в котором инвариантным образом заданы интегральные кривые следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{ds^2} + H^{\alpha}\left(x, \frac{dx}{ds}\right) = 0, \tag{5.1}$$

где $H^\alpha(x, \dot{x})$ являются функциями от $2n$ независимых переменных, однородными второго измерения относительно переменных $\dot{x}$. Компоненты объекта $H^\alpha(x, \dot{x})$ преобразуются по закону (при переходе к координатам $\bar{x}^\alpha = f^\alpha(x)$):

$$\bar{H}^\alpha(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) = H^\rho(x, \dot{x}) \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\rho} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\rho \partial x^\tau} \dot{x}^\rho \dot{x}^\tau. \qquad (5.2)$$

Таким образом, обобщенное пространство путей характеризуется набором n функций $H^\alpha(x, \dot{x})$. Такие пространства рассматривали Дуглас, М. Кнебельман, Б. Л. Лаптев и др.

Координаты объекта аффинной связности $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x, \dot{x})$ пространства путей определяются формулами:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H^\alpha}{\partial \dot{x}^\beta \partial \dot{x}^\gamma}. \qquad (5.3)$$

Очевидно, $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ являются функциями нулевой степени однородности относительно $\dot{x}$. Они позволяют придать уравнениям путей другой вид: $\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{ds} \frac{\partial x^\gamma}{ds} = 0$. Если функции $H^\alpha(x, \dot{x})$ обобщенного пространства путей будут многочленами второй степени относительно дифференциалов, то пространство сводится к обычному пространству аффинной связности.

2. Пространства аффинной связности линейных и гиперплоскостных элементов

Изучение обобщенных пространств — пространств путей, а также пространств с объектами аффинной и проективной связностей, зависящими от точки и направления, позволило Б. Л. Лаптеву ввести понятие пространства $X_{n,\omega}$ опорных элементов (x^α, ω^k), где x^α является точкой в X_n, а ω^k — опорным дифференциально-геометрическим объектом класса $l \leqslant p$ и порядка N. Пространство опорных элементов — это локальный $(n + N)$-мерный объект — прямое произведение области $U \in X_n$ на пространство значений опорного объекта.

Если опорный объект является тензором, заданным с точностью до множителя, то получим пространство тензорных опорных элементов.

Аффинная связность в пространстве тензорных опорных элементов, т. е. отображение касательного пространства бесконечно близкого опорного элемента $(x + dx, y + dy)$ на касательное пространство элемента $(x, y\ (y = \omega))$, устанавливается с помощью операции ковариантного дифференцирования тензорных полей. Последняя же вполне определяется объектом аффинной связности $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x, y)$ и некоторым тензором минус первого класса.

Аффинная связность в пространстве линейных элементов задается в локальных координатах объектом

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(x, \dot{x}), \ C^{\alpha}_{\beta\gamma}(x, \dot{x}), \tag{5.4}$$

причем

$$C^{\alpha}_{\beta\gamma}\dot{x}^{\beta} = C^{\alpha}_{\beta\gamma}\dot{x}^{\gamma} = 0. \tag{5.5}$$

При переходе к другим локальным координатам x' имеем:

$$\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} = x^{\alpha'}_{\alpha}(x^{\alpha}_{\beta'\gamma'} + x^{\beta}_{\beta'}x^{\gamma}_{\gamma'}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}), \tag{5.6}$$

$$C^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} = x^{\alpha'}_{\alpha}x^{\beta}_{\beta'}x^{\gamma}_{\gamma'}C^{\alpha}_{\beta\gamma}. \tag{5.7}$$

Таким образом, $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ составляют самостоятельный подобъект аффинной связности, а $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$ — тензор минус первого класса относительно координат направления.

Следует напомнить, что координаты объекта $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ нулевой степени однородности относительно координат направления.

Пространство аффинной связности гиперплоскостных элементов (т. е. пар $(x, \widetilde{u})$, где $x\ (x^{\alpha})$ является точкой X_n, а $\widetilde{u}\ (u_{\alpha})$— ковариантным вектором) задается объектом

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(x, \widetilde{u}), \ C^{\beta\gamma}_{\alpha}(x, \widetilde{u}), \tag{5.8}$$

где $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(x, \widetilde{u})$ — объект типа Кристофеля, а $C^{\beta\gamma}_{\alpha}(x, \widetilde{u})$ — тензор третьей валентности типа, соответствующего положениям индексов. При переходе к другим локальным координатам имеем:

$$\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} = x^{\alpha'}_{\alpha}(x^{\alpha}_{\beta'\gamma'} + x^{\beta}_{\beta'}x^{\gamma}_{\gamma'}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}), \tag{5.9}$$

$$C^{\beta'\gamma'}_{\alpha'} = x^{\alpha}_{\alpha'}x^{\beta'}_{\beta}x^{\gamma'}_{\gamma}C^{\beta\gamma}_{\alpha}, \tag{5.10}$$

причем

$$C^{\beta\gamma}_{\alpha}u_{\beta} = C^{\beta\gamma}_{\alpha}u_{\gamma} = 0. \tag{5.11}$$

Кроме того, функции $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(x, \widetilde{u})$ и $C^{\beta\gamma}_{\alpha}(x, \widetilde{u})$ будут соответственно нулевой и минус первой степени однородности относительно координат гиперплоскостного элемента.

3. Пространства Финслера. Заключительные замечания

Линейный элемент риманова пространства задается невырожденной дифференциальной квадратичной формой. Отбрасывая последнее ограничение, что форма квадратичная, мы придем к понятию *финслерова пространства.* Метрика пространства $F(x, dx) = g_{\alpha\beta}(x, \dot{x})\,dx^{\alpha}dx^{\beta}$ по-прежнему предполагается невырожденной, т. е. $\det(g_{\alpha\beta}(x, \dot{x})) \neq 0$.

Здесь координаты тензора $g_{\alpha\beta}(x, \dot{x})$ являются однородными функциями нулевого измерения относительно переменных $\dot{x}^{\alpha}$. Если

$g_{\alpha\beta}$ не зависят от $\dot{x}^{\alpha}$, то финслерово пространство становится римановым.

Исследования Финслера вскоре были продолжены Бервальдом, который в основу положил геодезические и определяемый ими параллельный перенос. Но при параллельном переносе Бервальда углы между векторами и длины векторов не оставались инвариантными.

Параллельный перенос, сохраняющий длины и углы, был введен позднее Э. Картаном.

Финслерово пространство определенной метрики является многообразием X_n с метрикой вида:

$$F(x, dx) = g_{\alpha\beta}(x, dx)\, dx^{\alpha} dx^{\beta}, \tag{5.12}$$

где $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ определяют положительно определенную матрицу. F — скалярная функция, однородная второго измерения относительно координат направления. Справедливо следующее предложение.

Если финслерово пространство F_n определенной метрики допускает группу движений G_r порядка $r > n(n-1)/2$, то пространство F_n является римановым пространством постоянной кривизны (теорема Ванга).

В самом деле, рассмотрим произвольную точку x_0 пространства F_n. Преобразования стационарной подгруппы этой точки порождают в касательном пространстве T_{x_0} линейные преобразования. Группа H_0 отображается по равенству параметров f в группу линейных преобразований

$$S(b) : d\widetilde{x^{\alpha}} = \frac{\partial \widetilde{x^{\alpha}}}{\partial x^{\beta}}\, dx^{\beta} \tag{5.13}$$

пространства T_{x_0}. Это отображение f гомоморфного характера; если движениям $D(b)$, $D(c)$ сопоставлены матрицы соответственно $S(b)$, $S(c)$, т. е.

$$D(b) \to S(b),$$
$$D(c) \to S(c),$$

то $D(b)\,D(c) \to S(b)\,S(c)$, где слева умножение ведется по групповой операции, а справа — умножение матриц. Докажем, что отображение f инъективно, т. е. оно отображает H_{x_0} в свой образ $f(H_{x_0})$ взаимно однозначно. В самом деле, пусть движение $D(b)$ соответствует тождественному преобразованию касательного пространства, оставляющему каждое направление (x_0, dx) на месте. Каждая геодезическая, выходящая из x_0, также остается точечно-инвариантной, т. е. $D(b)$ необходимо является тождественным преобразованием группы H_{x_0}. Таким образом, группы $H(x_0)$ и $f(H(x_0))$ изоморфны в алгебраическом смысле. Нетрудно проверить, что изоморфизм этих групп имеет место и в топологическом смысле. Метрическая функция финслерова пространства является абсолютным инвариантом в точке x_0 группы изотропии $f(H_{x_0})$.

Докажем теперь, что группа изотропии состоит из ортогональных преобразований. Для этого установим, что группа $f(H_{x_0})$ компактна. Прежде всего убедимся, что совокупность векторов

$$K = \{p\}, \tag{5.14}$$

удовлетворяющих уравнению

$$F_0(x, p) = c \quad (c > 0), \tag{*}$$

ограничена. Так как

$$F(p) \geqslant \varepsilon > 0 \tag{5.15}$$

при $p \in \{p \mid p^{1^2} + p^{2^2} + \ldots + p^{n^2} = 1\}$, то (полагая $N(p) = p^{1^2} + \ldots + p^{n^2}$) получим: $F(p) = c = [N(p)]^2 F\left(\frac{p}{N(p)}\right) \geqslant N^2(p)\,\varepsilon$, т. е.

$$N(p) \leqslant \sqrt{c/\varepsilon}. \tag{5.16}$$

Рассмотрим теперь подробнее свойства матриц группы $f(H_{x_0})$. Пусть

$$f(H_{x_0}) = \{S\}, \tag{5.17}$$

где $S = (f^i_j)$ — матрицы, оставляющие $F(p)$ инвариантной, т. е.

$$F(p^i) = F(p^\alpha f^i_\alpha). \tag{5.18}$$

Матрицы S неособенные, в противном случае найдется вектор $p \neq 0$ и $F(p) = 0$, что невозможно. Покажем теперь компактность группы матриц $f(H_{x_0})$. В самом деле, полагая для каждого j $p^j = 1$, $p^i = 0$ $(i \neq j)$, из (5.18) получим: $F(f^1_j, f^2_j, \ldots, f^n_j) = F(0, 0, \ldots, \ldots, 1_{(j)}, 0)$. Таким образом, множество элементов $f^1_j, f^2_j, \ldots, f^n_j$ ограниченное, причем j может быть каким угодно из чисел $1, 2, \ldots, n$. В целом элементы матриц $f(H_{x_0})$ также ограничены. Кроме того, $f(H_{x_0})$ является замкнутым множеством в пространстве всех квадратных матриц n-го порядка, т. е. $f(H_{x_0})$ компактна, и по теореме Вейля она оставляет инвариантной положительно определенную квадратичную форму Φ от n переменных dx^i.

Предполагая, что эта форма за счет выбора переменных приведена к виду: $\Phi(dx, dx) = dx^{1^2} + dx^{2^2} + \ldots + dx^{n^2}$, заключаем, что матрица (f^i_j) ортогональна.

Отсюда уже легко следует сформулированная выше теорема. В самом деле, пусть финслерово пространство допускает группу движений G_r, для которой $r > n(n-1)/2 + 1$; линейная группа изотропии будет порядка $r' > r - n = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Линейная группа H является подгруппой ортогональной группы $O(n)$. С другой стороны, ортогональная группа $O(n)$ не имеет собственных подгрупп порядка выше $(n-1)(n-2)/2$, т. е. $f(H_{x_0})$ совпадает с полной ортогональной группой. Таким образом, метрика финслерова пространства приводится к виду:

$$F(x, dx) = C(x)\,[dx^{1^2} + dx^{2^2} + \ldots + dx^{n^2}],$$

т. е. пространство является римановым пространством постоянной кривизны. Теорема доказана полностью.

В последнее время был получен важный результат о движениях в финслеровых пространствах определенной или неопределенной метрики: максимальный порядок групп движений таких пространств F_n, отличных от пространств постоянной кривизны, равен точно $r = \frac{n(n-1)}{2} + 2$ [17].

В случае гомотетических преобразований справедливо следующее предложение. Максимальный порядок групп G_r гомотетических преобразований финслеровых пространств n-измерений (определенной или неопределенной метрики) равен точно $\frac{n(n-1)}{2} + 3$.

Вопросы и упражнения

1. Проверьте, что оператор

$$X = x^2 \frac{\partial}{\partial x^1}$$

определяет инфинитезимальную гомотетию финслерова пространства F_2, определенного метрической функцией

$$F(x, dx) = e^{2\left(\frac{dx^1}{dx^2} + \varepsilon x^2\right)} (dx^2)^2 \quad (\varepsilon = 0, 1).$$

2. Определите операторы группы гомотетий финслерова пространства F_2:

$$F(x, dx) = (dx^1)^\alpha (dx^2)^\beta \quad (\alpha + \beta = 2, \ \alpha\beta \neq 0).$$

Добавление

РАССЛОЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ СВЯЗНОСТИ

1. Понятие расслоенного пространства

В теории дифференцируемых многообразий большое значение имеют так называемые расслоенные пространства. Известные нам пространства — касательное и кокасательное расслоения над дифференцируемым многообразием X_n, а также расслоения над X_n тензоров данного типа — являются простейшими примерами расслоенных пространств. При определении понятия расслоенного пространства мы опираемся на совокупность объектов, обозначаемых символами E, B, F, G, π, Φ, где E, B, F, G — многообразия, π — отображение Φ — семейство отображений, причем: 1) многообразие E — пространство расслоения; 2) многообразие B — базисное многообразие расслоения; 3) многообразие F — слой (типовой) расслоения; 4) группа Ли G — эффективно действующая группа гомеоморфизмов слоя F (*группа G называется эффективной*, если различным ее элементам отвечают различные действия);

5) отображение

$$\pi: E \to B, \tag{1}$$

которое называется проекцией E на B, причем множества $F_x = \pi^{-1}(x)$ гомеоморфны F при любом $x \in B$;

6) Φ — семейство гомеоморфизмов φ_α прямых произведений $U_\alpha \times F$ на $\pi^{-1}(U_\alpha)$: $\varphi_\alpha: U_\alpha \times F \to \pi^{-1}(U_\alpha)$, где U_α — открытые множества многообразия B, называемые областями гомеоморфизма φ_α, причем:

а) если $x \in U_\alpha$, $y \in F$, то

$$(\pi \circ \varphi_\alpha)(x, y) = x; \tag{2}$$

б) если $\varphi_\alpha, \varphi_\beta \in \Phi$, $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, то $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ определяют h_x, k_x — гомеоморфизмы $\{x\} \times F \to \pi^{-1}(x)$, что

$$k_x^{-1} h_x = g \in G; \tag{3}$$

в) области определения гомеоморфизмов φ_α покрывают все базисное многообразие B.

При наличии перечисленных объектов и выполнении условий 1—6 пространство

$$E = E(B, F, G, \pi, \Phi) \tag{4}$$

называется дифференцируемым расслоенным пространством.

Приведенное определение расслоенного пространства достаточно громоздкое. Поэтому мы приведем ниже ряд примеров, иллюстрирующих это понятие. Многообразия, которые встречаются в определении, являются дифференцируемыми класса C^p, C^∞, или аналитическими.

Сечением расслоенного пространства называется такое отображение $S: B \to E$, что $\pi \circ S = id$ является тождественным отображением B на себя. Например, сечением касательного расслоения (с. 173) будет векторное поле; сечением кокасательного расслоения $T^*(X_n)$ — дифференциальная линейная форма; сечением тензорного расслоения $T_q^p(X_n)$ (с. 177) — тензорное поле типа $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

Полный прообраз точки x $F_x = \pi^{-1}(x)$ называется *слоем над точкой* x. Всякий вектор $\vec{v}_z$ в точке $z \in E$, касательный к слою F_x $(x = \pi(z))$, называется *вертикальным вектором*. Совокупность всех вертикальных векторов в точке z образует подпространство V_z касательного пространства E_z, и называется оно *вертикальным пространством*.

Группа G называется *структурной группой*, а семейство Φ — *семейством локальных гомеоморфизмов*.

Два допустимых (т. е. удовлетворяющих условиям (6а—6в) семейства гомеоморфизмов Φ_1, Φ_2 называются *эквивалентными*, если их объединение также является допустимым семейством локальных гомеоморфизмов. Они позволяют по координатным окрестностям базы строить координатные окрестности в самом расслоенном пространстве.

Из условия б) следует, что точки z расслоенного пространства, принадлежащие слою F_x, где $\pi(z) = x$, представляются в виде $z = h_x(y)$, $y \in F$, или $z = k_x g(y)$, $g \in G$, $y \in F$.

Если $G = \{e\}$, то множество гомеоморфизмов φ_x состоит из одного элемента и расслоенное пространство $E = B \times F$. Другой случай получается при $G = F$; он приводит к понятию главного расслоенного пространства, к рассмотрению которого мы теперь переходим.

2. Главное расслоенное пространство

Предположим, что структурная группа G и типовой слой являются одним и тем же многообразием. В этом случае расслоенное пространство называется *главным расслоенным пространством* и обозначается

$$E = E(B, G, \pi, \Phi). \tag{5}$$

Теперь точки слоя представляются в виде $z = h_x(\gamma) = k_x(g\gamma)$, где $g, \gamma \in G$. Говорят, что G действует на главном расслоенном пространстве E правыми сдвигами, если $zg = (h_x \gamma)g = h_x(\gamma g)$ $(g \in G)$.

Этот правый сдвиг порождается элементом g и обозначается символом R_g.

Так как $zg = h_x(\gamma g)$, то $R_g(h_x\gamma) = h_x(\gamma g) = h_x R_g\gamma$. Отсюда мы заключаем, что

$$R_g h_x = h_x R_g.$$

Таким образом, гомеоморфизмы h_x перестановочны с правыми сдвигами R_g. Особо отметим, что в этой важной формуле в левой части R_g действует в расслоенном пространстве E (что иногда будем обозначать символом R_g^E), а в правой части R_g действует в пространстве структурной группы G.

Структурная группа G действует в главном расслоенном пространстве интранзитивно. Базисное пространство B получается из расслоенного пространства E факторизацией по отношению Δ, определяемому действиями структурной группы: говорят, что точки $z_1, z_2 \in E$ находятся в отношении Δ, если одна из них переходит в другую посредством некоторого действия группы G. Очевидно, отношение Δ является отношением эквивалентности и базисное пространство $B = E/\Delta$ представляет собой совокупность поверхностей интранзитивности.

Структурная группа действует в E правосторонним образом, и слой при этом переходит в тот же слой. Правый сдвиг R_g порождает отображение вертикальных векторов по закону dR_g; вертикальный вектор в точке z переходит в вертикальный вектор, приложенный в точке $\tilde{z} = zg$.

3. Фундаментальные векторные поля. Алгебра Ли структурной группы

1. Пусть z обозначает точку расслоенного пространства E, V_z — касательное пространство к слою в точке z. Рассмотрим какой-нибудь вертикальный вектор $\vec{\tau}$ в $z \in E$; он порождает касательный к группе вектор $\vec{\Theta}_\gamma$ в точке $\gamma \in G$. Если $z = h_x\gamma$, то дифференциал гомеоморфизма h_x^{-1}, отображающего слой F_x в группу G, переведет вектор $\vec{\tau}$ в вектор $\vec{\Theta}_\gamma$. Полученный вектор $\vec{\Theta}_\gamma$ в свою очередь порождает на группе G левоинвариантное векторное поле $\vec{\Theta}_{g\gamma}=dL_g \Theta_\gamma$. Значение этого поля в единице группы является элементом $\vec{\lambda} \in L$ алгебры Ли. Можно доказать, что построенное левоинвариантное векторное поле и элемент алгебры Ли не зависят от выбора гомеоморфизма h_x в Φ_x. В самом деле, если $z = k_x g\gamma$, где $h_x = k_x g$, то

$$dk_x^{-1}\vec{\tau} = d\,(L_g\, h_x^{-1})\vec{\tau} = dL_g\vec{\Theta}_\gamma = \vec{\Theta}_{q\gamma}. \tag{6}$$

И мы приходим к вектору того же левоинвариантного поля; вектор $\vec{\lambda} = \vec{\Theta}_e$.

2. Обратно, пусть $\vec{\Theta}_e = \vec{\lambda}$ — элемент алгебры Ли, порождающий левоинвариантное векторное поле $\vec{\Theta}_\gamma$. Последнее в свою очередь порождает поле вертикальных векторов в E по закону:

$$\vec{\tau}\,(z) = dh_x\vec{\Theta}_\gamma. \tag{7}$$

Это поле $\vec{\tau}\,(z)$ называется *фундаментальным векторным полем*, порожденным элементом $\vec{\lambda}$ алгебры Ли L_r. Убедимся, что построенное поле $\vec{\tau}\,(z)$ не зависит от выбора h_x в Φ_x. В самом деле, полагая $z = k_x g\gamma$, получим:

$$dk_x\vec{\Theta}_{g\gamma} = dk_x dL_g\,\vec{\Theta}_\gamma = d\,(k_x L_g)\vec{\Theta}_\gamma = dh_x\vec{\Theta}_\gamma\,.$$

3. Скобка двух элементов алгебры Ли структурной группы определяется скобкой Пуассона соответствующих левоинвариантных векторных полей $[\vec{\Theta}\,(\lambda)\,\vec{\Theta}\,(\mu)]$. Последней скобке отвечает скобка $[\,\vec{\tau}\,(\lambda)\,\vec{\tau}\,(\mu)]$ соответствующих фундаментальных векторных полей в пространстве E. Получаемое отображение $\vec{\lambda} \to \vec{\tau}\,(\lambda)$ является изоморфизмом алгебры Ли группы G на алгебру фундаментальных векторных полей в E.

4. Примеры расслоенных пространств

Пример 1. Обозначим символом T_x касательное векторное пространство в точке x любого многообразия M. Рассмотрим объединение

$$T\,(M) = \bigcup_{x \in M} T_x.$$

Элементами множества $T(M)$ являются точка и выходящий из нее вектор v. Всякой системе локальных координат на M можно поставить в соответствие систему локальных координат на $T(M)$. В результате очевидных отождествлений при склеивании мы придем к $2n$-мерному многообразию.

В качестве проекции π можно взять отображение множества $T(M)$ на M, которое определяется формулой

$$\pi(x, v) = x.$$

Базой является многообразие M, а слоем над точкой $x \in M$ — касательное векторное пространство T_x.

Координатными окрестностями U_x являются окрестности покрытия базы B. В качестве отображений

$$\psi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta^{-1}\varphi_\alpha$$

будут матрицы Якоби координатных преобразований.

В рассматриваемом примере структурная группа будет полной линейной группой $GL(n, R)$ преобразований в каждом слое.

Пример 2. Пусть G — группа Ли, H — ее замкнутая подгруппа. В этом случае G является расслоенным пространством с базой

$$B = G/H,$$

слоем H и структурной группой также H. Мы считаем, что H действует правосторонним образом в главном расслоенном пространстве $G(B, H)$.

Пример 3. Возьмем дифференцируемое многообразие M и образуем в касательном пространстве T_x, где $x \in M$, множество R_x всех возможных реперов с началом в точке x. Рассмотрим теперь объединение этих множеств:

$$R(M) = \bigcup_{x \in M} R_x.$$

Топология и дифференцируемая структура на $E(M)$ определяется естественным образом. Каждой системе локальных координат в M сопоставляется система локальных координат в $E(M)$. В самом деле, любому элементу R_x из $E(M)$ достаточно отнести в качестве координат координаты начала репера и элементы матрицы A, определяющей репер R_x относительно натурального репера в точке x.

В качестве проекции π можно взять отображение $E(M)$ на M, которое каждому реперу относит его начало — точку x. В результате на M порождается структура дифференцируемого пространства со структурной группой $G = GL(n, R)$. Типовой слой можно отождествить с этой группой, которая действует сама на себя левыми сдвигами. Это главное расслоенное пространство называется *расслоенным пространством линейных реперов многообразия* M.

Пример 4. Рассмотрим еще один пример. Возьмем дифференцируемое пространство $M = V_n$, снабженное структурой риманова пространства. Метрика $g_{ij}dx^i\,dx^j$ этого пространства определяет в касательном векторном пространстве каждой точки $x \in V_n$ структуру евклидова пространства, дифференцируемым образом зависящую от x. Построим поле ортонормированных реперов $\{\vec{e}_\alpha\}$ так, что

$$\vec{e}_\alpha^{\,2} = 1, \ \vec{e}_\alpha \vec{e}_\beta = 0 \ (\alpha \neq \beta). \qquad (8)$$

В точке x реперы связаны ортогональной матрицей. Рассмотрим теперь объединение

$$E(V_n) = \underset{x \in V_n}{U} P_x,$$

где P_x обозначает множество всех ортонормированных реперов в точке x.

Как и выше, можно убедиться, что множество $E(V_n)$ допускает структуру дифференцируемого многообразия. По определению условимся считать, что проекция π относит ортонормированному реперу его начало x. Таким образом, в конечном итоге мы получим главное расслоенное пространство $E(V_n)$ с базой V_n и структурной группой $O(n)$. Пространство это часто называется *расслоенным пространством ортонормированных реперов*.

Понятия расслоенного пространства и связности в таком пространстве являются важнейшими понятиями современной дифференциальной топологии и геометрии. Как показывают приведенные примеры, эти понятия естественным образом связаны с объектами, изучаемыми в геометрии дифференцируемых многообразий. Из примеров следует также, что слои теперь в общем случае не прикрепляются к точкам базисного пространства (см. пример 2).

5. Связности в главных расслоенных пространствах

Понятие связности в расслоенных пространствах является обобщением аффинной (линейной) связности на многообразии. Мы видели, что аффинная связность позволяет вдоль данной кривой пространства линейно отображать друг на друга касательные пространства, как говорят, посредством параллельного переноса.

В рассматриваемом обобщении в роли касательных пространств, представляющих в виде реперов линейную группу, выступают слои.

Задача обобщения теории пространств аффинной связности на расслоенные пространства приводит к построению отображений слоев $F_{x(0)} \to F_{x(t)}$ вдоль кривых $x(t)$, заданных на базе; мы должны уметь устанавливать взаимно однозначные отображения, сопоставляющие каждой кривой $x(t)$ и точке $z_0 \in F_{x_0}$ кривую $z(t)$, такую, что:

1) $\pi z(t) = x(t)$, 2) $(za)(t) = z(t)a$ ($\forall a \in G$, $t \in [0, 1]$).

Мы будем считать, что касательный вектор $z'(0)$ зависит линейно от касательного вектора $x'(0)$. При этих предположениях образ T_x будет подпространством в E_z:

$$H_z = \sigma_z(T_x), \ \pi H_z = T_x \ (x \in B, \pi(z) = x).$$

Приходим к выбору распределения H_z. Последнее в свою очередь позволяет установить связь между слоями вдоль указанных кривых.

Приведенные соображения позволяют ввести следующим образом определение связности в главном расслоенном пространстве.

Связностью в главном расслоенном пространстве E со структурной группой G над n-мерным дифференцируемым пространством B называется такое распределение H_z n-мерных площадок $H_z \in E_z$, что:

1) H_z — дополнительное вертикальному пространству V_z;
2) H_z дифференцируемо зависит от z,
3) $R_a H_z = H_{za}$.

Пространство H_z называется *горизонтальным пространством* связности в точке z.

Из приведенного определения связности H_z следует, что касательное пространство E_z в каждой точке z расслоенного пространства E раскладывается в прямую сумму двух подпространств H_z и V_z:

$$E_z = H_z + V_z,$$

где V_z — касательное пространство к слою F_x $(x = \pi(z))$ в точке z, H_z — горизонтальное подпространство в той же точке. Разлагая вектор $\vec{a} \in E_z$ по указанным подпространствам

$$\vec{a} = \vec{a}_H + \vec{a}_V \; (\vec{a}_H \in H_z, \; \vec{a}_V \in V_z)$$

и действуя на обе части этого равенства линейным отображением dR_g, получим:

$$dR_g\vec{a} = dR_g\vec{a}_H + dR_g\vec{a}_V, \tag{9}$$

где $dR_g\vec{a}_H$ — горизонтальный вектор по свойству 3 определения связности, а $dR_g\vec{a}_V$ — вертикальный вектор, так как при правом сдвиге R_g^E каждый слой пространства E переходит в себя.

Учитывая далее, что разложение вектора $dR_g\vec{a}$ в (9) по дополнительным подпространствам единственно, мы заключаем:

$$(dR\,\vec{a})_H = dR_g\vec{a}_H, \; (dR_g\vec{a})_V = dR_g\vec{a}_V. \tag{10}$$

На эти формулы мы будем опираться ниже.

6. Форма связности

Из определения инфинитезимальной связности можно вывести ряд следствий. Остановимся на некоторых из них.

1. Связность H, т. е. распределение горизонтального поля площадок, позволяет построить для каждой точки $z \in E$ линейное отображение ω касательного пространства E_z в алгебру Ли L структурной группы G. В другом виде это свойство можно выразить так: на пространстве E можно построить 1-форму со значениями из алгебры Ли L.

В самом деле, всякому вертикальному вектору $\vec{v}_z \subset E_z$ можно сопоставить при помощи гомеоморфизма h_x^{-1} вектор $\vec{\Theta}_\gamma$ в касательном пространстве группы в точке $\gamma \in G$. Затем при помощи сдвигов R_g построим левоинвариантное векторное поле $\vec{\Theta}_{\gamma g} = R_g \vec{\Theta}_\gamma$. Значение этого поля в единичной точке является, как известно, элементом алгебры Ли L.

Далее мы считаем также по определению, что всякий $u_z \in E_z$ переходит в элемент $\omega(u_z) \in L$, который порождается вертикальной частью вектора u_z : $\omega(u_z) = \omega((u_z)_V)$. Полученная форма ω называется формой связности H.

2. Можно показать, что форма связности ω дифференцируемо зависит от z, т. е. если разложить ее по векторам натурального кобазиса, то коэффициенты разложения будут дифференцируемыми формами, отображающими линейно $E_z \to R$.

3. Теперь проверим, что если фундаментальное векторное поле $\vec{v}_z$ на E порождается вектором $\vec{\lambda}$ алгебры Ли структурной группы G, то векторное поле $dR_g^E \vec{v}_z$ порождается вектором $ad\,(g^{-1})\vec{\lambda}$ алгебры Ли.

В самом деле, если $z = h_x\gamma$, то по определению фундаментального поля $\vec{v}_z$ переходит в левоинвариантное векторное поле $\vec{\Theta}(\gamma) = \vec{\Theta}_\gamma$ на группе G, а последнее определяет $\vec{\lambda} = \vec{\Theta}_e$ — элемент алгебры Ли L. Таким образом, справедливы равенства

$$\vec{v}(z) = dh_x \vec{\Theta}_\gamma = dh_x dL_\gamma \vec{\Theta}_e.$$

Подействуем теперь на обе части $\vec{v}(z) = dh_x dL_\gamma \vec{\Theta}_e$ отображением dR_g^E:

$$dR_g \vec{v}(z) = dR_g dh_x dL_\gamma \vec{\Theta}_e. \tag{10'}$$

Равенство (10′) можно переписать так:

$$dR_g \vec{v}(z) = dh_x dR_g dL_\gamma \vec{\lambda} \quad (\vec{\lambda} = \vec{\Theta}_e).$$

Очевидно, вектор $dR_g dL_\gamma \vec{\lambda}$ принадлежит $T_{\gamma g}$ — касательному пространству к G в точке γg. Перенося его левыми сдвигами в другие точки, получим левоинвариантное векторное поле. Если значение этого поля в единице группы равно $\vec{\mu}$, то

$$dR_g\, dL_\gamma \vec{\lambda} = dL_{\gamma g} \vec{\mu}. \tag{11}$$

Разрешая это равенство относительно $\vec{\mu}$, получим:

$$\vec{\mu} = dL_g^{-1} {}_\gamma^{-1}\, dR_g dL_\gamma \vec{\lambda}. \tag{12}$$

В правой части (12) перемножаются дифференциалы преобразований. В конечном итоге это преобразование является дифференциалом преобразования $x \to g^{-1}xg$, обозначаемого символом $ad\,(g^{-1})$.

Окончательно формула (12) может быть переписана так:

$$\omega\,(dR_g\vec{v}\,(z) = ad\,(g^{-1})\omega\,(\vec{v}\,(z)). \qquad (13)$$

На основании (10) и свойств ω формула эта обобщается на любой вектор $\vec{u}\,(z)$.

Обратное предложение также справедливо, если дана ω на E со значениями из алгебры Ли, обладающая свойствами:

1) Если $\vec{\tau}$ вертикален, то $\omega\,(\vec{\tau})$ — элемент алгебры Ли, порожденный элементом $\vec{\tau}$.

2) Форма ω зависит от z дифференцируемым образом.

3) Если $\omega\,(R_g\vec{\tau}) = ad\,(g^{-1})\omega\,(\vec{\tau})$, то она порождает на E инфинитезимальную связность.

В самом деле, определим поле площадок H_z касательных пространств E_z, векторы которых удовлетворяют условию:

$$\omega\,(\vec{\tau}) = 0.$$

Очевидно, что ни один ненулевой вертикальный вектор не удовлетворяет этому равенству и, таким образом, не принадлежит H_z. Если же $\vec{\tau}$ — произвольный вектор из E_z, то положим по определению, что

$$\omega\,(\vec{\tau}) = \omega\,(\vec{\tau}_b) = \vec{\lambda} \in L,$$

где $\vec{\tau}_b$ — вертикальная часть вектора $\vec{\tau}$. Вектор алгебры Ли $\vec{\lambda} \in L$ позволяет построить левоинвариантное векторное поле Θ_γ и соответствующее ему фундаментальное поле $\vec{v}$ в пространстве E. Пусть $\vec{v}\,(z)$ обозначает значение этого поля в точке z; таким образом (с. 244,1): $\omega\,(\vec{v}(z)) = \vec{\lambda}$. Нетрудно проверить, что значение формы ω для вектора $\vec{\tau}' = \vec{\tau} - \vec{v}\,(z)$ равно нулю; действительно,

$$\omega\,(\vec{\tau}') = \omega\,(\vec{\tau} - \vec{v}\,(z)) = \vec{\lambda} - \vec{\lambda} = 0. \qquad (14)$$

Таким образом, $\vec{\tau}' \in H_z$. Касательное векторное пространство является прямой суммой подпространств H_z, V_z;

$$E_z = H_z + V_z.$$

Поле H_z удовлетворяет условиям 1, 2. Если $\vec{\tau} \in H_z$, т. е. $\omega\,(\vec{\tau}) = 0$, то по 3-му свойству $\omega\,(R_g\,(\vec{\tau})) = 0$, т. е. $R_g\vec{\tau} \in H_{zg}$. Условие 3 также выполнено. Поле площадок H_z действительно определяет инфинитезимальную связность H_z, и мы приходим к следующему предложению.

Теорема. Инфинитезимальная связность на главном расслоенном пространстве E определяется заданием на E формы связности ω со значениями в алгебре Ли, обладающей свойствами 1—3.

7. О лифтах векторных полей и кривых

Связность в расслоенном пространстве позволяет ввести другие важные понятия. Но прежде всего обратим внимание на дифференциал $d\pi$ проекции π. Так как эта проекция π отображает

$$E \to B,$$

то ее дифференциал в каждой точке $z = \pi^{-1}(x)$ переводит вертикальные векторы касательного пространства E_z в нулевой вектор пространства T_x. Вертикальное подпространство является ядром отображения $d\pi$. С другой стороны, горизонтальное подпространство H при этом отображается изоморфно на векторное касательное пространство T_x:

$$d\pi\colon\ H_z \to T_x.$$

Это свойство изоморфности лежит в основе понятия лифта векторного поля $\vec{u}(z)$ и кривой $x(t)$.

Лифтом векторного поля $u^l(x)$, заданного на базе B, называется векторное поле $\vec{u}(z) \in H_z$ в E, которое является π-связанным с $u^l(x)$, т. е.

$$d\pi\, \vec{u}(z) = \vec{u}(x),$$

где $\pi(z) = x$. Существование и единственность поля $\vec{u}(z)$ следует из изоморфности дифференциала отображения $(d\pi)H_z$.

Лифт кривой $x(t)$ — кривая $z(t)$ в расслоенном пространстве, покрывающая кривую $x(t)$, касательные векторы которой в каждой точке горизонтальны, т. е. принадлежат распределению H_z.

Связность в расслоенном пространстве позволяет производить отображения слоя на слой вдоль кривых базисного пространства и строить группы голономии. Некоторые другие понятия теории пространств аффинной связности также можно перенести на главные расслоенные пространства с инфинитезимальной связностью.

В заключение остановимся на вопросе истолкования пространства аффинной (линейной) связности с точки зрения связностей в расслоенных пространствах.

Предположим, что на дифференцируемом многообразии B задана аффинная связность объектом Γ. Пусть далее $R(B)$ обозначает главное расслоенное пространство реперов, которое будет $(n^2 + n)$-мерным дифференцируемым пространством над многообразием B.

Точка $z \in R(B)$ состоит из пары (x, R) — точки x и некоторого репера $R = \{R_i\} = \{X_i^1\vec{e}_1 + \ldots + X_i^n\vec{e}_n\}$ с началом в точке x. Мы считаем, что векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ в предыдущем разложении являются векторами натурального репера, определенного в координатной окрестности U $(x \in U)$ локальной системой координат. Можно убедиться (см.: Номидзу, с. 83), что координаты формы связности ω (ω_i^s) в расслоенном пространстве реперов $R(B)$ выражаются через координаты Γ^k_{ij} объекта связности Γ на B по формулам:

$$\omega^s_i = Y^s_e (dX^e_i + \Gamma^e_{kj} X^j_i dx^k), \tag{15}$$

где Y^s_e — элементы матрицы, обратной к (X^e_i).

Векторы $\vec{u}(z) \in H_z$ характеризуются тем, что значения $\omega^s_i(\vec{u}_z(z)) = 0$. Очевидно, значения форм ω^s_i будут нулевыми тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$dX^e_i + \Gamma^e_{kj} X^j_i dx^k = 0 \tag{16}$$

вдоль различных кривых $x = x(t)$ базисного пространства, проходящих через произвольную данную точку $x(x^k)$; таким образом, векторы X^e_i связаны условием (16) параллельного переноса.

Итак, с точки зрения расслоенного пространства $R(B)$ векторы $\vec{u}(z) \in H_z$ являются касательными векторами (dx^k, dX^e_i) в точке z к кривым $z(t)$ $(x = x(t),\ x^e_i = X^e_i(t))$.

8. О касательных и кокасательных расслоениях

В заключение приведем некоторые понятия из теории касательных и кокасательных расслоений, которые позволят глубже понять рассматриваемые вопросы.

Предположим, что нам дано M — дифференцируемое многообразие класса C^∞ и $T(M)$ — касательное расслоение (касательный пучок, с. 173). Предположим также, что многообразие M накрывается системой координатных окрестностей (U, x^i), где x^i являются локальными координатами, определенными в окрестности U.

Мы далее считаем, что y^i представляет в каждом касательном пространстве $T_x(M) = E$ декартову систему координат, определенную натуральным репером $\vec{e}_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ в точке $x \in U$.

Касательный пучок является $2n$-мерным дифференцируемым многообразием. Система координат (x^i, y^i) в открытом множестве $\pi^{-1}(U) = U \times E$ называется локальной системой координат, индуцированной локальной системой координат (x^i).

В пересечении координатных окрестностей (U, x^i), $(U', x^{i'})$ координаты x^i, $x^{i'}$ одной и той же точки связаны соотношениями:

$$x^{i'} = f^i(x), \tag{17}$$

где $f^i(x)$ функции класса C^∞. В касательном пучке в области $(U \cap U') \times E$ пересечения координатных окрестностей $U \times E$, $U' \times E$ координаты $x^{i'}$, $y^{i'}$, определяются через x^i, y^i согласно формул

$$x^{i'} = f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n),\ y^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha} y^\alpha \left(\left| \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha} \right| \neq 0 \right)$$

с якобианом преобразования $\left| \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right|^2 > 0$.

Каноническое отображение $\pi : T(M) \to M$ в построенных локальных системах координат записывается так: $(x^i, y^i) \to (x^i)$.

Вертикальные лифты

а) *Вертикальные лифты функций.* Если f данная функция на M, то ее вертикальным лифтом f^V называется функция на $T(M)$, определенная композицией двух отображений $\pi : T(M) \to M$, $f : M \to \boldsymbol{R}$.

Таким образом, имеем

$$f^V = f \circ \pi. \tag{18}$$

Если точка $\widetilde{A} \in \pi^{-1}(U)$ имеет индуцированные локальные координаты (x^i, y^i), то $f^V(\widetilde{A}) = f \circ \pi(\widetilde{A}) = f(A) = f(x)$, $(A = \pi(\widetilde{A}))$.

Из этих равенств следует, что функция f принимает постоянные значения в точках слоя (фибра) $\pi^{-1}(A)$.

б) *Вертикальные лифты векторных полей.* Совокупность $\Gamma_0^1(M)$ векторных полей на M допускает операции сложения двух полей X, Y и умножения поля X на функцию f из кольца функций $\Gamma_0^0(M)$ (короче, F - линейную функцию) $(X + Y)f = Xf + Yf$, $(fX)g = f(Xg)$, где $X, Y \in \Gamma_0^1(M)$, $f, g \in \Gamma_0^0(M)$. Таким образом, совокупность $\Gamma_0^1(M)$ (как и $\Gamma_s^r(M)$ при любых натуральных r, s) образует F - модуль. Отметим, впрочем, что векторные поля можно было бы определить как F - линейные отображения F - модуля $\Gamma_0^0(M)$ на себя, для которых $X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$, $\forall f, g \in \Gamma_0^0(M) = F$).

Вертикальным лифтом X^V *векторного поля* $X \in \Gamma_0^1(M)$ называется такое векторное поле в $T(M)$, что $X^V(i\omega) = (\omega(X))^V$ для любой дифференциальной формы $\omega = \omega_k dx^k$ на M, $i\omega = \omega_\alpha y^\alpha$ в индуцированной локальной системе координат (x^i, y^i). Из этого определения следует, что X^V для поля $X(\xi^i(x))$ имеет координаты $X^V = (0, \xi^i(x))$.

Операцию поднятия можно обобщить на F-модули $\Gamma_s^r(M)$ тензорных полей типа (r, s).

в) *Вертикальный лифт* ω^V *ковекторного поля* ω вводится так. Если ω имеет в натуральном репере координаты $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, то ковекторное поле ω^V в $T(M)$ характеризуется координатами (в натуральном репере локальной системы x^i, y^i) $\omega^V(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, 0, 0, \ldots, 0)$.

Вопросы и упражнения

1. Проверьте, что $(X + Y)^V = X^V + Y^V$ $(\forall X, Y \in \Gamma_0^1(M))$.
2. Докажите, что $(fx)^V = f^V x^V$ $(\forall X \in \Gamma_0^1(M),\ \forall f \in \Gamma_0^0(M))$.
3. Верно ли, что тензорное поле $T^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}_{\beta_1 \ldots \beta_s} \in \Gamma_s^r(M)$ определяет на M скаляр-

ную $r+s$-раз F-линейную функцию T от r ковекторных и s-векторных полей? Можно ли F-линейную функцию от указанных аргументов положить в основу определения тензорных полей на M.

Полные лифты

а) *Полные лифты функций.* Предположим, что нам дана функция f на M. Полным лифтом функции f называется функция f^C на $T(M)$, определяемая формулой $f^C = i(df)$, где символ i в правой части обозначает свертку y^α с градиентом функции f; в индуцированных локальных координатах f^C имеет следующее выражение: $f^C = y^\alpha \partial_\alpha f \left(\partial_\alpha f = \dfrac{\partial f}{\partial x^\alpha}\right)$.

б) *Полные лифты векторных полей.* Пусть X векторное поле на M, т. е. $X \in \Gamma_0^1(M)$. Полным лифтом X^C векторного поля X называется векторное поле $X^C \in \Gamma_0^1(M)$, определяемое формулой

$$X^C f^C = (Xf)^C \tag{19}$$

для любой $f \in \Gamma_0^0(M)$. Отсюда следует, что полный лифт X^C имеет в натуральном репере следующие координаты $X^C(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n, y^\alpha \partial_\alpha \xi^1, y^\alpha \partial_\alpha \xi^2, \ldots, y^\alpha \partial_\alpha \xi^n)$.

в) *Полный лифт ковекторного поля* $\omega \in \Gamma_0^1(M)$. Лифт ω^C в $T(M)$ определяется как такое ковекторное поле, что

$$\omega^C(X^C) = (\omega(X))^C. \tag{20}$$

Если ω_i являются компонентами ω в координатной окрестности $U \subset M$, то компоненты полного лифта в индуцированных координатах в $\pi^{-1}(U)$ будут вида $\omega^C(\partial_\alpha \omega_1 y^\alpha, \ldots, \partial_\alpha \omega_n y^\alpha, \omega_1, \ldots, \omega_n)$.

Вопросы и упражнения

1. Проверьте, что $(fg)^C = g^C f^V + g^V f^C$ $(\forall f,\ g \in \Gamma_0^0(M))$.
2. Докажите, что $[X^V Y^C] = 0$, $[X^V Y^C] = [XY]^V$.
3. Если $\widetilde{\omega} \in \Gamma_1^0(T(M))$ такая, что для любого $X \in \Gamma_1^0(M)$ выполняется равенство $\widetilde{\omega}(X^C) = 0$, то поле $\widetilde{\omega} = 0$. Доказать.

Полные лифты аффинных связностей

Предположим теперь, что многообразие M является пространством аффиной связности ∇. Можно убедиться, что в этом случае в касательном пучке существует одна и только одна связность ∇, обладающая для любых векторных полей $X, Y \in \Gamma_0^1(M)$ свойством

$$\nabla^C_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} = (\nabla_X Y)^C,\ (\widetilde{X} = X^C,\ \widetilde{Y} = Y^C). \tag{21}$$

Допустим, что Γ_{ij}^h являются компонентами связности ∇^C в локальных координатах (x^i) в M и $\widetilde{\Gamma}_{BC}^A$—компоненты аффинной связности ∇^C в пространстве $T(M)$ относительно локальных координат (x^i, y^i) Из определения (21) следует, что $\widetilde{\Gamma}^h_{ji} = \Gamma^h_{ji}$, $\widetilde{\Gamma}^{\bar h}_{ji} = y^\alpha \partial_\alpha \Gamma^h_{ji}$, $\widetilde{\Gamma}^{\bar h}_{j\bar i} = \Gamma^h_{ji}$, $\Gamma^{\bar h}_{\bar j i} = \Gamma^h_{ji}$, другие $\widetilde{\Gamma}^A_{BC}$ равны нулю ($A, B, C = 1, 2, \ldots, 2n$; $i, j, h = 1, 2, \ldots, n, \bar i, \bar j, \bar h = n+1, \ldots, 2n$).

Инфинитезимальные аффинные преобразования в касательных пучках

Векторное поле $X \in \Gamma^1_0(M)$ тогда и только тогда является инфинитезимальным автоморфизмом связности ∇ (с. 208), когда $D_L \Gamma^i_{jk} = 0$.

Предположим, что $\widetilde{X} \in \Gamma^1_0(T(M))$ — векторное поле в касательном пучке. Оно будет инфинитезимальным автоморфизмом связности ∇^C, если $D_L \nabla^C = D_L \widetilde{\Gamma}^A_{CB} = 0$.

Полагая в этих уравнениях $A = \bar h$, $C = \bar j$, $B = \bar i$, получим (в индуцированных координатах), что вертикальные инфинитезимальные аффинные преобразования определяются полями $\xi(0, \ldots, 0, C^1_\alpha y^\alpha + D^1, \ldots, C^n_\alpha y^\alpha + D^n)$, где тензор $C^i_j \in \Gamma^1_1(M)$ абсолютно параллельный относительно ∇ $D^i \in \Gamma^1_0(M)$ инфинитезимальное аффинное преобразование связности ∇.

В настоящее время в теории автоморфизмов связности ∇^C с большим интересом изучаются свойства фибросохраняющих инфинитезимальных аффинных преобразований. Преобразование на пучке $T(M)$ называется фибросохраняющим, если оно каждый фибр переводит в фибр. Инфинитезимальное преобразование в касательном пучке называется фибросохраняющим, если порождаемые им преобразования локальной однопараметрической группы являются фибросохраняющими. Справедливы следующие свойства о фибросохраняющих аффинных преобразованиях.

1. Если векторное поле $\widetilde{X}$ является фибросохраняющим инфинитезимальным аффинным преобразованием связности ∇^C — полного лифта аффинной связности ∇, то инфинитезимальное преобразование X, индуцированное полем $\widetilde{X}$, является аффинным преобразованием относительно ∇.

2. Пусть ∇ является аффинной связностью без кручения на M, X и Y инфинитезимальные аффинные преобразования связности ∇; любое фибросохраняющее инфинитезимальное аффинное преобразование связности ∇^C, однозначно определяется оператором

$$X^C + Y^V + iU, \tag{22}$$

где X^C, Y^V обозначают соответственно полный и вертикальный лифты векторных полей X, Y; $U \in \Gamma^1_1(M)$ абсолютно параллельное тензорное поле, причем $iU = U^\alpha_\beta y^\beta$.

Вопросы и упражнения

1. Верно ли, что полный лифт ∇^C связности ∇ нулевой кривизны и кручения допускает аффинные преобразования, не сохраняющие фибры?

2. Выпишите операторы полной группы аффинных преобразований связности ∇^C в предыдущей задаче.

Горизонтальные лифты

Большую роль в рассматриваемой теории играет еще один способ поднятия, называемый горизонтальным лифтом — поднятия объектов из M в $T(M)$ при предположении, что на базисном многообразии задана некоторая аффинная связность ∇.

а) *Горизонтальный лифт функции.* По определению горизонтальный лифт f^H любого элемента $f \in \Gamma_0^0(M)$ равняется нулю: $f^H = 0$.

б) *Горизонтальный лифт векторного поля.* Пусть $X \in \Gamma_0^1(M)$; по определению горизонтальный лифт X^H в индуцированных координатах (x^i, y^i) имеет в натуральном репере следующие компоненты

$$X^H(\xi^1(x), \ldots, \xi^n(x), -\Gamma_\beta^1 \xi^\beta, \ldots, -\Gamma_\beta^n \xi^\beta), \tag{23}$$

где $\Gamma_j^i = y^\alpha \Gamma_{\alpha j}^i$, $\xi^i(x)$ — компоненты поля X в системе (x^i).

в) *Горизонтальный лифт* ω^H в $T(M)$ *ковекторного поля* $\omega\,(\omega_i) \in \Gamma_1^0(M)$ имеет следующие компоненты

$$\omega^H(\Gamma_i^h \omega_h, \omega_i). \tag{24}$$

г) *Горизонтальный лифт связности.* Горизонтальный лифт ∇^H в касательном пучке $T(M)$ для данной аффинной связности ∇ определяется следующими тремя аксиомами.

Для любых векторных полей $X, Y \in \Gamma_0^1(M)$ связность ∇^H такая, что

1. $\nabla^H Y^H = \nabla^H Y^V = 0$, где ∇^H вычисляется вдоль векторного поля $X^V \in \Gamma_0^1(T(M))$.
2. $\nabla^H(Y^V) = (\nabla Y)^V$.
3. $\nabla^H(Y^H) = (\nabla Y)^H$.

В левых частях последних двух формул предполагается, что ∇^H вычисляется вдоль $X^H \in \Gamma_0^1(T(M))$, а в правых частях операция ∇ берется вдоль $X \in \Gamma_0^1(M)$. Можно показать, что в индуцированных координатах (x^i, y^i) компоненты ∇^H совпадают с соответствующими компонентами полного лифта ∇^C за исключением $(\Gamma_{ij}^{\bar{h}})^H$: последние определяются согласно формул

$$(\Gamma_{ij}^{\bar{h}})^H = y^\alpha \partial_\alpha \Gamma_{ij}^h - y^\alpha R_{\alpha ij}^h. \tag{25}$$

Таким образом, полный лифт ∇^C тогда и только тогда совпадает с горизонтальным лифтом ∇^H, когда аффинная связность на многообразии M будет нулевой кривизны.

Риманова метрика на касательном пучке

Предположим, что многообразие M является римановым пространством с метрическим тензором g. В координатной окрестности $U \subset M$, имеем

$$ds^2 = g_{jk}(x)\,dx^j\,dx^k, \quad (g_{jk} = g_{kj}, \, |g_{jk}| \neq 0). \tag{26}$$

Определим теперь в окрестности $U \times E \subset T(M)$ метрику

$$d\,\sigma^2 = g_{jk}(x) dx^j dx^k + g_{jl}(x)\,Dy^j\,Dy^k\,, \tag{27}$$

где $Dy^j = dy^j + \Gamma^j_{em}\,y dx^m$, Γ^j_{em} — символы Кристофеля. Уравнения

$$dy^j + \Gamma^j_{em}\,y dx^m = 0 \tag{28}$$

выделяют в касательных пространствах в точках $T(M)$ n-мерные площадки H (горизонтальные площадки связности). Можно убедиться, что это распределение голономно тогда и только тогда, когда риманово пространство будет плоским.

Заметим также, что продолженное преобразование $\bar{f}$ в $T(M)$ является изометрией метрики $d\sigma^2$ тогда и только тогда, когда преобразование f будет изометрией относительно метрики ds^2 на M. Если риманово пространство допускает поле параллельных векторов $\xi^i(x)$, то касательный пучок с метрикой $d\sigma^2$ допускает инфинитезимальную изометрию, определенную векторным полем $(0, 0, \ldots, 0, \xi^1(x), \xi^2(x), \ldots, \xi^n(x))$.

Аналогичным образом строится теория кокасательного расслоения над данным дифференцируемым многообразием. Здесь вводятся свои лифты, позволяющие переносить тензорные поля и связности с базисного пространства на кокасательный пучок (с. 174). Геометрии касательных и кокасательных расслоений посвящена книга Яно-Исихара [24].

Заключительные замечания

Теория касательных пучков содержит по существу рассмотренную в гл. VIII геометрию путей и финслеровых пространств, а теория кокасательных пучков — геометрию пространств гиперплоскостных элементов. В последнее время в этих пространствах усиленно изучаются автоморфизмы — преобразования, сохраняющие связность или метрику пространства.

Инфинитезимальные автоморфизмы (гомотетии) в финслеровых пространствах определяются векторными полями, вдоль которых производная Ли от метрической функции пространства равна нулю (совпадает с этой функцией с точностью до постоянного множителя).

В пространствах Финслера группы гомотетических преобразований могут иметь так называемые особые операторы—линейно независимые операторы с общими траекториями (группы изометрий не имеют особых траекторий).

Отметим, что в группе гомотетий существует не более двух независимых операторов с общими траекториями (хотя таких наборов пар операторов может быть несколько).

Особые операторы образуют двумерную подалгебру во всей алгебре группы гомотетических преобразований. Более того особые операторы образуют двучленный идеал в алгебре Ли группы G_r гомотетических преобразований, существует особая одночленная группа, являющаяся идеалом особого идеала, идеалом в подалгебре группы автоморфизмов и, следовательно, идеалом в алгебре L_r группы гомотетических преобразований. Полная группа гомотетий финслерова пространства называется первого (второго) рода, если в ней существуют (не существуют) операторы с общими траекториями. Соответствующие финслеровы пространства называются также пространствами первого (второго) рода.

Перечисленные свойства особых операторов лежат в основе метода определения финслеровых пространств второго рода. В случае пространств первого рода небольших разномерностей исследования ведутся по схеме, применяемой в теории автоморфизмов римановых пространств.

Автоморфизмы и гомотетические преобразования изучаются в пространствах Дейвиса D_n — метрических пространствах опорных векторных u^i и ковекторных u_i плотностей веса p, т. е. когда в правых частях (**) (с. 176) добавляется множитель $|\partial x^i/\partial x^{i'}|^p$. Метрика в таких пространствах определяется скалярной функцией $F(x, u^i)$, $F(x, u_i)$ второго измерения однородности относительно u^i (u_i) и удовлетворяет условию невырожденности.

Изометрии и гомотетические преобразования в пространствах D_n изучаются методом «особых» операторов (операторов с общими траекториями). Здесь также вводится понятие полной группы (как группы, которая не может быть собственной подгруппой более широкой группы изометрий или гомотетических преобразований данного пространства).

Полные группы изометрий и группы гомотетических преобразований пространств D_n, а также и сами пространства, называются первого (второго) рода, если они не допускают (допускают) особые операторы.

Совокупность особых операторов изометрий образует подалгебру алгебры Ли группы всех изометрий. Если пространство D_n допускает два оператора изометрий, то оно допускает еще один особый оператор с теми же траекториями и определяемая ими подгруппа G_3 неразрешима. Эта особая подгруппа G_3 изометрий пространства D_n является нормальным делителем полной группы изометрий.

Особая подгруппа G_2 группы гомотетических преобразований в пространствах D_n определяет двумерный идеал L_2. В последнем в свою очередь существует однозначно определенная одномерная подалгебра изометрий, которая будет трижды идеалом — идеалом в особой двумерной подалгебре, подалгебры группы изометрий и во всей алгебре группы G_r. Приведенные свойства позволяют определить пространства D_n ($n = 2, 3, 4$), допускающие группы изометрии и группы гомотетических преобразований.

Очевидно, если вес векторных (ковекторных) плотностей $p = 0$ ($p = -1$), то пространства D_n будут пространствами Финслера (пространствами Картана).

Возвратимся к общему случаю. Если n-мерное пространство D_n определенной метрики допускает группу автоморфизмов порядка $r > n(n-1)/2$, то оно является пространством Дейвиса D_n постоянной кривизны; порядок r группы G_r равен $n(n+1)/2+1$ и пространство D_n в этом случае необходимо первого рода.

Если пространство D_n второго рода, т. е. существуют операторы с общими траекториями, то данное пространство необходимо неопределенной метрики и максимальный порядок r групп автоморфизмов равен точно $n(n-1)/2+4$.

Соответствующие метрические функции распадаются (в мультипликативном смысле) на одномерную и $(n-1)$-мерную части.

Группы гомотетических преобразований G_r пространств D_n второго рода содержат особый двумерный нормальный делитель, порядок $r \leqslant n(n-1)/2+4$.

Отметим также в заключении, что группа изометрических преобразований пространства D_n, содержащая s наборов независимых особых операторов, раскладывается в прямое произведение $s+1$ сомножителей, s множителей из которых будут группами, подобными проективной группе на прямой [26].

Более подробное изложение теории связностей в расслоенных пространствах можно найти в книгах Номидзу, К. Яно и С. Исихара, А. Лихнеровича и др. Об автоморфизмах в таких пространствах см. [17].

Вопросы и упражнения

1. Приведите примеры пространств D_n с группой автоморфизмов G_r порядка $r = n(n+1)/2+1$. Проверьте корректность введенных понятий ω^V, X^H.

2. Верно ли, что пространство D_n с метрической функцией вида $F(x, u) = (u^1)^{2p}\varphi(x^2, x^n, u^2, \ldots, u^n)$ второго рода (p — вес u^i).

3. Докажите, что операторы двумерной группы Ли преобразований в многообразии X_n ($n \geqslant 2$) приводятся в локальных координатах к одному из следующих четырех видов:

$$1)\ p_1,\ x^2p_1,\quad 2)\ p_1,\ p_2,\quad 3)\ p_1,\ x^1p_1,\quad 4)\ p_1,\ x^1p_1+p_2\ \left(p_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}\right).$$

4. Продолжите операторы каждого из типов 1—4 предыдущего упражнения на переменные u^i (u_i) касательного и кокасательного расслоения $T(X_n)$ ($T^*(X_n)$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Базылев В. Т., Дуничев К. И., Иваницкая В. П. Геометрия I. М., 1974.
2. Базылев В. Т., Дуничев К. И. Геометрия II. М., 1975.
3. Бурбаки Н. Теория множеств. М., 1965.
4. Гильберт Д. Основания геометрии. М. — Л., 1948.
5. Евклид. Начала I—III. М. — Л., 1948—1950.
6. Егоров И. П. Введение в неевклидовы геометрии. Приволжск. изд., 1972.
7. Колмогоров А. Н., Семенович А. Ф., Нагибин Ф. Ф., Черкасов Р. С. Геометрия-6. М., 1973.
8. Колмогоров А. Н., Семенович А. Ф., Нагибин Ф. Ф., Черкасов Р. С. Геометрия-7. М., 1973.
9. Колмогоров А. Н., Семенович А. Ф., Гусев В. А., Черкасов Р. С. Геометрия-8. М., 1975.
10. Лаптев Б. Л. Геометрия Лобачевского, ее история и значение. М., 1976.
11. Лаптев Б. Л. Н. И. Лобачевский и его геометрия. М., 1976.
12. Никольский В. Н. Основания математики. Ротапр. пед. ин-та. Калинин, 1969.
13. Рохлин В. А. Площадь и объем.— В кн.: Энциклопедия элементарной математики. М., 1966, т. V, с. 5—87.
14. Столяр А. А. Логическое введение в математику. Минск, 1971.
15. Широков П. А. Краткий очерк геометрии Лобачевского. М., 1955.
16. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. М., 1977.
17. Егоров И. П. Автоморфизмы в обобщенных пространствах. — В сб.: Проблемы геометрии. М., 1978, т. 10, с. 147—192.
18. Лаптев Б. Л. Дифференцирование Ли. — В сб.: Алгебра, топология, геометрия. М., 1967.
19. Лихнерович А. Теория связностей в целом и группы голономии. М., 1960.
20. Номидзу К. Группы Ли и дифференциальная геометрия. М., 1960.
21. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М., 1967.
22. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М., 1964.
23. Weyl H., Raum, Zeit, Materie, 5 Auflage. Berlin, 1923.
24. Jano K. Ishihara S. Tangent and Cotangent Bundles. N. Y. 1973.
25. Jano K. The theory of Lie derivatives and its applications. Amsterdam, 1957.
26. VII Всесоюзная конференция по современным проблемам геометрии. Тезисы докладов. Минск, 1979.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ