Пономарев К.К.

СОСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

К. К. ПОНОМАРЕВ

СОСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»
МИНСК 1973

517.2
П56
УДК 517.9 (075.8)

Научный редактор
докт. физ.-мат. наук проф. Ю. С. Богданов

Пономарев К. К.

П56 Составление дифференциальных уравнений. Под ред. Ю. С. Богданова. Мн., «Вышэйш. школа», 1973.

560 стр. с илл.

Учебное пособие для математических, физических, механических, химических, биологических, геофизических, экономических факультетов университетов, педагогических институтов и втузов. Книга является руководством по составлению обыкновенных дифференциальных уравнений, а также простейших уравнений в частных производных. Она адресована широкому кругу лиц, встречающихся с дифференциальными уравнениями в учебной, производственной и научно-исследовательской работе.

П $\frac{0223-021}{М304(05)-73}$ 7—72 **517.2**

Пономарев Кирилл Константинович

СОСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Редактор *Т. К. Майборода.* Обложка *В. И. Шёлка.* Худож. редактор *Г. И. Важнов.* Техн. редактор *М. Н. Кислякова.* Корректоры *Е. А. Пастушенко, С. С. Голод.*

АТ 17020. Сдано в набор 3/VIII 1972 г. Подписано к печати 26/II 1973 г. Бумага 60×90¹/₁₆ типогр. № 3. Печ. л. 35. Уч.-изд. л. 31,27. Изд. № 70-92. Зак. 1116. Тираж 5000 экз.
Цена 1 руб. 01 коп.

Издательство «Вышэйшая школа» Государственного комитета Совета Министров БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Редакция литературы по естествознанию и математике. 220600, Минск, ул. Кирова, 24. Ордена Трудового Красного Знамени типография издательства ЦК КП Белоруссии. Минск, Ленинский пр., 79.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В приложениях математики к различным отраслям науки дифференциальные уравнения занимают важное место. Использование их — наиболее эффективное и распространенное средство решения прикладных задач естествознания и техники. Многие реальные процессы с помощью дифференциальных уравнений описываются просто и полно. Поэтому вполне понятно то внимание, которое уделяется вопросу составления дифференциальных уравнений.

Однако многочисленные и разнообразные приложения теории обыкновенных дифференциальных уравнений требуют в первую очередь знания соответствующих теоретических положений и законов естествознания, техники и других отраслей, которые изучаются обычно после дифференциальных уравнений. По этой причине в курсе дифференциальных уравнений решению практических задач на составление уделяется все еще недостаточное внимание. Прослушавшие этот курс не имеют достаточного навыка в решении задач, выдвигаемых жизнью, производством. Кроме того, в учебниках и учебных пособиях вопросы составления дифференциальных уравнений обычно ограничиваются элементарными задачами геометрического или кинематического типа. Поэтому целесообразно вернуться к составлению дифференциальных уравнений при изложении специальных дисциплин, а также в процессе практической или научно-исследовательской работы.

Цель автора — создание учебного пособия, которое широко охватило бы различные задачи естествознания и техники и способствовало овладению современной методикой составления дифференциальных уравнений прикладных задач, возникающих в процессе производства или научной деятельности.

Характерной особенностью освоения навыков составления дифференциальных уравнений является изучение многочисленных примеров. В связи с этим полнота изложения имеет здесь существенное значение.

Книга содержит 325 задач на составление дифференциальных уравнений, из которых 194 задачи анализируются подробно.

Рассматриваемые задачи классифицируются по их математическому признаку: описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями первого, второго, третьего и четвертого порядков, системами этих уравнений первого и второго порядков, а также дифференциальными уравнениями в частных производных, приводящимися к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Для самостоятельного решения подобрана 131 задача, большинство из которых аналогичны разобранным и снабжены ответами, а более трудные — краткими пояснениями к решению.

Учебное пособие предназначено для студентов всех отделений математических, физических, механических, химических, биологических, геофизических, экономических факультетов университетов и педагогических институтов, а также высших технических учебных заведений.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, встречающихся с дифференциальными уравнениями в учебно-методической, производственной и научно-исследовательской практике.

Автор выражает глубокую и искреннюю благодарность научному редактору книги профессору, доктору физико-математических наук Ю. С. Богданову за ценные советы и замечания, во многом способствовавшие улучшению книги.

Автор

Глава I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение для определения функции называют *дифференциальным*, если в нем участвуют дифференциалы или производные искомой функции. Таким образом, дифференциальное уравнение учитывает не только величину искомой функции, но и поведение ее (прежде всего скорость изменения в том или ином направлении) в бесконечно малой окрестности рассматриваемого значения аргумента.

Решением дифференциального уравнения называют функцию, заданную на связном множестве и обращающую дифференциальное уравнение в тождество. Характерной особенностью дифференциального уравнения является то, что каждое уравнение определяет сразу целое семейство решений, зависящее от некоторой совокупности числовых или функциональных параметров.

Дифференциальное уравнение обычно выражает некоторый общий закон, которому подчиняется бесконечное множество конкретных процессов. Для выделения конкретного процесса, которому соответствует отдельное решение дифференциального уравнения, указываются дополнительные условия — *начальные* и *граничные*, называемые в совокупности *краевыми*.

§ 2. КЛАССИФИКАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Существуют два основных типа дифференциальных уравнений: *обыкновенные*, определяющие функции одного переменного, и *в частных производных*, в которые входят производные от искомой функции по нескольким переменным.

Порядком дифференциального уравнения называют порядок старшей производной, участвующей в уравнении.

Дифференциальное уравнение имеет *нормальную* форму, если оно разрешено относительно старшей производной. В противном случае форма дифференциального уравнения считается *общей*. К отдельному виду относятся *линейные* дифференциальные уравнения.

Аналогично классифицируются системы дифференциальных уравнений.

§ 3. ОБЩЕЕ СЕМЕЙСТВО РЕШЕНИЙ, ЧАСТНОЕ И ОСОБОЕ РЕШЕНИЯ

Семейство решений обыкновенного дифференциального уравнения зависит от скалярных параметров, что проявляется в присутствии произвольных постоянных в решении уравнения. Если число произвольных постоянных совпадает с порядком уравнения, то найденное семейство решений называется *общим решением* уравнения.

Общее решение может быть заданным как в явном, так и в неявном виде. В частности, общее решение уравнения первого порядка, разрешенное относительно произвольной постоянной, называется *общим интегралом.*

Придавая произвольным постоянным фиксированные значения, получим *частные решения* уравнения. Решения уравнения, которые нельзя получить из общего, придавая произвольным постоянным определенные числовые значения, называются *особыми.* В некоторых случаях (см. задачи § 4 гл. VIII) именно особые решения и дают ответ на поставленный вопрос.

Общим решением простейшего дифференциального уравнения первого порядка

$$f(x, y, y')=0, \tag{1}$$

где f — заданная функция, называется общее выражение бесконечного множества функций, удовлетворяющих данному дифференциальному уравнению, определяемое в явном виде

$$y=F(x, C) \tag{2}$$

или в неявном

$$\Phi(x, y, C)=0, \tag{3}$$

где C — произвольная постоянная.

Если график особого решения дифференциального уравнения расположен внутри или на границе общего решения, то он обязательно является огибающей интегральных кривых, составляющих указанное общее решение. С другой стороны, все невырожденные огибающие интегральных кривых общего решения приводят к особым решениям, если только они сами не оказываются в общем решении. Указанное обстоятельство позволяет строить особые решения, отправляясь от известного общего решения. Основные факты, относящиеся к взаимоотношению общего, частного и особого решений дифференциальных уравнений, указаны Н. М. Матвеевым [8, гл. I—IV]. Детальное исследование всей проблемы в целом проведено Н. П. Еругиным [2, гл. 1—3, 8].

§ 4. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Все решения некоторых дифференциальных уравнений могут быть найдены с помощью конечного числа простейших аналитических операций и квадратур (интегрирований). Такие уравнения называются *элементарными*.

Среди дифференциальных уравнений первого порядка

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

важнейшим элементарным уравнением является *уравнение в полных дифференциалах*, т. е. уравнение с условием

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

в односвязной области задания, все решения которого (общий интеграл) дает формула

$$\int\limits_{(x_0,\, y_0)}^{(x,\, y)} M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = C,$$

где C — произвольная постоянная, а криволинейный интеграл берется по произвольному пути с фиксированным началом (x_0, y_0) и переменным концом (x, y).

Основным элементарным дифференциальным уравнением произвольного порядка является *линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами* a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x).$$

Общее решение однородного уравнения $[f(x) \equiv 0]$ можно построить с помощью алгебраических операций. Общее решение неоднородного уравнения дает сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и любого частного решения неоднородного уравнения. Частное решение неоднородного уравнения при специальных правых частях $f(x)$, например при

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} p_k(x)\, e^{\lambda_k x},$$

где $p_k(x)$ — многочлены, а λ_k — комплексные числа, получают методом неопределенных коэффициентов. При произвольной правой части $f(x)$ частное решение неоднородного уравнения находят методом вариации произвольных постоянных. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами и системы таких уравнений подробно рассмотрены Н. М. Матвеевым [8, гл. VII, X].

В некоторых случаях дифференциальные уравнения приводятся к основным элементарным формам с помощью преобразования уравнения или замены переменных. Особую роль играют равносильные и допустимые преобразования и замены. При равносильных преобразованиях семейство решений транспонированного уравнения совпадает с семейством решений исходного уравнения.

Примерами равносильных преобразований уравнения служат умножение или деление обеих его частей на положительную дифференцируемую функцию или перенос слагаемых из одной части уравнения в другую.

Преобразование уравнения некоторой прикладной задачи называется *допустимым*, если оно сохраняет решения, имеющие смысл с точки зрения условия поставленной задачи (при допустимых преобразованиях могут теряться или приобретаться только решения, не имеющие физического смысла).

Примером допустимого преобразования служит деление обеих частей уравнения на искомую функцию $y=y(x)$, если по смыслу задачи разыскиваемое решение не должно обращаться в нуль.

В настоящее время именно элементарные дифференциальные уравнения служат главным поставщиком математических моделей различных устройств и процессов. В частности, рассматриваемые в данной книге прикладные задачи чаще всего приводят к элементарным дифференциальным уравнениям, что позволяет довести исследование до конца.

Известные типы элементарных дифференциальных уравнений собраны в справочниках Э. Камке [4, 5].

§ 5. ВЫДЕЛЕНИЕ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Большинство прикладных задач сводится к построению функций, удовлетворяющих как некоторым обыкновенным дифференциальным уравнениям, так и различным дополнительным условиям, общее число которых обычно совпадает с порядком уравнения. Особенно часто задаются начальные условия для решений и их производных и тогда возникает начальная задача, называемая *задачей Коши*. Для дифференциального уравнения n-го порядка задача Коши состоит в построении того решения $y=y(x)$ данного уравнения

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0,$$

которое вместе со своими $n-1$ первыми производными принимает в заданной точке $x=x_0$ заданные значения $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$:

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}.$$

Поскольку по определению $y^{(0)}(x) \equiv y(x)$, то задача Коши для уравнения первого порядка сводится к заданию значения искомой функции $y(x)$ при $x = x_0$.

Геометрически это означает, что на плоскости задана точка (x_0, y_0). Решить задачу Коши в этом случае — значит построить интегральную кривую, проходящую через точку.

Из общего решения можно получить любое частное решение. Для этого достаточно в уравнение (2) или (3) из § 3 подставить $x = x_0$, $y = y_0$, тогда получится единственное соответствующее начальным условиям значение $C = C_0$.

Подставив найденное значение C_0 в уравнение (2) из § 3, получим единственное частное решение

$$y = F(x, C_0),$$

удовлетворяющее выбранным начальным условиям.

Если значения решения и его производных указаны при разных значениях аргумента x, то получается краевая (граничная) задача для обыкновенного дифференциального уравнения. Например, периодическая краевая задача для уравнения

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

с ω-периодической функцией F,

$$F(x+\omega, y, y', \ldots, y^{(n)}) \equiv F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}),$$

состоит в построении решения $y = y(x)$, удовлетворяющего условиям

$$y(x_0+\omega) = y(x_0),\ y'(x_0+\omega) = y_0'(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0+\omega) = y^{(n-1)}(x_0).$$

Если располагать полным семейством решений, т. е. общим решением и набором всех особых решений, то выделение индивидуальных решений данного уравнения, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям, сводится к составлению на основе общего решения системы конечных уравнений для определения произвольных постоянных, определяющих подходящие частные решения, и к отбору тех особых решений, которые соответствуют поставленным условиям.

Начальные и краевые задачи для неоднородных линейных дифференциальных уравнений удобно решать с помощью функций Коши и Грина, как это показано, например, А. М. Колобовым и А. П. Черенковой [6, § 3.3—3.6].

Построение общего решения неэлементарных дифференциальных уравнений наталкивается на принципиальные трудности, поэтому описанный способ решения задач с дополнительными условиями для таких уравнений малоэффективен. В указанных случаях строят искомые индивидуальные решения с помощью разложения решения в степенной или итерационный ряд и т. д.

§ 6. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ В ВИДЕ СТЕПЕННОГО РЯДА

Рассмотрим дифференциальное уравнение в нормальной форме:

$$y^{(n)}=f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Поставим для этого уравнения задачу Коши

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}.$$

Если функция $f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ голоморфна, т. е. разлагается в степенной ряд в окрестности точки $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$, то указанная задача Коши имеет единственное решение $y=y(x)$, которое представляется рядом

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty} B_k(x-x_0)^k. \tag{1}$$

Решение $y=y(x)$ может быть найдено методом неопределенных коэффициентов путем подстановки выражения (1) в исходное уравнение и последовательного приравнивания друг к другу коэффициентов при равных степенях разности $x-x_0$.

Построение степенных рядов, решающих линейные дифференциальные уравнения в окрестности тех значений аргумента x, при которых коэффициенты голоморфны, описано в книге [8, гл. VIII].

Если точка $(x_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ оказывается особой для функции f, то в ряде важных случаев решение задачи Коши находится в виде обобщенных степенных рядов

$$y(x)=(x-x_0)^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty} B_k(x-x_0)^k,$$

причем для их построения снова применим метод неопределенных коэффициентов.

Так, в частности, будет, если уравнение является линейным, а коэффициенты его в точке $x-x_0$ удовлетворяют условию Фукса, т. е. коэффициент при $y^{(k)}$ имеет при $x=x_0$ полюс порядка не выше $n-k$. Линейные уравнения с условием Фукса являются главными поставщиками специальных функций.

Подробно об использовании обобщенных степенных рядов см., например, во второй части курса В. И. Смирнова [11, гл. V и VI].

§ 7. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Задача Коши

$$y(x_0)=y_0, \ \ldots, \ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

для обыкновенного дифференциального уравнения

$$y^{(n)}=f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

эквивалентна задаче о построении решения системы уравнений

$$\begin{aligned}
z_0(x)&=y_0+\int_{x_0}^{x} z_1(t)\,dt,\\
z_1(x)&=y_0'+\int_{x_0}^{x} z_2(t)\,dt,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
z_{n-2}(x)&=y_0^{(n-2)}+\int_{x_0}^{x} z_{n-1}(t)\,dt,\\
z_{n-1}(x)&=y_0^{(n-1)}+\int_{x_0}^{x} f[t, z_0(t), \ldots, z_{n-1}(t)]\,dt,
\end{aligned}$$

если считать $y(x)=z_0(x)$, $y^{(k)}(x)=z^{(k)}(x)$. Решение этой системы может быть найдено методом последовательных приближений, называемым *методом итераций* или *методом Пикара.*

Для краткости изложения ограничимся случаем $n=1$. Тогда первые $n-1$ уравнений системы отпадают и она сводится к одному уравнению

$$z(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t, z(t)]\,dt.$$

Для решения последнего построим последовательность функций $u_0(x), u_1(x), \ldots, u_k(x)$ по правилу

$$\begin{aligned}
u_0(x)&\equiv y_0,\\
u_k(x)&=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t, u_{k-1}(t)]\,dt.
\end{aligned}$$

Если функция $f(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ в окрестности точки (x_0, y_0), то решение задачи Коши

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y), \quad y(x_0)=y_0$$

существует, единственно и представляется в виде равномерного предела

$$y(x)=\lim_{k\to\infty} u_k(x)$$

или в виде равномерно сходящегося ряда

$$y(x)=y_0+\sum_{k=1}^{\infty}[u_k(x)-u_{k-1}(x)].$$

§ 8. ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ

В случаях, когда решения дифференциальных уравнений получаются в виде бесконечных разложений, возникает вопрос о существовании решения вне интервала сходимости ряда, т. е. о возможности продолжения решения уравнения за границы указанного интервала. Этот вопрос имеет принципиальное значение, так как оценка промежутка существования решения дифференциального уравнения позволяет судить о тех значениях аргумента, при которых данное дифференциальное уравнение способно моделировать изучаемый процесс.

Решение линейного дифференциального уравнения продолжимо на любой интервал, на котором коэффициенты уравнения интегрируемы. Таким образом, если коэффициенты уравнения на любом конечном отрезке изменения аргумента ограничены и имеют лишь конечное число точек разрыва, то решение такого уравнения с любыми начальными значениями существует для всех значений аргумента.

Решение нелинейного дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

с правой частью $f(x, y_1, \ldots, y_n)$, непрерывной вместе со всеми $\dfrac{\partial f}{\partial y_k}$ для $x\geqslant x_0$, $-\infty<y_k<+\infty$, заведомо беспредельно продолжимо вправо от $x=x_0$, если для $f(x, y_1, \ldots, y_n)$ можно указать линейную оценку

$$|f(x, y_1, \ldots, y_n)|\leqslant A(x)[1+|y_1|+\ldots+|y_n|],$$

где положительная функция $A(x)$ интегрируема на любом промежутке $[x_0, x_0+\alpha]$, $0<\alpha<+\infty$.

Проблема продолжимости решений дифференциальных уравнений исследована Н. П. Еругиным [3].

Глава II

СОСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО УСЛОВИЯМ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ

§ 1. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ

Дифференциальные уравнения объединяют и обобщают многие идеи математического анализа, раскрывают сущность метода бесконечно малых как важнейшего средства познания явлений действительности.

Дифференциальные уравнения возникают при математической формулировке прикладных задач в дифференциальных символах.

Составить дифференциальное уравнение — это значит найти зависимость между аргументом, функцией и ее производной (или дифференциалом).

Составление дифференциальных уравнений является важным и вместе с тем трудным вопросом. Универсального метода, пригодного во всех случаях, указать нельзя. Необходимо приобретение опыта и определенных навыков в решении различных задач, что достигается разбором большого количества решенных задач и самостоятельным решением аналогичных примеров. Необходимо также знание данной прикладной дисциплины.

§ 2. МЕТОДИКА СОСТАВЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Составление дифференциального уравнения по условию задачи (механической, физической, химической, технической или любой другой) состоит обычно в определении математической зависимости между переменными величинами и их приращениями, которые сразу же заменяются соответствующими дифференциалами.

В ряде случаев дифференциальное уравнение получается без рассмотрения приращений — за счет их предварительного учета. Так, представляя скорость выражением $v=\frac{ds}{dt}$, мы не привлекаем приращений Δs и Δt, хотя они фактически учтены в силу того, что

$$v=\frac{ds}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Ускорение в любой момент времени t выражается зависимостью

$$a=\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=v\frac{dv}{ds}.$$

Изучение любого процесса сводится к определению его отдельных моментов и установлению общего закона его течения.

Отдельный момент процесса (элементарный процесс) выражается дифференциальным уравнением, связывающим переменные величины процесса с их дифференциалами или производными; закон общего течения процесса, получаемый после интегрирования, выражается уравнением, связывающим переменные величины процесса.

Исчерпывающих правил для составления дифференциальных уравнений нет.

В большинстве случаев методика решения прикладных задач с применением обыкновенных дифференциальных уравнений сводится к следующему:

1) подробный разбор условий задачи и составление чертежа, поясняющего ее суть;

2) составление дифференциального уравнения рассматриваемого процесса;

3) интегрирование этого уравнения и определение его общего решения;

4) определение частного решения задачи на основании данных начальных условий;

5) определение по мере необходимости вспомогательных параметров (например, коэффициента пропорциональности и т. д.) с использованием для этой цели дополнительных условий задачи;

6) вывод общего закона рассматриваемого процесса и числовое определение искомых величин;

7) анализ ответа и проверка исходного положения задачи.

Некоторые из этих рекомендаций в зависимости от характера задачи могут и не использоваться.

Как и при составлении алгебраических уравнений, при решении прикладных задач с помощью дифференциальных уравнений многое зависит от навыков, приобретаемых упражнением. Однако здесь еще в большей степени требуется изобретательность и глубокое понимание сути изучаемых процессов. Можно делать упрощающие допущения, например, заменять существующий сложный (криволинейный) элемент прикладной задачи более простым (прямолинейным), неравномерное движение материальной точки за малый промежуток времени равномерным, предполагать скорость протекания любого процесса за малый промежуток времени постоянной.

Идея замены одних бесконечно малых другими требует обязательного соблюдения эквивалентности заменяющего и заменяемого бесконечно малых элементов.

В математической модели задачи надо учитывать только основные параметры.

§ 3. СХЕМА СОСТАВЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Подготовительный этап

1. Установление в результате анализа задачи аргумента (независимой переменной) и искомой функции.

2. Исследование наличия конкретного смысла у производной искомой функции.

3. Поиск соотношения между дифференциалами переменных, если производная не имеет конкретного смысла.

4. Фиксирование произвольного значения аргумента и соответствующего ему значения функции; придание аргументу приращения и определения соответствующего приращения функции.

Основной этап

1. Попытка найти соотношение между приращением Δy функции и приращением Δx ее аргумента, т. е. выражение Δy в виде функции Δx и x. Искомую функцию y можно также выразить элементарным суммированием ее последовательных приращений на отрезке от a до x.

2. Введение (в случае невозможности определения соотношения между Δx и Δy) условного элемента, заменяющего приращение Δy искомой функции и характеризуемого условным приращением, которое получила бы искомая функция при наличии допущений, упрощающих характер ее изменения и не отражающихся на точности результата. Этот элемент принимается в качестве дифференциала искомой функции.

3. Проверка корректности допущений, которые по мере приближения Δx и Δy к нулю с возрастающей степенью точности приближались бы к полной истинности. Уравнение, связывающее дифференциалы dy и dx, должно составляться на основе известных законов математики, физики, химии, механики и т. д.

4. Установление зависимости между дифференциалами искомой функции dy и ее аргумента dx в общем случае в виде простейшего уравнения

$$f(x, y)dx+\varphi(x, y)dy=0$$

(или дифференциального уравнения более высокого порядка) на основе сделанных допущений, которые дают возможность заменить неравномерный процесс равномерным, используя общетеоретические законы или соотношения данной прикладной области.

5. Интегрирование полученного дифференциального уравнения задачи и определение искомой функции с учетом начальных (и дополнительных) условий.

6. Исследование полученного закона задачи в предельных случаях и изучение характера зависимости решений от параметров.

Глава III

ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, РАЗРЕШЕННЫМ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

Наиболее общий вид дифференциального уравнения первого порядка

$$M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy=0, \tag{1}$$

где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — функции x и y.

Разрешив уравнение (1) относительно производной, получим

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x, y)}{N(x, y)}=f(x, y). \tag{2}$$

Общее решение уравнения (2) имеет вид

$$y=F(x, C),$$

где C — постоянная.

Неполное дифференциальное уравнение — простейший частный вид уравнения (2):

$$\frac{dy}{dx}=f(x)$$

в котором правая часть не зависит от искомой функции, решается непосредственным интегрированием:

$$y=\int f(x)\,dx,$$

или

$$\frac{dy}{dx}=g(y),$$

откуда

$$x=\int\frac{dy}{g(y)}.$$

§ 1. ПРИТЯЖЕНИЕ СТЕРЖНЯ И МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Задача 1. Материальная точка массой m находится на продолжении оси тонкого однородного стержня массой M, длиною l на расстоянии a от его левого конца. Определить силу притяжения стержня и точки.

Решение. По закону Ньютона сила F притяжения между двумя материальными точками с массами m_1 и m_2, расположенными на расстоянии r друг от друга, выражается зависимостью

$$F = k\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{1}$$

где k — коэффициент притяжения.

Определим притяжение dF данной точки элементом стержня dx (рис. 1).

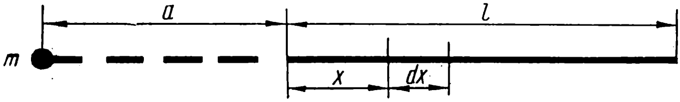

Рис. 1

Так как масса однородного стержня M, то масса m_1 элемента dx находится из пропорции $\frac{m_1}{M} = \frac{dx}{l}$, откуда

$$m_1 = \frac{Mdx}{l}.$$

Расстояние между m и dx будет $r = a + x$. По закону Ньютона (1) запишем дифференциальное уравнение задачи

$$dF = k\frac{mMdx}{l(a+x)^2}.$$

Интегрируя его, получаем общее решение

$$F = k\frac{mM}{l}\int\frac{dx}{(a+x)^2} = -k\frac{mM}{l}\cdot\frac{1}{a+x} + C.$$

Начальное условие: при $x = 0 \quad F = 0$, откуда

$$0 = -k\frac{mM}{l}\cdot\frac{1}{a+0} + C$$

или

$$C = k\frac{mM}{l}\cdot\frac{1}{a}.$$

Притяжение массы m отрезком x стержня будет

$$F = k\frac{mM}{l}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+x}\right).$$

При $x = l$ получаем притяжение массы m всем стержнем:

$$F = k\frac{mM}{l}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+l}\right) = k\frac{mM}{a(a+l)}.$$

§ 2. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ ПОСТОЯННОЙ МАССЫ

Прямолинейное движение с постоянным ускорением

Задача 2. Материальная точка движется по прямой с постоянным ускорением a. Найти закон движения точки.

Решение. Ускорение a представляет производную от скорости v по времени t, т. е. $\frac{dv}{dt}=a$, поэтому

$$dv=adt. \tag{1}$$

Интегрируя уравнение (1), находим

$$v=at+C_1. \tag{2}$$

Для определения C_1 положим, что начальная скорость равна v_0, т. е. при $t=0$ $v=v_0$. Подстановка начальных условий в уравнение (2) дает

$$v_0=0+C_1 \quad \text{или} \quad C_1=v_0.$$

Таким образом, уравнение (2) примет вид

$$v=at+v_0. \tag{3}$$

Так как скорость представляет производную пути s по времени t, т. е. $v=\frac{ds}{dt}$, то равенство (3) преобразуется к виду

$$\frac{ds}{dt}=at+v_0$$

или

$$ds=atdt+v_0dt.$$

Интегрируя последнее равенство, получим общее решение задачи

$$s=\frac{1}{2}at^2+v_0t+C_2. \tag{4}$$

Для определения C_2 будем считать, что начальное положение, равное расстоянию при $t=0$, будет s_0, т. е. $s=s_0$ при $t=0$. Подставим эти значения в уравнение (4):

$$s_0=0+0+C_2 \quad \text{или} \quad C_2=s_0.$$

Следовательно,

$$s=\frac{1}{2}at^2+v_0t+s_0. \tag{5}$$

Положив в уравнениях (3) и (5) $a=g$, $v_0=0$, $s_0=0$, $s=h$, получим закон свободного падения тела в пустоте:

$$v=gt \quad \text{и} \quad h=\frac{1}{2}gt^2.$$

Прямолинейное движение с переменным ускорением

Задача 3. Скорость движущегося тела возрастает обратно пропорционально пройденному пути. В начальный момент движения тело находилось на расстоянии 5 *м* от начала отсчета пути и имело скорость $v_0=20$ *м/сек*. Определить пройденный путь и скорость тела через 10 *сек* после начала движения.

Решение. Пусть t — время, s — путь, пройденный телом. Скорость движения тела есть производная пути по времени.

По условию дифференциальное уравнение задачи

$$\frac{ds}{dt}=\frac{k}{s}, \tag{1}$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Разделяя переменные и интегрируя уравнение (1), получим

$$sds=kdt; \quad \frac{s^2}{2}=kt+C,$$

откуда

$$s^2=2(kt+C)$$

или

$$s=\sqrt{2}\sqrt{kt+C}. \tag{2}$$

Дифференцируя функцию (2), найдем скорость движения

$$v=s'=\sqrt{2}\frac{k}{2\sqrt{kt+C}}=\frac{k}{\sqrt{2}\sqrt{kt+C}}. \tag{3}$$

Начальное условие: при $t=0$ $s=5$,

$$v=s'=20. \tag{4}$$

Тогда

$$s(0)=\sqrt{2}\sqrt{k\cdot 0+C}=\sqrt{2C}=5.$$

Постоянная интегрирования

$$C=\frac{25}{2}. \tag{5}$$

Используя второе условие (4) и равенство (5), получаем равенство для определения коэффициента пропорциональности:

$$v_0=s'(0)=\frac{k}{\sqrt{2}\sqrt{k\cdot 0+C}}=\frac{k}{\sqrt{2}\sqrt{C}}=20,$$

откуда

$$k=20\sqrt{2}\sqrt{C}=20\sqrt{2}\frac{5}{\sqrt{2}}=100. \tag{6}$$

Подставим найденные значения (5) и (6) в уравнение (2):

$$s=\sqrt{2}\sqrt{100t+\frac{25}{2}}=\sqrt{2}\sqrt{\frac{200t+25}{2}}$$

или

$$s=\sqrt{200t+25}. \tag{7}$$

Так как

$$v=s'=\frac{100}{\sqrt{2}\sqrt{100t+\frac{25}{2}}}=\frac{100}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{200t+25}{2}}},$$

то

$$v=s'=\frac{100}{\sqrt{200t+25}}.$$

Искомый путь найдем, подставляя в уравнение (7) значение $t=10$:

$$s(10)=\sqrt{200\cdot 10+25}=\sqrt{2025}=45 \text{ м}.$$

Определим скорость

$$v_{10}=s'(10)=\frac{100}{45}=\frac{20}{9} \text{ м/сек}.$$

Задача 4. Ускорение локомотива, имеющего начальную скорость v_0, прямо пропорционально силе тяги F и обратно пропорционально массе поезда m. Сила тяги локомотива

$$F=b-kv,$$

где v — скорость, b и k — постоянные величины. Найти силу тяги локомотива по истечении времени t, если в начальный момент при $t=0$ $F=F_0=b-kv_0$.

Решение. Пусть скорость v движения локомотива является функцией времени, т. е. $v=v(t)$. Тогда ускорение локомотива

$$a = \frac{dv}{dt}.$$

По условию

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m},$$

где $F = b - kv$.

Поэтому дифференциальное уравнение задачи

$$\frac{dv}{dt} = \frac{b - kv}{m}. \qquad (1)$$

После разделения переменных уравнение (1) принимает вид

$$\frac{dv}{b - kv} = \frac{1}{m}\,dt.$$

Интегрируя, имеем

$$-\frac{1}{k}\ln(b - kv) = \frac{1}{m}t + C,$$

откуда общее решение уравнения

$$t = -\frac{m}{k}\ln(b - kv) + C. \qquad (2)$$

Начальное условие: при $t = 0$ $v = v_0$. Отсюда

$$0 = -\frac{m}{k}\ln(b - kv_0) + C$$

или

$$C = \frac{m}{k}\ln(b - kv_0).$$

Найденную постоянную интегрирования подставляем в общее решение (2) и получаем

$$t = \frac{m}{k}\ln\frac{b - kv_0}{b - kv} = \frac{m}{k}\ln\frac{F_0}{F}. \qquad (3)$$

Искомая сила тяги находится из равенства (3) путем его потенцирования

$$\frac{kt}{m} = \ln\frac{F_0}{F}$$

или

$$F = F_0 e^{-\frac{kt}{m}}.$$

Вращение вокруг оси

Задача 5. Материальная точка массой m расположена на кривой AB (рис. 2), вращающейся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. Найти уравнение кривой AB, если материальная точка находится в равновесии в произвольном положении на кривой.

Решение. В положении равновесия равнодействующая R силы тяжести и центробежной силы направлена по нормали к кривой AB, так как реакция связи направлена по нормали. На точку M действуют сила тяжести $P=mg$ и центробежная сила $F=m\omega^2x$. Здесь g — ускорение силы тяжести.

Пусть искомое уравнение кривой AB имеет вид $y=y(x)$. Угловой коэффициент нормали к кривой AB равен $-\frac{1}{y'}$; угловой коэффициент равнодействующей равен $-\frac{mg}{m\omega^2x}=-\frac{g}{\omega^2x}$. Следовательно,

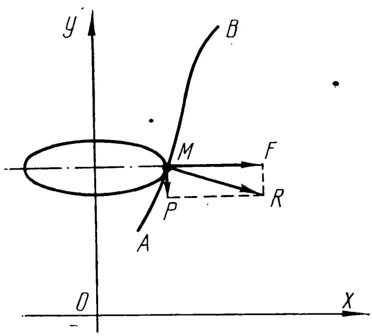

Рис. 2

$$-\frac{1}{y'}=-\frac{g}{\omega^2x}$$

или

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\omega^2}{g}x,$$

откуда

$$dy=\frac{\omega^2}{g}xdx.$$

Интегрируя это уравнение, получим семейство парабол

$$y=\frac{\omega^2}{2g}x^2+C,$$

где C — расстояние между кривыми семейства.

Свободная поверхность жидкости во вращающемся сосуде

Задача 6. Цилиндрический сосуд с радиусом основания r и высотой h наполовину заполнен водой. Какую форму примет поверхность воды, если сосуд вращать вокруг продольной оси с угловой скоростью ω?

Решение. Начало координат поместим в центр основания сосуда (рис. 3). Ось x возьмем в любом направлении на плоскости его основания, ось z направим по продольной оси сосуда.

Определим сечение искомой поверхности плоскостью xOz.

На частицу воды M поверхности вращения с массой m действуют силы: тяжести $P=mg$, центробежная $F=m\omega^2x$ и реакции воды R (рис. 4).

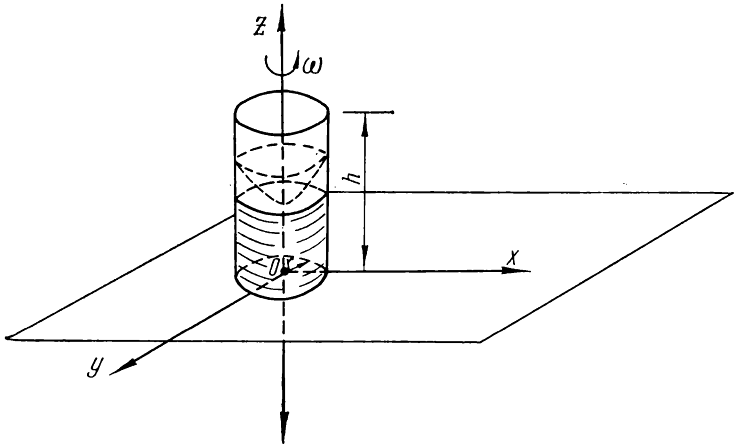

Рис. 3

Определим направляющие углы этих сил:

$$(\widehat{P;x})=90^\circ,\ (\widehat{P;z})=180^\circ,\ (\widehat{F;x})=0,$$

$$(\widehat{F;z})=90^\circ,\ (\widehat{R;x})=90^\circ+\alpha,\ (\widehat{R;z})=\alpha.$$

Направляющие косинусы этих сил:

$$\cos(\widehat{P,x})=0,\ \cos(\widehat{P;z})=-1,\ \cos(\widehat{F;x})=1,$$

$$\cos(\widehat{F;z})=0,\ \cos(\widehat{R;x})=-\sin\alpha=-\frac{dz}{ds},$$

$$\cos(\widehat{R;z})=\cos\alpha=\frac{dx}{ds}.$$

Составляющие сил, действующих на частицу воды:

$$P_x=0,\ P_z=-P=-mg,\ F_x=F=m\omega^2x,\ F_z=0,$$

$$R_x=-R\frac{dz}{ds},\quad R_z=R\frac{dx}{ds}. \tag{1}$$

Система сил, действующих на частицу воды поверхности вращения, находится в равновесии и поэтому суммы составляющих по осям должны равняться нулю:

$$P_x+F_x+R_x=0,$$
$$P_z+F_z+R_z=0.$$

Принимаем во внимание обозначения (1):

$$\left.\begin{aligned} -R\frac{dz}{ds}-m\omega^2x=0,\\ R\frac{dx}{ds}-mg=0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Из системы (2) исключаем величину $\frac{R}{ds}$, и тогда дифференциальное уравнение задачи

$$\frac{\omega^2x}{dz}=\frac{g}{dx},$$

откуда

$$dz=\frac{\omega^2}{g}xdx.$$

После интегрирования найдем общее решение

$$z=\frac{\omega^2}{2g}x^2+C. \qquad (3)$$

Итак, искомое сечение принадлежит семейству парабол с вершинами в точках $(0, C)$ и параметром $p=\frac{\omega^2}{4g}$. Так как ось x взята в произвольном направлении на плоскости дна цилиндрического сосуда, то аналогичные параболы получим для всех сечений поверхности плоскостями, проходящими через ось z. Таким образом, искомая поверхность есть параболоид вращения с осью, направленной по оси цилиндрического сосуда.

Для определения постоянной интегрирования в уравнении (3) обозначим на рис. 5 отрезки OA и B_1B символами h_2 и h_1. При $x=0$ $z=h_2$; при $x=r$ $z=h_1$. Подставляем эти значения в общее решение (3), откуда

$$h_2=\frac{\omega^2}{2g}\cdot 0^2+C, \quad h_1=\frac{\omega^2r^2}{2g}+C$$

или

$$C=h_2; \quad C=h_1-\frac{\omega^2r^2}{2g}. \qquad (4)$$

В двух равенствах (4) имеются три неизвестные постоянные C, h_1 и h_2. Для составления дополнительного третьего уравнения обратим внимание на объем жидкости, который ввиду слабой сжимаемости воды не изменяется от вращения. До вращения высота воды в сосуде равнялась $\frac{h}{2}$, а соответствующий объем воды $\frac{\pi r^2}{2} h$. Такой объем воды остается и при вращении, но теперь его можно опре-

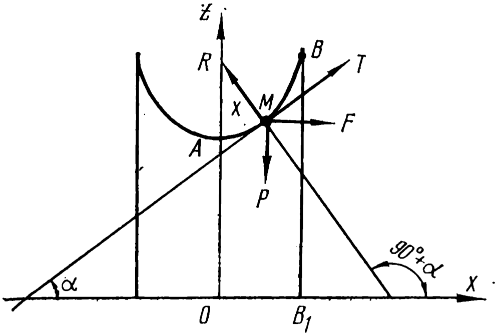

Рис. 4

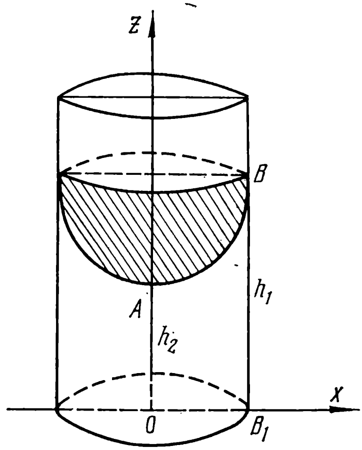

Рис. 5

делить как разность объемов цилиндрического сосуда высотой h_1 и сегмента параболоида вращения высотой $h_1 - h_2$. Первый объем будет $\pi r^2 h_1$, второй объем $\frac{1}{2} \pi r^2 (h_1 - h_2)$. Таким образом, объем воды равен $\frac{\pi r^2}{2} (h_1 + h_2)$.

Сравниваем этот объем с первоначальным

$$\frac{\pi r^2}{2} h = \frac{\pi r^2}{2} (h_1 + h_2)$$

или

$$h = h_1 + h_2. \tag{5}$$

Следовательно, имеем три условия (4) и (5) для определения постоянных. Исключаем h_1 и h_2 из трех уравнений и получаем

$$C = \frac{h}{2} - \frac{\omega^2 r^2}{4g}.$$

Итак, уравнение искомого сечения

$$z=\frac{\omega^2}{2g}x^2+\frac{h}{2}-\frac{\omega^2r^2}{4g}$$

или

$$z=\frac{h}{2}+\frac{\omega^2}{2g}\left(x^2-\frac{r^2}{2}\right).$$

Уравнение параболоида вращения получится после замены x^2 выражением x^2+y^2. Уравнение искомой поверхности воды будет

$$z=\frac{h}{2}+\frac{\omega^2}{2g}\left(x^2+y^2-\frac{r^2}{2}\right).$$

§ 3. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ (БЕЗ УЧЕТА ВНЕШНИХ СИЛ)

Скорость полета ракеты

Задача 7. Ракета с начальной массой m_0 *кг* взлетает с земной поверхности в вертикальном направлении. Газы выбрасываются постоянными долями a *кг/сек* и с постоянной скоростью b *м/сек* относительно ракеты, где $a>0$ и $b>0$. Найти скорость ракеты и расстояние, пройденное за время t, не учитывая действия внешних сил на ракету.

Решение. Движение ракеты вызывается реакцией струи раскаленных газов, образованных сгоранием топлива и вытекающих с большой скоростью из отверстия, расположенного в нижней части корпуса ракеты. Ракета несет с собой весь запас топлива, который составляет главную часть переменной массы ракеты.

Извержение массы газа увеличивает скорость ракеты, что дает ей возможность продолжать движение. Для исследования движения ракеты необходимо сначала рассмотреть движение тела с переменной массой.

Согласно второму закону динамики, изменение количества движения пропорционально движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.

Если K — количество движения тела с массой m, F — действующая сила, то в момент времени t

$$F=\frac{dK}{dt}$$

или

$$F=\frac{d(mv)}{dt}.$$

Применим второй закон Ньютона к движению ракеты.

Предположим, что общая масса ракеты в момент времени t будет m, а в последующий момент времени $t+\Delta t$ — составит $m+\Delta m$ (масса газа, выброшенного за время Δt, равна $-\Delta m$, так как является отрицательной (убывающей) величиной и поэтому $m-(-\Delta m)=m+\Delta m$).

Предположим, что скорость ракеты относительно Земли в момент времени t будет v, а в момент $t+\Delta t$ будет $v+\Delta v$, и примем вертикальное направление ракеты в качестве положительного.

Выброшенная струя газа будет иметь скорость $v+v_1$ относительно Земли, где v_1 — отрицательная величина, так что $-v_1$ представляет действительную величину скорости газа относительно ракеты, которую будем считать постоянной.

Общий момент движения ракеты перед выхлопом газа будет mv, а после выхода газа $(m+\Delta m)(v+\Delta v)$. Количество движения газа $-\Delta m(v+v_1)$, так что общее количество движения после выхода струи будет $(m+\Delta m)(v+\Delta v)-\Delta m(v+v_1)$.

Изменение количества движения, т. е. общее количество движения после выхода струи газа минус общее количество перед выходом, составит

$$(m+\Delta m)(v+\Delta v)-\Delta m(v+v_1)-mv=m\Delta v-v_1\Delta m+\Delta m\Delta v.$$

Производная изменения количества движения есть предел изменения количества движения, деленный на Δt, когда $\Delta t\to 0$, т. е.

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(m\frac{\Delta v}{\Delta t}-v_1\frac{\Delta m}{\Delta t}+\frac{\Delta m}{\Delta t}\Delta v\right)=m\frac{dv}{dt}-v_1\frac{dm}{dt}.$$

Производная от количества движения тела равна по величине действующей силе F и совпадает с ней по направлению. Поэтому

$$F=m\frac{dv}{dt}-v_1\frac{dm}{dt}. \qquad (1)$$

Уравнение (1) является исходным уравнением движения ракеты. При отсутствии внешних сил его левая часть $F=0$.

Так как ракета выбрасывает a *кг/сек* газа, то в течение t *сек* она выбросит at *кг/сек*, и поэтому ее масса, спустя t *сек*, составит $m=m_0-at$. Скорость газа относительно ракеты дана: $v_1=-b$.

Таким образом, на основании уравнения (1) получаем

$$0=(m_0-at)\frac{dv}{dt}-ab$$

или

$$\frac{dv}{dt}=\frac{ab}{m_0-at}. \qquad (2)$$

Интегрируя уравнение (2), находим

$$v=-b\int\frac{d(m_0-at)}{m_0-at},$$

откуда

$$v=-b\ln(m_0-at)+C_1.$$

Начальное условие: при $t=0$ $v=0$. Отсюда постоянная интегрирования

$$C_1=b\ln m_0.$$

Общее решение уравнения

$$v=b\ln m_0-b\ln(m_0-at) \tag{3}$$

представляет искомую скорость ракеты.

Пусть x — расстояние, измеряемое от поверхности Земли, которое проходит ракета за время t. Тогда скорость $v=\frac{dx}{dt}$ и, согласно равенству (3), получаем

$$\frac{dx}{dt}=b\ln m_0-b\ln(m_0-at)=-b[\ln(m_0-at)-\ln m_0]=$$
$$=-b\ln\left(\frac{m_0-at}{m_0}\right).$$

Интегрируем это уравнение:

$$x=-b\int\ln\left(\frac{m_0-at}{m}\right)dt+C.$$

Так как

$$\int\ln z dz=z\ln z-z+C,$$

то

$$x=\frac{bm_0}{a}\left[\frac{m_0-at}{m_0}\ln\left(\frac{m_0-at}{m_0}\right)-\left(\frac{m_0-at}{m_0}\right)\right]+C=$$
$$=\frac{b(m_0-at)}{a}\ln\frac{(m_0-at)}{m_0}-\frac{b}{a}(m_0-at)+C. \tag{4}$$

Начальное условие: при $t=0$ $x=0$. Отсюда $0=0-\frac{b}{a}m_0+C$ и постоянная интегрирования $C=\frac{b}{a}m_0$. Подставляя ее в уравнение (4), получаем искомое расстояние

$$x=bt+\frac{b}{a}(m_0-at)\ln\left(\frac{m_0-at}{m_0}\right). \tag{5}$$

Уравнения (3) и (5) действительны только для $t<\frac{m_0}{a}$, что представляет теоретический предел времени полета. Практический предел значительно меньше теоретического.

Высота подъема ракеты

Задача 8. Ракета с начальной массой m_0 запускается вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Масса ракеты уменьшается с постоянной скоростью и в момент t составляет $m=m_0-kt$, где k — постоянный коэффициент. Предполагается, что убывающая масса движется назад с постоянной скоростью b относительно ракеты. Найти высоту подъема ракеты в любое время t, учитывая лишь ее силу тяжести mg.

Решение. Движение ракеты происходит путем выброса струи горящего газа назад с определенной скоростью относительно ракеты. Это образует реактивную силу F_R в направлении движения ракеты.

Если F_H — внешняя сила, действующая на ракету, то суммарная сила F_H+F_R и дифференциальное уравнение движения

$$\frac{d}{dt}(mv)=F_H+F_R. \tag{1}$$

Для определения силы F_R принимаем, что она равна скорости изменения количества движения убывающей массы.

Если Δm — убыль массы за время Δt и масса Δm имеет скорость $v-u$, т. е. скорость $-u$ относительно ракеты, то количество движения убывающей массы $\Delta m(v-u)$. Следовательно,

$$F_R=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta t}(v-u)=\frac{dm}{dt}(v-u). \tag{2}$$

Подставляя соотношение (2) в уравнение (1), получаем дифференциальное уравнение движения

$$\frac{d}{dt}(mv)=F_H+\frac{dm}{dt}(v+u).$$

Раскрываем скобки в левой части равенства и сокращаем подобные члены:

$$m\frac{dv}{dt}+u\frac{dm}{dt}=F_H. \tag{3}$$

По условию задачи положительное направление x вверх, поэтому уравнение (3) записывается в виде

$$(m_0-kt)\frac{dv}{dt}+(-k)b=-(m_0-kt)g$$

или

$$\frac{dv}{dt}=\frac{kb}{m_0-kt}-g.$$

Интегрируя, получаем общее решение

$$v=-b\ln(m_0-kt)-gt+C_1. \tag{4}$$

Начальное условие: при $t=0$ $v=v_0$. Отсюда, согласно равенству (4):

$$C_1=v_0+b\ln m_0.$$

Тогда

$$v=v_0-gt+b\ln\left(1-\frac{kt}{m_0}\right).$$

Интегрируя повторно, учитывая $v=\frac{dx}{dt}$, получаем

$$x=v_0t-\frac{gt^2}{2}-\frac{b}{k}(m_0-kt)\left[\ln\left(1-\frac{kt}{m_0}\right)-1\right]+C_2.$$

Начальное условие: при $t=0$ $x=0$. Отсюда

$$C_2=-\frac{bm_0}{k}.$$

Искомый закон движения

$$x=(v_0-b)t-\frac{1}{2}gt^2-\frac{bm_0}{k}\left(1-\frac{kt}{m_0}\right)\ln\left(1-\frac{kt}{m_0}\right).$$

§ 4. РАСТЯЖЕНИЕ УПРУГОЙ НИТИ

Работа растяжения переменной силы

Задача 9. Стальная проволока длиной l с поперечным сечением F растягивается с силой, постепенно возрастающей до величины P. Найти работу растяжения.

Решение. Удлинение проволоки Δl под влиянием растягивающей силы P определяется по формуле

$$\Delta l=k\frac{P}{F}l_0,$$

где k — коэффициент удлинения, l_0 — первоначальная длина проволоки.

Рассмотрим элементарный процесс:

$$dl = \frac{kl_0}{F} dP. \tag{1}$$

Принимая на бесконечно малом участке удлинения dl силу P постоянной, получим работу, производимую этой силой на рассматриваемом участке,

$$dW = Pdl$$

или, используя уравнение (1), дифференциальное уравнение процесса:

$$dW = \frac{kl_0}{F} PdP. \tag{2}$$

Интегрируя уравнение (2), получим общее решение

$$W = \frac{kl_0}{2F} P^2 + C.$$

Для определения C используем начальные данные: при $P=0$ $W=0$, следовательно,

$$0 = \frac{kl_0}{2F} \cdot 0 + C,$$

откуда

$$C = 0.$$

Итак, искомая работа растяжения

$$W = \frac{kl_0}{2F} P^2.$$

Удлинение от собственного веса

Задача 10. Стальная проволока длиной L *м* защемлена в одном из концов и под действием своего веса находится в положении равновесия (рис. 6). Определить удлинение проволоки. Объемный вес стали γ $T/м^3$.

Решение. Величина натяжения T меняется в зависимости от места сечения. Это натяжение равно весу ниже расположенной части проволоки. Поэтому различные элементы проволоки растягиваются по-разному. В точке на расстоянии x от закрепления элемент dx испытывает натяжение T, определяемое из пропорции

$$\frac{T}{P} = \frac{L-x}{L}, \tag{1}$$

где P — вес всей проволоки.

Из уравнения (1)

$$T = \frac{P}{L}(L - x).$$

Удлинение проволоки ΔL (*м*) под влиянием растягивающей силы T (*кГ*) будет

$$\Delta L = k\frac{T}{F}L,$$

где k — коэффициент удлинения, F — площадь поперечного сечения, *см*².

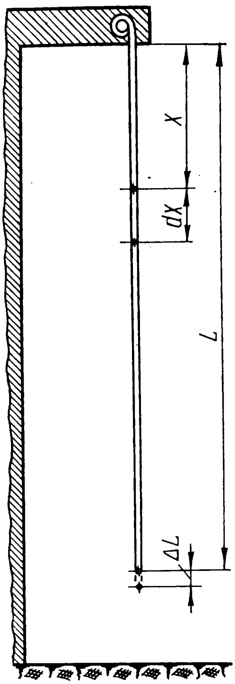

Рис. 6

Для растяжения элемента dx находим

$$dL = k\frac{T}{F}dx$$

или

$$dL = \frac{kP}{LF}(L - x)\,dx. \qquad (2)$$

С другой стороны, $P = \frac{\gamma LF}{1000}$ *кГ*, если L в *см*. Подставляя последнее выражение в уравнение (2), получим дифференциальное уравнение процесса

$$dL = \frac{k\gamma}{1000}(L - x)\,dx.$$

Интегрируя, получим полное удлинение

$$L = \frac{k\gamma}{1000}\int_0^L (L - x)\,dx$$

или

$$L = \frac{k\gamma}{2000}L^2 \text{ м}.$$

Форма каната цепного моста

Задача 11. Найти кривую, которую образует канат цепного моста.

Решение. Часть каната AB (рис. 7) находится в равновесии под действием трех сил: горизонтального натяжения H в точке A, натяжения T, направленного вдоль каната, в точке B и веса части моста между точками A и B. Весом каната ввиду малости пренебрегаем.

Вес части моста между A и B пропорционален длине x и равен kx. На основании уравнений статики сумма проекций всех действующих сил на вертикальную и горизонтальную оси равна нулю. Отсюда получаем условия равновесия сил — вертикальных:

$$T \sin \varphi = kx, \tag{1}$$

горизонтальных:

$$T \cos \varphi = H. \tag{2}$$

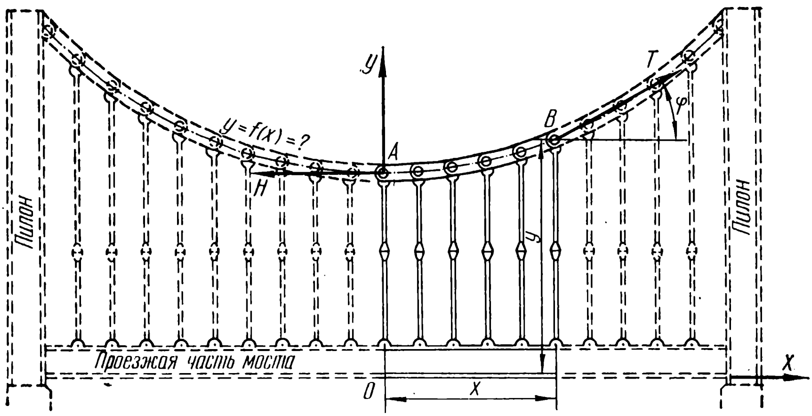

Рис. 7

Разделив уравнение (1) на уравнение (2), получаем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k}{H} x.$$

Как известно,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}.$$

Таким образом,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k}{H} x.$$

Интегрируя последнее равенство, получим уравнение свешивания каната

$$y = \frac{k}{2H} x^2 + C. \tag{3}$$

Уравнение (3) представляет семейство парабол.

§ 5. РАБОТА ОПОРОЖНЕНИЯ СОСУДОВ

Задача 12. В вертикальном цилиндрическом резервуаре диаметром $2r$ находится жидкое топливо с удельным весом γ. Высота жидкости в резервуаре h, а общая высота резервуара H (рис. 8). Найти работу, которую необходимо затратить для опорожнения резервуара.

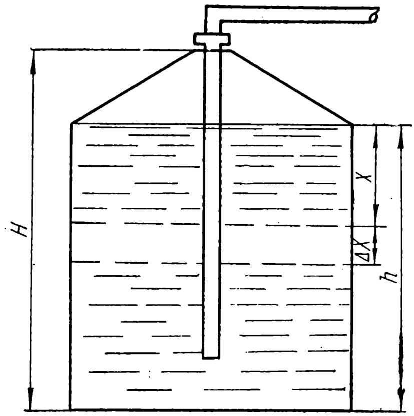

Рис. 8

Решение. Работа постоянной силы F на прямолинейном пути s равна

$$A = Fs\cos\alpha,$$

где α — угол между F и s. Работу A при выкачивании примем за искомую функцию расстояния x слоя жидкости до крана, т. е. $A = A(x)$. Аргументу x дадим приращение Δx, выделив из всей жидкости слой малой толщины. Производящая работу сила F остается постоянной на высоте Δx и определяется весом слоя: $F = \pi r^2 \gamma \Delta x$. Приращение работы, необходимой для выкачивания слоя толщиной $\Delta x = dx$ на высоту x, будет ее дифференциалом dA, величина которого равна произведению силы на расстояние, или

$$dA = \pi r^2 \gamma dx \cdot x = \pi r^2 \gamma x dx. \qquad (1)$$

Общее решение дифференциального уравнения (1)

$$A = \pi r^2 \gamma \frac{x^2}{2} + C. \qquad (2)$$

Начальное условие: при $x = 0$ $A = 0$. Отсюда, согласно уравнению (2), постоянная интегрирования $C = 0$. Тогда равенство (2) принимает окончательный вид

$$A = \pi r^2 \gamma \frac{x^2}{2}.$$

Работа A_1 при $x = H$ будет

$$A_1 = \pi r^2 \gamma \frac{H^2}{2},$$

работа A_2 при $x=H-h$ будет

$$A_2=\pi r^2\gamma\frac{(H-h)^2}{2}.$$

Работа, затраченная на выкачивание всего топлива,

$$A=A_1-A_2=\pi r^2\gamma\left(\frac{H^2}{2}-\frac{H^2}{2}+Hh-\frac{h^2}{2}\right)=\pi r^2\gamma h\left(H-\frac{h}{2}\right).$$

Величина

$$\pi r^2\gamma h=P,$$

где P — вес всей жидкости. Тогда искомая работа

$$A=P\left(H-\frac{h}{2}\right).$$

§ 6. ИЗМЕНЕНИЕ ЯРКОСТИ СВЕТА В СТЕКЛЯННОЙ ПЛАСТИНЕ

Задача 13. Найти закон изменения яркости света после прохождения через стеклянную пластину, если при прохождении через слой толщиной $x_1=2{,}5$ *мм* яркость света B_1 составила 30 межд. ед., а на поверхности ($x_0=0$) начальная яркость $B_0=100$ межд. ед. (рис. 9). Лучи падают на поверхность пластины под любым углом, а его изменение отражается на величине коэффициента k.

Решение. Величина яркости света B, пропускаемого стеклянной пластиной, изменяется в зависимости от толщины пластины. Часть световой энергии поглощается стеклом, и сила света уменьшается. Так как яркость света зависит от толщины пластины, то силу света I будем рассматривать как функцию толщины x, т. е. $I=I(x)$. Если при толщине стеклянной пластины x *мм* сила света I межд. ед., то при увеличении толщины пластины на величину Δx получим уменьшение яркости света.

Пусть сила света на участке Δx уменьшается равномерно. Тогда условное уменьшение яркости после прохождения через слой толщиной Δx можно определить

$$dI=-kIdx, \tag{1}$$

где k — коэффициент пропорциональности, $\Delta x=dx$. Знак минус указывает на уменьшение яркости с утолщением стеклянной пластины.

Из дифференциального уравнения (1) после разделения переменных находим

$$\frac{dI}{I} = -kdx,$$

откуда после интегрирования получаем

$$\ln I = -kx + C. \tag{2}$$

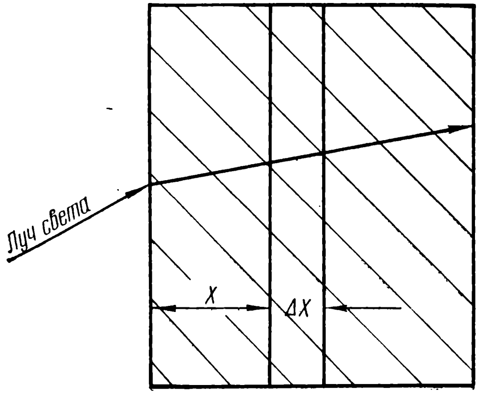

Рис. 9

Начальное условие: при $x_0 = 0$ $I_0 = 100$. Отсюда, согласно уравнению (2),

$$\ln 100 = -k \cdot 0 + C$$

и

$$C = \ln 100.$$

Подставляя найденное значение C в общее решение (2), получаем

$$\ln I = -kx + \ln 100,$$

тогда

$$\ln \frac{I}{100} = -kx. \tag{3}$$

Дополнительное условие: при $x_1 = 2{,}5$ $I_1 = 30$ дает равенство

$$\ln \frac{30}{100} = -2{,}5k,$$

откуда коэффициент пропорциональности

$$k = -\frac{2}{5} \ln 0{,}3 = 0{,}481. \tag{4}$$

Найденное значение коэффициента пропорциональности (4) подставляем в равенство (3), после чего искомый закон принимает вид

$$\ln \frac{I}{100} = -0{,}481x$$

или

$$I = 100\, e^{-0{,}481x}.$$

§ 7. НАГРЕВ ТЕЛА

Теплота нагрева

Задача 14. Найти количество теплоты, необходимое для нагрева 1 *кг* железа от 20 до 21° С. Удельная теплоемкость c железа выражается зависимостью $c = 0{,}1053 + 0{,}000142t$, где t — температура.

Решение. Количество теплоты Q, необходимое для нагрева, будет функцией температуры, т. е. $Q = Q(t)$. Теплоемкость тела представляет изменение количества теплоты Q при изменении температуры t и определяется как производная $\frac{dQ}{dt}$. Удельная теплоемкость представляет производную $\frac{dQ}{dt}$.

По условию

$$\frac{dQ}{dt} = 0{,}1053 + 0{,}000142t$$

или

$$dQ = (0{,}1053 + 0{,}000142t)\,dt.$$

Интегрируем это уравнение:

$$Q = 0{,}1053t + 0{,}000071t^2 + C. \qquad (1)$$

Начальное условие: при $t = 0$ $Q = 0$. Отсюда, согласно уравнению (1), находим, что $C = 0$.

Тогда

$$Q = 0{,}1053t + 0{,}000071t^2.$$

Для определения количества теплоты, необходимого для нагрева 1 *кг* железа от 20 до 21° С, находим

$$Q\ (21) = 0{,}1053 \cdot 21 + 0{,}000071 \cdot 441 = 2{,}2426\ \textit{ккал},$$

$$Q\ (20) = 0{,}1053 \cdot 20 + 0{,}000071 \cdot 400 = 2{,}1344\ \textit{ккал},$$

откуда

$$Q\ (21) - Q\ (20) = 0{,}1082\ \textit{ккал} \approx 0{,}11\ \textit{ккал}.$$

Прохождение теплоты через пластину

Задача 15. Пластина из графита толщиной 10 *мм* на поверхностях имеет постоянные температуры $t_1=1300^\circ$ C и $t_2=100^\circ$ C. Найти удельный поток теплоты q, проходящий через графитную пластину с коэффициентом теплопроводности $\lambda=144\cdot 10^{-\frac{t}{2000}}$.

Решение. По закону Фурье

$$q=-\lambda(t)\frac{dt}{dx}, \qquad (1)$$

где q — удельный поток теплоты, λ — коэффициент теплопроводности, $\frac{dt}{dx}$ — скорость изменения температуры.

Подставляя данные задачи в соотношение (1), получим дифференциальное уравнение процесса

$$qdx=-144\cdot 10^{-\frac{t}{2000}}\cdot dt,$$

которое после интегрирования принимает вид

$$qx=-\frac{144}{\frac{1}{2000}\ln 10}\cdot 10^{-\frac{t}{2000}}+C. \qquad (2)$$

Начальное условие: при толщине пластины $x=0$ $t=t_1=$ $=1300^\circ$ C. Отсюда

$$0=-\frac{288\,000}{10}\cdot 10^{-\frac{13}{20}}+C$$

и

$$C=\frac{288\,000}{\ln 10}\cdot 10^{-\frac{13}{20}}.$$

Подставляем значение C в общий интеграл (2):

$$qx=\frac{288\,000}{\ln 10}\left(10^{-\frac{13}{20}}-10^{-\frac{t}{2000}}\right).$$

Дополнительное условие: при $x=10$ *мм* $t=t_2=100^\circ$ C, откуда

$$q=\frac{288\,000}{\ln 10}\left(10^{-\frac{13}{20}}-10^{-\frac{1}{20}}\right)=8{,}32\cdot 10^6\ \text{ккал}/\text{м}^2\text{ч}.$$

Распределение температуры внутри ограждающих поверхностей

Задача 16. Кирпичная стена толщиной 30 *см* имеет температуру на внутренней поверхности 20° С, а на наружной 0° С (рис. 10). Найти зависимость температуры внутри стены от расстояния до ее наружного края и количество теплоты, которое отдает наружу 1 $м^2$ стены в течение суток.

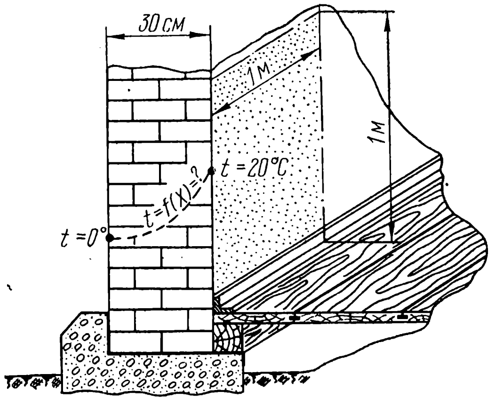

Рис. 10

Решение. Количество теплоты, проходящее через единицу поверхности в единицу времени, равно $k\frac{dt}{dx}$, где t — температура, x — расстояние до наружной стены, k — коэффициент теплопроводности (для кирпича — 0,2 *ккал/м·ч·град*).

Температурный градиент $\frac{dt}{dx}$ характеризует интенсивность падения температуры по направлению теплового потока перпендикулярно к поверхности стены.

Пусть температура внутри стены есть функция расстояния до наружной поверхности x, т. е. $t=t(x)$ (рис. 10). Интенсивность падения температуры по нормали к поверхности стены определяется производной $\frac{dt}{dx}$. Возьмем на расстоянии x от наружной стены слой толщиной dx с постоянной (внутри этого элементарного слоя) температурой t. Количество теплоты Q_1, проходящее через этот слой, будет постоянным и по условию

$$Q_1 = -k\frac{dt}{dx}S. \qquad (1)$$

Так как поверхность $S=1$ *м*², то

$$Q_1=-k\frac{dt}{dx}. \qquad (2)$$

Общее решение дифференциального уравнения (2) имеет вид

$$t=-\frac{Q_1}{k}x+C. \qquad (3)$$

Начальное условие: при $x=0$ $t=0$, откуда, согласно уравнению (3), $C=0$.

Тогда искомый закон температуры внутри стены

$$t=-\frac{Q_1}{k}x. \qquad (4)$$

Дополнительное условие: при $x=0{,}3$ *м* $t=20°$, $k=0{,}2$ *ккал/м·ч·град* дает возможность определить из уравнения (4) величину

$$Q_1=-\frac{kt}{x}=-\frac{0{,}2\cdot 20}{0{,}3}=-\frac{40}{3}.$$

Подставляя найденное значение Q_1 в равенство (4), получим искомую зависимость

$$t=\frac{40}{3\cdot 0{,}2}x=\frac{200}{3}x.$$

Количество теплоты, которое отдает наружу 1 *м*² стены за сутки (24 часа), будет

$$Q=24Q_1=-320 \text{ ккал}.$$

§ 8. ИЗМЕНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ГАЗОВ В СОСУДАХ

Работа сжатия

Задача 17. В цилиндрическом сосуде объемом $V_0=0{,}1$ *м*³ заключен атмосферный воздух, который адиабатически (без обмена тепла с окружающей средой) сжимается до объема $V_1=0{,}01$ *м*³. Определить работу сжатия.

Решение. При адиабатических изменениях состояния газа его давление и объем связаны уравнением Пуассона

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{V_0}{V}\right)^k,$$

где k — постоянная для данного газа величина. Для воздуха $k\approx 1{,}4$. Атмосферное давление $p_0=10\,330$ *кГ/м*².

Пусть: S — площадь поршня; V — объем газа и p — давление газа, когда поршень находится на высоте x; $-dx$ — бесконечно малое перемещение (опускание) поршня при сжатии; dW — бесконечно малая работа; $-dV$ — бесконечно малое изменение объема; p_0 — первоначальное давление газа; V_0 — первоначальный объем газа.

Бесконечно малая работа при опускании поршня (рис. 11)

$$dW = -pSdx.$$

Но

$$Sdx = dV,$$

отсюда следует, что

$$dW = -pdV. \quad (1)$$

Из уравнения Пуассона

$$p = p_0\left(\frac{V_0}{V}\right)^k = \frac{p_0 V_0^k}{V^k}. \quad (2)$$

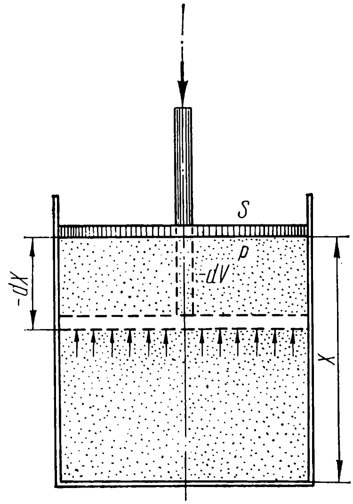

Рис. 11

Подставляя выражение (2) в уравнение (1), найдем дифференциальное уравнение процесса

$$dW = -p_0 V_0^k \frac{dV}{V^k}.$$

Интегрируя, получим общее решение:

$$W = -p_0 V_0^k \int V^{-k}\, dV = -\frac{p_0 V_0^k}{1-k} V^{1-k} + C =$$

$$= \frac{p_0 V_0^k}{k-1} V^{-(k-1)} + C = \frac{p_0 V_0^k}{(k-1) V^{k-1}} + C.$$

Как видно из начальных условий, при $V = V_0$ $W = 0$. Отсюда

$$0 = \frac{p_0 V_0^k}{(k-1) V_0^{k-1}} + C$$

и

$$C = -\frac{p_0 V_0}{k-1}.$$

Таким образом, работа адиабатического сжатия

$$W=\frac{p_0V_0}{k-1}\left[\left(\frac{V_0}{V}\right)^{k-1}-1\right].$$

Подставляя числовые данные, получим искомое значение работы:

$$W=\frac{10\,330\,\frac{кГ}{м^2}\,0{,}1\;м^3}{0{,}4}[10^{0,4}-1]=2582{,}5(10^{0,4}-1)\;кГм\approx 3904{,}4\;кГм.$$

Работа расширения

Задача 18. Водород расширяется при постоянной температуре от своего первоначального объема V_0, имея первоначальное давление p_0, при некотором внешнем давлении, которое бесконечно мало отличается от давления газа. Найти произведенную водородом работу.

Решение. Аналогично уравнению (1) задачи 17, учитывая фактор расширения, запишем дифференциальное уравнение процесса:

$$dW=pdV.$$

В данном случае газ расширяется изотермически и поэтому подчиняется не закону Пуассона, а закону Бойля — Мариотта

$$pV=p_0V_0,$$

откуда

$$p=\frac{p_0V_0}{V}.$$

Тогда дифференциальное уравнение процесса примет вид

$$dW=p_0V_0\frac{dV}{V}. \qquad (1)$$

Интегрируя уравнение (1), получим общее решение

$$W=p_0V_0\ln V+C.$$

Из начальных условий следует, что при $V=V_0$ $W=0$, отсюда

$$0=p_0V_0\ln V_0+C$$

и

$$C=-p_0V_0\ln V_0.$$

Таким образом, работа расширения

$$W=p_0V_0\ln\frac{V}{V_0}.$$

Глава IV

ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Если в дифференциальном уравнении первого порядка функции M и N представлены в виде

$$M(x, y) = f_1(x)\varphi_1(y), \quad N(x, y) = f_2(x)\varphi_2(y),$$

то уравнение

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{1}$$

примет вид дифференциального уравнения с разделяющимися переменными

$$f_1(x)\varphi_1(y)\,dx + f_2(x)\varphi_2(y)\,dy = 0. \tag{2}$$

Делим уравнение (2) на $f_2(x)\varphi_1(y)$, откуда

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}\,dy = 0$$

или

$$R(x)\,dx + S(y)\,dy = 0, \tag{3}$$

где переменные x и y разделены.

Общий интеграл уравнения (3)

$$\int R(x)\,dx + \int S(y)\,dy = C. \tag{4}$$

Если $\varphi_1(y)$ и $f_2(x)$ равны единице, то уравнение (2) вырождается в простейшее дифференциальное уравнение с разделенными переменными, общий интеграл которого получается непосредственным интегрированием:

$$\int f_1(x)\,dx + \int \varphi_2(y)\,dy = C.$$

§ 1. ОХЛАЖДЕНИЕ ТЕЛ

Задача 19. Температура вынутого из печи хлеба в течение 20 *мин* падает от 100 до 60° С (рис. 12). Температура окружающего воздуха 25° С. Через какое время от момента начала охлаждения температура хлеба понизится до 30° С?

Р е ш е н и е. Скорость охлаждения тела представляет понижение температуры T в единицу времени τ и выражается производной $\frac{dT}{d\tau}$. По закону Ньютона скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Это процесс неравномерный. С изменением разности температур меняется и скорость охлаждения тела.

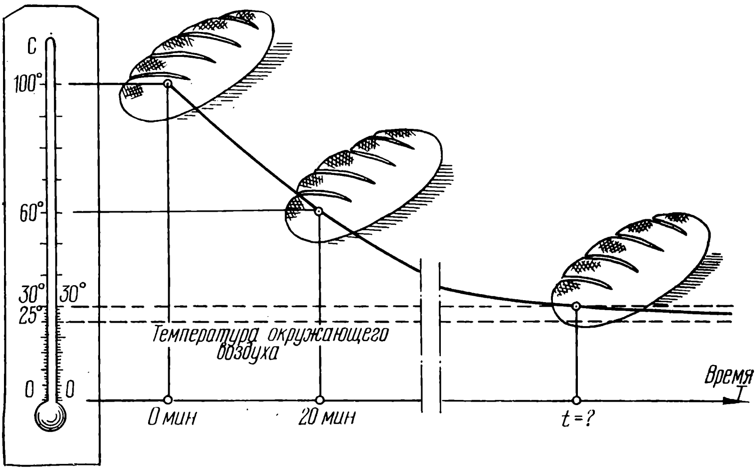

Рис. 12

Дифференциальное уравнение охлаждения хлеба будет

$$\frac{dT}{d\tau}=k(T-t),$$

где T — температура хлеба, t — температура окружающего воздуха, k — коэффициент пропорциональности, $\frac{dT}{d\tau}$ — скорость охлаждения хлеба.

Пусть τ — искомое время охлаждения. Тогда, разделяя переменные, получим

$$\frac{dT}{T-t}=kd\tau.$$

Для условий задачи

$$\frac{dT}{T-25}=kd\tau.$$

Ввиду того что

$$\frac{dT}{T-25}=\frac{d(T-25)}{T-25},$$

интегрируя, получаем

$$\int \frac{d(T-25)}{T-25} = k\int d\tau$$

или

$$\ln(T-25) = k\tau + \ln C.$$

Потенцируем обе части последнего равенства:

$$e^{\ln(T-25)} = e^{k\tau+\ln C} = e^{k\tau}\cdot e^{\ln C}.$$

Так как

$$e^{\ln C} = C,$$

то

$$T-25 = Ce^{k\tau}. \qquad (1)$$

Произвольную постоянную C определяем из начального условия: при $\tau=0$ *мин* $T=100°$. Отсюда

$$100-25 = Ce^{k\cdot 0} = C \text{ или } C=75.$$

Величину e^k определяем, исходя из данного дополнительного условия: при $\tau=20$ *мин* $T=60°$. Получаем

$$60-25 = 75(e^k)^{20}$$

и

$$e^k = \left(\frac{35}{75}\right)^{\frac{1}{20}} = \left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{1}{20}}.$$

Уравнение охлаждения хлеба в условиях задачи примет вид

$$T = 75\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{\tau}{20}} + 25. \qquad (2)$$

Из уравнения (2) определяем искомое время τ при температуре хлеба $T=30°$:

$$5 = 75\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{\tau}{20}} \text{ или } \frac{1}{15} = \left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{\tau}{20}}.$$

Окончательно,

$$\tau = \frac{-20\ln 15}{\ln 7 - \ln 15} \approx \frac{-20\cdot 2{,}7081}{-0{,}7622} \approx 71 \text{ мин.}$$

Итак, после 1 *ч* 11 *мин* хлеб охлаждается до температуры 30° С.

§ 2. НАГРЕВ ТЕЛ

Задача 20. Найти время нагрева 1 *кг* воды электроприбором от комнатной температуры 20° С до температуры кипения 100° С, если напряжение тока 120 *в*, сопротивление спирали 14,4 *ом*, и если известно, что 1 *кг* воды остывает от 40 до 30° С за 10 *мин*.

Решение. Пусть Q — количество теплоты, доставленное электроприбором к моменту времени t, Θ — температура воды.

По закону Джоуля — Ленца

$$Q=0{,}24i^2Rt,$$

где Q — количество теплоты в малых калориях; i — сила тока, *а*; R — сопротивление, *ом*; t — время, *сек*.

Приращение количества теплоты ΔQ за промежуток времени Δt состоит из: 1) теплоты, идущей для повышения температуры на $\Delta\Theta°$, т. е.

$$\Delta Q_1=cm\Delta\Theta,$$

где c — теплоемкость и m — масса; 2) теплоты, идущей на компенсацию охлаждения воды в результате теплообмена с окружающим воздухом в комнате за время Δt, т. е.

$$\Delta Q_2\approx cmk(\Theta-20)\Delta t,$$

где $k(\Theta-20)dt$ — по закону Ньютона дифференциал температуры охлаждающего вещества.

Полное приращение количества теплоты за время Δt

$$\Delta Q\approx cm\Delta\Theta+cmk(\Theta-20)\Delta t$$

или

$$dQ=cmd\Theta+cmk(\Theta-20)dt.$$

Скорость нагревания 1 *г* воды будет

$$\frac{1}{m}\cdot\frac{dQ}{dt}=\frac{d\Theta}{dt}+k(\Theta-20), \qquad (1)$$

так как теплоемкость воды $c=1$.

По закону Джоуля — Ленца

$$\frac{dQ}{dt}=0{,}24i^2R=0{,}24\frac{E^2}{R}.$$

Подставляя в последнее уравнение данные числовые значения напряжения тока и сопротивления, получим

$$\frac{dQ}{dt}=0{,}24\cdot\frac{120^2}{14{,}4}=240. \qquad (2)$$

При $m=1$ *кг*$=1000$ *г*

$$\frac{1}{m}\cdot\frac{dQ}{dt}=0{,}24.$$

По условию в течение 10 *мин* температура воды понижается с 40 до 30° С и дифференциальное уравнение задачи

$$\frac{dQ}{dt}=-k(\Theta-20),$$

откуда после разделения переменных

$$\frac{dQ}{\Theta-20}=-kdt. \tag{3}$$

Интегрируя уравнение (3), получаем

$$\int_{40}^{30}\frac{dQ}{\Theta-20}=-k\int_{0}^{600}dt$$

или

$$\ln(\Theta-20)\Big|_{40}^{30}=-k\cdot 600;$$

$$\ln 10-\ln 20=-600k,$$

откуда

$$k=\frac{\ln 2}{600}. \tag{4}$$

Учитывая соотношения (1), (2) и (4), получим дифференциальное уравнение

$$0{,}24=\frac{d\Theta}{dt}+\frac{\ln 2}{600}\cdot\Theta-\frac{\ln 2}{30},$$

откуда

$$dt=\frac{600d\Theta}{144+20\ln 2-\Theta\ln 2}. \tag{5}$$

Интегрируя, получим

$$t=600\int_{20}^{100}\frac{d\Theta}{144+20\ln 2-\Theta\ln 2}=$$

$$=-\frac{600}{\ln 2}\ln(144+20\ln 2-\Theta\ln 2)\Big|_{20}^{100}\approx 422$$

Итак, $t\approx 422$ *сек*$=7$ *мин* 2 *сек.*

§ 3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ВНУТРИ ТЕЛ

Полая сферическая оболочка

Задача 21. Стальная шаровая оболочка, внутренний радиус которой 6 *см* и внешний 10 *см*, находится в стационарном тепловом состоянии. Температура ее внутренней поверхности 200° С, а внешней 20° С (рис. 13). Найти температуру на расстоянии r от центра и количество теплоты, которое в 1 *сек* шар отдает наружу (коэффициент теплопроводности стали $k=0{,}14$).

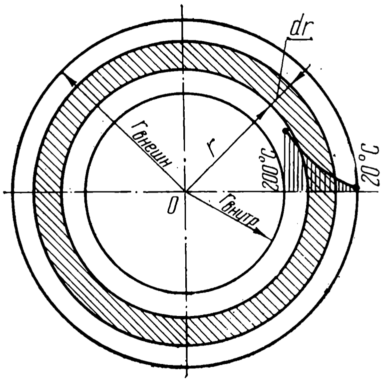

Рис. 13

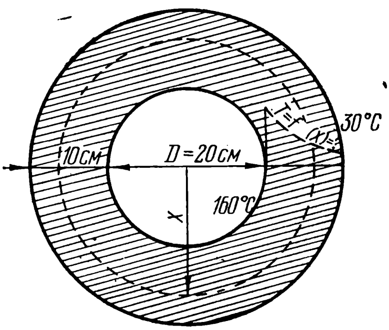

Рис. 14

Решение. Благодаря симметрии можно считать, что теплота в шаре распространяется радиально. На расстоянии r от центра площадь, через которую протекает теплота, равна площади поверхности шара:

$$F=4\pi r^2.$$

Ввиду того что между отдельными сферическими поверхностями количество теплоты остается неизменным, через две любые поверхности протекает одно и то же количество теплоты по закону теплопроводности Фурье. Скорость, с которой теплота распространяется через площадку F, равна

$$Q=-kF\frac{dT}{dr}, \tag{1}$$

где T — температура тела, k — коэффициент теплопроводности вещества.

Уравнение (1) принимает вид

$$-4\pi kr^2\frac{dT}{dr}=Q=\text{const}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем общее решение

$$4\pi kT=\frac{Q}{r}+C. \tag{2}$$

Для отыскания частного решения подставляем начальные условия $T=20$, $r=10$; $T=200$, $r=6$ в уравнение (2) и определяем величины C и Q:

$$\left.\begin{aligned} 80\pi k&=\frac{Q}{10}+C,\\ 800\pi k&=\frac{Q}{6}+C.\end{aligned}\right\}$$

Отсюда

$$C=-1000\pi k$$

и

$$Q=10\,800\pi k.$$

Таким образом, искомая температура

$$T=\frac{2700}{r}-250,$$

а количество теплоты, отдаваемое шаром в течение 1 *сек*,

$$Q=10\,800\pi k=4750\ \textit{кал.}$$

Полая цилиндрическая оболочка

Задача 22. Трубопровод тепловой магистрали (диаметр 20 *см*) защищен изоляцией толщиной 10 *см*; величина коэффициента теплопроводности $k=0{,}00017$. Температура трубы 160°, температура внешнего покрова 30° (рис. 14). Найти распределение температуры внутри изоляции, а также количество теплоты, отдаваемой 1 *м* трубы.

Решение. Если тело находится в стационарном тепловом состоянии и температура T в каждой его точке есть функция только одной координаты x, то, согласно закону теплопроводности Фурье, количество теплоты, испускаемое в секунду,

$$Q=-kF(x)\,\frac{dT}{dx}=\text{const},$$

где $F(x)$ — площадь сечения тела на расстоянии x, k — коэффициент теплопроводности.

В задаче

$$F(x)=2\pi x l,$$

где l — длина трубы, *см*, x — радиус трубопровода, *см*.

Таким образом, после разделения переменных дифференциальное уравнение задачи примет вид

$$dT=-\frac{Q}{kF(x)}dx=-\frac{Q}{k\cdot 2\pi l}\cdot\frac{dx}{x}. \qquad (1)$$

Интегрируя обе части равенства (1), находим

$$\int_{160}^{30} dT=-\frac{Q}{0{,}00017\cdot 2\pi l}\int_{10}^{20}\frac{dx}{x}, \qquad (2)$$

$$\int_{160}^{T} dT=-\frac{Q}{0{,}00017\cdot 2\pi l}\int_{10}^{x}\frac{dx}{x} \qquad (3)$$

или

$$T\Big|_{160}^{30}=30-160=-\frac{Q}{0{,}00017\cdot 2\pi l}\ln x\Big|_{10}^{20}=-\frac{Q}{0{,}00017\cdot 2\pi l}\ln 2, \qquad (4)$$

$$T-160=-\frac{Q}{0{,}00017\cdot 2\pi l}\ln x\Big|_{10}^{x}=-\frac{Q}{0{,}00017\cdot 2\pi l}\ln 0{,}1x. \qquad (5)$$

Разделив почленно уравнение (5) на уравнение (4), получим

$$\frac{T-160}{-130}=\frac{\ln 0{,}1x}{\ln 2}=\frac{\lg 0{,}1x}{\lg 2}.$$

Отсюда закон распределения температуры внутри изоляции

$$T=591{,}8-431{,}8\lg x.$$

Из уравнения (4) при $l=100$ *см* находим

$$Q=\frac{130\cdot 0{,}00017\cdot 2\pi\cdot 100}{\ln 2}=\frac{200\pi\cdot 130\cdot 0{,}00017}{0{,}69315}.$$

Количество теплоты, отдаваемое в течение суток, равно

$$24\cdot 60\cdot 60Q=86\,400\frac{200\pi\cdot 130\cdot 0{,}00017}{0{,}69315}=1\,730\,600\ \textit{кал}.$$

§ 4. БРУС РАВНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Задача 23. Металлический брус равного напряжения (напряжение во всех поперечных сечениях которого одинаково) длиной $l=100$ *м* рассчитан на растягивающую нагрузку 2 *Т*. Допустимое напряжение металла $\sigma=1000$ *кГ/см²*, а его удельный вес $\gamma=7{,}6$ *Г/см³*. Определить площадь верхнего сечения бруса.

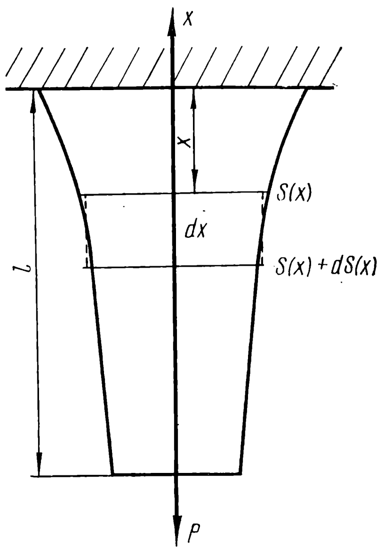

Рис. 15

Решение. Напряжением называется сила, рассчитанная на 1 *см²* поперечного сечения бруса. Так как в каждом поперечном сечении бруса растягивающая сила равна нагрузке P и весу ниже расположенной части бруса, то эта сила возрастает с повышением сечения, а поэтому для равенства напряжений необходимо, чтобы в той же мере возрастала площадь сечения с удалением от нижнего конца бруса. Наибольшую площадь должно иметь верхнее сечение бруса.

Ось x направим вертикально (рис. 15) и введем обозначения: S_1 — искомая площадь верхнего сечения; S_2 — площадь нижнего сечения бруса; S — переменная площадь сечения бруса на высоте x; Q — вес части бруса ниже сечения S; P — допустимая нагрузка бруса; σ_p — допустимое и во всех сечениях бруса одинаковое напряжение растяжения.

Напряжение в сечении $S(x)$ будет

$$\sigma_p^S=\frac{P+Q(x)}{S(x)},$$

а в сечении $S(x)+dS(x)$

$$\sigma_p^{S+dS}=\frac{P+Q(x)+dQ(x)}{S(x)+dS(x)}.$$

Так как в брусе эти напряжения одинаковы и равны допустимому напряжению σ_p, то

$$\left.\begin{aligned}\frac{P+Q(x)}{S(x)}&=\sigma_p;\\ \frac{P+Q(x)+dQ(x)}{S(x)+dS(x)}&=\sigma_p\end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} P+Q(x)&=\sigma_p S(x); \\ P+Q(x)+dQ(x)&=\sigma_p S(x)+\sigma_p dS(x). \end{aligned}\right\}$$

Вычитая из второго равенства первое, находим вес части бруса между бесконечно близкими сечениями $S(x)$ и $S(x)+dS(x)$:

$$dQ(x)=\sigma_p dS(x). \tag{1}$$

Принимая эту часть бруса цилиндрической, получим

$$dQ(x)=\gamma S(x)\,dx. \tag{2}$$

Приравниваем правые части уравнений (1) и (2) и получаем дифференциальное уравнение

$$\gamma S(x)\,dx=\sigma_p dS(x)$$

или

$$\frac{dS(x)}{S(x)}=\frac{\gamma}{\sigma_p}\,dx.$$

Интегрируя, получим

$$\ln S(x)=\frac{\gamma}{\sigma_p}x+C_1$$

или после потенцирования

$$S(x)=Ce^{\frac{\gamma}{\sigma_p}x},$$

где $C=e^{C_1}$.

Начальное условие: при $x=0$ $S=F_0$. Отсюда

$$F_0=Ce^{\frac{\gamma}{\sigma_p}\cdot 0}=C. \tag{3}$$

Тогда после подстановки значения постоянной интегрирования (3) в общее решение находим

$$S(x)=F_0e^{\frac{\gamma}{\sigma_p}x}. \tag{4}$$

По закону (4) можно определить площадь сечения бруса на любой высоте x.

При $x=l$ площадь верхнего сечения

$$F=F_0e^{\frac{\gamma}{\sigma_p}l}.$$

Подставим числовые значения параметров.

Напряжение в нижнем сечении $\sigma_p = \dfrac{P}{F_0}$, откуда

$$F_0 = \frac{P}{\sigma_p} = \frac{2000}{1000} = 2 \ см^2.$$

Так как

$$\sigma_p = 1000 \ кГ/см^2 = 1\,000\,000 \ Г/см^2,$$

а

$$l = 100 \ м = 10\,000 \ см,$$

то показатель

$$\frac{\gamma}{\sigma_p} l = \frac{7{,}6 \cdot 10\,000}{1\,000\,000} = 0{,}076.$$

Таким образом, искомая площадь верхнего сечения

$$F = 2e^{0{,}076} \approx 2 \cdot 1{,}08 = 2{,}16 \ см^2.$$

§ 5. ДАВЛЕНИЕ ЗЕРНА НА СТЕНКИ ХРАНИЛИЩА

Задача 24. Давление p_S зерна на стенки принимается пропорциональным давлению p зерна на горизонтальную площадь $p_S = kp$. Найти закон изменения p и p_S с возрастанием глубины h с учетом трения зерна о стенки хранилища.

Решение. Рассмотрим условия равновесия бесконечно тонкого слоя между двумя горизонтальными плоскостями на глубине h и $h+dh$ (рис. 16). На первую плоскость действует давление p сверху вниз, на вторую — давление $p+dp$ снизу вверх.

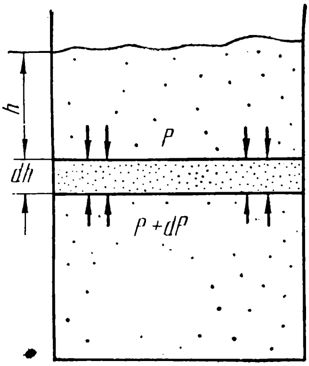

Рис. 16

Умножая силы p и $p+dp$ на площадь поперечного сечения S хранилища, получим силу, действующую вверх:

$$S(p+dp) - Sp = Sdp.$$

На слой действует также собственный вес γSdh, где dh — высота слоя.

Кроме этих сил, если открыть нижнее отверстие хранилища, в самом начале движения вследствие давления зерна на стенки возникает направленное вверх сопротивление трения.

Пусть P — периметр сечения хранилища. Тогда поверхность части стенок, ограничивающей рассматриваемый слой, будет Pdh. Так как величина dh бесконечно малая, то боковое давление на единицу площади в пределах этого слоя можно принять постоянным.

Полное боковое давление равно $kPpdh$, а вызванное им трение $\mu kPpdh$.

Условие равновесия всех действующих сил

$$Sdp+\mu kPpdh-\gamma Sdh=0$$

или

$$dp+\left(\frac{\mu kP}{S}p-\gamma\right)dh=0. \qquad (1)$$

Вводим обозначение $\lambda=\frac{\mu kP}{S}$. Тогда дифференциальное уравнение (1) после преобразования примет вид

$$\frac{dp}{\lambda p-\gamma}+dh=0$$

или

$$\frac{dp}{\gamma-\lambda p}=dh.$$

Общее решение этого уравнения

$$\gamma-\lambda p=Ce^{-\lambda h}. \qquad (2)$$

Начальное условие: при $h=0$ $p=0$. Отсюда

$$\gamma-\lambda\cdot 0=Ce^{-\lambda\cdot 0}$$

или

$$C=\gamma.$$

Найденное значение постоянной интегрирования подставляем в общее решение

$$\gamma-\lambda p=\gamma e^{-\lambda h},$$

откуда

$$e^{-\lambda h}=1-\frac{\lambda}{\gamma}p. \qquad (3)$$

Из равенства (3) находим, что

$$p=\frac{\gamma}{\lambda}(1-e^{-\lambda h})=\frac{\gamma S}{\mu kP}\left(1-e^{-\frac{\mu kP}{S}h}\right). \qquad (4)$$

Так как $p_S=kp$, то $p=\frac{p_S}{k}$ и, подставляя это значение в равенство (4), после сокращения получим

$$p_S=\frac{\gamma S}{\mu P}\left(1-e^{-\frac{\mu kP}{S}h}\right). \qquad (5)$$

Из соотношений (4) и (5) видно, что давления p и p_S возрастают непропорционально глубине h. При любом h величина $p_S<\frac{\gamma S}{\mu P}$.

§ 6. БАРОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА И ГЛУБИННОЕ ДАВЛЕНИЕ

Задача 25. Найти зависимость высоты h места над уровнем моря от давления воздуха p ($кГ/м^2$). Вычислить при нормальных атмосферных условиях давление воздуха на высоте $h=1000$ *м*, предполагая, что нижележащие слои воздуха имеют постоянную температуру 0° С. Нормальное давление атмосферы на поверхности Земли $p_0=10\,330$ $кГ/м^2$. Плотность воздуха на поверхности при нормальных атмосферных условиях $\delta_0=1{,}29$ $кГ/м^3$.

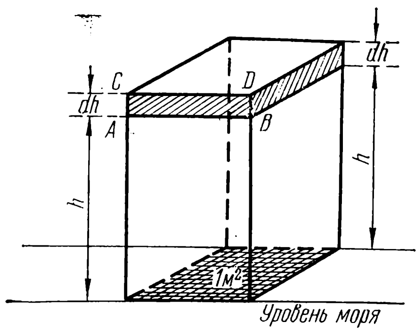

Рис. 17

Р е ш е н и е. На высоте h давление воздуха p определяется весом той части столба воздуха, которая опирается на рассматриваемое горизонтальное сечение AB площадью 1 $м^2$ (рис. 17). Плотность воздуха δ.

Увеличение высоты h на бесконечно малую величину dh приводит к уменьшению давления на величину dp, которая измеряется весом слоя воздуха между сечением AB на высоте h и сечением CD на высоте $h+dh$, т. е. иначе изменение давления воздуха равно весу столба воздуха с площадью основания 1 $м^2$ и высотой dh.

Принимая на протяжении dh плотность δ неизменной, получим, что вес такого столба равен δdh, и поэтому имеем дифференциальное уравнение

$$-dp=\delta dh. \tag{1}$$

Заменим величину δ через p. Так как температура всех слоев воздуха постоянна и равна 0° С, то, следуя закону Бойля — Мариотта, получим

$$\frac{\delta}{\delta_0}=\frac{p}{p_0}$$

или

$$\delta=\frac{\delta_0}{p_0}p. \tag{2}$$

Выражение (2) подставляем в правую часть соотношения (1). Получаем дифференциальное уравнение барометрического давления

$$-dp=\frac{\delta_0}{p_0}pdh,$$

которое принимает вид

$$\frac{dp}{p}=-\frac{\delta_0}{p_0}dh. \tag{3}$$

Интегрируем дифференциальное уравнение (3):

$$\ln p = -\frac{\delta_0}{p_0} h + C.$$

После потенцирования получим общее решение

$$p = e^{-\frac{\delta_0}{p_0} h + C_1} = Ce^{-\frac{\delta_0}{p_0} h}. \qquad (4)$$

Начальное условие: при $h=0$ $p=p_0$. Тогда

$$C = p_0.$$

Барометрическая формула (4) принимает окончательно вид

$$p = p_0 e^{-\frac{\delta_0}{p_0} h}. \qquad (5)$$

Решим уравнение (5) относительно h:

$$h = \frac{p_0}{\delta_0} \ln \frac{p_0}{p}. \qquad (6)$$

Уравнение (6) позволяет судить о высоте подъема над уровнем моря по давлению воздуха.

Для подстановки числовых данных в формулу (5) вычислим показатель

$$\frac{\delta_0}{p_0} h = \frac{1{,}29 \cdot 1000}{10\,330} \approx 0{,}125,$$

откуда искомое давление

$$p = 10\,330 e^{-0{,}125} = 9116 \text{ кГ/м}^2.$$

Предположим, что температура воздуха переменна и газ подчиняется закону

$$pV^n = \text{const} \quad \text{и} \quad a = \frac{p_0}{p} p^{\frac{1}{n}}.$$

Тогда исходное уравнение процесса

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{p_0}{p} p^{\frac{1}{n}}.$$

Разделяя переменные, имеем

$$\frac{dp}{p^{1/n}} = -\frac{p_0}{p}\,dh,$$

откуда после интегрирования

$$\frac{p^{-\frac{1}{n}+1}}{1-\frac{1}{n}} = -\frac{p_0}{p}\,h + C. \tag{7}$$

Начальное условие: при $h=0$ $p=p_0$. Отсюда постоянная интегрирования

$$C = \frac{p_0^{1-\frac{1}{n}}}{1-\frac{1}{n}}.$$

Подставляя значение C в уравнение (7) и сокращая подобные члены, получаем

$$\frac{p_0}{p}\,h = \frac{n}{n-1}\left(p_0^{1-\frac{1}{n}} - p^{1-\frac{1}{n}}\right) =$$

$$= \frac{np_0^{1-\frac{1}{n}}}{n-1}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1-\frac{1}{n}}\right]. \tag{8}$$

Так как при $h=0$ $p=p_0$ и $a=a_0$, то

$$a_0 = \frac{p_0}{p}\,p_0^{\frac{1}{n}} \quad \text{или} \quad \frac{p_0}{p} = \frac{a_0}{p_0^{1/n}}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (8), получаем

$$h = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{p}{a_0}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1-\frac{1}{n}}\right]. \tag{9}$$

Так как $pV=RT$ (где $T=t^\circ+273^\circ$ и $R=8{,}32$ *дж* на 1°), то

$$\frac{pV}{p_0V_0} = \frac{T}{T_0}. \tag{10}$$

Тогда

$$\frac{p}{p_0}\left(\frac{V}{V_0}\right)^n=1 \quad \text{или} \quad \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{V}{V_0},$$

откуда, подставляя эти значения в уравнение (10), получаем

$$\frac{T}{T_0}=\frac{p}{p_0}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{1}{n}}=\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1-\frac{1}{n}}. \qquad (11)$$

Подставляя равенство (11) в уравнение (9), окончательно имеем

$$h=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{p_0}{a_0}\left(1-\frac{T}{T_0}\right).$$

Аналогично решается *задача о глубинном давлении.*

Если p — гидростатическое давление, h — глубина ниже уровня моря, то тогда

$$dp=\delta dh,$$

откуда

$$\frac{dp}{dh}=\delta,$$

где δ — вес 1 *м*^{3} морской воды.

§ 7. ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ГОРИЗОНТАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Сила, действующая на тело, зависит от скорости: $F=F(v)$ при сопротивлении, пропорциональном скорости

Задача 26. Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью $v_0=20$ *км/ч*. На полном ходу ее мотор выключается и через 40 *сек* после этого скорость лодки уменьшается до $v_1=8$ *км/ч* (рис. 18). Сопротивление воды пропорционально скорости движения лодки. Определить скорость лодки через 2 *мин* после остановки мотора.

Решение. На движущуюся лодку действует сила $F=-kv$, где k — коэффициент пропорциональности. По закону Ньютона сила равна произведению массы на ускорение $F=m\frac{dv}{dt}$. Откуда дифференциальное уравнение движения

$$m\frac{dv}{dt}=-kv. \qquad (1)$$

Очевидно,

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}\,dt$$

или

$$\ln v = -\frac{k}{m}\,t + C_1.$$

Потенцируя, получим общее решение уравнения (1):

$$v = e^{-\frac{k}{m}t + C_1} = e^{C_1}e^{-\frac{k}{m}t} = Ce^{-\frac{k}{m}t}.$$

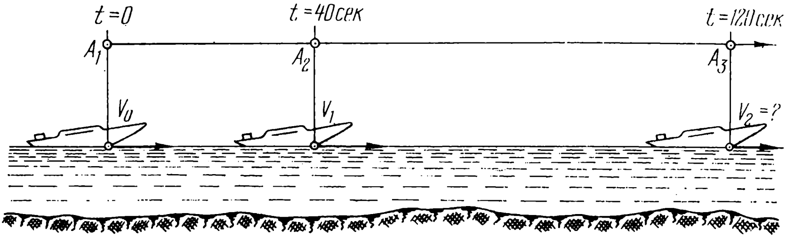

Рис. 18

Начальное условие: при $t=0$ $v=20$ *км/ч*. Откуда

$$20 = Ce^{-\frac{k}{m}\cdot 0} \text{ и } C = 20.$$

Тогда общий закон движения для условий задачи

$$v = 20e^{-\frac{k}{m}t}. \tag{2}$$

Дополнительное условие указывает, что при $t=40$ *сек* $= \frac{1}{90}$ *ч* скорость лодки составляет 8 *км/ч*.

Отсюда

$$8 = 20e^{-\frac{k}{m}\frac{1}{90}} \text{ или } e^{\frac{k}{m}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{90}.$$

Подставляя числовые данные в найденный закон движения (2), учитывая при этом, что $t=2$ *мин* $= \frac{1}{30}$ *ч*, получим

$$v = 20\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{90}\right]^{-\frac{1}{30}} = 20\left(\frac{5}{2}\right)^{-3} = \frac{32}{25} \approx 1{,}28 \text{ км/ч}.$$

Итак, скорость лодки, спустя 2 *мин*, снизится до 1,28 *км/ч*,

Сила, действующая на тело, зависит от скорости при сопротивлении движению, пропорциональном скорости и силе тяжести тела

Задача 27. Судно водоизмещением в 12 000 *т* (рис. 19) движется прямолинейно со скоростью $v_0 = 20$ *м/сек*. Сопротивление воды пропорционально квадрату скорости судна и равно 36 *Т* при скорости 1 *м/сек*. Какое расстояние пройдет судно после остановки двигателя, прежде чем скорость станет равной $v = 5$ *м/сек*? За какое время судно пройдет это расстояние?

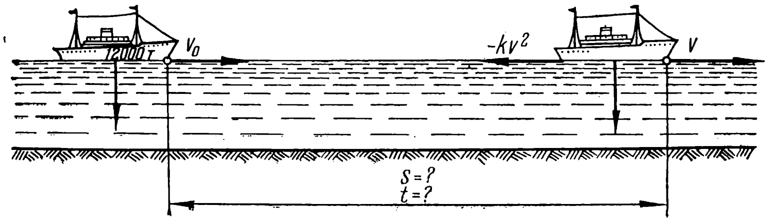

Рис. 19

Решение. Количество движения системы (судна) равно количеству движения центра масс системы, т. е.

$$\vec{Q} = m\vec{v}_c,$$

где $\vec{v}_c$ — скорость центра масс, m — масса всей системы.

Производная вектора количества движения системы по времени равна геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему. Для движения центра масс имеем

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{m\,d\vec{v}_c}{dt} = \vec{P}.$$

Центр масс системы движется, как материальная точка с массой, равной массе всей системы, к которой приложены все действующие на систему внешние силы. Движению судна препятствует сопротивление воды, равное $-kv^2$.

Таким образом, дифференциальное уравнение задачи

$$m\frac{dv}{dt} = -kv^2$$

или

$$\frac{12\,000}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = -36v^2.$$

Разделяя переменные и принимая $g=9{,}81$ *м/сек*^{2}, получим

$$v^{-2}\,dv=-0{,}03dt$$

или, проинтегрировав,

$$-\frac{1}{v}=-0{,}03t+C_1.$$

Определяем частное решение, исходя из начального условия: $t=0$, $v=16$ *м/сек*. Отсюда

$$C_1=-\frac{1}{16}$$

и

$$\frac{1}{v}=0{,}03t+\frac{1}{16}. \tag{1}$$

Прежде чем скорость судна станет равной 5 *м/сек*, пройдет время

$$t=\frac{25(16-v)}{12v}=\frac{25(16-5)}{12\cdot 5}=\frac{55}{12}\approx 4{,}6 \text{ сек.}$$

Определим расстояние, которое пройдет судно за время $t=4{,}6$ *сек*. Интегрируем еще раз уравнение (1) и, принимая предварительно $v=\frac{ds}{dt}$, получаем

$$ds=\frac{dt}{0{,}03t+\frac{1}{16}}=\frac{400dt}{12t+25},$$

откуда

$$s=\frac{100}{3}\ln(12t+25)+C_2.$$

Начальное условие: при $t=0$ $s=0$. Отсюда

$$0=\frac{100}{3}\ln 25+C_2 \quad \text{и} \quad C_2=-\frac{100}{3}\ln 25.$$

Таким образом, закон движения судна

$$s=\frac{100}{3}\ln\left(\frac{12}{25}t+1\right);$$

За время $t=4{,}6$ *сек* судно пройдет расстояние

$$s=\frac{100}{3}\ln 3{,}20\approx 38{,}8\ \text{м}.$$

Итак, судно после остановки двигателя, прежде чем его скорость станет 5 *м/сек*, пройдет расстояние 38,8 *м*.

Сила, действующая на тело, зависит от скорости при сопротивлении движению, пропорциональном квадрату скорости

Задача 28. При небольших скоростях сопротивление движению поезда определяется эмпирической формулой

$$R=(2{,}5+0{,}05v)\,Q\ \text{кГ},$$

где Q — вес поезда, T и v — скорость, *м/сек*. Найти, через какое время и на каком расстоянии поезд приобретет на горизонтальном участке пути скорость $v=12$ *км/ч*, если вес поезда с электровозом $Q=40$ T, а сила тяги электровоза $F=200$ *кГ*. Определить также силу тяги N электровоза при дальнейшем равномерном движении.

Решение. Масса поезда

$$m=\frac{Q\cdot 1000}{g}\left[\frac{\text{кГ}\cdot\text{сек}^2}{\text{м}}\right].$$

Составляя уравнение равновесия действующих на состав сил (рис. 20), после деления на m получим

$$\frac{dv}{dt}+\frac{g\cdot 2{,}5}{1000}+\frac{g\cdot 0{,}05}{1000}v-\frac{Fg}{Q\cdot 1000}=0$$

или

$$\frac{dv}{dt}+24{,}5\cdot 10^{-3}+0{,}49\cdot 10^{-3}\,v-49\cdot 10^{-3}=0;$$

$$\frac{dv}{dt}-24{,}5\cdot 10^{-3}+0{,}49\cdot 10^{-3}\,v=0.$$

Разделяя переменные, приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{10^3\cdot dv}{24{,}5-0{,}49v}=dt. \qquad (1)$$

Интегрируя уравнение (1), находим общее решение

$$-\frac{10^3}{0{,}49}\ln C(24{,}5-0{,}49v)=t. \qquad (2)$$

Постоянную интегрирования C определяем из начального условия: при $t=0$ $v=0$. Следовательно,

$$-\frac{10^3}{0{,}49}\ln C(24{,}5-0)=0$$

или

$$\ln 24{,}5C=0.$$

Потенцируя, находим

$$C=\frac{1}{24{,}5}.$$

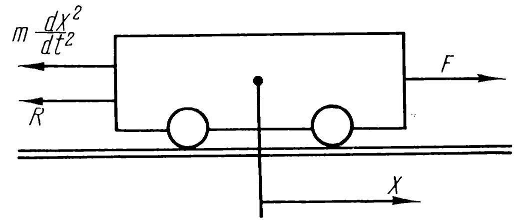

Рис. 20

Согласно условию, в искомое время $t=T$ скорость поезда составит $v=12$ *км/ч* $\approx 3{,}33$ *м/сек*. Таким образом, из уравнения (2), проводя очевидные алгебраические преобразования, получаем:

$$-\frac{10^3}{0{,}49}\ln\frac{1}{24{,}5}(24{,}5-0{,}49v)=\frac{10^3}{0{,}49}\left[-\ln\left(1-\frac{0{,}49v}{24{,}5}\right)\right]=$$

$$=\frac{10^3}{0{,}49}\left[\ln 1-\ln\frac{24{,}5-0{,}49\cdot 3{,}33}{24{,}5}\right]=\frac{10^3}{0{,}49}\ln\left(\frac{24{,}5}{22{,}9}\right)=141 \text{ сек.}$$

Переходим к определению расстояния, при котором скорость поезда достигнет 12 *км/ч*.

Величина $\frac{dv}{dt}$ может быть выражена так:

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\frac{dv}{ds}\cdot v.$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{10^3\cdot v\,dv}{24{,}5-0{,}49v}=ds. \qquad (3)$$

Интегрируя равенство (3), получим общее решение

$$-\frac{10^3}{0,49}\left[v+\frac{24,5}{0,49}\ln(24,5-0,49v)+C\right]=s. \qquad (4)$$

Определяем постоянную величину C, используя начальное условие: при $s=0 \quad v=0$.

Следовательно,

$$C=-\frac{24,5}{0,49}\ln 24,5.$$

Подставляя найденное значение C и скорость $v=3,33$ *м/сек* в уравнение (4), находим

$$s=\frac{10^3}{0,49}\left[\frac{24,5}{0,49}\ln\frac{24,5}{24,5-0,49v}-v\right]=96 \text{ м}.$$

При дальнейшем равномерном движении ($v=3,33$ *м/сек*) сила тяги

$$N=Q(2,5+0,05\cdot 3,33)=40(2,5+0,05\cdot 3,33)=106,6 \text{ кГ}.$$

Сила, действующая на тело, зависит от положения точки: $F=F(x)$

Задача 29. Проходя через лес и испытывая сопротивление деревьев, ветер теряет часть своей скорости. На бесконечно малом пути эта потеря пропорциональна скорости в начале пути и длине его. Найти скорость ветра, прошедшего в лесу 150 *м*, зная, что до вступления в лес начальная скорость ветра $v_0=12$ *м/сек*. После прохождения в лесу пути $s=1$ *м* скорость ветра уменьшилась до величины $v_1=11,8$ *м/сек*.

Решение. Пусть на расстоянии s от начала леса скорость ветра v, потеря скорости на пути ds равна $-dv$ (процесс убывающий). Эта потеря пропорциональна v, и поэтому дифференциальное уравнение процесса представится в виде равенства

$$-dv=kv\,ds.$$

Разделим переменные:

$$\frac{dv}{v}=-k\,ds.$$

Интегрируя, получим общее решение

$$v=Ce^{-ks}.$$

Ищем частное решение, используя начальное условие: при $s=0$ $v=v_0$. Отсюда

$$v_0=Ce^{-k\cdot 0}$$

или

$$C=v_0.$$

Закон процесса

$$v=v_0e^{-ks}. \qquad (1)$$

Для определения коэффициента пропорциональности используем дополнительное условие: при $s=1$ *м* $v=v_1=11{,}8$ *м/сек.*

Тогда

$$v_1=v_0e^{-k}$$

или

$$e^{-k}=\frac{v_1}{v_0}=\frac{11{,}8}{12}=0{,}983.$$

Числовые значения подставляем в уравнение процесса (1), откуда искомая скорость

$$v=12(0{,}983)^{150}=12\cdot 0{,}0776\approx 0{,}93 \text{ м/сек}.$$

Итак, скорость ветра, углубившегося на 150 *м* в лес, составит 0,93 *м/сек.*

§ 8. ВЕРТИКАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ

Падение вниз под действием силы тяжести

Задача 30. Падающее под действием силы тяжести тело (рис. 21) получает ускорение $a=\frac{k}{r^2}$, где k — коэффициент пропорциональности, r — расстояние падающего тела от центра Земли. Найти время падения тела, если оно находится от Земли на расстоянии $R=60{,}27r_З$, равном удалению Земли от Луны. Радиус Земли $r_З=6377$ *км* $=6{,}377\cdot 10^6$ *м.*

Решение. Пусть R — расстояние Луны от центра Земли; g — ускорение силы тяжести на поверхности Земли.

Согласно общей формуле, это ускорение на поверхности Земли равно $\frac{k}{r_З^2}$, поэтому

$$a=\frac{k}{r_З^2}=-g. \qquad (1)$$

Знак минус взят потому, что расстояние считается от начала ($R=0$), а ускорение направлено к началу. Из уравнения (1) имеем

$$k=-gr_З^2.$$

Общее выражение для ускорения примет вид

$$a = -\frac{g r_3^2}{r^2}.$$

С другой стороны, предполагая, что тело падает к центру Земли O прямолинейно (рис. 21), имеем

$$v = \frac{dr}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt},$$

откуда

$$\frac{a}{v} = \frac{dv}{dr}; \quad a = \frac{v\,dv}{dr}.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение задачи

$$\frac{v\,dv}{dr} = -\frac{g r_3^2}{r^2}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$v^2 = \frac{2 g r_3^2}{r} + C. \tag{2}$$

Из начальных условий известно, что при $r = R$ $v = 0$. Подставляя эти значения в уравнение (2), находим

$$C = -2g\frac{r_3^2}{R}.$$

Одновременно

$$v = \frac{dr}{dt} = -\sqrt{2 g r_3^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)},$$

откуда

$$dt = -\sqrt{\frac{rR}{2 g r_3^2 (R - r)}}\,dr.$$

Интегрируя, получим

$$t = -\int_R^{r_3}\sqrt{\frac{rR}{2 g r_3^2 (R - r)}}\,dr =$$

$$= \int_{r_3}^{R}\sqrt{\frac{rR}{2 g r_3^2 (R - r)}}\,dr. \tag{3}$$

Интеграл (3) вычисляется подстановкой

$$\frac{r}{R-r}=\operatorname{tg}^2\varphi, \tag{4}$$

откуда

$$r=\frac{R\operatorname{tg}^2\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}=R\sin^2\varphi, \tag{5}$$

а

$$dr=2R\sin\varphi\cos\varphi d\varphi.$$

Из равенства (5) имеем

$$\sin^2\varphi_1=\frac{r_3}{R},\quad \sin^2\varphi_2=1,$$

т. е.

$$\varphi_1=\arcsin\sqrt{\frac{r_3}{R}};\quad \varphi_2=\frac{\pi}{2}. \tag{6}$$

Значения (4)—(6) подставляем в выражение (3):

$$t=\sqrt{\frac{R}{2gr_3^2}}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\operatorname{tg}\varphi\,2R\sin\varphi\cos\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{R}{r_3}\sqrt{\frac{R}{2g}}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}2\sin^2\varphi d\varphi=\frac{R}{r_3}\sqrt{\frac{R}{2g}}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}(1-\cos 2\varphi)d\varphi=$$

$$=\frac{R}{r_3}\sqrt{\frac{R}{2g}}\left(\varphi_2-\varphi_1-\frac{\sin 2\varphi_2}{2}+\frac{\sin 2\varphi_1}{2}\right)=$$

$$=\frac{R}{r_3}\sqrt{\frac{R}{2g}}\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\sqrt{\frac{r_3}{R}}+\frac{\sin 2\varphi_1}{2}\right).$$

Подставляя числовые значения, найдем время в секундах, разделив на 3600, искомое время в часах:

$$t=\frac{60{,}27}{3600}\sqrt{\frac{60{,}27\cdot 6{,}377\cdot 10^6}{19{,}62}}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_1+\frac{\sin 2\varphi_1}{2}\right)\approx 116\ \text{ч}$$

$$(\varphi_1=7°24'33''=0{,}1292\ \text{рад}).$$

Итак, тело, находящееся от Земли на расстоянии, равном удалению Земли от Луны, упадет на Землю через 116 *ч* (почти 5 суток).

Задача 31. Метеор, находящийся под исключительным влиянием земного притяжения, из состояния покоя начинает прямолинейно падать на Землю с неограниченно большого расстояния h. С какой скоростью он ударился бы о Землю при отсутствии земной атмосферы? Длина радиуса Земли $R=6377$ *км*$=6{,}377\cdot10^6$ *м*.

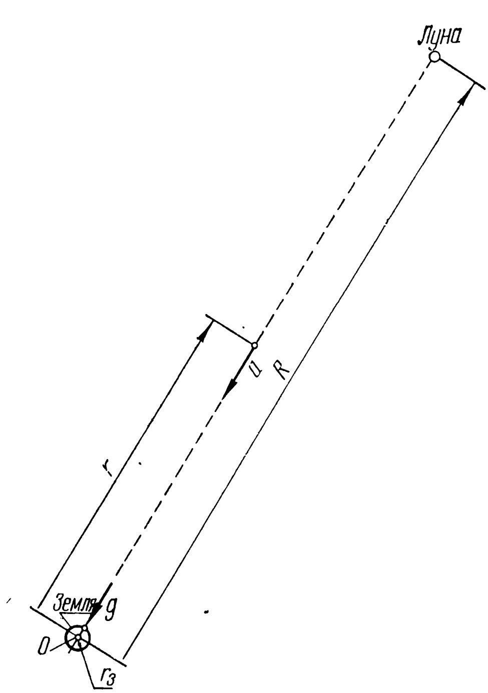

Рис. 21

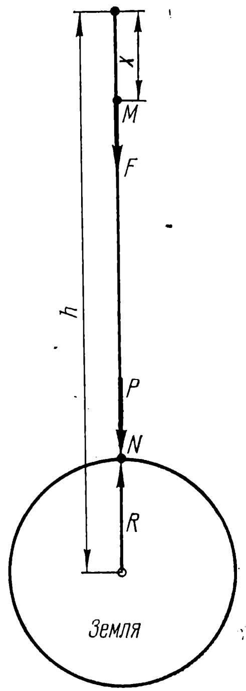

Рис. 22

Решение. В точке M (рис. 22), находящейся на неограниченно большом расстоянии от Земли, на тело действует сила тяжести

$$F=ma, \tag{1}$$

где m — масса тела, a — ускорение.

На поверхности Земли в точке N на тело действует сила тяжести

$$P=mg, \tag{2}$$

где g — ускорение силы тяжести на поверхности Земли.

По закону Ньютона эти силы обратно пропорциональны квадратам расстояний падающего тела от центра Земли:

$$\frac{F}{P}=\frac{R^2}{(h-x)^2}. \tag{3}$$

С другой стороны, учитывая соотношения (1) и (2),

$$\frac{F}{P}=\frac{ma}{mg}=\frac{a}{g}. \tag{4}$$

Ввиду равенства левых частей уравнений (3) и (4) приравниваем их правые части, откуда

$$\frac{a}{g}=\frac{R^2}{(h-x)^2}$$

или

$$a=\frac{R^2g}{(h-x)^2}. \tag{5}$$

Как известно, переменное ускорение

$$a=\frac{dv}{dt}. \tag{6}$$

Подставляем выражение (6) в равенство (5) и получаем

$$\frac{dv}{dt}=\frac{gR^2}{(h-x)^2}. \tag{7}$$

В уравнении (7) три переменные величины v, t и x. Одну из них (время t) можно исключить, так как

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{dv}{dx}v. \tag{8}$$

Подстановка полученного соотношения (8) в левую часть уравнения (7) дает дифференциальное уравнение движения

$$v\frac{dv}{dx}=\frac{gR^2}{(h-x)^2}.$$

Решаем это дифференциальное уравнение, выполняя предварительно очевидные преобразования,

$$vdv=\frac{gR^2}{(h-x)^2}dx,$$

откуда после интегрирования получаем общее решение

$$\frac{v^2}{2}=\frac{gR^2}{h-x}+C.$$

Начальные условия: при $t=0$ $x=0$ и $v=0$. Отсюда

$$\frac{0^2}{2}=\frac{gR^2}{h-0}+C$$

или

$$C=-\frac{gR^2}{h}.$$

Подставляем найденное значение постоянной интегрирования и находим закон движения тела:

$$\frac{v^2}{2}=\frac{gR^2x}{h(h-x)}.$$

На Земле в точке N величина $x=h-R$. Отсюда искомая скорость тела у поверхности Земли

$$\frac{v^2}{2}=\frac{gR(h-R)}{hR}.$$

Так как по условию задачи высота h считается неограниченно большой, то в космосе

$$\frac{v^2}{2}=\lim_{h\to\infty}\frac{gR^2(h-R)}{hR}=\lim_{h\to\infty}\left(gR-\frac{gR^2}{h}\right)=gR.$$

Из полученного равенства

$$v=\sqrt{2gR}.$$

Подставляя значения радиуса Земли $R=6337$ *км* $=6\,377\,000$ *м* и ускорения силы тяжести $g=9{,}81$ *м/сек*^{2}, получаем

$$v=\sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 6\,377\,000}=11\,180 \text{ м/сек}\approx 11 \text{ км/сек}.$$

В действительности сопротивление земной атмосферы ослабит этот удар и уменьшит скорость тела.

Выброс вверх

Задача 32. Ракета запущена вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 100$ *м/сек* (рис. 23, *а*). Сопротивление воздуха замедляет ее движение, сообщая ракете отрицательное ускорение D, рав-

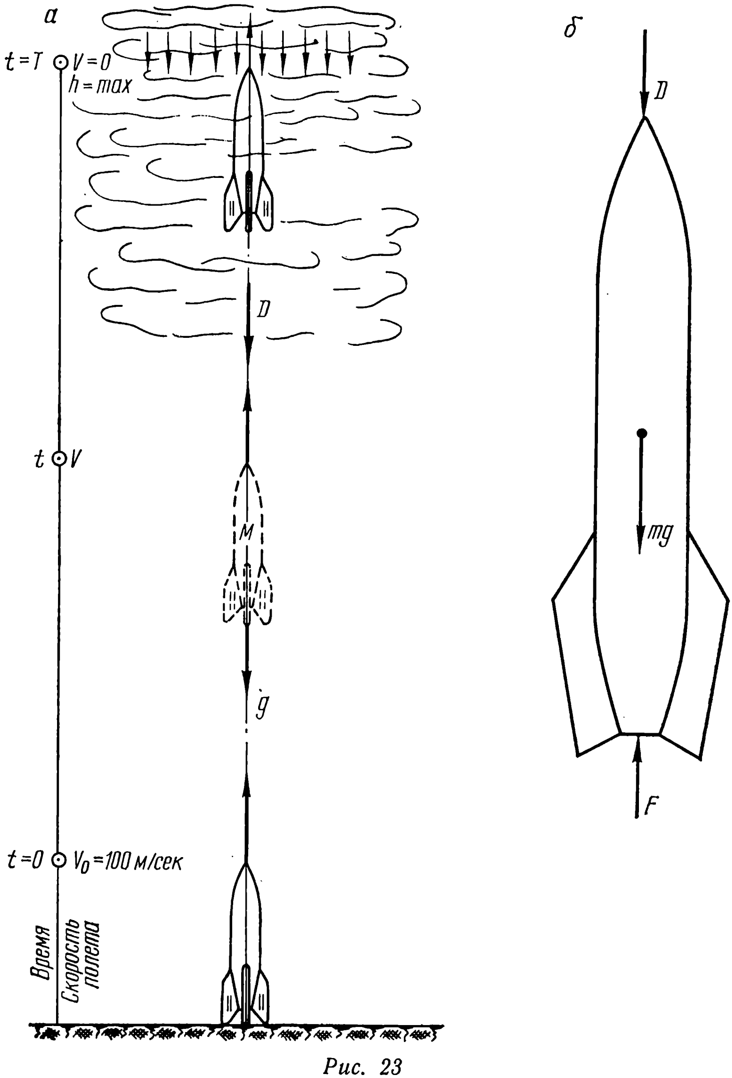

Рис. 23

ное $-kv^2$ (где v — мгновенная скорость ракеты, а k — аэродинамический коэффициент). Определить время достижения ракетой наивысшего положения.

Решение. Силы, действующие в вертикальном прямолинейном полете на ракету, представлены на рис. 23, *б*, где F — сила тяги.

Движение ракеты принимаем условно за движение материальной точки M.

Тогда общее ускорение ракеты a при движении вверх будет

$$a = -g - kv^2. \tag{1}$$

Но

$$a = \frac{dv}{dt}$$

и тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{dv}{dt} = -(g + kv^2). \tag{2}$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dv}{g + kv^2} = -dt$$

или

$$\frac{dv}{1 + \frac{kv^2}{g}} = -g\,dt. \tag{3}$$

Для интегрирования проводим преобразования уравнения (3):

$$\frac{d\left(\sqrt{\frac{k}{g}}\,v\right)}{\sqrt{\frac{k}{g}}\left[1 + \left(v\sqrt{\frac{k}{g}}\right)^2\right]} = -g\,dt$$

или

$$\sqrt{\frac{g}{k}} \cdot \frac{d\sqrt{\frac{k}{g}}\,v}{1 + \left(\sqrt{\frac{k}{g}}\,v\right)^2} = -g\,dt. \tag{4}$$

Уравнение (4) интегрируется почленно:

$$\int \frac{d\left(\sqrt{\frac{k}{g}}\,v\right)}{1 + \left(\sqrt{\frac{k}{g}}\,v\right)^2} = -\sqrt{gk}\int dt.$$

Общее решение уравнения (2)

$$\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{k}{g}}\,v\right)=-\sqrt{gk}\,t+C.$$

Для условий задачи, при $t=0$ $v=v_0=100$ *м/сек*, величина

$$C=\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{k}{g}}\,v_0\right)=\operatorname{arctg} 100\sqrt{\frac{k}{g}}.$$

Тогда частное решение

$$\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{k}{g}}\,v-\operatorname{arctg} 100\sqrt{\frac{k}{g}}=-\sqrt{gk}\,t. \qquad (5)$$

В момент достижения ракетой высшей точки $t=T$ и мгновенная скорость v равна нулю. Подставляя в равенство (5) $t=T$, $v=0$ и принимая $g=9{,}81$ *м/сек*^{2}, имеем:

$$T=\frac{\operatorname{arctg}\left(100\sqrt{\frac{k}{g}}\right)}{\sqrt{gk}}=\frac{\operatorname{arctg}(31{,}32\sqrt{k})}{3{,}132\sqrt{k}}. \qquad (6)$$

Итак, ракета достигнет своего наивысшего положения через время T, определяемое зависимостью (6).

Падение вниз при сопротивлении среды, пропорциональном скорости

Задача 33. С некоторой высоты брошено вертикально вниз тело массой m. Найти закон изменения скорости v падения этого тела, если на него действуют сила тяжести и тормозящая сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости (коэффициент пропорциональности k).

Решение. Задача заключается в определении закона изменения скорости v с течением времени t, т. е. $v=f(t)$.

Из второго закона Ньютона

$$m\frac{dv}{dt}=F,$$

где $\frac{dv}{dt}$ — ускорение движущегося тела; F — сила, действующая на тело в направлении движения.

Сила F складывается из двух сил: силы тяжести $F_1=mg$ и силы сопротивления воздуха $F_2=-kv$ (рис. 24).

Итак, уравнение движения

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv.$$

Разделяя переменные, получим

$$dt=\frac{mdv}{mg-kv}=\frac{dv}{g-\frac{k}{m}v}. \tag{1}$$

Интегрируем обе части равенства (1):

$$t=-\frac{m}{k}\int\frac{d\left(g-\frac{k}{m}v\right)}{g-\frac{k}{m}v}=-\frac{m}{k}\ln\left(g-\frac{k}{m}v\right)+C.$$

Решая последнее уравнение относительно v, имеем

$$\ln\left(g-\frac{k}{m}v\right)=\frac{k}{m}(C-t)$$

или

$$g-\frac{k}{m}v=e^{\frac{k}{m}(C-t)}=e^{\frac{k}{m}C}e^{-\frac{k}{m}t}=C_1e^{-\frac{k}{m}t},$$

откуда

$$v=-\frac{m}{k}C_1e^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}.$$

Обозначая постоянную величину $-\frac{m}{k}C_1$ через C^*, придем к уравнению

$$v=C^*e^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}. \tag{2}$$

Чтобы найти частное решение, используем дополнительное условие: при сбрасывании тела ему придана начальная скорость v_0. Считаем ее неизвестной. Тогда искомая функция $v=f(t)$ должна быть такой, чтобы в начале движения при $t=0$ выполнялось условие $v=v_0$. Подставляя $t=0$, $v=v_0$ в уравнение (2), получаем

$$v_0 = C^* + \frac{mg}{k},$$

откуда

$$C^* = v_0 - \frac{mg}{k}.$$

Итак, искомая функция

$$v = \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k}.$$

Падение вниз при сопротивлении среды, пропорциональном квадрату скорости

Задача 34. Сила тяжести летчика с парашютом 80 *кГ*. Сопротивление воздуха при спуске парашюта пропорционально квадрату его скорости v (коэффициент пропорциональности $k=400$). Определить скорость спуска в зависимости от времени и установить максимальную скорость спуска.

Решение. При спуске действует сила тяжести парашютиста с парашютом $P=mg$ (направлена книзу) и сопротивление воздуха, оказываемое этому спуску $F=-kv^2$ (направлено кверху). Таким образом, равнодействующая сила

$$R = mg - kv^2. \tag{1}$$

Согласно второму закону Ньютона,

$$R = m\frac{dv}{dt}. \tag{2}$$

Приравнивая равенства (1) и (2), получим дифференциальное уравнение спуска парашютиста:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2.$$

Найдем общее решение

$$\frac{\sqrt{\frac{mg}{k}} + v}{\sqrt{\frac{mg}{k}} - v} = Ce^{2\sqrt{\frac{k}{m}g}\,t}$$

или

$$v=\sqrt{\frac{mg}{k}}\,\frac{Ce^{2\sqrt{\frac{kg}{m}}t}-1}{Ce^{2\sqrt{\frac{kg}{m}}t}+1}.$$

Начальное условие: при $t=0$ $v=0$, откуда

$$\frac{\sqrt{\frac{mg}{k}}+0}{\sqrt{\frac{mg}{k}}-0}=Ce^0$$

и произвольная постоянная

$$C=1.$$

Закон спуска парашютиста примет при этом искомое выражение (для вычисления скорости парашютиста)

$$v=\sqrt{\frac{mg}{k}}\,\frac{e^{2\sqrt{\frac{kg}{m}}t}-1}{e^{2\sqrt{\frac{kg}{m}}t}+1}. \tag{3}$$

Как видно из уравнения (3), правая часть равенства представляет дробь, всегда меньшую единицы. Предел дроби при $t\to\infty$ равен 1. Таким образом, максимальное значение скорости

$$v_{\max}=\lim_{t\to\infty}\sqrt{\frac{mg}{k}}\,\frac{e^{2\sqrt{\frac{kg}{m}}t}-1}{e^{2\sqrt{\frac{kg}{m}}t}+1}=\sqrt{\frac{mg}{k}}. \tag{4}$$

Такой скорости парашютист никогда не достигнет, так как $v=v_{\max}$ при $t\to\infty$. Практически дробь формулы (3) уже при $t=2$ *сек* очень мало отличается от единицы, поэтому можно считать, что максимальная скорость достигается парашютистом через 2 *сек* после начала спуска. Величину максимальной скорости спуска получаем после подстановки числовых данных задачи в равенство (4):

$$v_{\max}=\sqrt{\frac{80\,000\cdot 981}{400}}\approx 443\ \textit{см/сек}\approx 4{,}4\ \textit{м/сек}.$$

Задача 35. Определить скорость, которую будет иметь через 2 *сек* после начала падения находившаяся до того в покое горизон-

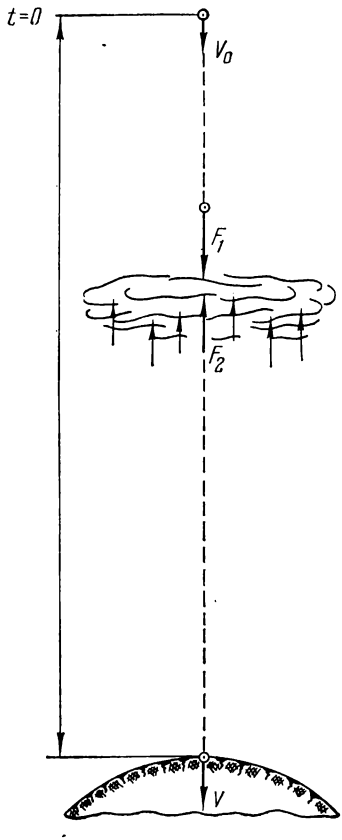

Рис. 24

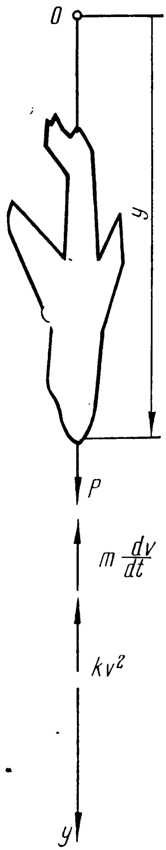

Рис. 25

тальная квадратная пластинка со стороной 1 *м* и силой тяжести 2 *кГ*. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости.

Р е ш е н и е. По закону Ньютона

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg-n^2v^2 \tag{1}$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2}=g-k^2v^2, \qquad (2)$$

где $k^2=\frac{n^2}{m}$. Ньютон дал также приближенную формулу для определения k^2 в виде

$$k^2=\frac{\nu\gamma S}{Q},$$

где S — площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную направлению движения, $м^2$; Q — сила тяжести тела, $кГ$; γ — сила тяжести 1 $м^3$ воздуха, $кГ$ (сухой воздух при температуре 0° С и давлении 760 *мм рт. ст.* имеет $\gamma=1{,}293$); ν — коэффициент сопротивления, зависящий от формы тела.

Для рассматриваемой задачи $\gamma=1{,}225$, $\nu=0{,}631$, $S=1$ и $Q=2$, откуда $k^2=0{,}386$.

Так как скорость падения

$$v=\frac{dx}{dt},$$

то уравнение (2) примет вид

$$\frac{dv}{g-k^2v^2}=dt.$$

Интегрируя это выражение с учетом начального условия: при $t=0$ $v=0$, имеем

$$\frac{\sqrt{g}+kv}{\sqrt{g}-kv}=e^{2k\sqrt{g}\,t},$$

откуда

$$v=\frac{\sqrt{g}}{k}\operatorname{th}(k\sqrt{g}\,t).$$

При $t=2$ *сек* искомая скорость $v=5{,}034$ *м/сек*, что почти не отличается от $v_{\max}=\frac{\sqrt{g}}{k}=5{,}038$ *м/сек*, так как при $t\to\infty$ $\operatorname{th}(k\sqrt{g}\,t)\to 1$.

Задача 36. Бомбардировщик начинает пикировать без начальной скорости. Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости. Найти зависимость между вертикальной скоростью в данный момент, пройденным путем и максимальной скоростью пикирования самолета.

Решение. Пусть v — вертикальная составляющая скорости пикирования, а $\frac{dv}{dt}$ — вертикальная составляющая ускорения пикирования.

Если P — сила тяжести самолета, то вертикальная составляющая силы, действующей на самолет, будет $P-kv^2$. Масса самолета $m=\frac{P}{g}$.

За время t самолет (рис. 25) проходит по вертикали путь y. На основании второго закона Ньютона уравнение движения запишется в виде

$$m\frac{dv}{dt}=P-kv^2.$$

Так как

$$m\frac{dv}{dt}=m\frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dt},$$

то

$$m\frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}=P-kv^2$$

или

$$mv\frac{dv}{dy}+kv^2-mg=0.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{mv\,dv}{mg-kv^2}=dy. \tag{1}$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (1), имеем:

$$-\frac{m}{2k}\ln C(mg-kv^2)=y. \tag{2}$$

Начальные условия: при $t=0$ $y=0$ и $v=0$, откуда

$$-\frac{m}{2k}\ln C\cdot mg=0$$

или

$$\ln C\cdot mg=0$$

и потенцируя, имеем

$$Cmg=1$$

или, наконец,

$$C=\frac{1}{mg}.$$

Подставляя найденное значение C в уравнение (2), получим

$$-\frac{m}{2k}\ln\left(1-\frac{k}{mg}v^2\right)=y.$$

Потенцируем это равенство:

$$1-\frac{k}{mg}v^2=e^{-\frac{2k}{m}y}. \qquad (3)$$

Очевидно, что при $y\to\infty$ самолет достигнет наибольшей скорости $v_{\max}$.

В этом случае

$$\lim_{y\to\infty} e^{-\frac{2k}{m}y}=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{e^{\frac{2k}{m}\cdot\infty}}=0$$

и

$$1-\frac{k}{mg}v_{\max}^2=0. \qquad (4)$$

Из уравнения (4) находим максимальную скорость:

$$v_{\max}^2=\frac{mg}{k};$$

$$v_{\max}=\sqrt{\frac{mg}{k}}. \qquad (5)$$

Для нахождения искомой зависимости используем уравнение (3), подставляя значение предельной скорости из уравнения (5). Тогда

$$1-\frac{v^2}{v_{\max}^2}=e^{-\frac{2k}{m}y}$$

и скорость

$$v=v_{\max}\sqrt{1-e^{-\frac{2k}{m}y}}=v_{\max}\sqrt{1-e^{-\frac{2gy}{v^2_{\max}}}}.$$

§ 9. ПАДЕНИЕ ТЕЛ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

Задача 37. Капля воды, имеющая начальную массу m_0 *г* и равномерно испаряющаяся со скоростью m_1 *г/сек*, движется по инерции с начальной скоростью v_0 *см/сек*. Сопротивление среды пропорционально скорости движения капли и ее радиусу. В начальный момент ($t=0$) оно равно f_0 *дин*. Найти зависимость скорости движения капли от времени.

Решение. По второму закону Ньютона

$$F=m\frac{dv}{dt},$$

где F — сила, m — масса, v — скорость, t — время.

Для решения этой задачи надо учесть, что масса m — переменная величина, зависящая от времени t; v — искомая функция.

Так как капля воды испаряется со скоростью m_1 *г/сек*, то в момент времени t масса капли будет равна

$$m=m_0-m_1t. \tag{1}$$

Сила, действующая на каплю, есть сопротивление среды, которое по условию задачи пропорционально vR, т. е.

$$F=kvR, \tag{2}$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Ввиду испарения капли воды ее радиус зависит от времени и от массы. Принимая удельный вес воды равным единице и каплю шаровой формы, можем записать, что масса капли

$$m=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Отсюда

$$R=\sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi}}$$

или, учитывая соотношение (1),

$$R=\sqrt[3]{\frac{3(m_0-m_1t)}{4\pi}}. \tag{3}$$

Значение (3) подставляем в равенство (2), откуда

$$F=kv\sqrt[3]{\frac{3(m_0-m_1t)}{4\pi}}. \tag{4}$$

Начальные условия: при $t=0$ $F=f_0$ и $v=v_0$. Отсюда

$$f_0=kv_0\sqrt[3]{\frac{3m_0}{4\pi}}$$

и коэффициент пропорциональности

$$k=\frac{f_0}{v_0}\sqrt[3]{\frac{4\pi}{3m_0}}.$$

Подставляя найденное значение k в уравнение (4), имеем

$$F=v\sqrt[3]{\frac{3(m_0-m_1t)}{4\pi}}\,\frac{f_0}{v_0}\sqrt[3]{\frac{4\pi}{3m_0}}=v\sqrt[3]{\frac{m_0-m_1t}{m_0}}\,\frac{f_0}{v_0}.$$

Так как сопротивление среды направлено в сторону, противоположную движению капли, то дифференциальное уравнение движения капли примет вид

$$(m_0-m_1t)\frac{dv}{dt}=-v\sqrt[3]{\frac{m_0-m_1t}{m_0}}\,\frac{f_0}{v_0}.$$

После разделения переменных

$$\frac{dv}{v}=-\frac{f_0}{v_0}\sqrt[3]{\frac{m_0-m_1t}{m_0(m_0-m_1t)^3}}\,dt$$

или

$$\frac{dv}{v}=-\frac{f_0}{v_0}\,\frac{dt}{m_0\sqrt[3]{\left(1-\frac{m_1}{m_0}t\right)^2}}. \tag{5}$$

Интегрируя уравнение (5), получаем

$$\ln v=\frac{f_0}{v_0}\,\frac{3m_0}{m_0m_1}\sqrt[3]{1-\frac{m_1}{m_0}t}+\ln C. \tag{6}$$

Потенцируя уравнение (6), имеем общее решение

$$v=Ce^{\frac{3}{v}\,\frac{f_0}{m_1}\sqrt[3]{1-\frac{m_1}{m_0}t}}.$$

Начальное условие: при $t=0$ $v=v_0$. Отсюда

$$v_0=Ce^{\frac{3f_0}{v_0m_1}}$$

и

$$C=v_0e^{-\frac{3f_0}{v_0m_1}}.$$

Тогда искомая скорость

$$v=v_0e^{-\frac{3f_0}{m_1v_0}\left(1-\sqrt[3]{1-\frac{m_1}{m_0}t}\right)}.$$

§ 10. КРИВОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ (КРИВАЯ ПОГОНИ)

Задача 38. Судно выходит из точки O и с постоянной скоростью плывет по направлению прямой Oy (рис. 26, *а*). Одновременно ($t=0$) из точки A, расположенной на расстоянии $OA=a$ от судна, выходит вдогонку на пересечение катер, плывущий со скоростью, дважды превышающей скорость судна. Найти уравнение описанной катером кривой погони и минимальное время, необходимое для достижения судна.

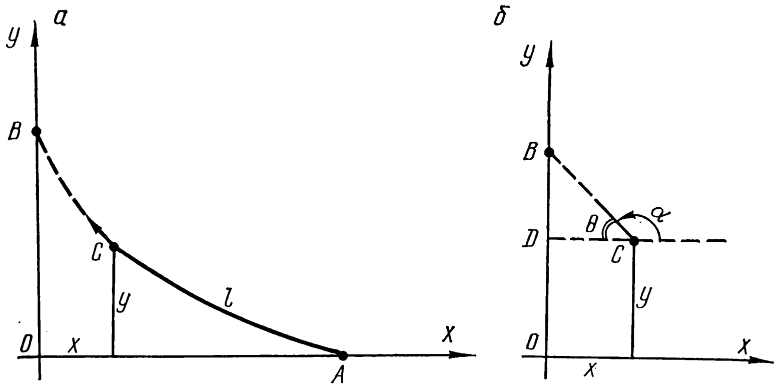

Рис. 26

Решение. Пусть x и y — координаты катера в момент t; в этот момент судно находится в точке B и прошло путь $OB=vt$ (рис. 26, *б*).

Пусть l — длина дуги AC. Вычислим угол наклона касательной $\frac{dy}{dx}$ в точке C:

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\alpha=-\operatorname{tg}\Theta=-\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}=-\left(\frac{vt-y}{x}\right)=\frac{y-vt}{x}.$$

С другой стороны, $l=2vt$. Таким образом,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-v\frac{l}{2v}}{x},$$

$$x\frac{dy}{dx}-y=-\frac{l}{2}. \tag{1}$$

Как известно, длина дуги

$$dl=\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Дифференцируя уравнение (1), получаем

$$\frac{dy}{dx}\cdot 1+x\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{dl}{dx}$$

или, подставляя выражение длины дуги, находим

$$x\frac{dy'}{dx}=-\frac{1}{2}\sqrt{1+y'^2}.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{dx}{x}. \tag{2}$$

Интегрируем уравнение (2) почленно, откуда

$$\ln(y'+\sqrt{1+y'^2})=\frac{1}{2}\ln x+C.$$

Определяем величину C, используя начальные условия: при $t=0$ $y'=0$ и $x=a$. Таким образом,

$$0=\frac{1}{2}\ln a+C$$

и

$$C=-\frac{1}{2}\ln a.$$

Тогда

$$\ln(y'+\sqrt{1+y'^2})=\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{2}\ln a=\ln\sqrt{\frac{x}{a}}.$$

После потенцирования

$$y'+\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{\frac{x}{a}} \tag{3}$$

или

$$\frac{1}{y'+\sqrt{1+y'^2}}=\sqrt{\frac{a}{x}}.$$

Продолжаем преобразования

$$\frac{y'-\sqrt{1+y'^2}}{(y'+\sqrt{1+y'^2})\,(y'-\sqrt{1+y'^2})}=\sqrt{\frac{a}{x}},$$

$$\frac{y'-\sqrt{1+y'^2}}{y'^2-1-y'^2}=\sqrt{\frac{a}{x}}$$

и тогда

$$y'-\sqrt{1+y'^2}=-\sqrt{\frac{a}{x}}. \tag{4}$$

Сложив равенства (3) и (4) и разделив результат на 2, получим

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{\frac{a}{x}}\right)$$

или

$$dy=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{\frac{a}{x}}\right)dx.$$

Интегрируя, находим

$$y=\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{x}{a}}\,dx-\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{a}{x}}\,dx+C$$

или

$$y=\frac{x\sqrt{x}}{3\sqrt{a}}-\sqrt{ax}+C. \tag{5}$$

Для нахождения частного решения используем начальное условие: при $x=a$ $y=0$. Таким образом, $C=\frac{2a}{3}$, и уравнение искомой кривой

$$y=\frac{x\sqrt{x}}{3\sqrt{a}}-\sqrt{ax}+\frac{2a}{3}.$$

Катер догоняет судно при $x=0$. Отсюда, полагая в равенстве (5) $x=0$, найдем путь, пройденный судном,

$$y=\frac{2a}{3}$$

и искомое время

$$t=\frac{y}{v}=\frac{2a}{3v}.$$

§ 11. ВРАЩЕНИЕ ТЕЛ В ЖИДКОСТИ

Задача 39. Замедляющее действие трения на диск, вращающийся в жидкости, пропорционально угловой скорости вращения (рис. 27). Найти зависимость угловой скорости от времени, если известно, что диск, начав вращаться со скоростью 200 *об/мин*, по истечении 1 *мин* вращается со скоростью 120 *об/мин*.

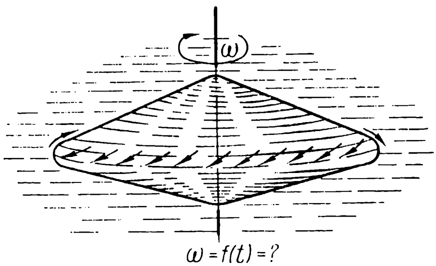

Рис. 27

Р е ш е н и е. Пусть ω — угловая скорость вращения диска, *об/мин*; k — коэффициент пропорциональности; $\frac{d\omega}{dt}$ — изменение угловой скорости вращения диска в жидкости.

Силовому воздействию вращения оказывает сопротивление переменное трение, возникающее при вращении диска в жидкости и зависящее от изменения скорости вращения.

Таким образом, из уравнения действующих сил

$$\frac{d\omega}{dt}-k\omega=0$$

или

$$\frac{d\omega}{dt}=k\omega.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{d\omega}{\omega}=kdt,$$

и, интегрируя,

$$\ln\omega=kt+\ln C.$$

После преобразований

$$\ln\frac{\omega}{C}=kt,$$

$$\frac{\omega}{C}=e^{kt}.$$

Общее решение уравнения

$$\omega=Ce^{kt}.$$

Необходимо определить значения C и коэффициента пропорциональности k.

Из начальных условий:

$$t_0=0 \text{ мин},\quad \omega_0=200 \text{ об/мин};$$

$$t_1=1 \text{ мин},\quad \omega_1=120 \text{ об/мин}.$$

Тогда

$$\omega(0)=Ce^{k\cdot 0}=200 \text{ и } C=200.$$

Далее, имеем

$$\omega(1)=Ce^{k\cdot 1}=120.$$

Из этого равенства определим величину k:

$$200e^k=120 \text{ или } e^k=\frac{3}{5},$$

откуда

$$k=\ln\frac{3}{5}.$$

Искомая зависимость угловой скорости от времени

$$\omega=200e^{t\ln\frac{3}{5}}=200\left(e^{\ln\frac{3}{5}}\right)^t=200\left(\frac{3}{5}\right)^t.$$

§ 12. ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ

Выстрел снаряда на Луну

Задача 40. На основании закона всемирного тяготения исследовать возможность достижения Луны путем выстрела снаряда космического корабля из гигантского орудия. Определить начальную скорость, которую необходимо сообщить снаряду для достижения Луны. Среднее расстояние от Земли до Луны $a=384\,395$ *км*; радиус Земли $R_З=6377$ *км*; ускорение силы тяжести Земли $g=9{,}81$ *м/сек²*; ускорение силы тяжести Луны $g_Л=1{,}62$ *м/сек²* (около $1/6\,g$); масса Земли $m_З=81{,}53m_Л$, где $m_Л$ — масса Луны.

Решение. Хотя практически такой способ транспортировки тел на Луну непригоден и для этой цели используются космические ракеты, тем не менее задача представляет теоретический интерес, в частности, для определения той громадной скорости, которую орудие должно сообщить снаряду для достижения Луны.

Сила взаимодействия F любых двух тел во Вселенной прямо пропорциональна произведению их масс и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F=\frac{km_1m_2}{d^2}, \tag{1}$$

где m_1, m_2 — массы тел, d — расстояние между ними, k — коэффициент пропорциональности (постоянная тяготения).

В основу исследования положим следующие предпосылки:

1) Земля и Луна являются шарообразными телами с радиусами соответственно $R_З$ и $R_Л$ и массами $m_З$ и $m_Л$;

2) снаряд (или космический корабль) массы m выпускается из вертикально расположенного ствола к центру Луны с начальной скоростью v_0;

3) вращение Земли и Луны не принимается во внимание;

4) влияние Солнца и других планет не учитывается;

5) сопротивление атмосферы не принимается во внимание.

Согласно рис. 28, принимая направление от центра Земли к Луне за положительное, на основании закона всемирного тяготения и соотношения (1), имеем

$$F=mg=m\frac{d^2r}{dt^2}=-\frac{km_Зm}{(r+R_З)^2}+\frac{km_Лm}{(a+R_Л-r)^2}$$

или

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-\frac{km_З}{(r+R_З)^2}+\frac{km_Л}{(a+R_Л-r)^2}. \tag{2}$$

Равенство (2) показывает, что результат не зависит от массы снаряда (космического корабля).

Выразим произведение $km_з$ общепринятыми величинами. Очевидно, что сила притяжения массы m к Земле равно весу mg. Отсюда, согласно соотношению (1),

$$\frac{km_з m}{R_з^2} = mg$$

или

$$km_з = gR_з^2. \qquad (3)$$

Аналогично, обозначая через $g_л$ ускорение, вызванное притяжением Луны, получим

$$km_л = g_л R_л^2. \qquad (4)$$

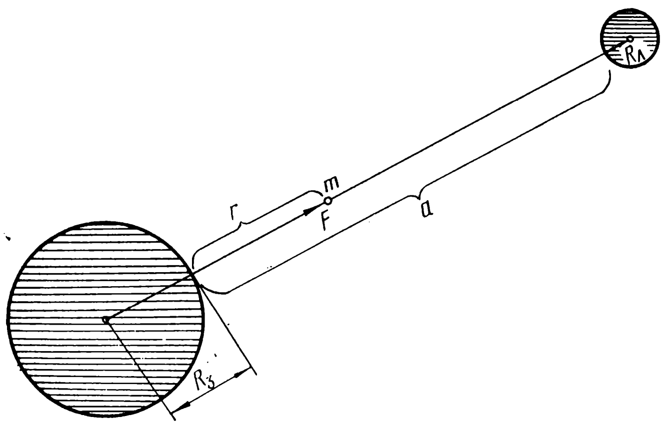

Рис. 28

Подставляем выражения (3) и (4) в уравнение (2):

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{gR_з^2}{(r+R_з)^2} + \frac{g_л R_л^2}{(a+R_л-r)^2}. \qquad (5)$$

Начальные условия: при $t=0$ $r=0$ и $\frac{dr}{dt}=0$. Так как уравнение (5) не включает в себя переменной t, то примем $\frac{dr}{dt}=v$, откуда

$$v\frac{dv}{dr} = -\frac{gR_з^2}{(r+R_з)^2} + \frac{g_л R_л^2}{(a+R_л-r)^2}.$$

Интегрируя, получаем

$$\frac{v^2}{2} = gR_з^2 \int \frac{d(r+R_з)}{(r+R_з)^2} + g_л R_л^2 \int \frac{d(a+R_л-r)}{(a+R_л-r)^2} + C_1$$

или, обозначая $2C_1=C$,

$$v^2=\frac{2gR_З^2}{r+R_З}+\frac{2g_ЛR_Л^2}{a+R_Л-r}+C.$$

Начальные условия: при $t=0$ $r=0$, $v=v_0$. Отсюда

$$C=v_0^2-2gR_З-\frac{2g_ЛR_Л^2}{a+R_Л}.$$

Подставляя найденное значение постоянной интегрирования, получаем уравнение

$$v^2=\frac{2gR_З^2}{r+R_З}+\frac{2g_ЛR_Л^2}{a+R_Л-r}+v_0^2-2gR_З-\frac{2g_ЛR_Л^2}{a+R_Л}, \tag{6}$$

которое дает возможность определить мгновенную скорость v.

Определим начальную скорость (у дула) орудия, необходимую для достижения нейтральной точки (расположенной между Землей и Луной, в которой притяжение равно нулю) с нулевой скоростью.

Положение этой точки, обозначаемое $r=r_н$, определяется из уравнения

$$\frac{m_З}{(r_н+R_З)^2}=\frac{m_Л}{(a+R_Л-r_н)^2}, \tag{7}$$

полученного после приравнивания нулю (так как в нейтральной точке скорость нулевая, следовательно, ускорение также равно нулю) правой части уравнения (2). Так как при $r=r_н$ $v=0$, то из уравнения (6) получаем

$$v_0^2=2gR_З-\frac{2g_ЛR_Л^2}{a+R_Л-r_Л}+\frac{2g_ЛR_Л^2}{a+R_Л}-\frac{2gR_З^2}{r_н+R_З}. \tag{8}$$

Так как по условию $m_З=81{,}53m_Л$, то уравнение (7) запишется

$$\frac{81{,}53m_Л}{(r_н+R_З)^2}=\frac{m_Л}{(a+R_Л-r_н)^2}$$

или

$$\frac{81{,}53}{(r_н+R_З)^2}=\frac{1}{(a+R_Л-r_н)^2}.$$

Разрешаем последнее равенство относительно $r_н$:

$$r_н=\frac{9{,}03(a+R_Л)-R_З}{10{,}03}. \tag{9}$$

Подставляем выражение (9) в равенство (8):

$$v_0^2=2gR_з-\frac{20,06g_лR_л^2}{a+R_л+R_з}+\frac{2g_лR_л^2}{a+R_л}-\frac{20,06gR_з^2}{9,03(a+R_л+R_з)}. \quad (10)$$

На основании соотношений (3) и (4), а также того, что $m_з=81,53m_л$, получаем

$$gR_з^2=81,53g_лR_л^2 \quad (11)$$

и так как $g_л\approx\frac{g}{6}$, то

$$R_л\approx\frac{\sqrt{6}}{9,03}R_з. \quad (12)$$

Подставляем соотношение (11) в уравнение (10):

$$v_0^2=2gR_з-\frac{201,20gR_з^2}{81,53(a+R_л+R_з)}+\frac{2gR_з^2}{81,53(a+R_л)}. \quad (13)$$

Так как $a\approx60R_з$ и, согласно соотношению (12), $R_л\approx\frac{1}{4}R_з$, то уравнение (13) записывается:

$$v_0^2=2gR_з-\frac{201,20gR_з}{81,53\cdot61,25}+\frac{2gR_з}{81,53\cdot60,25}=$$

$$=2gR_з(1-0,02+0,0002)=2gR_з(1-0,01)^2$$

или

$$v_0=\sqrt{2gR_з}\,(1-0,01).$$

Следовательно, скорость, необходимая для достижения нейтральной точки, приближенно равна

$$v_0=0,99\sqrt{2gR_з}.$$

Подставляя данные значения g и $R_з$, находим, что начальная скорость

$$v_0\approx11,1\ км/сек.$$

Из уравнения (10) можно найти скорость, которую должен бы иметь снаряд (космический корабль), чтобы покинуть Землю и никогда больше не возвращаться, не принимая во внимание влияния других планет, Солнца или еще каких-либо тел (т. е. при условиях, принятых в начале задачи).

Для определения этой скорости необходимо в уравнении (10) принять $g_л=0$ и $a\to\infty$. Тогда

$$v_0^2=2gR_З-\frac{20{,}06gR_З^2}{9{,}03(a+R_Л+R_З)}$$

и

$$\lim_{a\to\infty} v_0^2=2gR_З,$$

откуда

$$v_0^2=2gR_З$$

или

$$v_0=\sqrt{2gR_З}.$$

Таким образом, эта скорость только на 1% больше скорости, необходимой для достижения нейтральной точки.

Выброс вверх материальной точки

Задача 41. Определить скорость материальной точки, запускаемой в направлении, радиальном к Земле, и находящейся под воздействием лишь силы притяжения Земли.

Решение. Предполагаем, что движение материальной точки начинается на прямой, проходящей через центр Земли.

Согласно закону всемирного тяготения, ускорение материальной точки должно быть обратно пропорциональным квадрату ее расстояния до центра Земли. Пусть r — переменное расстояние точки от центра Земли, R — радиус Земли. Если обозначим t — время, v — скорость материальной точки, a — ускорение и k — коэффициент пропорциональности, то

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{k}{r^2}.$$

Ускорение отрицательно, так как скорость убывает. Поэтому постоянная k тоже отрицательна. При $r=R$ ускорение материальной точки $a=-g$, т. е. равно ускорению силы тяжести на поверхности Земли. Таким образом,

$$-g=\frac{k}{R^2},$$

откуда

$$a=-\frac{gR^2}{r^2}.$$

Выразим ускорение в виде функции скорости и расстояния. Имеем зависимости $a=\frac{dv}{dt}$ и $v=\frac{dr}{dt}$. Следовательно,

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dr}{dt}\cdot\frac{dv}{dr}=v\frac{dv}{dr},$$

так что дифференциальное уравнение для скорости имеет вид

$$v\frac{dv}{dr}=-\frac{gR^2}{r^2}.$$

Разделим переменные:

$$vdv=-gR^2\frac{dr}{r^2},$$

откуда после интегрирования получим

$$\frac{v^2}{2}=\frac{gR^2}{r}+C_1$$

или

$$v^2=\frac{2gR^2}{r}+C, \tag{1}$$

где $C=2C_1$.

Предположим, что материальная точка отрывается от поверхности Земли с начальной скоростью v_0. Тогда начальное условие: при $r=R$ $v=v_0$, откуда после подстановки этих значений в уравнение (1) получаем

$$C=v_0^2-2gR.$$

Итак, закон движения материальной точки, запускаемой в космос с начальной скоростью v_0, будет

$$v^2=\frac{2gR^2}{r}+v_0^2-2gR. \tag{2}$$

На поверхности Земли (при $r=R$) скорость $v=v_0$ положительна. Исследование правой части уравнения (2) показывает, что скорость материальной точки v остается положительной тогда и только тогда, если

$$v_0^2-2gR\geqslant 0. \tag{3}$$

Так как скорость, заданная уравнением (2), должна быть положительной (если удовлетворено неравенство (3)) и не может исчезнуть, то она является непрерывной и положительной при $r=R$. С другой стороны, если неравенство (3) не удовлетворяется, т. е. $v_0^2-2gR<0$, то должно существовать критическое значение r, при котором члены в правой части уравнения (2) равны нулю. Это изменило бы скорость с положительной на отрицательную и материальная точка могла бы вернуться на Землю.

Материальная точка запускается с Земли со скоростью v_0 так, что при $v_0\geqslant\sqrt{2gR}$ будет отрыв от Земли. Поэтому минимальное значение такой скорости отрыва

$$v_{\text{ст}} = \sqrt{2gR}$$

называется стартовой скоростью.

Так как радиус Земли $R = 6377$ *км*, ускорение силы тяжести на поверхности Земли $g = 9{,}81$ *м/сек*^{2}, то стартовая скорость для Земли составляет

$$v_{\text{з.ст}} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 6377} \approx 11{,}2 \text{ км/ч}.$$

Гравитационное влияние других небесных тел — Луны, Солнца. Марса, Венеры и пр.— в этой идеализированной постановке задачи не учитывается.

Если под материальной точкой подразумевать идеализацию баллистической ракеты, то надо учитывать дополнительные элементы, в частности, сопротивление атмосферы.

§ 13. РАДИОАКТИВНЫЙ РАСПАД

Задача 42. Скорость распада радия прямо пропорциональна наличной его массе. Определить, какой процент массы m_0 радия распадется через 200 лет, если известно, что период полураспада радия (период времени, по истечении которого распадается половина наличной массы радия) равен 1590 лет.

Решение. Скорость распада радия измеряется его количеством, распавшимся в единицу времени. За малый промежуток времени Δt, истекший с некоторого момента времени t, количество распавшегося радия равно $km\Delta t$, где m — количество радия в данный момент, k — коэффициент пропорциональности. Это же количество, взятое с отрицательным знаком (масса убывает), равно приращению массы за время Δt:

$$\Delta m = -km\Delta t. \tag{1}$$

Обе части равенства (1) делим на Δt и переходим к пределу при $\Delta t \to 0$. Тогда

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt} = -km.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{dm}{m} = -kdt. \tag{2}$$

Интегрируя уравнение (2), находим

$$\ln m = -kt + \ln C$$

или после потенцирования

$$m = Ce^{-kt}. \qquad (3)$$

Начальное условие: $m = m_0$ при $t = 0$, где m_0 — масса в начальный момент $t = 0$.

Подставляя эти величины в уравнение (3), имеем

$$m_0 = Ce^{-k \cdot 0},$$

откуда

$$C = m_0.$$

Уравнение (3) представляется теперь следующим образом:

$$m = m_0 e^{-kt}.$$

График этой функции показан на рис. 29. Коэффициент k определится из дополнительного условия: при $T = 1590$ $m = \frac{m_0}{2}$.

Таким образом,

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-1590k}$$

или

$$-1590k = -\ln 2, \quad k = 0{,}00044.$$

Искомая функция

$$m(t) = m_0 e^{-0{,}00044t}.$$

Количество радия, не распавшегося через 200 лет,

$$m(200) = m_0 e^{-0{,}00044 \cdot 200} = m_0 e^{-0{,}088} = 0{,}915 m_0.$$

Следовательно, через 200 лет распадется лишь 8,5% радия.

§ 14. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЗАРЯДЫ

Потеря заряда проводником

Задача 43. Изолированному проводнику сообщен заряд $Q_0 = 1000$ *к*. Вследствие несовершенства изоляции проводник постепенно теряет свой заряд. Скорость потери заряда в данный момент пропорциональна наличному заряду проводника. Какой заряд останется на проводнике по истечении времени $t = 10$ *мин*, если за первую минуту потеряно 100 *к*?

Решение. К моменту t заряд проводника равен Q. Скорость потери заряда в этот момент равна $-\frac{dQ}{dt}$. Так как эта скорость пропорциональна заряду Q, то дифференциальное уравнение процесса

$$-\frac{dQ}{dt}=kQ,$$

где k — коэффициент пропорциональности.

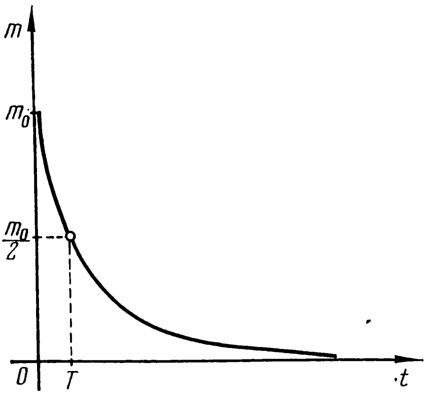

Рис. 29

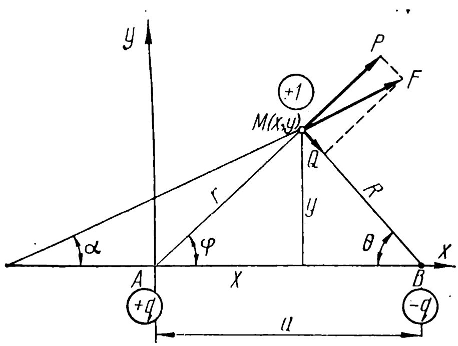

Рис. 30

Интегрируя это уравнение, получим общее решение

$$Q=Ce^{-kt}.$$

Начальное условие: при $t=0$ $Q=Q_0$. Отсюда

$$Q_0=Ce^{-k\cdot 0}$$

и

$$C=Q_0.$$

Следовательно, закон протекающего процесса

$$Q=Q_0e^{-kt}.$$

Согласно дополнительному условию, при $t=1$

$$Q=900\ \text{к},$$

откуда

$$900=1000e^{-k\cdot 1},\quad e^{-k}=0{,}9.$$

Подставляя найденное значение в общее решение, получим

$$Q=1000\cdot 0{,}9^t.$$

Таким образом, через 10 *мин* на проводнике останется заряд

$$Q=1000\cdot 0{,}9^{10}\approx 348{,}7\ \text{к}.$$

Эквипотенциальные линии электрического поля

Задача 44. На расстоянии a друг от друга в точках A и B сосредоточены два равных разноименных заряда $+q$ и $-q$. Приняв точку A за начало координат и направив ось x по линии AB, составить уравнение семейства эквипотенциальных линий электрического поля, создаваемого указанными зарядами.

Решение. Эквипотенциальные линии, или линии равного потенциала, ортогональны силовым линиям поля. Силовая линия в любой своей точке направлена по вектору электрической силы, действующей на положительный заряд, помещенный в эту точку.

Пусть в точке $M(x, y)$ поля помещена положительная единица заряда $(+1)$.

По закону Кулона на эту единицу действуют силы (рис. 30):

$$P=k\frac{q}{r^2},$$

$$Q=k\frac{q}{R^2},$$

где k — диэлектрическая постоянная среды.

Проекции этих сил на соответствующие оси будут:

$$P_x=k\frac{q}{r^2}\cos\varphi=kq\frac{x}{r^3},$$

$$P_y=k\frac{q}{r^2}\sin\varphi=kq\frac{y}{r^3},$$

$$Q_x=k\frac{q}{R^2}\cos\theta=kq\frac{a-x}{R^3},$$

$$Q_y=k\frac{q}{R^2}\sin\theta=-kq\frac{y}{R^3}.$$

Здесь

$$\cos\varphi=\frac{x}{r},\quad \sin\varphi=\frac{y}{r},$$

$$\cos\theta=\frac{a-x}{R},\quad \sin\theta=\frac{y}{R}.$$

Составляющие равнодействующей силы F равны

$$F_x=P_x+Q_x=kq\left(\frac{x}{r^3}+\frac{a-x}{R^3}\right)=kq\frac{x(R^3-r^3)+ar^3}{r^3R^3},$$

$$F_y=P_y+Q_y=kq\left(\frac{y}{r^3}-\frac{y}{R^3}\right)=kq\,\frac{y(R^3-r^3)}{r^3R^3}.$$

Направление этой силы (угловой коэффициент)

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{F_y}{F_x}=\frac{y(R^3-r^3)}{x(R^3-r^3)+ar^3}.$$

Такое же направление имеет силовая линия в точке $M(x, y)$. Направление в этой точке эквипотенциальной линии, как ортогональной к силовой линии, будет

$$\operatorname{tg}\alpha_1=-\frac{x(R^3-r^3)+ar^3}{y(R^3-r^3)}.$$

С другой стороны,

$$\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{dy}{dx}.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение искомого семейства эквипотенциальных линий

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x(R^3-r^3)+ar^3}{y(R^3-r^3)}. \tag{1}$$

Введем новые переменные R и r, полагая

$$\left.\begin{aligned}R^2&=(a-x)^2+y^2,\\ r^2&=x^2+y^2.\end{aligned}\right\}$$

Дифференцируя последние равенства, имеем

$$\left.\begin{aligned}RdR&=-(a-x)\,dx+ydy,\\ rdr&=xdx+ydy.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Из системы (2) определим dx, dy и $\frac{dy}{dx}$:

$$\left.\begin{aligned}dx&=\frac{rdr-RdR}{a},\\ dy&=\frac{(a-x)\,rdr+xRdR}{ay},\\ \frac{dy}{dx}&=\frac{(a-x)\,rdr+xRdR}{y(rdr-RdR)}.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Сравнивая уравнение (1) с уравнением (3), получим

$$\frac{(a-x)rdr+xRdR}{y(rdr-RdR)}=-\frac{x(R^3-r^3)+ar^3}{y(R^3-r^3)}$$

или после упрощения

$$R^2dr=r^2dR,$$

т. е. дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, откуда

$$\frac{dr}{r^2}=\frac{dR}{R^2}. \tag{4}$$

Интегрируя уравнение (4), получим общее решение

$$\frac{1}{R}-\frac{1}{r}=C,$$

которое указывает на основное геометрическое свойство эквипотенциальных линий рассматриваемого поля.

Разность величин, обратных расстояниям текущей точки от заряженных центров поля, есть величина постоянная. Переходя к декартовым координатам, получим уравнение искомого семейства

$$\frac{1}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=C.$$

§ 15. ПОВЕРХНОСТЬ ФРЕЗЫ

Задача 45. Острозаточенная фреза имеет форму, показанную на рис. 31. После использования шлифуется ее передняя грань AC. Поверхность, сечением которой является кривая AB, должна быть такой, чтобы угол α между радиус-вектором произвольной точки кривой и касательной к кривой AB в этой точке оставался постоянным. Найти уравнение кривой AB.

Решение. Пусть уравнение искомой кривой в полярной системе координат $r=f(\varphi)$ и полюс совмещен с началом прямоугольной системы.

Рассмотрим геометрический смысл производной

$$r'=\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta\varphi}=\frac{dr}{d\varphi}=r'(\varphi)$$

уравнения кривой $r=f(\varphi)$ в полярной системе координат.

Пусть P_1 и P две точки кривой $r=f(\varphi)$, которые в пределе при $\Delta\varphi\to 0$ совпадают (рис. 32). Перед переходом к пределу радиус-вектор точки P и секущая P_1P образуют угол $\overline{\psi}$. При переходе этот угол переходит в угол ψ, образуемый радиус-вектором точки P_1 и касательной, проведенной в этой точке, т. е. $\psi = \lim\limits_{\Delta\varphi\to 0} \overline{\psi}$. Следовательно (см. рис. 32):

$$\operatorname{tg}\overline{\psi} = \frac{BP_1}{BP} \approx \frac{r\Delta\varphi}{\Delta r} = \frac{r}{\dfrac{\Delta r}{\Delta\varphi}}.$$

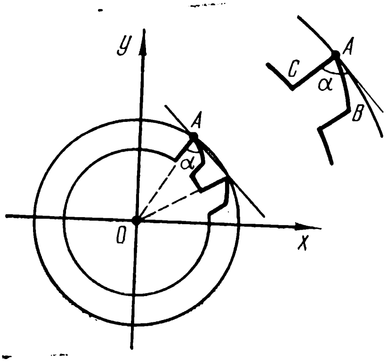

Рис. 31

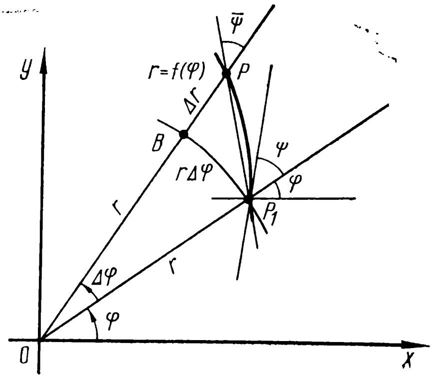

Рис. 32

Таким образом, после предельного перехода

$$\operatorname{tg}\psi = \lim_{\Delta\varphi\to 0} \frac{r}{\dfrac{\Delta r}{\Delta\varphi}} = \frac{r}{\lim\limits_{\Delta\varphi\to 0}\dfrac{\Delta r}{\Delta\varphi}} = \frac{r}{r'}.$$

В условиях задачи углу ψ соответствует угол α и, следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{r'},$$

откуда после разделения переменных

$$\operatorname{tg}\alpha \frac{dr}{r} = d\varphi. \tag{1}$$

Интегрируя равенство (1), имеем

$$\operatorname{tg}\alpha \ln r = \varphi + C_1$$

или

$$\ln r = (\varphi + C_1)\operatorname{ctg}\alpha.$$

Потенцируя равенство (2), получаем уравнение

$$r = e^{(\varphi + C_1)\operatorname{ctg}\alpha} = e^{\varphi\operatorname{ctg}\alpha}\, e^{C_1\operatorname{ctg}\alpha} = Ce^{\varphi\operatorname{ctg}\alpha},$$

где $C = e^{C_1\operatorname{ctg}\alpha}$.

Искомая кривая является логарифмической спиралью.

§ 16. ТРЕНИЕ РЕМЕННОЙ ПЕРЕДАЧИ

Задача 46. На барабан радиуса r натянута ременная передача, нагруженная силами F_0 и F_1, так, что $\angle AOB = \alpha$ (рис. 33, *а*). Благодаря трению между цилиндром и передачей даже значительно меньшая сила F_0 может уравновешиваться большей силой F_1. Найти наибольшую силу F_1, которая может быть уравновешена силой F_0, если коэффициент трения равен μ.

Решение. Рассмотрим на барабане произвольную точку M, в которой действует переменная сила F, а рядом в точке M_1 пусть действует сила $F + dF$ (рис. 33, *б*).

Для определения силы трения на дуге MM_1 необходимо найти нажим dN, который равен

$$dN = F\sin\frac{d\varphi}{2} + (F + dF)\sin\frac{d\varphi}{2} = 2F\sin\frac{d\varphi}{2} + dF\sin\frac{d\varphi}{2}.$$

При малых углах

$$\sin\frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}$$

и тогда

$$dN = 2F\frac{d\varphi}{2} + \frac{1}{2}dF d\varphi. \tag{1}$$

Второй член в правой части уравнения (1) можно отбросить, как величину бесконечно малую высшего порядка, чем $d\varphi$. Тогда

$$dN = F d\varphi.$$

Так как μ — коэффициент трения, то сила трения

$$dR = \mu\, dN = \mu\, F d\varphi.$$

В начале скольжения

$$F + dR = F + dF$$

и

$$\mu\, F d\varphi = dF.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение трения передачи

$$\frac{dF}{d\varphi} = \mu F$$

или после разделения переменных

$$\frac{dF}{F} = \mu d\varphi.$$

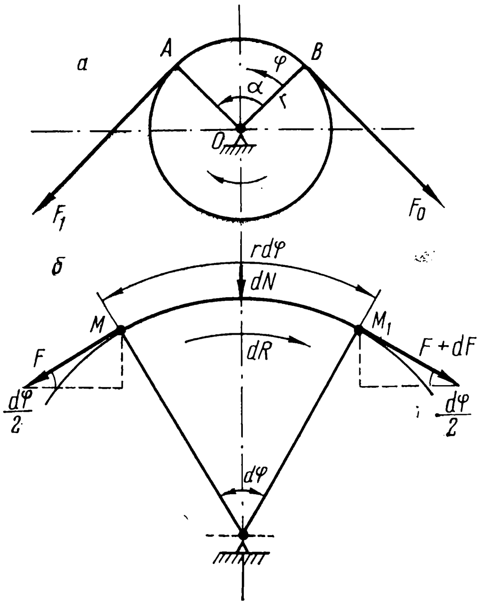

Рис. 33

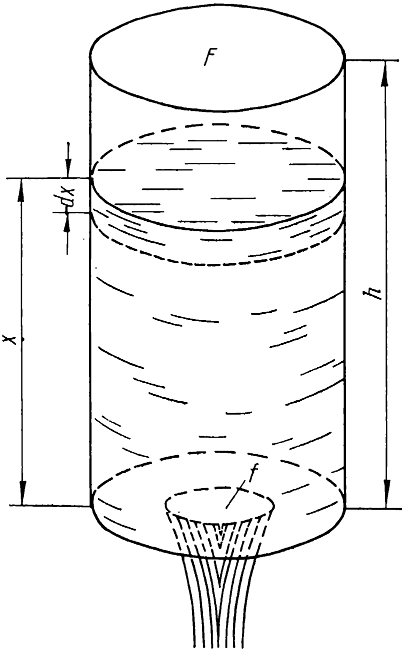

Рис. 34

Интегрируя это уравнение, имеем

$$\ln F = \mu\varphi + C_1$$

или общее решение

$$F = Ce^{\mu\varphi}. \tag{2}$$

Начальное условие $\varphi = 0$ $F = F_0$ определяет произвольную постоянную $C = F_0$, и тогда уравнение (2) принимает вид

$$F = F_0 e^{\mu\varphi}.$$

Для наибольшего значения силы $F=F_1$ при $\varphi=\alpha$ получаем искомую величину

$$F_1=F_0e^{\mu\alpha}.$$

Суммарная сила трения равна разности сил F_1 и F_0, т. е.

$$R=F_1-F_0=F_0(e^{\mu\alpha}-1).$$

§ 17. ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ СОСУДОВ

Цилиндрический сосуд

Задача 47. Заполненный водой цилиндрический сосуд высотой h и площадью дна F имеет в дне отверстие, площадь которого f. Найти время истечения воды через отверстие.

Решение. Пусть в момент t высота воды в сосуде над площадью f составит x (рис. 34). За время dt эта высота изменится на величину $-dx$. За это время вытечет вода объемом $-Fdx$.

С другой стороны, этот объем воды равен объему столба воды с основанием f и высотой vdt, где v — скорость истечения, т. е. объем равен $fvdt$.

Скорость истечения определяется по формуле

$$v=\sqrt{2gh},$$

где h — глубина погружения отверстия в данный момент, g — ускорение силы тяжести.

В нашем случае $h=x$ и поэтому $v=\sqrt{2gx}$. Следовательно, искомый объем

$$fvdt=f\sqrt{2gx}\,dt.$$

С другой стороны, этот объем можно представить так:

$$-Fdx=f\sqrt{2gx}\,dt$$

или

$$-\frac{F}{f}\cdot\frac{dx}{\sqrt{2gx}}=dt,$$

откуда после интегрирования получаем общее решение

$$t=-\frac{F}{f}\sqrt{\frac{2x}{g}}+C. \qquad (1)$$

Начальное условие: при $t=0$ $x=h$, откуда

$$0=-\frac{F}{f}\sqrt{\frac{2h}{g}}+C$$

или

$$C=\frac{F}{f}\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Подставляем значение постоянной интегрирования в равенство (1), и тогда закон процесса

$$t=\frac{F}{f}\sqrt{\frac{2}{g}}\,(\sqrt{h}-\sqrt{x}).$$

В момент опорожнения сосуда $t=T$ и высота воды в сосуде $x=0$, откуда искомое время

$$T=\frac{F}{f}\sqrt{\frac{2}{g}}\,(\sqrt{h}-\sqrt{0})$$

или

$$T=\frac{F}{f}\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Задача 48. В дне цилиндрического резервуара, наполненного жидкостью, образовалась щель (рис. 35). Принимая скорость истечения жидкости пропорциональной высоте уровня ее в резервуаре и зная, что в течение первых суток вытекло 10% содержимого, определить время истечения половины жидкости.

Решение. Пусть R — радиус резервуара; h — высота; x — высота уровня жидкости в резервуаре по истечении t дней.

Тогда объем жидкости в резервуаре в момент t равен $\pi R^2 x$, а скорость изменения объема $\pi R^2 \frac{dx}{dt}$. По условию эта величина пропорциональна x, так что дифференциальное уравнение задачи

$$\pi R^2 \frac{dx}{dt}=kx,$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Разделяя переменные, получим

$$\frac{\pi R^2 dx}{x}=k\,dt$$

или, проинтегрировав, находим

$$\pi R^2 \ln x=kt+C. \qquad (1)$$

Начальное условие: при $t=0$ резервуар полностью наполнен, так что $x=h$. Следовательно,

$$\pi R^2 \ln h = C$$

и уравнение (1) примет вид

$$\pi R^2 \ln x = kt + \pi R^2 \ln h$$

или

$$\pi R^2 \ln \frac{x}{h} = kt.$$

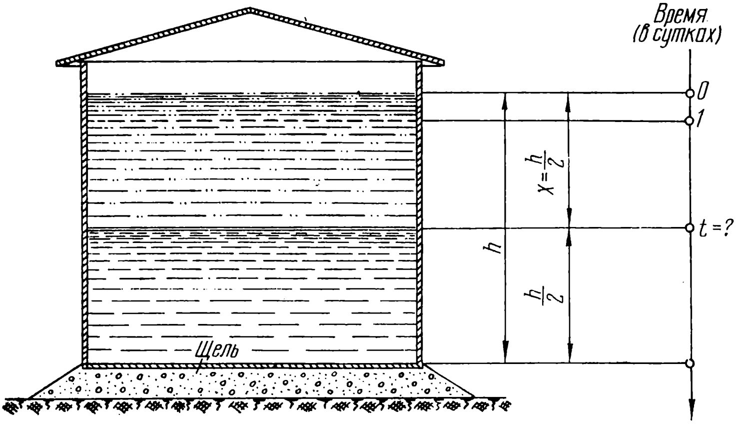

Рис. 35

Дополнительное условие: при $t=1$ $x=\frac{9}{10}h$, и тогда коэффициент пропорциональности

$$k = \pi R^2 \ln \frac{9}{10}.$$

Для рассматриваемого случая $\left(\text{при } x=\frac{h}{2}\right)$ искомое время

$$t = \frac{\pi R^2 \ln \frac{x}{h}}{k} = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln \frac{9}{10}} = 6{,}57 \text{ суток.}$$

Итак, для истечения из резервуара половины жидкости через щель потребуется 6 суток 14 часов.

Сферический сосуд

Задача 49. В дне котла, имеющего форму полушара радиуса $R = 1$ *м* и наполненного водой, образовалась щель площадью $\sigma = 0{,}25$ *см*^{2}. Найти время истечения воды из котла.

Решение. Пусть в момент t глубина погружения щели x (рис. 36). За короткое время dt эта глубина изменится на величину $-dx$, так как процесс убывающий.

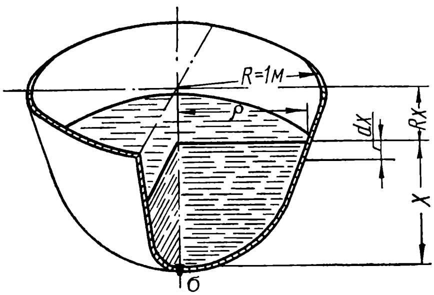

Рис. 36

За время dt вытечет вода, объем которой равен

$$-\pi\rho^2\,dx, \tag{1}$$

где ρ — радиус сечения котла на уровне x.

С другой стороны, тот же расход воды равен объему столбика воды с основанием σ и высотой $v\,dt$, где v — скорость истечения. Схематически это представляется: σ (площадь сечения) $\times v$ (скорость истечения) $\times dt$ (время истечения) $= \sigma v$ (расход воды в единицу времени) $\times dt$ (время истечения) $= \sigma v\,dt$.

Скорость истечения $v = \sqrt{2gx}$, где x — высота столба воды над отверстием в данный момент, g — ускорение силы тяжести.

Следовательно, искомый объем

$$\sigma\sqrt{2gx}\,dt. \tag{2}$$

Приравнивая выражения (1) и (2), получаем

$$-\pi\rho^2 dx = \sigma\sqrt{2gx}\,dt. \tag{3}$$

На основании теоремы Пифагора

$$\rho^2 = R^2 - (R-x)^2 = 2Rx - x^2. \tag{4}$$

Подставляя соотношение (4) в равенство (3), получим дифференциальное уравнение процесса

$$-\pi(2Rx-x^2)\,dx=\sigma\sqrt{2gx}\,dt.$$

Разделяя переменные, имеем

$$dt=-\frac{\pi}{\sigma\sqrt{2g}}\,(2R\sqrt{x}-x\sqrt{x})\,dx.$$

Проинтегрировав, найдем общее решение

$$t=-\frac{\pi}{\sigma\sqrt{2g}}\left(\frac{4}{3}Rx^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)+C.$$

Начальное условие: при $t=0$ $x=R$. Отсюда

$$0=-\frac{\pi}{\sigma\sqrt{2g}}\left(\frac{4}{3}R\cdot R^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}R^{\frac{5}{2}}\right)+C$$

и

$$C=\frac{\pi}{\sigma\sqrt{2g}}\cdot\frac{14}{15}R^{\frac{5}{2}}.$$

Итак, закон процесса истечения

$$t=\frac{\pi}{\sigma\sqrt{2g}}\left(\frac{14}{15}R^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}Rx^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right).$$

В момент опорожнения $t=T$, $x=0$ и искомое время истечения

$$T=\frac{14\pi R^2}{15\sigma}\sqrt{\frac{R}{2g}}.$$

Подставляя числовые значения, получаем

$$T=\frac{14\pi\cdot 100^2}{15\cdot 0{,}25}\sqrt{\frac{100}{2\cdot 981}}\approx 26\,376\ \textit{сек}=7\ \textit{ч}\ 19\ \textit{мин}\ 36\ \textit{сек}.$$

§ 18. НАПОЛНЕНИЕ СОСУДОВ

Задача 50. В резервуар глубиной 4 *м*, имеющий в поперечном сечении форму квадрата со стороной 6 *м*, стекает вода со скоростью 10 $м^3$ в минуту. Найти время наполнения резервуара, если одновременно из него вытекает вода через имеющееся в дне квадратное отверстие со стороной 1/12 *м*.

Решение. Пусть к моменту времени t в резервуаре уровень воды будет h. За время dt он повысится на dh, а объем воды увеличится на $36\,dh$. В резервуар по условию втекает 10 $м^3/мин$ воды. Поэтому скорость повышения уровня воды в резервуаре будет $\frac{10}{36}$ *м/мин* или $\frac{1}{216}$ *м/сек*. Объем за время dt равен $\frac{1}{216}\cdot 36dt = \frac{1}{6}dt$. За это же время вытекает $\frac{0{,}6}{144}\sqrt{2gh}\,dt$ воды.

Итак, уравнение процесса

$$36dh = \left(\frac{1}{6} - \frac{0{,}6}{144}\sqrt{2gh}\right)dt$$

или после разделения переменных

$$\frac{36dh}{\frac{1}{6} - \frac{0{,}6}{144}\sqrt{2gh}} = dt. \tag{1}$$

Интегрируя уравнение (1), получаем

$$t = \frac{12}{\left(\frac{0{,}6}{144}\sqrt{2g}\right)^2}\ln\frac{1}{1-6\cdot\frac{0{,}6}{144}\sqrt{2gh}} - \frac{72}{\frac{0{,}6}{144}\sqrt{2g}}.$$

При $h=4$ *м* искомое время

$$t \approx 14{,}7 \text{ мин.}$$

§ 19. УСТАНОВЛЕНИЕ УРОВНЯ В СООБЩАЮЩИХСЯ СОСУДАХ

Задача 51. Два сообщающихся сосуда имеют форму параллелепипедов, у которых площади оснований S и S_1 (рис. 37). Найти время установления одинаковых уровней жидкости в сосудах, если $S=S_1=100$ $м^2$, начальная разность уровней $h=2{,}5$ *м*, площадь отверстия между сосудами $\sigma=0{,}5$ $м^2$, коэффициент гидравлического сопротивления $\eta=0{,}62$.

Решение. Количество жидкости, теряемое первым сосудом, равно количеству жидкости, полученному вторым сосудом.

Поэтому

$$-S dz = S_1 dz_1,$$

отсюда

$$dz - dz_1 = \frac{S+S_1}{S_1} dz.$$

В течение времени dt через отверстие AB площадью ω пройдет

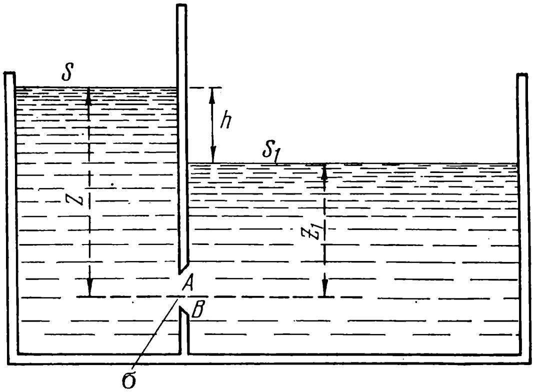

Рис. 37

$\eta\sigma\sqrt{2g(z-z_1)}dt$ жидкости, и поэтому дифференциальное уравнение задачи

$$-S dz = \eta\sigma\sqrt{2g(z-z_1)}dt$$

или

$$\frac{\eta\sigma}{S}\sqrt{2g}\,dt = -\frac{dz}{\sqrt{z-z_1}}. \qquad (1)$$

Полагая $z-z_1=u$, получим

$$du = dz - dz_1 = \frac{S+S_1}{S_1} dz,$$

откуда

$$dz = \frac{S_1 du}{S+S_1}.$$

Вследствие этого уравнение (1) примет вид

$$\frac{\eta\sigma}{S}\sqrt{2g}\,dt = -\frac{S_1}{S+S_1}\cdot\frac{du}{\sqrt{u}},$$

а отсюда

$$\frac{\eta\sigma}{S}\sqrt{2g}\,T = -\frac{S_1}{S+S_1}\int\limits_h^0 \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{S_1}{S+S_1}\int\limits_0^h \frac{du}{\sqrt{u}}. \qquad (2)$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (2) и подставляя числовые значения, находим

$$T = \frac{SS_1\sqrt{2h}}{\eta\sigma(S+S_1)\sqrt{g}} = 114{,}5 \text{ сек.}$$

§ 20. КРИВАЯ ДЕПРЕССИИ

Задача 52. Определить уравнение кривой, по которой располагается уровень грунтовых вод вблизи круглого колодца, простирающегося до непроницаемого слоя (рис. 38).

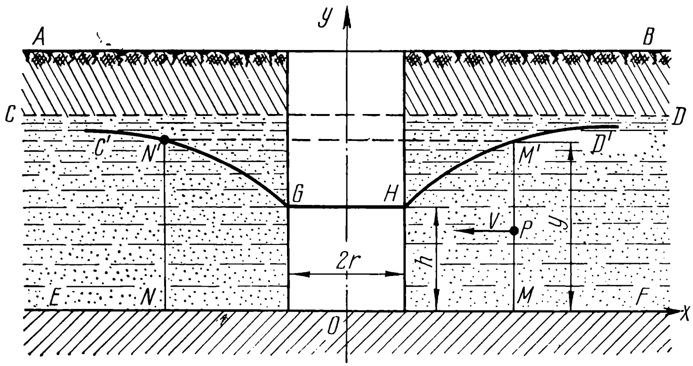

Рис. 38

Решение. Пусть AB — поверхность земли; CD — поверхность грунтовых вод до устройства колодца; EF — водонепроницаемый слой, ограничивающий снизу поток грунтовых вод.

Если высота воды в колодце поддерживается вычерпыванием на постоянном уровне GH, то поверхность грунтовых вод вблизи от колодца понижается определенным образом.

Линия поверхности грунтовых вод CD переходит в две искривленные ветки $C'G$ и $D'H$, которые замыкаются на уровне воды GH. Поверхность уровня грунтовых вод представляет собой поверхность вращения вокруг оси Oy меридиональной линии GC' или HD'.

Кривая HD' определяется на основании эмпирического правила, по которому скорость v течения воды в точке P пропускающего (дренирующего) грунта пропорциональна наклону кривой в точке M', лежащей на вертикали точки P.

Обозначая коэффициент пропорциональности через k, получим выражение скорости:

$$v = k\frac{dy}{dx}.$$

Через боковую поверхность цилиндра $N'NMM'$ радиально внутрь протекает количество воды

$$Q = 2\pi xyv = 2\pi xyk\frac{dy}{dx}, \qquad (1)$$

которое для всего цилиндра радиуса x равно расходу воды в колодце.

Разделим переменные в дифференциальном уравнении (1):

$$\frac{dx}{x} = \frac{2\pi k}{Q}ydy.$$

Интегрируя, получим

$$\ln x = \frac{\pi k}{Q}y^2 + C. \qquad (2)$$

Постоянную интегрирования находим из условия, что кривая поверхности $D'H$ переходит в поверхность колодца GH.

Если диаметр колодца $2r$, а глубина воды в колодце h, то при $x=r$ $y=h$, т. е.

$$\ln r = \frac{\pi k}{Q}h^2 + C$$

или

$$C = \ln r - \frac{\pi k}{Q}h^2. \qquad (3)$$

Постоянную интегрирования (3) вводим в уравнение (2) и получаем уравнение искомой кривой

$$\ln\frac{x}{r} = \frac{\pi k}{Q}(y^2 - h^2)$$

или

$$y^2 = \frac{Q}{\pi k}\ln\frac{x}{r} + h^2.$$

§ 21. ОБЕДНЕНИЕ РАСТВОРА

Задача 53. Через сосуд емкостью *a л*, наполненный водным раствором некоторой соли, непрерывно протекает жидкость, причем в единицу времени втекает *b л* воды и вытекает такое же количество раствора. Найти закон изменения содержания соли в сосуде в зависимости от времени протекания жидкости через сосуд.

Решение. В данный момент времени t в сосуде содержится x *кг* соли, следовательно, в каждом литре раствора содержится $\frac{x}{a}$ *кг* соли, а в b литрах $\frac{bx}{a}$ *кг*.

Если бы в течение единицы времени, начиная с момента t, концентрация раствора оставалась неизменной, какой она была в момент t, то количество соли в сосуде за эту единицу времени уменьшилось бы на $\frac{bx}{a}$ *кг*; такова скорость уменьшения количества соли в сосуде для момента t.

С другой стороны, производная

$$\frac{dx}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$

равна скорости прироста количества соли в момент t, поэтому скорость уменьшения количества соли в момент t равна $-\frac{dx}{dt}$.

Итак,

$$-\frac{dx}{dt}=\frac{bx}{a}.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dx}{x}=-\frac{b}{a}\,dt,$$

откуда

$$\ln x=-\frac{b}{a}\,t+\ln C_1.$$

Потенцируя, найдем

$$x=C_1e^{-\frac{b}{a}t}, \tag{1}$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Предположим, что в некоторый начальный момент $t=0$ количество соли в сосуде равно c *кг*.

Полагая в равенстве (1) $t=0$, найдем

$$C_1=c.$$

Искомый закон изменения содержания соли

$$x=ce^{-\frac{b}{a}t}.$$

§ 22. РАСТВОРЕНИЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Пусть при постоянной температуре скорость растворения твердого тела в жидкости пропорциональна количеству этого вещества, еще могущего раствориться до полного насыщения жидкости.

Пусть P — количество вещества, дающее насыщенный раствор; x — количество растворившегося вещества.

Тогда дифференциальное уравнение процесса

$$\frac{dx}{dt}=k(P-x),$$

где k — эмпирический коэффициент пропорциональности, t — время.

Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$x=P+Ce^{-kt}. \tag{1}$$

Начальное условие: при $t=0$ $x=0$, откуда

$$0=P+Ce^{-k\cdot 0}$$

и постоянная интегрирования

$$C=-P. \tag{2}$$

Подставляем выражение (2) в общее решение (1) и получаем закон зависимости количества растворившегося вещества от времени:

$$x=P(1-e^{-kt}).$$

Растворение вещества при прохождении жидкости

Задача 54. Резервуар наполнен 75 *л* сусла, содержащего 3 *кг* растворенного сахара. Приток воды составляет 4 *л* в минуту, а расход смеси из сосуда 2 *л* в минуту. Концентрация поддерживается равномерной посредством перемешивания (рис. 39). Найти количество сахара, которое будет содержаться в резервуаре через 25 *мин.*

Решение. Пусть x — количество сахара в резервуаре в момент t, *кг*; t — время, отсчитываемое от начального момента t_0, *мин*; $-dx$ — количество сахара, выходящее из резервуара за время dt (знак минус обусловлен тем, что x — убывающая функция времени), *кг*.

К моменту t в резервуар поступило $4t$ *л* воды и вышло $2t$ *л* сусла. Увеличение сусла составляет $2t$ *л*.

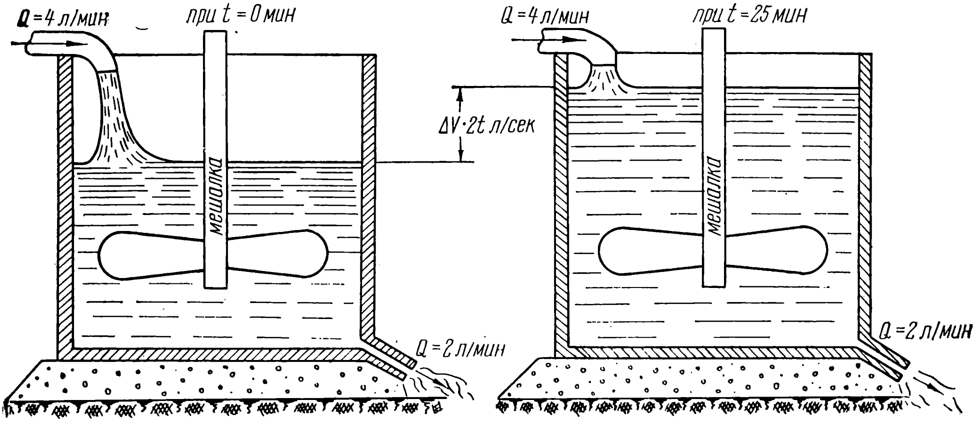

Рис. 39

Таким образом, общее количество жидкости достигло $75+2t$ *л* и в ней растворилось x *кг* сахара.

За время dt уходит $-dx$ *кг* сахара и $2dt$ *л* сусла.

Считая концентрацию сусла постоянной, получим количество сахара в одном литре $\frac{x}{75+2t}$ *кг*. Следовательно, за короткий промежуток времени dt количество сахара уменьшится на $\frac{x}{75+2t}2dt$ *кг*.

Итак, элементарное уравнение движения жидкости будет

$$-dx=\frac{2xdt}{75+2t}.$$

Разделяя переменные, имеем:

$$-\frac{dx}{x}=\frac{2dt}{75+2t}.$$

Начальные условия времени: $t_0=0$ *сек*, $t_1=25$ *сек*; начальные условия количества сахара: $x_0=3$ *кг*, $x_1=x$ *кг*. Отсюда

$$-\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{x}=\int_{t_0}^{t_1}\frac{2dt}{75+2t}$$

или

$$-\int_{3}^{x}\frac{dx}{x}=\int_{0}^{25}\frac{d(75+2t)}{75+2t}.$$

Интегрируем:

$$-\ln x\Big|_{3}^{x}=\ln(75+2t)\Big|_{0}^{25},$$

откуда

$$\ln\frac{3}{x}=\ln\frac{125}{75}=\ln\frac{5}{3}.$$

Потенцируя последнее равенство, получаем

$$\frac{3}{x}=\frac{5}{3}$$

или искомое количество сахара в резервуаре

$$x=\frac{9}{5}=1{,}8\ \textit{кг}.$$

Итак, через 25 *мин* в резервуаре останется 1,8 *кг* сахара.

Растворение вещества с течением времени

Скорость растворения пропорциональна наличному количеству x нерастворенного вещества и разности концентрации насыщенного раствора и концентрации раствора в данный момент C_t.

Пусть M — исходное количество вещества. Тогда растворенное к данному моменту количество вещества будет $M-x$.

Концентрацией раствора в данный момент называется отношение количества растворенного вещества к объему V растворителя:

$$C_t=\frac{M-x}{V}.$$

При достижении величиной C_t некоторого определенного для данного растворителя и растворяемого вещества значения C_0 раствор становится насыщенным и дальнейшее растворение прекратится.

Задача 55. Подвергая 10 *кг* соли действию 90 *л* воды, обнаружили, что в течение часа растворилась половина этого количества.

Считая концентрацию насыщенного раствора соли равной 1/3, найти количество растворенной соли в течение часа, если за это время было влито 180 *л* воды.

Решение. Скорость уменьшения нерастворенного вещества $\frac{dx}{dt}$ должна быть пропорциональна x и C_0-C_t, что приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt}=-kx(C_0-C_t),$$

где k (предполагается, что $k>0$) — коэффициент пропорциональности, подлежащий определению.

В правой части поставлен знак минус, так как каждый из множителей k, x, C_0-C_t, через произведение которых выражается $\frac{dx}{dt}$, положителен, в то время как $\frac{dx}{dt}<0$, поскольку с течением времени количество нерастворенного вещества должно убывать.

Преобразуя произведение этих множителей и выражая C_t через M, V и x, получаем

$$kx(C_0-C_t)=kx\left(C_0-\frac{M-x}{V}\right)=\frac{kx}{V}(C_0V-M+x).$$

Пусть

$$\left.\begin{aligned}\frac{k}{V}&=a;\\ C_0V-M&=b.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Тогда

$$kx(C_0-C_t)=ax(b+x)$$

и искомое дифференциальное уравнение задачи принимает вид

$$\frac{dx}{dt}=-ax(b+x).\qquad(2)$$

Начальное условие:

$$\text{при } t=0 \quad x=M.\qquad(3)$$

Условие для определения коэффициента a:

$$\text{при } t=1\ \textit{ч} \quad x=\frac{M}{2}.\qquad(4)$$

Разделяя переменные в уравнении (2) и интегрируя, имеем

$$\int \frac{dx}{x(b+x)} = -\int a dt + \ln C_1. \tag{5}$$

Разложим подынтегральное выражение первого интеграла на простейшие дроби:

$$\int \frac{dx}{x(b+x)} = \int \frac{dx}{b} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{b+x} \right).$$

Теперь, умножив обе части уравнения (5) на b, можем записать

$$\int dx \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{b+x} \right) = -\int abdt + \ln C,$$

где $\ln C = b \ln C_1$, или, потенцируя,

$$\frac{x}{b+x} = Ce^{-abt}. \tag{6}$$

Полагая в уравнении (6) $t=0$ и принимая во внимание начальное условие (3), находим

$$C = \frac{M}{b+M}. \tag{7}$$

Тогда уравнение (6) примет вид

$$\frac{x}{b+x} = \frac{M}{b+M} e^{-abt}.$$

Решая последнее равенство относительно x, имеем

$$x(b+M) = M(b+x)e^{-abt}$$

или

$$x(b+M-Me^{-abt}) = Mbe^{-abt},$$

откуда общее решение

$$x = \frac{Mbe^{-abt}}{b+M(1-e^{-abt})}. \tag{8}$$

Выполним проверку: полагая в уравнении (8) $t=0$, получим

$$x = \frac{Mbe^0}{b+M(1-e^0)} = \frac{Mb}{b} = M,$$

т. е. начальное условие соблюдается.

Дифференцируя уравнение (8) по t, найдем

$$\frac{dx}{dt}=-Mab^2e^{-abt}\frac{b+M}{[b+M(1-e^{-abt})]^2}.$$

Составим с помощью уравнения (7) выражение

$$b+x=b+\frac{Mbe^{-abt}}{b+M(1-e^{-abt})}=\frac{b^2+Mb(1-e^{-abt})+Mbe^{-abt}}{b+M(1-e^{-abt})}.$$

Итак,

$$b+x=\frac{b(b+M)}{b+M(1-e^{-abt})}.$$

По условию $M=10$ *кг*, $V=90$ *л*, $C_0=1/3$, поэтому по второму из соотношений (1)

$$b=\frac{1}{3}\cdot 90-10=20>0.$$

Равенство (8) примет вид

$$x=\frac{200e^{-20at}}{20+10(1-e^{-20at})}=\frac{20e^{-20at}}{3-e^{-20at}}.$$

Согласно условию (4),

$$\frac{20e^{-20a}}{3-e^{-20a}}=5,$$

откуда

$$e^{-20a}=0{,}6;$$

$$a=-\frac{\ln 0{,}6}{20}=-\frac{\lg 0{,}6}{20\cdot 0{,}4343}=-\frac{\bar{1}{,}7782}{20\cdot 0{,}4343}=\frac{0{,}2218}{8{,}685}\approx 0{,}0255.$$

Согласно первому из соотношений (1),

$$k=0{,}0255\cdot 90=2{,}295.$$

При $V=180$ *л*

$$a=\frac{0{,}0255}{2}=0{,}01275;\quad b=180\cdot\frac{1}{3}-10=50;\quad ab=0{,}6375.$$

Искомое количество растворившейся соли

$$M-x=10-\frac{500e^{-0{,}6375}}{60-10e^{-0{,}6375}}=\frac{60(1-e^{-0{,}6375})}{6-e^{-0{,}6375}}$$

и, так как

$$e^{-0{,}6375}\approx 0{,}53,$$

то

$$M-x\approx 5{,}2 \text{ кг}.$$

§ 23. ВЕНТИЛЯЦИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПОМЕЩЕНИЯ

Задача 56. Рассмотрим вентиляцию производственного помещения объемом V *м*^{3}, в котором технологический процесс сопровождается равномерным накоплением вредных выделений в количестве Z единиц в час. Обмен воздуха в течение 1 *ч* составляет M *м*^{3}/*ч*, причем приточный воздух содержит вредные выделения в концентрации μ на 1 *м*^{3}. Найти концентрацию z (на 1 *м*^{3}) выделений в помещении через t *ч* после начала работы, если начальное значение этой концентрации z_0 (остаток загрязнения от работы предыдущего дня).

Решение. За короткий промежуток времени dt концентрация z увеличится на dz. Общее количество выделений составит Vdz. Оно состоит из выделений, принесенных приточным воздухом μMdt, и выделений технологических процессов Zdt за вычетом количества вредных выделений, которое содержалось в извлеченном из помещения за промежуток dt воздухе. Пренебрегая изменением концентрации z за бесконечно малый промежуток времени, полагаем это количество равным $zMdt$.

Итак, основное уравнение вентиляции

$$Vdz = M\mu dt + Zdt - Mzdt. \tag{1}$$

Уравнение (1) можно представить в виде

$$\frac{Vdz}{M\mu + Z - Mz} = dt.$$

Интегрируя это уравнение, имеем

$$-\frac{V}{M}\int \frac{d(M\mu + Z - Mz)}{M\mu + Z - Mz} = \int dt + C_1$$

или

$$\ln(M\mu + Z - Mz) = -\frac{M}{V}(t + C_1),$$

откуда общее решение

$$M\mu + Z - Mz = Ce^{-\frac{M}{V}t}. \tag{2}$$

Начальное условие: при $t=0$ $z=z_0$. Отсюда

$$C = M\mu + Z - Mz_0.$$

Найденную постоянную интегрирования подставляем в уравнение (2), откуда получаем

$$z = \left(\mu + \frac{Z}{M}\right)\left(1 - e^{-\frac{M}{V}t}\right) + z_0 e^{-\frac{M}{V}t}.$$

§ 24. ГАЗОВЫЕ СМЕСИ

Задача 57. Сосуд емкостью в 1 *л* снабжен двумя трубками и заполнен воздухом, содержащим 21% кислорода по объему. Через одну трубку в сосуд медленно поступает чистый кислород, через другую вытекает смесь воздуха с кислородом. Какое количество газа нужно пропустить, чтобы наполнить сосуд чистым кислородом? Сколько процентов кислорода будет содержать сосуд после пропуска 10 *л* газа?

Решение. В момент, когда через сосуд прошло x *л* газа, в нем содержится a%, т. е. $a/100$ *л* кислорода.

Пусть через сосуд пройдет еще dx *л* газа: в сосуд входит dx *л* кислорода и выходит $a/100 \cdot dx$ *л* кислорода. Тогда в сосуде будет $\frac{a}{100}+\left(dx-\frac{a}{100}dx\right)=\frac{a+(100-a)dx}{100}$ *л* кислорода. Этот объем кислорода составит $a+(100-a)dx$% всего объема газа.

Таким образом, процент кислорода увеличился на величину

$$da=(100-a)dx. \qquad (1)$$

Уравнение (1) является дифференциальным уравнением процесса. Разделив переменные, получим

$$\frac{da}{100-a}=dx.$$

Интегрируем это уравнение:

$$-\int\frac{d(100-a)}{100-a}=x+C_1$$

или

$$\ln(100-a)=-(x+C_1),$$

откуда

$$100-a=e^{C_1}e^{-x}=Ce^{-x}$$

и, наконец, общее решение

$$a=100-Ce^{-x}.$$

Начальное условие: при $x=0$ $a=21$. Отсюда

$$21=100-Ce^0$$

или

$$C=79.$$

Подставляем найденное значение C в общее решение:

$$a=100-79\,e^{-x}. \qquad (2)$$

При $x=10$

$$a=100-79\,e^{-10}\approx 99{,}9964\,\%.$$

Можно считать, что после пропуска 10 *л* газа сосуд наполнен чистым кислородом.

Исследуем закон процесса (2) с целью определения количества газа, которое нужно пропустить для наполнения сосуда чистым кислородом, т. е. при $a=100\%$.

В этом случае уравнение (2) принимает вид

$$100=100-79\,e^{-x}$$

или

$$e^{-x}=\frac{1}{e^x}=0,$$

что возможно лишь, когда $x=\infty$.

§ 25. ИОНИЗАЦИЯ ГАЗОВ

Задача 58. Под действием постоянного излучения в газовой среде происходит процесс ионизации, при котором за 1 *сек* образуется q положительных и q отрицательных ионов в данном объеме газа. Так как положительные и отрицательные ионы снова соединяются между собой, то количество их убывает. Из общего количества n положительных ионов в каждую секунду соединяется часть, пропорциональная квадрату их количества. Коэффициент пропорциональности k зависит от природы и состояния газа. Найти зависимость количества ионов n от времени t.

Решение. Непосредственно из условия можно записать дифференциальное уравнение процесса ионизации

$$dn=q\,dt-kn^2dt. \qquad (1)$$

После разделения переменных в уравнении (1) получаем

$$\frac{dn}{q-kn^2}=dt$$

или

$$\frac{dn}{kn^2-q}=-dt,$$

откуда

$$\frac{1}{k}\cdot\frac{dn}{n^2-\frac{q}{k}}+dt=0. \qquad (2)$$

Общий интеграл уравнения (2) будет

$$\frac{1}{2\sqrt{kq}} \ln \frac{n-\sqrt{\frac{q}{k}}}{n+\sqrt{\frac{q}{k}}} + t = \frac{1}{2\sqrt{kq}} \ln C,$$

откуда после потенцирования имеем

$$\frac{n-\sqrt{\frac{q}{k}}}{n+\sqrt{\frac{q}{k}}} = Ce^{-2\sqrt{kq}\,t}$$

или общее решение

$$n(t) = \sqrt{\frac{q}{k}}\,\frac{Ce^{-\sqrt{kq}\,t} + e^{\sqrt{kq}\,t}}{e^{\sqrt{kq}\,t} - Ce^{-\sqrt{kq}\,t}}. \tag{3}$$

Начальное условие: при $t=0$ $n=0$. Тогда

$$0 = \sqrt{\frac{q}{k}}\,\frac{C+1}{1-C},$$

откуда

$$C = -1.$$

Подставляя найденное значение постоянной интегрирования в уравнение (3), получаем искомый закон

$$n(t) = \sqrt{\frac{q}{k}}\,\mathrm{th}(\sqrt{kq}\,t).$$

§ 26. ХИМИЧЕСКИЕ РЕАКЦИИ

Реакции первого порядка

Задача 59. Определить константу скорости реакции первого порядка.

Р е ш е н и е. Порядок химической реакции равен общему числу молекул, входящих в левую часть химического уравнения. Так, $RaB \to RaC$ есть реакция первого порядка. Скорость реакции есть скорость v, с которой система компонентов левой части превращается в систему компонентов правой части уравнения реакции.

Действующая масса или концентрация реагирующего вещества A есть количество молей * этого вещества в единице объема. Согласно закону действующих масс, скорость реакции пропорциональна действующим массам в данный момент.

Математическое выражение реакции первого порядка будет нижеследующее:

$$A \rightarrow \text{(конечные продукты реакции)}.$$

Если a — начальная концентрация вещества A, x — количество молей на литр, прореагировавших за время t от начала реакции, то скорость реакции $\frac{dx}{dt}$, а действующая масса к этому моменту $a-x$.

Закон действующих масс выразится дифференциальным уравнением реакции первого порядка

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x), \tag{1}$$

где k — коэффициент пропорциональности (константа скорости), зависящий от рода и условий химического процесса.

Общим решением дифференциального уравнения (1)

$$\frac{dx}{a-x}=kdt$$

будет

$$\ln\frac{C}{a-x}=kt. \tag{2}$$

Начальное условие: при $t=0$ $x=0$. Откуда

$$\ln\frac{C}{a-0}=k\cdot 0$$

или

$$C=a. \tag{3}$$

Подставляем это значение в общее решение (2) уравнения:

$$\ln\frac{a}{a-x}=kt,$$

откуда

$$k=\frac{1}{t}\ln\frac{a}{a-x}.$$

---

* Моль (или грамм-молекула) вещества — число граммов этого вещества, равное его молекулярному весу. Например, 1 моль кислорода равен 16 *г*, 1 моль воды — 18 *г* и т. д.

Задача 60. Радиоактивный элемент RaB распадается наполовину, образуя радиоактивный элемент RaC, в течение 26,7 *мин.* Найти время распада 0,2 первоначального количества RaB.

Решение. Здесь имеет место реакция первого порядка:

$$\mathrm{RaB} \to \mathrm{RaC}.$$

Поэтому дифференциальное уравнение реакции

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x).$$

Разделяя переменные, имеем:

$$\frac{dx}{a - x} = k\,dt. \qquad (1)$$

Интегрируем дифференциальное уравнение (1), и тогда общее решение

$$t = \frac{1}{k} \ln \frac{C}{a - x}.$$

Начальное условие: при $t = 0$ $x = 0$, откуда

$$0 = \frac{1}{k} \ln \frac{C}{a - 0}$$

или

$$C = a.$$

Подставляя в общее решение, получим

$$t = \frac{1}{k} \ln \frac{a}{a - x}. \qquad (2)$$

Дополнительное условие: при $t = 26{,}7$ *мин* $x = a/2$, откуда

$$26{,}7 = \frac{1}{k} \ln \frac{a}{a - \frac{a}{2}} = \frac{1}{k} \ln 2$$

или

$$k \approx 0{,}026. \qquad (3)$$

Подставляя значение (3) в уравнение (2), имеем:

$$t = \frac{1}{0{,}026} \ln \frac{a}{a - 0{,}2} = \frac{1}{0{,}026} \ln \frac{5}{4} \approx 8{,}6 \text{ мин}.$$

Задача 61. Вещество A превращается в вещество B. Спустя 1 *ч* после начала реакции осталось 44,8 *г* вещества A, а после 3 *ч* — 11,2 *г* вещества. Определить первоначальное количество a вещества A и время, когда останется 1/64 часть этого вещества.

Решение. Рассматриваемая реакция — первого порядка $A \to B$. Дифференциальное уравнение реакции первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)$$

после разделения переменных принимает вид

$$\frac{dx}{a-x} = kdt. \qquad (1)$$

Интегрируем уравнение (1):

$$-\int \frac{d(a-x)}{a-x} = kt + C_1,$$

откуда

$$\ln(a-x) = -(kt + C_1). \qquad (2)$$

Потенцируем уравнение (2):

$$e^{\ln(a-x)} = e^{-(kt+C_1)} = e^{-kt}\, e^{C_1}$$

или

$$a - x = Ce^{-kt}, \qquad (3)$$

где $C = e^{C_1}$.

Начальное условие: при $t=0$ $x=0$. Откуда

$$a - 0 = Ce^{-k \cdot 0}$$

или

$$C = a.$$

Подставляем найденное значение C в общее решение уравнения (3). Тогда

$$a - x = ae^{-kt}$$

или

$$x = a - ae^{-kt} = a(1 - e^{-kt}). \qquad (4)$$

Дополнительные условия: при $t=1$ $x = a - 44{,}8$; при $t=3$ $x = a - 11{,}2$. Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} a - 44{,}8 &= a(1 - e^{-k \cdot 1}), \\ a - 11{,}2 &= a(1 - e^{-k \cdot 3}) \end{aligned}\right\}$$

или после сокращений

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{e^k} &= 44{,}8, \\ \frac{a}{(e^k)^3} &= 11{,}2. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Из системы (5) находим значения a и e^k:

$$e^k = 2; \quad a = 89{,}6.$$

Найденные значения подставляем в уравнение (4):

$$x = 89{,}6(1 - 2^{-t}),$$

откуда

$$2^t = \frac{89{,}6}{89{,}6 - x}. \tag{6}$$

По условию задачи в искомый момент t

$$x = \frac{1}{64} a = \frac{1}{64} \cdot 89{,}6.$$

Тогда, подставляя это значение в равенство (6), получим

$$2^t = \frac{89{,}6}{89{,}6 - \dfrac{89{,}6}{64}}$$

или

$$2^t = 64,$$

откуда искомое время

$$t = 6 \text{ ч}.$$

Реакции второго порядка

Задача 62. Определить коэффициент пропорциональности реакции второго порядка при различных концентрациях a и b веществ A и B.

Решение. Рассмотрим математическое выражение закона действующих масс (или концентраций) в реакции второго порядка:

$$A_1 + A_2 \to (\text{конечные продукты реакции}).$$

Пусть a_1 и a_2 — начальные концентрации веществ A_1 и A_2; x — число прореагировавших к моменту t молей вещества A_1, а следовательно, и вещества A_2, так как каждый моль вещества A_1 соединяется с молем вещества A_2, и поэтому число прореагировавших молей обоих веществ одинаково.

В момент t скорость реакции будет $\frac{dx}{dt}$. Действующая масса вещества A_1 равна a_1-x; действующая масса вещества A_2 будет a_2-x. Так как скорость реакции $\frac{dx}{dt}$ пропорциональна величинам a_1-x и a_2-x, то она пропорциональна также их произведению. Поэтому закон действующих масс выразится дифференциальным уравнением реакции второго порядка

$$\frac{dx}{dt}=k(a_1-x)(a_2-x). \tag{1}$$

Уравнение (1) представим в виде

$$\frac{dx}{(a_1-x)(a_2-x)}=kdt. \tag{2}$$

Рациональную дробь в левой части последнего равенства интегрируем методом неопределенных коэффициентов:

$$\int\frac{dx}{(a_1-x)(a_2-x)}=\int\frac{m}{a_1-x}dx+\int\frac{n}{a_2-x}dx, \tag{3}$$

откуда

$$m(a_2-x)+n(a_1-x)=1,$$

и, приравнивая соответствующие коэффициенты при неизвестных и свободные члены в обеих частях равенства, получаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}-m-n&=0;\\ a_2m+a_1n&=1.\end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему относительно неопределенных коэффициентов m и n, имеем

$$m=\frac{1}{a_2-a_1};\quad n=\frac{1}{a_1-a_2}. \tag{4}$$

Подставляем значения (4) в правую часть уравнения (3) и получаем

$$\int\frac{m}{a_1-x}dx+\int\frac{n}{a_2-x}dx=\frac{1}{a_1-a_2}\int\frac{d(a_1-x)}{a_1-x}-$$

$$-\frac{1}{a_1-a_2}\int\frac{d(a_2-x)}{a_2-x}=\frac{1}{a_1-a_2}\left[\ln(a_1-x)-\ln(a_2-x)\right]=$$

$$=\frac{1}{a_1-a_2}\ln\frac{a_1-x}{a_2-x}.$$

Подставляем полученное значение в уравнение (2), и после интегрирования его правой части общий интеграл

$$\frac{1}{a_1-a_2}\ln\frac{a_1-x}{a_2-x}=kt+C. \tag{5}$$

Начальное условие: при $t=0$ $x=0$. Откуда

$$\frac{1}{a_1-a_2}\ln\frac{a_1-0}{a_2-0}=k\cdot 0+C$$

или

$$C=\frac{1}{a_1-a_2}\ln\frac{a_1}{a_2}. \tag{6}$$

Искомая константа скорости реакции получается путем подстановки значения постоянной интегрирования (6) в общее решение (5), откуда

$$k=\frac{1}{t(a_1-a_2)}\ln\frac{a_2(a_1-x)}{a_1(a_2-x)}.$$

Задача 63. Реакция омыления уксусноэтилового эфира едким натром

$$\underset{\text{уксусноэтиловый эфир}}{CH_3COOC_2H_5}+\underset{\text{едкий натр}}{NaOH}\rightarrow\underset{\text{уксуснокислый натр}}{CH_3COONa}+\underset{\text{этиловый спирт}}{C_2H_5OH}.$$

Первоначальные концентрации уксусноэтилового эфира и едкого натра соответственно $a=0{,}01$ и $b=0{,}002$. Спустя 23 *мин* концентрация уксусноэтилового эфира уменьшилась на 10%. В какое время она уменьшится на 15%?

Решение. Это химическая реакция второго порядка; a_1 и a_2 — начальные концентрации веществ A_1 и A_2; x — число прореагировавших к моменту t молей вещества A_1, а следовательно, и вещества A_2 (каждый моль A_1 соединяется с молем A_2, и поэтому число прореагировавших молей обоих веществ одинаково).

Скорость химической реакции определяется изменением количества вещества x в единицу времени t, т. е. в момент t производной $\frac{dx}{dt}$.

Действующая масса (или концентрация реагирующего вещества) A_1, указывающая количество молей вещества в единице объема, равна a_1-x и a_2-x и пропорциональна их произведению. Поэтому закон действующих масс выразится дифференциальным уравнением химической реакции второго порядка

$$\frac{dx}{dt}=k(a_1-x)(a_2-x).$$

Разделяя переменные, получим

$$dt = \frac{dx}{k(a_1-x)(a_2-x)}. \quad (1)$$

Для решения уравнения (1) применяем интегрирование рациональных функций методом неопределенных коэффициентов:

$$t = \frac{1}{k}\int \frac{dx}{(a_1-x)(a_2-x)} = \frac{1}{k}\int \frac{A\,dx}{a_1-x} + \frac{1}{k}\int \frac{B\,dx}{a_2-x} =$$
$$= \frac{1}{k(a_1-a_2)}\left[\ln(a_1-x) - \ln(a_2-x) - \ln C\right] =$$
$$= \frac{1}{k(a_1-a_2)} \ln \frac{a_1-x}{C(a_2-x)}. \quad (2)$$

Уравнение (2) является общим решением задачи. Для определения величины C используем начальное условие: при $t=0$ $x=0$. Тогда

$$0 = \frac{1}{k(a_1-a_2)} \ln \frac{a_1}{Ca_2}$$

или

$$C = \frac{a_1}{a_2}.$$

Подставляя значение C в общее решение (2), получим частное решение

$$t = \frac{1}{k(a_1-a_2)} \ln \frac{a_2(a_1-x)}{a_1(a_2-x)}. \quad (3)$$

Коэффициент пропорциональности определим из дополнительных условий: при $t=23$ *мин* $x=0{,}1$, $a_1=0{,}1\cdot 0{,}01=0{,}001$. Отсюда

$$23 = \frac{1}{k(0{,}01-0{,}002)} \ln \frac{0{,}002(0{,}01-0{,}001)}{0{,}01(0{,}002-0{,}001)}$$

и

$$k \approx 3{,}19.$$

Подставляя полученные числовые значения в решение (3), определим искомое время:

$$t = \frac{1}{3{,}19(0{,}01-0{,}002)} \ln \frac{0{,}002(0{,}01-0{,}0015)}{0{,}01(0{,}002-0{,}0015)} =$$
$$= \frac{1000}{8\cdot 3{,}19} \ln \frac{17}{5} \approx 47{,}9 \text{ мин}.$$

Здесь $x=0{,}15a_1=0{,}0015$.

Итак, примерно через 48 *мин* количество уксусноэтилового эфира уменьшится на 15%.

Реакции третьего порядка

Задача 64. Определить константу скорости реакции третьего порядка при разных концентрациях a_1, a_2 и a_3 веществ A_1, A_2 и A_3.

Решение. Математическое выражение закона действующих масс в реакции n-го порядка получается аналогично, как и для реакций первого и второго порядков:

$$A_1+A_2+\ldots+A_n\rightarrow(\text{конечные продукты реакции}).$$

Тогда на основании тех же соображений дифференциальное уравнение реакции n-го порядка

$$\frac{dx}{dt}=k(a_1-x)(a_2-x)\ldots(a_n-x), \tag{1}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — концентрации веществ $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Уравнение (1) для реакции третьего порядка принимает вид

$$\frac{dx}{dt}=k(a_1-x)(a_2-x)(a_3-x),$$

откуда после разделения переменных получим

$$\frac{dx}{(a_1-x)(a_2-x)(a_3-x)}=kdt. \tag{2}$$

Интегрируем уравнение (2) методом неопределенных коэффициентов, как в предшествующей задаче.

В итоге выполнения аналогичных алгебраических выкладок найдем общее решение уравнения (2):

$$\frac{1}{(a_1-a_2)(a_3-a_1)}\ln(a_1-x)+\frac{1}{(a_1-a_2)(a_2-a_3)}\ln(a_2-x)+\\+\frac{1}{(a_2-a_3)(a_3-a_1)}\ln(a_3-x)=kt+C. \tag{3}$$

Начальное условие: при $t=0$ $x=0$. Откуда

$$\frac{1}{(a_1-a_2)(a_3-a_1)}\ln(a_1-0)+\frac{1}{(a_1-a_2)(a_2-a_3)}\ln(a_2-0)+\\+\frac{1}{(a_2-a_3)(a_3-a_1)}\ln(a_3-0)=k\cdot 0+C$$

или

$$C=\frac{\ln a_1}{(a_1-a_2)(a_3-a_1)}+\frac{\ln a_2}{(a_1-a_2)(a_2-a_3)}+\frac{\ln a_3}{(a_2-a_3)(a_3-a_1)}.$$

Подставляем найденное значение постоянной интегрирования в уравнение (3) и, разрешая его относительно искомой константы скорости реакции, получим

$$k=\frac{\ln\left(\frac{a_1-x}{a_1}\right)^{a_2-a_3}+\ln\left(\frac{a_2-x}{a_2}\right)^{a_3-a_1}+\ln\left(\frac{a_3-x}{a_3}\right)^{a_1-a_2}}{t(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)}.$$

Задача 65. В реакции третьего порядка

$$\underset{\text{хлорное железо}}{2FeCl_3}+\underset{\text{хлористое олово}}{SnCl_2}\rightarrow\underset{\text{хлористое железо}}{2FeCl_2}+\underset{\text{хлорное олово}}{SnCl_4}$$

первоначальные концентрации $SnCl_2$ и $FeCl_3$ соответственно $a=$ $=0{,}0625$ и $2a=0{,}125$. Через минуту концентрация $SnCl_2$ стала 0,04816. Найти концентрацию $SnCl_2$ спустя 11 *мин* после начала реакции.

Решение. В задаче имеет место случай одинаковых молекул реакции n-го порядка.

В реакции n-го порядка некоторые вещества $A_1, A_2, \ldots, A_n$ могут оказаться одинаковыми. Химическое уравнение такой реакции будет

$$m_1A_1+m_2A_2+\ldots+m_nA_n\rightarrow(\text{конечные продукты реакции}).$$

Его можно записать в виде

$$\underbrace{A_1+A_1+\ldots+A_1}_{m_1\text{ раз}}+\underbrace{A_2+A_2+\ldots+A_2}_{m_2\text{ раз}}+\ldots+\underbrace{A_n+A_n+\ldots+A_n}_{m_n\text{ раз}}\rightarrow$$
$$\rightarrow(\text{конечные продукты реакции}),$$

но теперь всю концентрацию a_1 вещества A_1 придется разбить на m_1 частей. Тогда концентрация отдельной компоненты A_1 будет $\frac{a_1}{m_1}$, концентрация отдельной компоненты A_2 — $\frac{a_2}{m_2}$ и т. д., т. е. имеет место случай равных концентраций.

В реакции n-го порядка некоторые из веществ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ могут быть с одинаковыми концентрациями. В этом случае дифференциальное уравнение реакции примет вид

$$\frac{dx}{dt}=k(a_1-x)^{m_1}(a_2-x)^{m_2}\ldots(a_n-x)^{m_n}\qquad(1)$$

где m_1 — число веществ с концентрацией a_1, m_2 — число веществ с концентрацией a_2 и т. д.

При этом

$$m_1+m_2+m_3+\ldots+m_n=n.$$

Для случая равных концентраций из уравнения (1) получаем

$$\frac{dx}{dt}=k_1\left(\frac{a_1}{m_1}-x\right)^{m_1}\left(\frac{a_2}{m_2}-x\right)^{m_2}\ldots\left(\frac{a_n}{m_n}-x\right)^{m_n}$$

или

$$\frac{dx}{dt}=\frac{k_1}{m_1^{m_1}m_2^{m_2}\ldots m_n^{m_n}}(a_1-m_1x)^{m_1}(a_2-m_2x)^{m_2}\ldots(a_n-m_nx)^{m_n}=$$
$$=k(a_1-m_1x)^{m_1}(a_2-m_2x)^{m_2}\ldots(a_n-m_nx)^{m_n}.$$

В условиях рассматриваемой задачи дифференциальное уравнение реакции третьего порядка

$$\frac{dx}{dt}=k(2a-2x)^2(a-x)$$

или

$$\frac{dx}{dt}=4k(a-x)^3. \qquad (2)$$

Разделяя переменные и проводя интегрирование, получим общий интеграл уравнения (2)

$$\frac{1}{2(a-x)^2}=4kt+C.$$

Начальное условие: при $t=0$ $x=0$. Откуда

$$\frac{1}{2(a-0)^2}=4k\cdot 0+C$$

или

$$C=\frac{1}{2a^2}.$$

Подставляем значение C в общее решение:

$$\frac{1}{2(a-x)^2}=4kt+\frac{1}{2a^2}$$

или

$$a-x=\frac{a}{\sqrt{8a^2kt+1}}. \qquad (3)$$

Дополнительное условие: при $t=1$ $a-x=0{,}04816$. Откуда

$$0{,}04816=\frac{0{,}0625}{\sqrt{8\cdot 0{,}0625^2 k\cdot 1+1}}$$

и

$$k\approx 21{,}89. \qquad (4)$$

Подставляем значения константы скорости (4), a и t в уравнение (3). Искомая концентрация

$$a-x=\frac{0{,}0625}{\sqrt{8\cdot 0{,}0625^2\cdot 21{,}89\cdot 11+1}}\approx 0{,}02141.$$

§ 27. РОСТ НАСЕЛЕНИЯ

Непрерывный рост или убывание

Пусть скорость прироста (или убывания) некоторой величины зависит от ее наличного количества P в данный момент t. В начальный момент $t=0$ эта величина равна P_0. Найти зависимость величины P от времени t.

Для построения математической модели простейшего типа роста принимаем, что скорость изменения количества населения пропорциональна этому количеству. Скорость прироста выражается производной $\frac{dP}{dt}$, если k — коэффициент пропорциональности, то в случае роста

$$\frac{dP}{dt}=kP \qquad (1)$$

и в случае убывания

$$\frac{dP}{dt}=-kP.$$

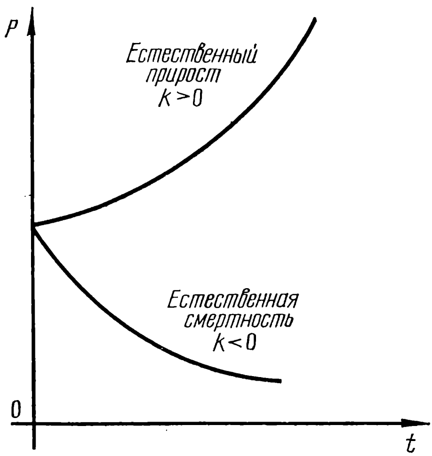

Рис. 40

Схематически это представлено на рис. 40.

Разделяя в уравнении (1) переменные, имеем

$$\frac{dP}{P}=kt,$$

откуда после интегрирования находим

$$P(t)=Ce^{kt}. \tag{2}$$

Начальное условие: при $t=0$ $P=P_0$, поэтому

$$P_0=Ce^{k\cdot 0}$$

или

$$C=P_0. \tag{3}$$

Подставляем выражение (3) в уравнение (2) и имеем закон прироста

$$P(t)=P_0e^{kt}.$$

Для процесса убывания

$$P(t)=P_0e^{-kt}.$$

Регулируемый прирост

Предположим, что количество населения P увеличивается с искусственно уменьшаемой скоростью.

Будем считать, что обстоятельства, препятствующие росту количества P, не превышают значения M. Кроме того, предположим, что скорость роста количества P пропорциональна произведению P и разности $M-P$. Когда прирост $M-P$ мал, то скорость роста замедляется. По предположению

$$\frac{dP}{dt}=kP(M-P),$$

где k — постоянный положительный коэффициент.

Чтобы найти P как явную функцию времени, проведем разделение переменных:

$$\frac{dP}{P(M-P)}=kdt,$$

откуда после разложения левой части равенства на простейшие дроби получим

$$\left[\frac{1}{MP}+\frac{1}{M(M-P)}\right]dP=d(kt). \tag{1}$$

Равенство (1) может быть представлено в виде

$$d\left(\frac{\ln P}{M}\right)-d\left[\frac{\ln(M-P)}{M}\right]=d\left[\frac{\ln P-\ln(M-P)}{M}\right]=$$

$$=d\left(\frac{1}{M}\ln\frac{P}{M-P}\right)=d(kt).$$

Интегрируя последнее равенство, имеем

$$\frac{1}{M}\ln\frac{P}{M-P}=kt+C,$$

откуда

$$\ln\frac{P}{M-P}=Mkt+MC$$

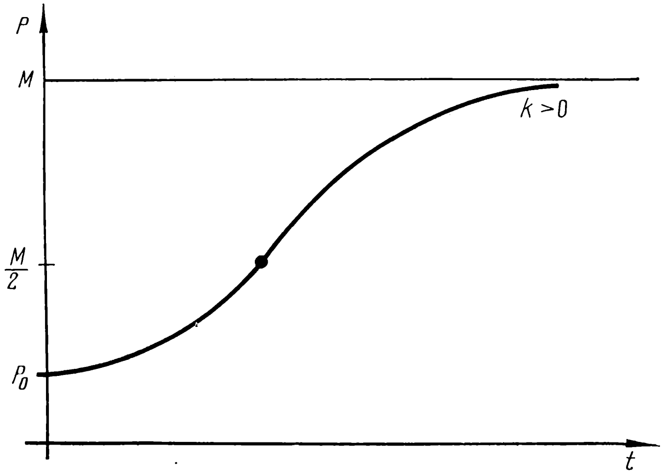

Рис. 41

или после потенцирования

$$\frac{P}{M-P}=e^{Mkt+MC}=e^{MC}\,e^{Mkt}.$$

Пусть

$$s=e^{MC}\,e^{Mkt}.$$

Тогда

$$\frac{P}{M-P}=s,$$

откуда

$$P=\frac{sM}{1+s}. \qquad (2)$$

При $t\to\infty$ величина $e^{Mkt}\to\infty$, так как для процесса прироста $k>0$; следовательно, $s\to\infty$. Очевидно, что при $t\to\infty$ дробь $\frac{s}{1+s}\to 1$ и на основании зависимости (2) $P\to M$.

С целью лучшего понимания процесса преобразуем далее равенство (2). Пусть P_0 — количество населения в начальный момент $t=0$. При $t=0$ $s=e^{Mc}$. Поэтому

$$P_0=\frac{e^{Mc}M}{1+e^{Mc}}. \tag{3}$$

Разрешая равенство (3) относительно e^{Mc}, находим, что

$$e^{Mc}=\frac{P_0}{M-P_0}. \tag{4}$$

Выполнив алгебраические преобразования равенств (2) и (4), получаем

$$P=\frac{MP_0}{P_0+(M-P_0)e^{-Mkt}}. \tag{5}$$

Уравнение (5) дает зависимость роста количества населения при обстоятельствах, препятствующих ему: регулированное размножение, возможные эпидемии и другие факторы. Оно называется *логистическим уравнением.* На рис. 41 показан схематический график этого закона.

Тип I — количество населения на определенную дату

Задача 66. Население Земли в 1970 г. составляло 3 600 млн. чел., а годовой прирост населения равнялся 60 млн. чел. Найти предположительное количество населения в 2000 г.

Решение. В задачах типа I о росте населения известно исходное количество населения и время прироста, а искомым является конечное количество населения.

Определим коэффициент k естественного прироста:

$$k=\frac{60\cdot 10^6}{3{,}6\cdot 10^9}=0{,}017 \quad (\text{т. е. } 1{,}7\%).$$

Тогда через $t=30$ лет имеем

$$P(30)=P_0e^{k\cdot 30}=3{,}6\cdot 10^9\, e^{0{,}017\cdot 30}=3{,}6\cdot 10^9\, e^{0{,}51},$$

откуда

$$P\approx 6\cdot 10^9 \text{ чел. (т. е. 6 000 млн. чел.)}.$$

Задача 67. Пусть скорость прироста населения прямо пропорциональна его количеству. Найти зависимость между количеством населения A и временем t, если известно, что в некоторый момент, принимаемый за начальный, количество населения равнялось A_0, а через год оно увеличилось на $a\%$.

Вычислить предполагаемое на этой основе:

1) количество населения СССР на 15 января 1980 г. и 15 января 2000 г., если 15 января 1970 г. оно составляло 241,7 млн. чел., а годовой прирост за 1969 г. составил 1%;

2) население г. Москвы (без пригородов) на 15 января 2000 г., если 15 января 1970 г. оно составляло 6,942 млн. чел. Годовой прирост составил 1,25%;

3) население г. Минска (без пригородов) на 15 января 2000 г., если 15 января 1970 г. оно составляло 0,907 млн. чел. Годовой прирост за 1969 г. составил 4,2%.

Решение. Скорость изменения количества населения есть производная от количества населения по времени, т. е. $\frac{dA}{dt}$.

По условию задачи можно написать следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dA}{dt}=kA.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dA}{A}=kdt.$$

Интегрируя это выражение, находим

$$\ln A=\ln e^{kt+C_1}$$

или, потенцируя,

$$A=e^{kt}\,e^{C_1}=Ce^{kt}. \tag{1}$$

Количество населения через год определяется следующим образом: годовой прирост $a\%$ от A_0 составит $\frac{aA_0}{100}$, количество населения через год

$$A_0+\frac{aA_0}{100}=\frac{(100+a)A_0}{100}.$$

Подставляя в общее решение (1) соответствующие значения количества населения и времени, а именно $A=A_0$ и $t=0$, определим постоянную интегрирования C:

$$A_0=C\cdot e^{k\cdot 0}=C\cdot e^0,$$

$$C=A_0.$$

Таким образом, общее решение уравнения (1) принимает вид

$$A=A_0e^{kt}. \tag{2}$$

Для вычисления множителя e^k используем дополнительные данные, подставляя значение количества населения через год, т. е. при $t=1$,

$$A=\frac{(100+a)A_0}{100}$$

в уравнение (2). Имеем

$$\frac{(100+a)A_0}{100}=A_0e^{k\cdot 1}=A_0e^k$$

и

$$e^k=\frac{100+a}{100}. \tag{3}$$

Подставляя найденное значение (3) в уравнение (2), получим частное решение

$$A=A_0\left(\frac{100+a}{100}\right)^t, \tag{4}$$

выражающее зависимость количества населения от времени.

Пользуясь формулой (4), вычислим:

1) количество населения СССР, согласно принятой модели, на 15 января 1980 г. (через $t=10$ лет):

$$A_{1980}=241,7\left(\frac{101}{100}\right)^{10}\approx 279,4 \text{ млн. чел.};$$

на 15 января 2000 г. (через $t=30$ лет):

$$A_{2000}=241,7\left(\frac{101}{100}\right)^{30}\approx 325,3 \text{ млн. чел.};$$

2) количество населения г. Москвы на 15 января 2000 г.:

$$A_{2000}=6,942\left(\frac{101,25}{100}\right)^{30}\approx 9,52 \text{ млн. чел.};$$

3) количество населения г. Минска на 15 января 2000 г.:

$$A_{2000}=0,907\left(\frac{104,2}{100}\right)^{30}\approx 3,12 \text{ млн. чел.}$$

Тип II — динамика роста по времени

Задача 68. Население г. Минска 15 января 1970 г. насчитывало 0,907 млн. чел., а годовой прирост за 1969 г. составил 4,2%. Считая темп прироста населения неизменным в ближайшем будущем, определить, когда население города: удвоится; возрастет на 50%; составит 2 млн. чел.?

Решение. В задачах второго типа о росте населения искомым является время прироста, а начальное и конечное количество населения (или их отношение) являются известными.

Так как дифференциальное уравнение прироста

$$\frac{dP}{dt}=kP, \tag{1}$$

то, разделяя переменные, имеем

$$\frac{dP}{P}=kdt. \tag{2}$$

1. Интегрируя и подставляя начальное и конечное условия в качестве пределов интегрирования, получаем

$$\int_1^2 \frac{dP}{P}=k\int_0^t dt=0{,}042\int_0^t dt, \tag{3}$$

откуда

$$\ln P\Big|_1^2=0{,}042t\Big|_0^t$$

или

$$\ln 2=0{,}042t$$

и искомое время

$$t=\frac{\ln 2}{0{,}042}=\frac{0{,}693}{0{,}042}=16{,}5 \text{ лет.}$$

Итак, население города удвоится в 1987 г.

2. Рост населения на 50% означает, что количество его будет в 1,5 раза больше исходного.

Поэтому уравнение (3) примет вид

$$\int_1^{1{,}5} \frac{dP}{P}=0{,}042\int_0^t dt,$$

откуда

$$\ln P \Big|_{1}^{1,5} = 0{,}042t \Big|_{0}^{t}$$

или

$$\ln 1{,}5 = 0{,}042t$$

и искомое время

$$t = \frac{\ln 1{,}5}{0{,}042} = \frac{0{,}406}{0{,}042} = 9{,}7 \approx 10 \text{ лет.}$$

Итак, население города возрастет на 50% в 1980 г.

3. Эту задачу можно решать двумя способами. Так как количество 2 млн. чел. в 2,25 раза больше исходного, то можно это отношение подставить в качестве верхнего предела интегрирования в левую часть уравнения (3) и решать его.

Решим эту задачу иначе.

Интегрируя уравнение (2), имеем

$$\ln P = kt + C_1$$

и, потенцируя, получаем общее решение уравнения (1) в виде

$$P = Ce^{kt}. \tag{4}$$

Начальное условие: при $t=0$ $P=907\,000$, откуда после подстановки в уравнение (4)

$$C = 907\,000.$$

Тогда закон роста населения города

$$P = 907\,000e^{0{,}042t}.$$

Если $P = 2\,000\,000$, то

$$e^{0{,}042t} = 2{,}25,$$

откуда

$$t = \frac{\ln 2{,}25}{0{,}042} = \frac{0{,}811}{0{,}042} = 19{,}3 \approx 20 \text{ лет.}$$

Итак, население города достигнет 2 млн. чел. в 1990 г.

Тип III — конкурентная динамика роста

Задача 69. Население г. Минска 15 января 1970 г. составляло 0,907 млн. чел., а годовой прирост населения за 1969 г. равнялся 4,2%. Население г. Новосибирска составляло в это же время 1,161 млн. чел. при годовом приросте за 1969 г. в 2,5%. Предполагая темпы прироста населения этих городов установившимися, определить время, по истечении которого количество жителей г. Минска станет равным количеству жителей г. Новосибирска.

Решение. В задачах третьего типа о росте населения сравниваются темпы прироста населения в различных городах или в других административных единицах.

В этой задаче известными являются исходные и конечные количества жителей в двух городах, а искомым является время достижения ими точки равностояния, т. е. момента, когда город с меньшим количеством населения, но более высоким приростом, догоняет город с бо́льшим количеством населения, но более низким приростом.

Так как дифференциальное уравнение прироста

$$\frac{dP}{dt}=kP,$$

то общее решение этого уравнения

$$P=Ce^{kt}.$$

Начальные условия: для г. Минска при $t=0$ $P=907\,000$, откуда $C=907\,000$; для г. Новосибирска при $t=0$ $P=1\,161\,000$, откуда $C=1\,161\,000$.

Поэтому закон роста населения г. Минска

$$P=907\,000e^{0,042t},$$

а закон роста населения г. Новосибирска

$$P=1\,161\,000e^{0,025t}.$$

Так как количество населения этих городов через некоторое время сравняется, то для этого момента

$$907\,000e^{0,042t}=1\,161\,000e^{0,025t},$$

откуда

$$907e^{0,042t}=1\,161e^{0,025t}$$

или

$$e^{0,042t}=1,28e^{0,025t}$$

и

$$e^{(0,042-0,025)t}=1,28,$$

следовательно,

$$e^{0,017t}=1,28.$$

Отсюда

$$t=\frac{\ln 1,28}{0,017}=\frac{0,2469}{0,017}\approx 14,5.$$

Итак, население обоих городов сравняется в 1985 г.

Истощение ресурсов

Задача 70. В настоящее время для обеспечения пищей одного человека необходима площадь 0,1 *га*. На земном шаре 4 000 млн. *га* пахотной земли. Поэтому население его должно быть, если не учитывать появления в будущем новых источников пищи, ограничено количеством 40 000 млн. чел. Когда будет достигнут этот предел насыщения населения, если оно непрерывно растет со скоростью 1,7 % в год?

Решение. Закон роста населения

$$P(t)=P_0e^{kt}.$$

Так как в 1970 г. ($t=0$) население Земли составляло $3{,}6\cdot 10^9$ чел., то $P_0=3{,}6\cdot 10^9$, $k=0{,}017$, и получаем

$$P(t)=3{,}6\cdot 10^9\, e^{0{,}017t}.$$

Ищем такое t, чтобы

$$P(t)=40\cdot 10^9.$$

Тогда

$$40\cdot 10^9=3{,}6\cdot 10^9\cdot e^{0{,}017t},$$

откуда

$$e^{0{,}017t}=\frac{40\cdot 10^9}{3{,}6\cdot 10^9}=11{,}11.$$

Логарифмируя последнее равенство, имеем

$$0{,}017t=\ln 11{,}11\approx 2{,}408,$$

откуда

$$t=142.$$

Итак, в 2112 г. мир достиг бы предела насыщения, если бы сохранился темп роста населения и не появилось новых источников пищи.

§ 28. ПРОЦЕССЫ РОСТА В ПРИРОДЕ И ПРОИЗВОДСТВЕ

Рост листьев растения

Задача 71. Скорость увеличения площади молодого листа виктории-регии, имеющего форму круга, пропорциональна окружности листа и количеству солнечного света, падающего на него. Последнее пропорционально площади листа и косинусу угла между направлением лучей и вертикалью к листу. Найти зависимость между площадью S листа и временем t, если в 6 часов утра эта площадь равнялась 1600 *см*^{2}, а в 18 часов того же дня — 2500 *см*^{2}.

Принять, что угол между направлением луча Солнца и вертикалью в 6 часов утра и в 18 часов равен 90°, а в полдень — 0°.

Решение. Пусть t — время, отсчитываемое от полуночи, *ч*. Если S — переменная площадь листа, то скорость роста листа

$$\frac{dS}{dt}=k_1\,2\pi rQ,$$

где $2\pi r$ — длина окружности, Q — количество солнечного света, k_1 — коэффициент пропорциональности.

Площадь листа $S=\pi r^2$, откуда

$$r=\sqrt{\frac{\pi}{S}}.$$

Тогда

$$\frac{dS}{dt}=k_1\frac{2\pi}{\sqrt{\pi}}\sqrt{S}\,Q. \tag{1}$$

По условию

$$Q=k_2S\cos\alpha, \tag{2}$$

где α — угол между направлением лучей и вертикалью, k_2 — коэффициент пропорциональности.

Угол α является линейной возрастающей функцией аргумента t (времени):

$$\alpha=k_3t+b.$$

Параметры k_3 и b определяются из трех дополнительных данных условий:

$$\text{при } t=6 \quad \alpha=-\frac{\pi}{2},$$
$$\text{при } t=12 \quad \alpha=0,$$
$$\text{при } t=18 \quad \alpha=\frac{\pi}{2}.$$

Из первых двух условий имеем

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\pi}{2}&=6k_3+b,\\ 0&=12k_3+b.\end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему, получаем

$$k_3=\frac{\pi}{12},\qquad b=-\pi,$$

т. е.

$$\alpha=\frac{\pi}{12}(t-12).$$

Проверка по третьему условию дает тождество

$$\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{12}\cdot 18-\pi=\frac{\pi}{2}.$$

Значение α подставляем в равенство (2), откуда

$$Q=k_2S\cos\left[\frac{\pi}{12}(t-12)\right].$$

Полученное значение Q подставляем в уравнение (1):

$$\frac{dS}{dt}=k_1k_2\frac{2\pi}{\sqrt{\pi}}S\sqrt{S}\cos\left[\frac{\pi}{12}(t-12)\right].$$

Вводим обозначение $k=k_1k_2$. Тогда после разделения переменных

$$\frac{dS}{S\sqrt{S}}=k\frac{2\pi}{\sqrt{\pi}}\cos\left[\frac{\pi}{12}(t-12)\right]dt.$$

Интегрируя, получим

$$-\frac{2}{\sqrt{S}}=\frac{24k}{\sqrt{\pi}}\sin\left[\frac{\pi}{12}(t-12)\right]+C. \qquad (3)$$

Начальные условия: при $t=6$ $S=1600$ и при $t=18$ $S=2500$. Отсюда

$$\left.\begin{aligned}-\frac{1}{20}&=-\frac{24k}{\sqrt{\pi}}+C,\\ -\frac{1}{25}&=\frac{24k}{\sqrt{\pi}}+C.\end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему, находим

$$C=-\frac{9}{200}, \quad k=\frac{\sqrt{\pi}}{24\cdot 200}. \qquad (4)$$

Подставляя значения (4) в равенство (3), получим

$$\frac{-2}{\sqrt{S}}=\frac{24\sqrt{\pi}}{24\cdot 200\sqrt{\pi}}\sin\left[\frac{\pi}{12}(t-12)\right]-\frac{9}{200},$$

откуда

$$S=\frac{160\,000}{\left[9-\sin\frac{\pi}{12}(t-12)\right]^2}.$$

Рост дерева

Задача 72. Найти закон роста дерева любой породы, учитывая, что зрелое растение в процессе роста сохраняет геометрическое подобие. Свободную энергию (активное вещество) растение получает путем фотосинтеза. Она расходуется на процесс фотосинтеза, на рост дерева (т. е. на построение живой ткани) и на подъем раствора из почвы. За большие промежутки времени растение получает постоянное количество света на единицу поверхности и может поглощать необходимые вещества из неограниченного запаса.

Решение. Пусть $x=x(t)$ — линейный размер дерева, который изменяется со временем и может служить для выражения высоты, площади поверхности зеленой части и объема растения.

Составим уравнение баланса энергии.

Свободная энергия $E_п$ образуется путем фотосинтеза в зеленой части растения, и ее величина возрастает пропорционально поверхности зеленой части дерева:

$$E_п=k_1x^2,$$

где k_1 — коэффициент пропорциональности, зависящий от размеров и формы листвы, а также от интенсивности фотосинтеза; величиной x^2 будет измеряться площадь поверхности зеленой части (например, суммарная площадь поверхности листьев).

Расход энергии на:

а) процесс фотосинтеза пропорционален x^2, т. е.

$$E_{синт}=k_2x^2,$$

где k_2 — коэффициент пропорциональности ($k_2<k_1$);

б) транспортировку питательного раствора во все части растения пропорционален объему растения и высоте x, так как расход связан с преодолением силы тяжести, т. е.

$$E_{тр.р}=k_3x^3\cdot x=k_3x^4;$$

в) увеличение массы растения (на рост) пропорционален скорости роста, т. е. производной по времени от массы,

$$m=\gamma x^3,$$

где γ — средняя плотность растения, x^3 — объем, т. е.

$$E_{\text{р}}=k_4\frac{dm}{dt}=k_4\frac{d}{dt}(\gamma x^3).$$

На основании закона сохранения энергии расход энергии равен ее поступлению, откуда

$$E_{\text{п}}=E_{\text{синт}}+E_{\text{тр.р}}+E_{\text{р}}$$

или

$$k_1x^2=k_2x^2+k_3x^4+k_4\gamma\cdot 3x^2\frac{dx}{dt}. \tag{1}$$

Уравнение (1) делим на $3k_4x^2$ и, вводя обозначения $\frac{k_1-k_2}{3k_4\gamma}=\alpha$, $\frac{k_3}{3k_4\gamma}=\beta$, получаем дифференциальное уравнение задачи

$$\frac{dx}{dt}=\alpha-\beta x^2. \tag{2}$$

Здесь $\alpha>0$, $\beta>0$. Дерево растет, и производная $\frac{dx}{dt}>0$, т. е. $\alpha-\beta x^2>0$ и $x^2<\frac{a}{b}$. Разделим переменные в уравнении (2), тогда

$$\frac{dx}{\alpha-\beta x^2}=dt. \tag{3}$$

Интегрируя уравнение (3), получаем

$$\int\frac{dx}{\alpha-\beta x^2}=t+C. \tag{4}$$

Интеграл в левой части равенства (4) находим методом неопределенных коэффициентов:

$$\int\frac{dx}{\alpha-\beta x^2}=\frac{1}{\beta}\int\frac{dx}{\frac{\alpha}{\beta}-x^2}=\frac{1}{\beta}\int\frac{dx}{\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}-x\right)\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+x\right)}; \tag{5}$$

так как подынтегральная функция

$$\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}-x\right)\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+x\right)}=\frac{A}{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}-x}+\frac{B}{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+x}, \tag{6}$$

то

$$(A-B)x+(A+B)\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=1$$

и решение системы

$$\left.\begin{aligned} &A-B=0,\\ &(A+B)\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=1 \end{aligned}\right\}$$

дает значения неопределенных коэффициентов

$$A=B=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}. \tag{7}$$

Подставляя значения (7) в новое выражение (6) подынтегральной функции крайнего правого интеграла (5), имеем

$$\frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}}\left(\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}-x}+\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+x}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}}\left[\int\frac{d\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+x\right)}{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+x}-\int\frac{d\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}-x\right)}{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}-x}\right]=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}}\ln\frac{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+x}{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}-x}.$$

Тогда уравнение (4) примет вид

$$\frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}}\ln\frac{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+x}{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}-x}=t+C. \tag{8}$$

Начальное условие: при $t=t_0$ $x=0$. Отсюда

$$\frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}}\ln 1=t_0+C$$

или

$$C=-t_0. \tag{9}$$

Постоянную интегрирования (9) подставляем в общий интеграл (8):

$$\ln\frac{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+x}{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}-x}=2\sqrt{\alpha\beta}\,(t-t_0),$$

откуда закон роста дерева

$$x(t)=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\cdot\frac{e^{2\sqrt{\alpha\beta}\,(t-t_0)}-1}{1+e^{2\sqrt{\alpha\beta}\,(t-t_0)}}. \tag{10}$$

Так как для каждой породы величины α и β известны, то теперь можно вычислить средний рост дерева данной породы в зависимости от возраста, т. е. от времени t.

Исследуем этот закон при изменении t.

Дифференцируя уравнение (2), получим

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-2\beta x.$$

Так как высота дерева всегда положительна, то $x>0$ и $\frac{d^2x}{dt^2}<0$. Таким образом, функция (10) представляет возрастающую вогнутую кривую (рис. 42).

Применяя к функции (10) правило Лопиталя, видим, что предел функции $x(t)$ при $t\to\infty$ равен

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\lim_{t\to\infty}\frac{2\sqrt{\alpha\beta}\,e^{2\sqrt{\alpha\beta}\,(t-t_0)}}{2\sqrt{\alpha\beta}\,e^{2\sqrt{\alpha\beta}\,(t-t_0)}}=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\cdot 1=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Величина $x = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$, при которой $\frac{dx}{dt} = 0$, соответствует случаю, когда поступающая энергия расходуется на процесс фотосинтеза и транспортировку питательного раствора, а дерево при этом не растет.

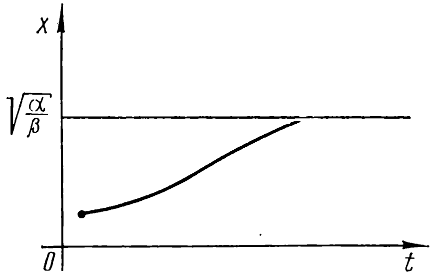

Рис. 42

Зависимость (10) дает ответ на вопрос, почему деревья любой породы сначала растут быстро, а потом их рост замедляется, пока совсем не прекратится.

Увеличение количества фермента

Задача 73. В культуре пивных дрожжей быстрота прироста действующего фермента пропорциональна наличному его количеству x. Первоначальное количество фермента a в течение часа удвоилось. Во сколько раз оно увеличится через 3 *ч*?

Решение. По условию задачи дифференциальное уравнение процесса

$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dx}{x} = kdt.$$

Общее решение этого уравнения

$$x = Ce^{kt}.$$

Определяем C из начального условия: при $t = 0$ $x = a$. Отсюда

$$a = Ce^{k \cdot 0} \text{ или } C = a.$$

Подставляя постоянную интегрирования C в общее решение, получим частное решение

$$x=ae^{kt}. \tag{1}$$

Коэффициент пропорциональности определяем из данных дополнительного условия: при $t=1$ *ч* $x=2a$. Отсюда

$$2a=ae^{k\cdot 1} \text{ или } e^k=2.$$

Подставляя это выражение в частное решение (1), получим закон рассматриваемого процесса:

$$x=a\,2^t.$$

При $t=3$ *ч* $x=8a$. Следовательно, количество фермента спустя 3 *ч* увеличится в 8 раз.

§ 29. ЭКОЛОГИЯ* ПОПУЛЯЦИЙ

Изолированная колония организмов

Задача 74. Колония микроорганизмов обитает в идеальных (или искусственно созданных) условиях, располагает неограниченными ресурсами питания и не подавляется никаким другим видом. В силу естественных процессов размножения (путем самооплодотворения) и гибели число живых организмов колонии меняется с течением времени: прирост пропорционален количеству взрослых членов. Найти закон изменения общего количества живых организмов в колонии.

Решение. Пусть $x(t)$ — число живых организмов в момент t, а $x(t+\Delta t)$ — число живых организмов в момент $t+\Delta t$. Тогда за промежуток времени Δt приращение функции $x(t)$ будет

$$x(t+\Delta t)-x(t)=\Delta x.$$

За время Δt все взрослые члены колонии (или часть их) произведут потомство, а часть членов колонии может погибнуть.

Тогда

$$\Delta x=N-M, \tag{1}$$

где N — число родившихся за время Δt, M — число погибших за время Δt.

Число родившихся N зависит от длины промежутка Δt (чем больше Δt, тем больше N) и от количества родителей (чем больше

---

* Экология — раздел биологии, изучающий взаимоотношения организмов и окружающей среды.

взрослых организмов, тем больше потомство), т. е.

$$N=F(x, \Delta t),$$

где функция F возрастает с ростом x или Δt и равна нулю, если равна нулю одна из этих переменных.

Можно полагать, что

$$N=k_1x\Delta t, \tag{2}$$

где k_1 — коэффициент пропорциональности.

По аналогии для процесса гибели

$$M=k_2x\Delta t. \tag{3}$$

Подставляя равенства (2) и (3) в уравнение (1), имеем

$$\Delta x=k_1x\Delta t-k_2x\Delta t$$

или

$$\Delta x=(k_1-k_2)x\Delta t=kx\Delta t, \tag{4}$$

где $k=k_1-k_2$ — специфическая скорость естественного увеличения популяции.

В реальных колониях величины x, N, M могут принимать только целочисленные значения. Поэтому трудно говорить о непрерывности или о дифференцируемости функции $x(t)$. Однако, когда колония велика, а интервал времени Δt мал, функция $x(t)$ по своим свойствам напоминает непрерывную функцию и в равенстве (4) ее можно считать непрерывной при условии, что она удовлетворительно описывает реальную функцию $x(t)$.

Разделив обе части равенства (4) на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t\to 0$, имеем дифференциальное уравнение задачи

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}=kx. \tag{5}$$

После разделения переменных уравнение (5) примет вид

$$\frac{dx}{x}=kdt.$$

Интегрируя последнее равенство, получим

$$\ln x=kt+C,$$

откуда общее решение

$$x=Ce^{kt}. \tag{6}$$

Начальное условие: при $t=t_0$ $x=x(t_0)$, где t_0 — время начала наблюдения за колонией, $x(t_0)$ — количество живых организмов в колонии в начальный момент.

Отсюда

$$C = x(t_0) e^{-kt_0}.$$

Найденную постоянную интегрирования подставляем в равенство (6) и получаем искомый закон изменения числа организмов в колонии по времени (модель Мальтуса):

$$x(t) = x(t_0) e^{k(t-t_0)}.$$

Заблуждение Мальтуса заключалось в том, что это уравнение для нереальных условий он считал универсальным законом для всей природы и человеческого общества.

Задача 75. Скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству. В начальный момент имелось 100 бактерий, а в течение 3 *ч* их число удвоилось. Найти зависимость количества бактерий от времени. Во сколько раз увеличится количество бактерий в течение 9 *ч*?

Решение. Пусть x — количество бактерий, имеющихся в данный момент. Тогда скорость размножения будет $\frac{dx}{dt}$. Согласно условию, дифференциальное уравнение задачи

$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

где k — коэффициент пропорциональности между скоростью размножения бактерий и их числом. Осуществляя разделение переменных x и t, получим

$$\frac{dx}{x} = k\,dt.$$

Проводя интегрирование и обозначая для удобства при последующем потенцировании постоянную интегрирования через $\ln C$, найдем

$$\int \frac{dx}{x} = k \int dt + \ln C$$

или

$$\ln x = kt + \ln C. \tag{1}$$

Потенцируем равенство (1):

$$x = e^{kt+\ln C} = e^{\ln C} e^{kt} = Ce^{kt}.$$

Итак, общее решение

$$x = Ce^{kt}. \tag{2}$$

Начальное условие: при $t=0$ $x=100$. Подставляя эти значения в общее решение (2), получаем уравнение для определения постоянной интегрирования

$$100=Ce^0,$$

откуда

$$C=100. \tag{3}$$

В общем решении (2) осталась неизвестной постоянная k.

Дополнительное условие: при $t=3$ $x=200$. Подставляя эти значения в уравнение (3), получаем для определения k равенство

$$200=100e^{3k}.$$

Сокращая на 100 и логарифмируя, находим

$$\ln 2=3k,$$

откуда

$$k=\frac{\ln 2}{3}.$$

Тогда

$$e^{kt}=e^{\frac{\ln 2}{3}t}=\left(e^{\ln 2}\right)^{\frac{t}{3}}=2^{\frac{t}{3}}.$$

Итак, искомая функция

$$x=100\cdot 2^{\frac{t}{3}}.$$

Ответ на второй вопрос дает отношение

$$\frac{x(9)}{x(0)}=\frac{100\cdot 2^{9/3}}{100}=2^3=8,$$

т. е. в течение 9 *ч* количество бактерий увеличится в 8 раз.

Учет самоотравления организмов

Задача 76. Колония организмов обитает в реальных природных условиях — конкурентная борьба внутри популяции, недостаток места и пищи, передача инфекции из-за тесноты и т. п. Найти закон изменения общего количества живых организмов в колонии.

Решение. Фактор самоотравления учитывается при подсчете прироста популяции Δx путем уменьшения его на величину $h(x, \Delta t)$, характеризующую действительные условия существования колонии. Тогда уравнение (4) задачи 74 запишется

$$\Delta x=kx\Delta t-h(x, \Delta t). \tag{1}$$

Без особой ошибки можно считать, что величина $h(x, \Delta t)$ будет линейно зависимой от Δt, т. е.

$$h(x, \Delta t)=f(x)\Delta t.$$

Функцию $f(x)$ считают квадратичной, т. е.

$$f(x)=\lambda x^2,$$

где λ — коэффициент самоотравления (или внутренней борьбы в популяции).

Тогда

$$h(x, \Delta t)=\lambda x^2 \Delta t. \tag{2}$$

Величина (2) становится заметной по сравнению с $kx\Delta t$ только при больших значениях x, при малых x она становится бесконечно малой более высокого порядка малости. Поэтому зависимость (2) удовлетворительно отражает тот факт, что конкуренция внутри популяции начинает заметно ощущаться только при большой плотности, т. е. при больших значениях x на ограниченной площади. Кроме того, конкуренция увеличивается с ростом количества встреч между членами колонии, а оно пропорционально произведению $x \cdot x$, т. е. x^2.

Таким образом, равенство (1) принимает вид

$$\Delta x=kx\Delta t-\lambda x^2 \Delta t. \tag{3}$$

Равенство (3) делим почленно на Δt:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=kx-\lambda x^2$$

и после перехода к пределу при $t \to 0$ получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt}=kx-\lambda x^2. \tag{4}$$

Уравнение (4) можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{dx}{dt}=kx\left(1-\frac{\lambda}{k}x\right)=kx\left(\frac{\frac{k}{\lambda}-x}{\frac{k}{\lambda}}\right). \tag{5}$$

Пусть $\mu=\frac{k}{\lambda}$. Тогда уравнение (5) запишется так:

$$\frac{dx}{dt}=kx\left(\frac{\mu-x}{\mu}\right).$$

Разделим переменные:

$$\frac{\mu dx}{x(\mu - x)} = kdt. \tag{6}$$

Применив к уравнению (6) метод неопределенных коэффициентов, получим

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\mu - x}\right) dx = kdt.$$

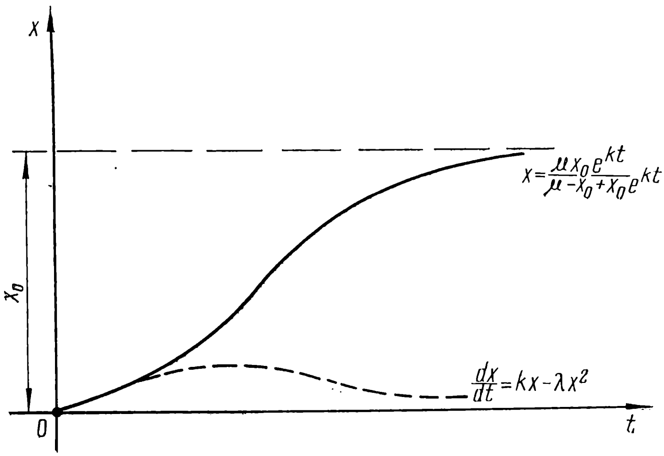

Рис. 43

Если $\mu > x_0$, то для всех моментов времени $\mu > x(t)$ и после интегрирования имеем

$$\ln x - \ln(\mu - x) = kt + \ln C,$$

откуда, потенцируя, получаем

$$\frac{x}{\mu - x} = Ce^{kt}. \tag{7}$$

Упрощенные начальные условия: при $t_0 = 0$ $x(0) = x_0 < \mu$. Тогда

$$C = \frac{x_0}{\mu - x_0}.$$

Следовательно, уравнение (7) примет вид

$$\frac{x}{\mu - x} = \frac{x_0}{\mu - x_0} e^{kt}$$

и искомый закон (модель Ферхюльста — Перла)

$$x(t)=\frac{\mu x_0}{\mu-x_0+x_0e^{kt}}\,e^{kt}.$$

График этого закона называют *логистической кривой.* Закон роста колонии показан на рис. 43 сплошной линией, скорость роста — пунктиром.

Учет скрещивания организмов

Задача 77. Колония организмов обитает в реальных природных условиях. Найти закон изменения количества организмов в колонии, учитывая в основе размножения только скрещивание.

Решение. Прирост будет тем выше, чем больше количество встреч между членами колонии разных полов. Количество встреч пропорционально как численности одного, так и численности другого пола, т. е. произведению $x\cdot x=x^2$.

Для идеальных (или искусственно созданных) условий — без учета внешних факторов, при неограниченных резервах питания и т. п., для популяции можно написать, что

$$\frac{dx}{dt}=\nu x^2,$$

где ν — коэффициент пропорциональности.

Пусть: t — среднее время между двумя последующими оплодотворениями; τ — среднее время вынашивания плода, фиксированное для данного вида.

Среднее время, в течение которого может состояться встреча, ведущая к оплодотворению, $t_{\text{ср}}=t-\tau$. Вероятность такой встречи будет тем большей, чем большую часть $t_{\text{ср}}$ занимает в интервале t, т. е. чем больше отношение $\frac{t_{\text{ср}}}{t}$. Поэтому коэффициент ν целесообразно принять

$$\nu=\alpha\frac{t_{\text{ср}}}{t}=\alpha\frac{t_{\text{ср}}}{t_{\text{ср}}+\tau},$$

где α — коэффициент пропорциональности.

Величина $t_{\text{ср}}$ зависит от плотности, т. е. от x, и тем меньше, чем больше x на ограниченной площади, т. е.

$$t_{\text{ср}}=\frac{\beta}{x}.$$

Таким образом,

$$\frac{dx}{dt}=\alpha\frac{t_{\text{ср}}}{t_{\text{ср}}+\tau}x^2=\alpha\frac{\frac{\beta}{x}}{\frac{\beta}{x}+\tau}x^2$$

или

$$\frac{dx}{dt}=\alpha\frac{\beta x^2}{\beta+\tau x}. \tag{1}$$

В частном случае при малом τ по сравнению с β и малой общей плотности (т. е. малых x) получим

$$\frac{dx}{dt}=\alpha x^2.$$

В случае, если β мало по сравнению с τ (т. е. мало $t_{\text{ср}}$), а общая плотность большая (т. е. большие x), получим

$$\frac{dx}{dt}=\alpha\frac{\beta}{\tau}x.$$

Дальнейшее решение уравнения (1) дает искомый закон.

Исходя из уравнения (1), можно аналогично предыдущей задаче найти также закон, учитывающий конкуренцию внутри популяции, внешние факторы, периодичность размножения и т. п. Во всех до сих пор рассмотренных задачах популяция считается однородной по возрасту, т. е. не учитываются различные возрастные группы в популяциях.

§ 30. ПЛОТНОСТЬ МУРАВЬЕВ ВНЕ МУРАВЕЙНИКА

Задача 78. Основанием муравейника служит круг радиуса r (рис. 44), и пространство вне муравейника однородно по распределению питательных веществ и по проходимости. Муравьи переходят с одного места на другое, пока не найдут пищу или строительный материал, и если они не погибают по дороге, то приносят свою добычу в муравейник. В связи с этим вблизи муравейника больше муравьев, чем вдали от него. Найти плотность муравьев вне муравейника.

Р е ш е н и е. По условию задачи все точки, лежащие на окружности радиуса R, будут равноправны в смысле своей значимости для муравьев. В связи с этим плотность (количество насекомых в окрестности, поделенное на ее площадь) муравьев во всех точках окружности радиуса R $(R>r)$ будет одинаковой.

Таким образом, для анализа плотности как функции расстояния R можно ограничиться рассмотрением точек одного луча.

Пусть плотность в каждой точке не меняется со временем. Поисковые перемещения муравьев считаем случайными, т. е. если некоторое количество муравьев покинуло определенную окрестность за единицу времени, то приблизительно столько же пришло в эту окрестность из соседних участков, а также, если некоторые муравьи скрылись в муравейнике со своей ношей, то приблизительно столько же вышло из него в ее поисках.

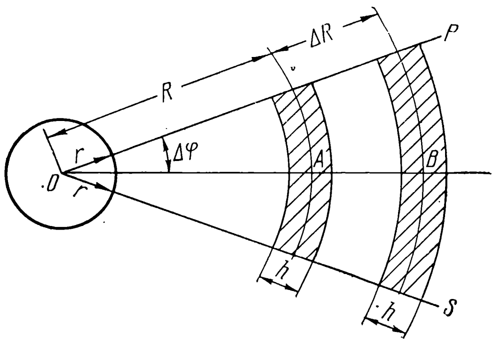

Рис. 44

Рассмотрим две точки A и B, лежащие на одном луче (рис. 44), и исследуем обмен муравьями между их окрестностями. Обозначим: $N(R)$ — количество муравьев в окрестности точки A, $N(R+\Delta R)$ — их количество в окрестности точки B.

В поисках муравьи разбегаются в разных направлениях, которые в поисковом отношении равноценны, и поэтому доля выходящих муравьев не зависит от направления выхода. Если из окрестности точки A в направлении к точке B вышло $k_1N(R)$ муравьев, то из окрестности точки B в направлении к точке A выйдет $k_1N(R+\Delta R)$ муравьев. Здесь $k_1<1$ — коэффициент пропорциональности, определяющий долю муравьев, выходящих в фиксированном направлении.

Часть муравьев, вышедших из точки A к точке B, не дойдет до окрестности этой точки, так как они найдут по дороге пищу или строительный материал и вернутся в муравейник. Количество таких насекомых будет тем больше, чем длиннее путь, т. е. чем больше расстояние ΔR между точками A и B.

Количество муравьев, вышедших из окрестности точки A и дошедших до окрестности точки B, будет

$$N_{AB}=k_1N(R)-k_2k_1N(R)\Delta R,$$

где k_2 — коэффициент пропорциональности, определяющий долю вернувшихся в муравейник муравьев и зависящий от ценности пространства — чем оно богаче, тем он больше.

К количеству муравьев $k_1N(R+\Delta R)$ прибавятся муравьи, которые вышли из окрестности точки B не к точке A, но по дороге нашли пищу или строительный материал и, изменив направление, пошли к муравейнику. Такие муравьи, если не успели выйти из сектора OPS, также попадут в окрестность точки A, и их количество будет тем больше, чем больше расстояние ΔR.

Итак, количество муравьев, которые вышли из окрестности точки B и попали в окрестность точки A, будет

$$N_{BA}=k_1N(R+\Delta R)+k_2k_1N(R+\Delta R)\Delta R.$$

Так как количество муравьев в окрестности любой точки должно быть постоянным, то

$$N_{AB}=N_{BA}$$

или

$$k_1N(R)-k_2k_1N(R)\Delta R=k_1N(R+\Delta R)+k_2k_1N(R+\Delta R)\Delta R.$$

Сокращая полученное равенство на k_1 и учитывая, что количество муравьев равно их плотности, умноженной на площадь, получим

$$f(R)F_A-k_2f(R)F_A\Delta R=f(R+\Delta R)F_B+k_2f(R+\Delta R)F_B\Delta R, \quad (1)$$

где $f(R)$, $f(R+\Delta R)$ — соответствующие плотности в окрестностях точек A и B; F_A, F_B — площади окрестностей соответственно точек A и B. Площади в полярных координатах выражаются:

$$F_A\approx R\Delta\varphi h; \qquad F_B\approx (R+\Delta R)\Delta\varphi h. \quad (2)$$

Подставляем выражения площадей (2) в равенство (1) и получаем

$$f(R)R\Delta\varphi h-k_2f(R)R\Delta\varphi h\Delta R=f(R+\Delta R)(R+\Delta R)\Delta\varphi h+$$
$$+k_2f(R+\Delta R)(R+\Delta R)\Delta\varphi h\Delta R. \quad (3)$$

Сокращая равенство (3) на $h\Delta\varphi$ и группируя слагаемые, имеем

$$(R+\Delta R)f(R+\Delta R)-Rf(R)=$$
$$=-k_2\,[f(R+\Delta R)(R+\Delta R)+f(R)R]\Delta R.$$

Делим последнее уравнение на ΔR и переходим к пределу при $\Delta R\to 0$, в результате чего получим

$$\frac{d}{dR}[Rf(R)]=-2k_2Rf(R). \quad (4)$$

Пусть $k=2k_2$. Тогда уравнение (4) можно представить в виде

$$\frac{[Rf(R)]'}{Rf(R)}=-k,$$

откуда

$$\frac{d[Rf(R)]}{Rf(R)}=-kdR.$$

Интегрируем полученное уравнение плотности:

$$\ln[Rf(R)]=-kR+C. \tag{5}$$

Начальные условия: при $R=r$ $f(R)=f(r)$, откуда

$$C=\ln[rf(r)]+kr.$$

Найденное значение постоянной интегрирования подставляем в уравнение (5) и тогда

$$\ln\frac{Rf(R)}{rf(r)}=-k(R-r), \tag{6}$$

откуда искомый закон плотности

$$f(R)=\frac{r}{R}f(r)e^{-k(R-r)}. \tag{7}$$

Величину коэффициента k можно вычислить из равенства (6), которое верно для всех $R>r$ и, в частности, для $R=r_1$. Подставляем $R=r_1$ в уравнение (7) и имеем

$$f(r_1)=\frac{r}{r_1}f(r)e^{-k(r_1-r)},$$

откуда

$$k=\frac{1}{r_1-r}\ln\frac{rf(r)}{r_1f(r_1)}, \tag{8}$$

т. е. надо знать еще значение плотности f в точке $R=r_1$. Подставляя значение k по формуле (8) в уравнение (7), получим кривую плотности $f(R)$.

§ 31. РОСТ ДЕНЕЖНЫХ ВКЛАДОВ

Задача 79. Сумма A руб. положена в сберегательную кассу на $r\%$ в год. Найти закон изменения суммы при условии, что приращение начисляется непрерывно.

На основании полученного закона решить частные задачи.

а) Сумма 10 000 руб. положена в сберегательную кассу на 2% в год. Через сколько лет она составит 20 000 руб.?

б) Через сколько лет удвоится 1 руб., хранящийся на 3-процентном счету?

Решение. Общая сумма P вклада в результате начисления процентов один раз в конце года составит

$$P=A(1+r).$$

Если проценты будут начисляться по истечении полугодия, то

$$P=A\left(1+\frac{r}{2}\right)^2,$$

если поквартально,

$$P=A\left(1+\frac{r}{4}\right)^4,$$

и если ежемесячно, то

$$P=A\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12}.$$

В общем случае наращенная сумма в конце года составит

$$P=A\left(1+\frac{r}{m}\right)^m$$

при $r\%$ годовых, начисляемых m раз в год (например, 365 раз в год, т. е. ежедневно).

По истечении n лет общая сумма будет

$$P=A\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^m\right]^n.$$

Если число m начислений процентов в год будет беспредельно увеличиваться, то

$$P=\lim_{m\to\infty} A\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^m\right]^n=$$

$$=A\lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r}}\right]^{nr}. \qquad (1)$$

Так как

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r}}=e,$$

то равенство (1) принимает вид

$$P=Ae^{nr}.$$

Заменяя n через t, получим сумму, накопившуюся по истечении времени t,

$$P=Ae^{rt}.$$

В течение короткого промежутка времени dt приращение суммы P будет

$$dP=d(Ae^{rt})=rAe^{rt}dt=rPdt.$$

Разделяя переменные, получим дифференциальное уравнение задачи

$$\frac{dP}{P}=rdt. \tag{2}$$

а) Интегрируя уравнение (2) и подставляя начальные и конечные условия в качестве пределов интегрирования, имеем

$$\int_{10\,000}^{20\,000}\frac{dP}{P}=0{,}02\int_0^t dt,$$

откуда

$$\ln P\Big|_{10\,000}^{20\,000}=0{,}02\Big|_0^t$$

или

$$\ln 2=0{,}02t$$

и искомое время

$$t=\frac{\ln 2}{0{,}02}=\frac{0{,}693}{0{,}02}=34{,}66 \text{ года}.$$

б) Интегрируя уравнение (2) с учетом условий задачи, получаем

$$\int_1^2\frac{dP}{P}=0{,}03\int_0^t dt,$$

откуда

$$\ln 2=0{,}03t$$

и искомое время

$$t=\frac{\ln 2}{0{,}03}\approx 23{,}1 \text{ года}.$$

Глава V

ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ОДНОРОДНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Однородной функцией $f(x, y)$ называется функция, удовлетворяющая условию

$$f(\lambda x, \lambda y)=\lambda^n f(x, y),$$

где λ — произвольное число; n — степень однородности.

Интегрирование однородного дифференциального уравнения вида

$$M(x, y)dx+N(x, y)dy=0 \qquad (1)$$

производится методом подстановки.

Если $M(x, y)$ и $N(x, y)$ однородные функции своих аргументов одинаковой степени, то уравнение (1) сводится к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой

$$y=ux,$$

откуда

$$dy=udx+xdu.$$

Можно также пользоваться подстановкой

$$x=zy,$$

откуда

$$dx=zdy+ydz.$$

§ 1. ИЗОГОНАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ

Задача 80. Найти изогональные траектории пучка прямых с центром в начале координат.

Р е ш е н и е. *Изогональными траекториями* называются кривые, образующие в каждой своей точке постоянный угол α с проходящей через эту точку прямой пучка (рис. 45).

Пусть уравнение данного пучка $y=ax$. Положим $\operatorname{tg}\alpha=k$.

Обозначим текущие координаты точки траектории через (x, y); угловой коэффициент касательной к траектории в этой точке будет $\frac{dy}{dx}$.

По условию

$$k=\operatorname{tg}\alpha=\frac{\frac{dy}{dx}-a}{1+\frac{dy}{dx}a}.$$

В любой точке (x, y) всегда $a=\frac{y}{x}$ (из уравнения пучка). Поэтому

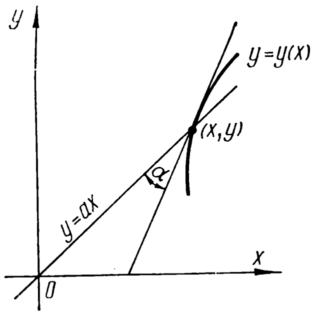

Рис. 45

$$k=\frac{\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}\cdot\frac{dy}{dx}}$$

или

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+kx}{x-ky}. \tag{1}$$

Уравнение (1) является однородным уравнением, и для его решения применим подстановку

$$y=ux, \quad dy=udx+xdu. \tag{2}$$

Подставляя выражения (2) в уравнение (1), получаем

$$xdu-ku^2dx-kxudu-kdx=0$$

или после группировки членов

$$x(1-ku)du-k(1+u^2)dx=0. \tag{3}$$

В уравнении (3) разделяем переменные

$$\frac{1}{k}\cdot\frac{1-ku}{1+u^2}du-\frac{dx}{x}=0.$$

Интегрируем:

$$\frac{1}{k}\left[\int\frac{du}{1+u^2}-\frac{k}{2}\int\frac{d(1+u^2)}{1+u^2}\right]-\int\frac{dx}{x}=0$$

или

$$\frac{1}{k}\operatorname{arctg}u+\ln C=\ln x+\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln x\sqrt{1+u^2}. \tag{4}$$

Учитывая, что $u=\frac{y}{x}$ и $\ln e=1$, придаем уравнению (4) вид

$$\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\ln C$$

или

$$\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}.$$

Переходя к полярным координатам, т. е. полагая $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, находим, что изогональными траекториями являются логарифмические спирали

$$r=Ce^{\frac{\varphi}{k}}.$$

§ 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Задача 81. В любой точке кривой длина поднормали равна среднему арифметическому координат этой точки. Найти уравнение кривой при условии, что она проходит через точку $(-3, 2)$.

Решение. Длина поднормали кривой $y=f(x)$ равна $\left|y\frac{dy}{dx}\right|$. Среднее арифметическое координат текущей точки $\frac{x+y}{2}$.

По условию задачи получаем дифференциальное уравнение искомого семейства кривых

$$y\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{2}, \tag{1}$$

которое является однородным уравнением. Преобразуем его к виду

$$\frac{1}{2}(x+y)dx-ydy=0 \tag{2}$$

и вводим подстановку

$$y=ux,\ \ dy=udx+xdu.$$

Тогда уравнение (2) принимает вид

$$(x+ux-2u^2x)dx-2ux^2du=0,$$

откуда после сокращения на x получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$(1+u-2u^2)dx-2uxdu=0. \tag{3}$$

Уравнение (3) делим на произведение $(1+u-2u^2)x$ и получаем

$$\frac{2udu}{1+u-2u^2}=\frac{dx}{x}. \tag{4}$$

Преобразуем левую часть этого уравнения. Представляя знаменатель в виде произведения $-2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ и сокращая числитель и знаменатель на 2, получаем

$$\frac{udu}{-(u-1)\left(u+\frac{1}{2}\right)}=\frac{dx}{x}.$$

Избавляемся от дроби в знаменателе левой части и интегрируем полученное уравнение:

$$-2\int\frac{udu}{(u-1)(2u+1)}=\ln x+\ln C_1=\ln C_1x. \tag{5}$$

Применяя метод неопределенных коэффициентов, находим

$$\frac{u}{(u-1)(2u+1)}=\frac{A}{u-1}+\frac{B}{2u+1},$$

откуда

$$A(2u+1)+B(u-1)=u$$

или

$$(2A+B)u+A-B=u,$$

и в итоге приравнивания коэффициентов получаем систему

$$\left.\begin{aligned}2A+B=1,\\ A-B=0,\end{aligned}\right\}$$

решая которую находим $A=B=1/3$.

Раскрывая интеграл в левой части уравнения (5), получим

$$-2\int\frac{udu}{(u-1)(2u+1)}=-2\int\left(\frac{A}{u-1}+\frac{B}{2u+1}\right)du=$$

$$=-\frac{2}{3}\left[\ln(u-1)+\frac{1}{2}\ln(2u+1)\right]=-\frac{2}{3}\ln(u-1)\sqrt{2u+1}=$$

$$=\ln\frac{1}{[(u-1)\sqrt{2u+1}]^{2/3}}=\ln C_1x$$

или

$$C_1x(u-1)^{2/3}(2u+1)^{1/3}=1,$$

откуда после подстановки $u=\frac{y}{x}$ и сокращения на x имеем

$$C_1(y-x)^{2/3}(2y+x)^{1/3}=1. \tag{6}$$

Уравнение (6) преобразуем к виду

$$(y-x)^{2/3}(2y+x)^{1/3}=\frac{1}{C_1}=C$$

и обе стороны полученного равенства возведем в куб

$$(y-x)^2(2y+x)=C_*^3=C.$$

Таким образом, общее решение уравнения (1)

$$(y-x)^2(2y+x)=C.$$

Дополнительное условие: точка $(-3, 2)$ является точкой кривой, следовательно,

$$(2+3)^2(2\cdot 2-3)=C$$

или

$$C=25.$$

Тогда уравнение искомой кривой

$$(y-x)^2(2y+x)-25=0$$

или

$$2y^3-3xy^2+x^3-25=0.$$

Задача 82. Радиус-вектор любой точки кривой меньше длины подкасательной на величину абсциссы точки касания. Найти уравнение кривой, если она проходит через точку $(-3, 4)$.

Решение. Радиус-вектор любой точки кривой равен $\sqrt{x^2+y^2}$. Длина подкасательной равна $\left|y\frac{dx}{dy}\right|$.

По условию задачи дифференциальное уравнение искомого семейства

$$\sqrt{x^2+y^2}=y\frac{dx}{dy}-x$$

или

$$(\sqrt{x^2+y^2}+x)\,dy-y\,dx=0. \tag{1}$$

Уравнение (1) является однородным дифференциальным уравнением, которое можно привести к уравнению с разделяющимися переменными. Целесообразнее принять подстановку

$$x=zy,\quad dx=z\,dy+y\,dz. \tag{2}$$

Подставляем выражения (2) в уравнение (1) и получаем уравнение

$$\sqrt{z^2+1}\,dy-y\,dz=0,$$

которое после разделения переменных принимает вид

$$\frac{dy}{y}-\frac{dz}{\sqrt{z^2+1}}=0$$

или

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{\sqrt{z^2+1}}. \tag{3}$$

Интегрируем уравнение (3) и в итоге получаем

$$\ln y = \ln(z + \sqrt{z^2+1}) + \ln C,$$

откуда

$$y = C(z + \sqrt{z^2+1}). \tag{4}$$

Уравнение (4) преобразуем следующим образом:

$$y - Cz = C\sqrt{z^2+1}$$

или

$$C^2(z^2+1) = y^2 - 2Cyz + C^2z^2,$$

откуда общее решение дифференциального уравнения (1)

$$y^2 = 2Cyz + C^2 = 2Cx + C^2.$$

Начальное условие: точка (—3, 4) лежит на кривой, т. е.

$$16 = 2(-3)C + C^2,$$

откуда

$$C_1 = 8; \quad C_2 = -2.$$

Итак, получаем две кривые: параболу

$$y^2 = 16x + 64$$

и параболу

$$y^2 = -4x + 4.$$

Задача 83. Найти кривую, для которой площадь, заключенная между осью абсцисс, кривой и двумя ординатами, одна из которых постоянная, а другая переменная, равна отношению куба переменной ординаты к переменной абсциссе (рис. 46).

Решение. Пусть $N(x, y)$ — переменная точка на кривой. Площадь криволинейной трапеции равна $\int\limits_{x_0}^{x} y dx$. По условию

$$\int\limits_{x_0}^{x} y dx = \frac{y^3}{x}. \tag{1}$$

Берем производную от обеих частей равенства (1) и тогда

$$y = \frac{3y^2y'x - y^3}{x^2},$$

откуда

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2y+y^3}{3y^2x}. \qquad (2)$$

Однородное дифференциальное уравнение (2) подстановкой $y=ux$, $dy=udx+xdu$ приводим к уравнению

$$\frac{dx}{x}=\frac{3udu}{1-2u^2}. \qquad (3)$$

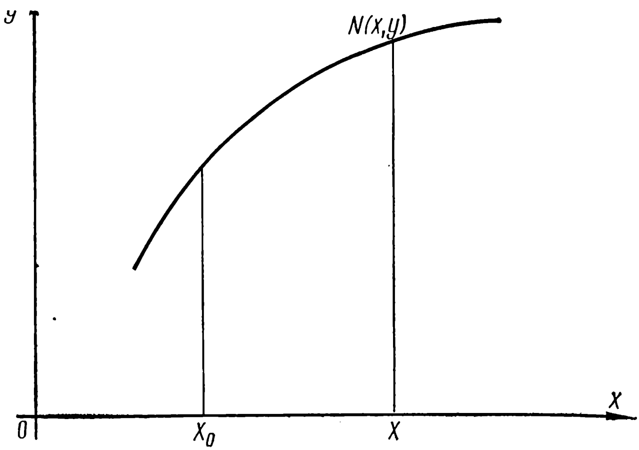

Рис. 46

Общее решение уравнения (3) имеет вид

$$\ln x+\frac{3}{4}\ln(2u^2-1)=\frac{\ln C}{4}$$

и после потенцирования запишется так:

$$x^4(2u^2-1)^3=C.$$

Переходя к переменной y, имеем

$$x^4\left(\frac{2y^2-x^2}{x^2}\right)^3=C$$

или

$$(2y^2-x^2)^3=Cx^2.$$

§ 3. ЗЕРКАЛО, ФОКУСИРУЮЩЕЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ЛУЧИ

Задача 84. Какой формы зеркало собирает все лучи, параллельные его оптической оси, в одной точке? Найти уравнение зеркальной поверхности, если ее фокальная хорда равна 8.

Решение. Пусть отраженные лучи фокусируются в начале координат. Ось абсцисс направим по оптической оси зеркала и со-

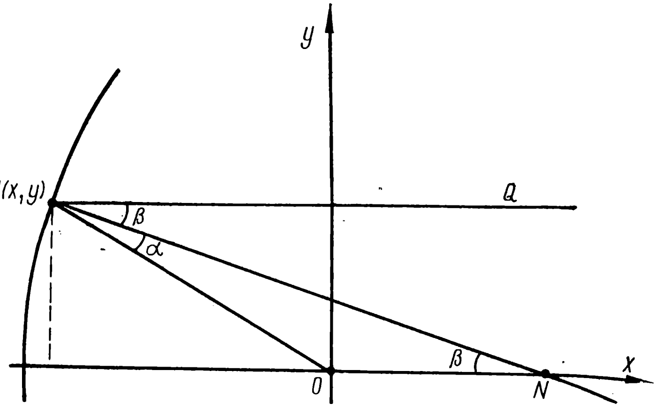

Рис. 47

ставим уравнение сечения искомой поверхности зеркала плоскостью xOy (рис. 47). Любой луч QM параллельного пучка должен после отражения пройти через начало координат. По закону отражения $\angle\alpha=\angle\beta$. Следовательно, треугольник MON равнобедренный и $\overline{OM}=\overline{ON}$, т. е. радиус-вектор точки $M(x, y)$ равен отрезку, отсекаемому на оси абсцисс нормалью:

$$\sqrt{x^2+y^2}=x+y\frac{dy}{dx}. \tag{1}$$

Уравнение (1) представляет дифференциальное уравнение семейства кривых, к которому принадлежит также искомое сечение. Общее решение этого однородного уравнения

$$y^2=2Cx+C^2$$

или

$$y^2=2C\left(x+\frac{C}{2}\right)$$

представляет семейство парабол с общим фокусом в начале координат и параметрами $p=C$.

Так как фокальная хорда искомой параболы

$$2p=8,$$

то

$$p=C=4.$$

Уравнение искомого сечения представляет параболу

$$y^2=8(x+2).$$

Так как плоскость xOy выбрана произвольно, то аналогичные сечения получатся в любой плоскости, проходящей через ось Ox. Таким образом, искомая зеркальная поверхность представляет параболоид вращения

$$y^2+z^2=8(x+2).$$

§ 4. ТРАЕКТОРИИ ПОЛЕТА САМОЛЕТОВ

Задача 85. Летчик ведет самолет в направлении к городу B, расположенному на одной параллели западнее взлетной площадки. Найти уравнение траектории полета самолета, если его скорость v *км/ч* и ветер дует с юга со скоростью w *км/ч*. Взлетная площадка находится на расстоянии a *км* от города B.

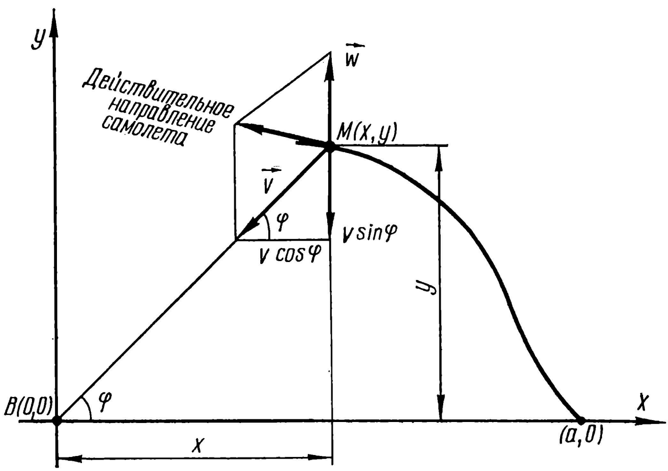

Рис. 48

Решение. Пусть $M(x, y)$ — положение самолета в момент времени t (рис. 48). Вектор, представляющий его скорость, имеет величину v и направлен к точке B. Пусть φ — угол, образованный вектором с горизонталью, соединяющей взлетную площадку и город B. Вектор скорости ветра направлен на север и имеет величину w.

Тогда диагональ параллелограмма, образованного векторами $\vec{v}$ и $\vec{w}$, представляет действительное направление вектора скорости самолета в момент t. Диагональ должна касаться траектории самолета в точке M. Следовательно, она образует наклон $\frac{dy}{dx}$ с искомой кривой. Поэтому задача сводится к определению уравнения, которое выражает производную $\frac{dy}{dx}$ в виде функции x и y.

Соответствующие составляющие скорости самолета в направлениях x и y будут

$$\frac{dx}{dt}=-v\cos\varphi, \quad \frac{dy}{dt}=-v\sin\varphi. \tag{1}$$

Поэтому действительная скорость самолета в направлении y с учетом скорости ветра

$$\frac{dy}{dt}=-v\sin\varphi+w. \tag{2}$$

Из рис. 48 очевидно, что

$$\sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Подставляя эти значения в первое уравнение (1) и в уравнение (2), получим

$$\frac{dx}{dt}=\frac{-vx}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{dy}{dt}=-\frac{vy}{\sqrt{x^2+y^2}}+w. \tag{3}$$

Деление второго уравнения (3) на первое уравнение (1) дает

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-vy+w\sqrt{x^2+y^2}}{-vx}=\frac{y-\frac{w}{v}\sqrt{x^2+y^2}}{x}. \tag{4}$$

Пусть теперь

$$k=\frac{w}{v},$$

т. е k — коэффициент отношения скоростей ветра и самолета. Следовательно, равенство (4) примет вид

$$xdy=(y-k\sqrt{x^2+y^2})dx. \tag{5}$$

Уравнение (5) является однородным уравнением. Преобразуем его к интегрируемому выражению

$$\frac{xdy-ydx}{x^2}=-\frac{k}{x}\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\,dx$$

или

$$\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}=-\frac{k}{x}\,dx. \tag{6}$$

Начальные условия: при $t=0$ $x=a$, $y=0$, $y'=\frac{y}{x}=0$.

Интегрируя уравнение (6), имеем

$$\int\limits_0^{y/x}\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}=-\int\limits_a^x\frac{k}{x}\,dx,$$

откуда

$$\ln\left[\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right]=-k\ln\frac{x}{a}. \tag{7}$$

Пусть

$$u=\frac{y}{x}. \tag{8}$$

Тогда равенство (7) принимает вид

$$\ln(u+\sqrt{1+u^2})=-k\ln\frac{x}{a}$$

или

$$u+\sqrt{1+u^2}=\left(\frac{x}{a}\right)^{-k},$$

откуда

$$1+u^2=\left(\frac{x}{a}\right)^{-2k}-2\left(\frac{x}{a}\right)^{-k}u+u^2$$

или

$$2\left(\frac{x}{a}\right)^{-k}u=\left(\frac{x}{a}\right)^{-2k}+1.$$

Отсюда получаем, что

$$u=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{-k}-\left(\frac{x}{a}\right)^{k}\right].$$

Возвращаясь, согласно соотношению (8), к прежней переменной, имеем:

$$y=\frac{x}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{-k}-\left(\frac{x}{a}\right)^{k}\right]=\frac{a}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{1-k}-\left(\frac{x}{a}\right)^{1+k}\right].$$

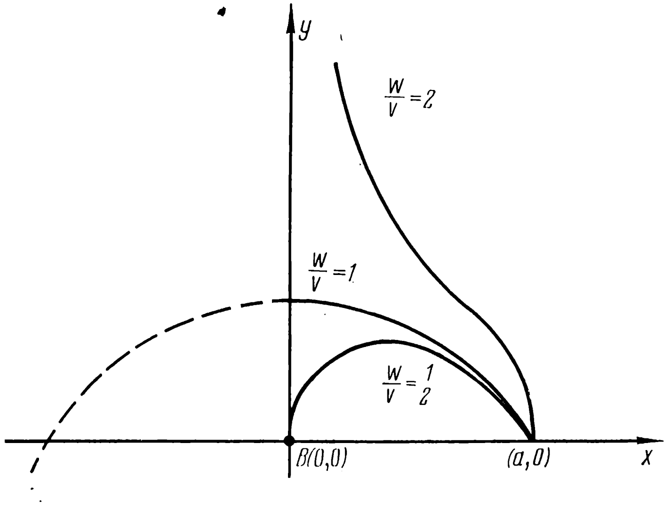

Рис. 49

Подставляя $k=\frac{w}{v}$, окончательно получаем уравнение траектории

$$y=\frac{a}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{1-\frac{w}{v}}-\left(\frac{x}{a}\right)^{1+\frac{w}{v}}\right]. \tag{9}$$

Исследуем зависимость решения от параметров.

Случай 1. Скорость ветра w равна скорости самолета v. В этом случае решение (9) принимает вид

$$y=\frac{a}{2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),$$

откуда

$$x^2=-2a\left(y-\frac{a}{2}\right),$$

т. е. уравнение траектории представляет параболу (рис. 49). Самолет никогда не достигнет места назначения.

Случай 2. Скорость ветра w больше скорости самолета v. В этом случае $\frac{w}{v} > 1$, так что $1 - \frac{w}{v} < 0$. Поэтому при $x \to 0$ величина

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{1-\frac{w}{v}} = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{w}{v}-1} \to \infty.$$

Следовательно, согласно равенству (9), при $x \to 0$ $y \to \infty$. Опять самолет никогда не достигнет места назначения. Траектория показана на рис. 49 при $w = 2v$.

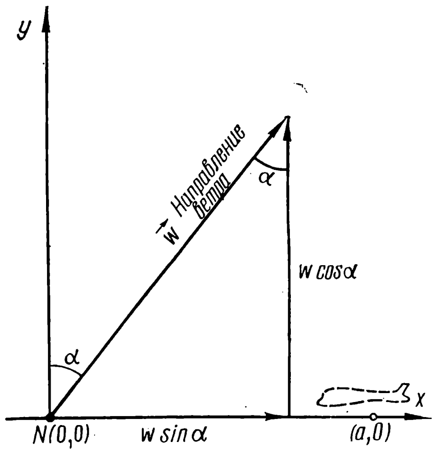

Рис. 50

Случай 3. Скорость ветра w меньше скорости самолета v. В этом случае $\frac{w}{v} < 1$, так что $1 - \frac{w}{v} > 0$. Из уравнения (9) очевидно, что при $x = 0$ $y = 0$. Поэтому самолет достигнет города B. Приблизительная траектория приводится на рис. 49 при $\frac{w}{v} = \frac{1}{2}$.

Задача 86. Летчик ведет самолет, передняя часть которого направлена к городу N, расположенному на одной параллели западнее взлетной площадки на расстоянии a *км*. Найти уравнение траектории полета, если ветер дует со скоростью w в направлении, образующем угол α с вертикалью (рис. 50).

Решение. Как видно из рис. 51, равнодействующая действительных скоростей ветра и самолета в направлениях x и y примет вид

$$\frac{dx}{dt}=-v\cos\varphi+w\sin\alpha,\quad \frac{dy}{dt}=-v\sin\varphi+w\cos\alpha. \tag{1}$$

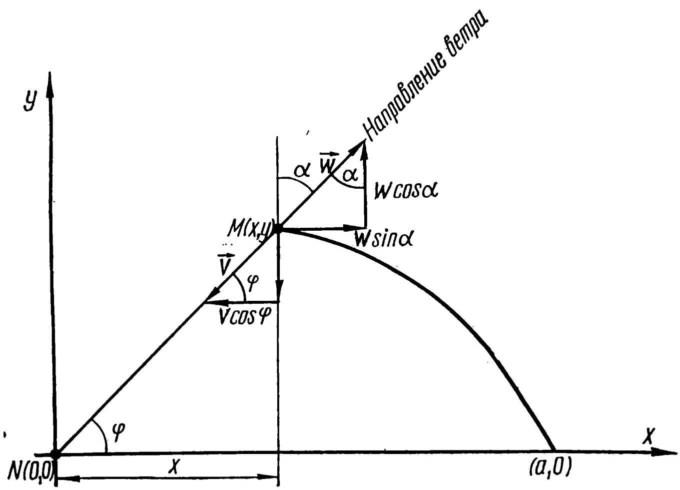

Рис. 51

Разделим второе уравнение (1) на первое, в результате чего получим

$$\frac{dy}{dt}=\frac{-v\sin\varphi+w\cos\alpha}{-v\cos\varphi+w\sin\alpha}. \tag{2}$$

В уравнении (2) выполняем замены:

$$\sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{и} \quad \cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

В итоге получаем однородное уравнение

$$\left(\frac{-vy}{\sqrt{x^2+y^2}}+w\cos\alpha\right)dx=\left(-\frac{vx}{\sqrt{x^2+y^2}}+w\sin\alpha\right)dy, \tag{3}$$

в котором величины v, $w\cos\alpha$ и $w\sin\alpha$ постоянны. Уравнение (3) преобразуем при помощи подстановки $y=ux$, $dy=udx+xdu$, откуда

$$\left(-\frac{vu}{\sqrt{1+u^2}}+w\cos\alpha\right)dx=\left(-\frac{vu}{\sqrt{1+u^2}}+w\sin\alpha\right)(udx+xdu).$$

Выполняя умножение, последующее сокращение и приведение подобных членов, имеем

$$w(\cos\alpha-\sin\alpha)\,dx=x\left(w\sin\alpha-\frac{v}{\sqrt{1+u^2}}\right)du,$$

откуда после деления равенства на x получаем

$$w(\cos\alpha-\sin\alpha)\frac{dx}{x}=\left(w\sin\alpha-\frac{v}{\sqrt{1+u^2}}\right)du. \qquad (4)$$

Интегрируя уравнение (4) и вместо u подставляя $\frac{y}{x}$, приходим к равенству

$$w(\cos\alpha-\sin\alpha)\ln x=w\sin\alpha\frac{y}{x}+v\ln\left(\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\right)+C_1,$$

которое элементарными преобразованиями приводится к виду

$$\ln\frac{x^{w(\cos\alpha-\sin\alpha)-1}}{y+\sqrt{x^2+y^2}}=w\sin\alpha\frac{y}{x}+C_1.$$

После потенцирования общий интеграл уравнения примет вид

$$x^{w(\cos\alpha-\sin\alpha)-1}=C\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)e^{w\sin\alpha\frac{y}{x}}. \qquad (5)$$

Начальное условие: при $x=a$ $y=0$. Отсюда

$$x^{w(\cos\alpha-\sin\alpha)-1}=Ca$$

или

$$C=\frac{1}{a}x^{w(\cos\alpha-\sin\alpha)-1}.$$

Подставляя найденное значение C в уравнение (5), после сокращения на $x^{w(\cos\alpha-\sin\alpha)-1}$ получаем искомое уравнение траектории полета

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=ae^{-w\sin\alpha\frac{y}{x}}.$$

Глава VI

ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

Дифференциальное уравнение

$$M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy=0, \tag{1}$$

где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — функции x и y, будет уравнением в полных дифференциалах, если существует такая функция $F(x, y)$, что

$$M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy\equiv dF(x, y). \tag{2}$$

Условие

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

является необходимым и достаточным, для того чтобы уравнение (1) было уравнением в полных дифференциалах.

Общий интеграл уравнения (2)

$$F(x, y)=C.$$

Функция $F(x, y)$ может быть найдена двумя способами:

1) по формуле

$$F(x, y)=\int\limits_{x_0}^{x} M(\xi, y_0)\,d\xi+\int\limits_{y_0}^{y} N(x_0, \eta)\,d\eta,$$

где x_0 и y_0 произвольны. Они выбираются так, чтобы M и N оставались конечными при $x=a$ и $y=b$. Обычно a и b берутся равными 0 или 1;

2) по формуле

$$\int M(x, y)\,dx+\int N(x, y)\,dy=C.$$

Иначе, общее решение может быть найдено по формулам

$$\int M(x, y)\,dx+\int\left[N(x, y)-\int\frac{\partial M(x, y)}{\partial y}\,dx\right]dy=C_1$$

или

$$\int N(x, y)\,dy+\int\left[M(x, y)-\int\frac{\partial N(x, y)}{\partial x}\,dy\right]dx=C_2.$$

Если левая часть уравнения (1) не является полным дифференциалом какой-то функции $F(x, y)$, можно подобрать интегрирующий множитель μ, который обратит уравнение (1) в уравнение в полных дифференциалах

$$\mu M(x, y)dx+\mu N(x, y)dy=0$$

и тогда

$$\frac{\partial \mu M(x, y)}{\partial y}=\frac{\partial \mu N(x, y)}{\partial x}.$$

Интегрирующий множитель $\mu=\mu\,(x, y)$ удовлетворяет уравнению:

$$N(x, y)\frac{\partial \ln \mu}{\partial x}-M(x, y)\frac{\partial \ln \mu}{\partial y}=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x},$$

причем любое частное решение этого уравнения является интегрирующим множителем.

Отыскание μ не всегда практически выполнимо.

Рассмотрим случаи простого определения интегрирующего множителя.

Случай 1. Функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ однородные одного измерения:

$$\mu=\mu\,(x, y)=\frac{1}{M(x, y)x+N(x, y)y}.$$

Случай 2. а) Отношение

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x}=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N(x, y)}=\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — функция только от x. Тогда

$$\mu=e^{\int \varphi(x)dx};$$

б) если

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial x}-\dfrac{\partial N}{\partial y}}{M(x, y)}=\psi(y),$$

где $\psi(y)$ — функция только одного y, то

$$\mu=e^{\int \psi(y)dy}.$$

Случай 3. Если

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=N(x, y)\varphi(x)-M(x, y)\psi(y),$$

то интегрирующий множитель

$$\mu=e^{\int \varphi(y)dx+\int \psi(x)dy}.$$

§ 1. ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ ЗЕРКАЛО

Задача 87. Источник света помещен в точке O. Какова должна быть форма зеркала, чтобы отраженные от него лучи были параллельны оси Ox?

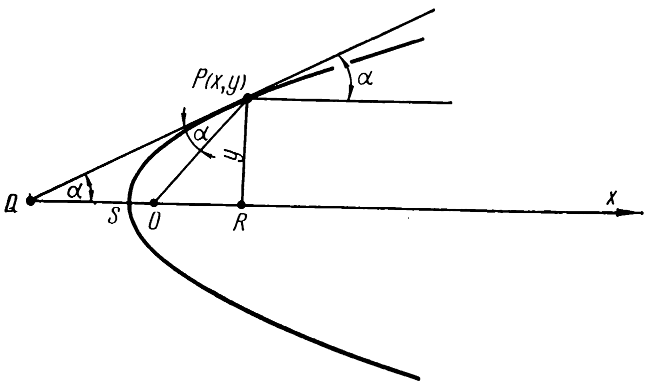

Рис. 52

Решение. Рассмотрим кривую сечения поверхности зеркала плоскостью xOy и на этой кривой произвольную точку $P(x, y)$ (рис. 52). Угол падения луча равен углу отражения и поэтому $\angle OQP=\alpha$.

Так как $\angle OQP=\alpha$, то $\triangle OPQ$ — равнобедренный. Таким образом, $|\overline{OQ}|=|\overline{OP}|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Считая $y>0$, получаем

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\alpha=\frac{|\overline{PR}|}{|\overline{QR}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}.$$

Умножая числитель и знаменатель дроби на выражение $\sqrt{x^2+y^2}-x$, имеем

$$y'=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y},$$

откуда

$$\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}=1$$

или

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=1.$$

Проинтегрировав последнее равенство, получаем

$$\sqrt{x^2+y^2}=x+C$$

или

$$y^2=2Cx+C^2=2C\left(x+\frac{C}{2}\right). \qquad (1)$$

По условию кривая должна быть симметричной относительно оси Ox, т. е. уравнение (1) будет выполняться и при $y<0$. Равенство (1) показывает, что искомая кривая есть парабола с осью симметрии Ox.

Пусть дано расстояние от источника света O до центра зеркала S: $|\overline{OS}|=a$. Тем самым получаем начальное условие:

$$\text{при } x=-a \quad y=0. \qquad (2)$$

Подставляя эти значения в уравнение (1), имеем

$$0=2C\left(-a+\frac{C}{2}\right),$$

откуда

$$C=2a.$$

Значение $C=0$ не подходит по физическому смыслу задачи. Таким образом, искомая парабола:

$$y^2=4a(x+a).$$

Для этой параболы $p=2a$ и, следовательно, фокусное расстояние $\frac{p}{2}=a$, т. е. источник света O находится в фокусе. Плоскость xOy, в которой лежит парабола $y^2=4a(x+a)$, проходит через ось Ox. Уравнение параболы не изменится, если эту плоскость вращать вокруг оси Ox. Это значит, что поверхностью зеркала будет служить параболоид вращения. Этот параболоид в сечении с любой плоскостью, проходящей через ось Ox, будет давать параболу, уравнение которой найдено выше. (Ср. с задачей 84.)

§ 2. КОНЦЕНТРАЦИЯ ВЕЩЕСТВА В ЖИДКОСТИ

Задача 88. Установить закон изменения концентрации глюкозы в крови по времени при постоянном внутривенном введении в количестве, колеблющемся от 155 до 630 *мг/мин*, если известно, что оно продолжалось 60 *мин*, в течение которых брались пробы крови через равные интервалы времени.

Решение. Если количество глюкозы в крови q, а ее концентрация $\frac{q}{V}=\xi$, где V — объем распространения в крови, то вводимая глюкоза определяется в количестве, пропорциональном ее наличному содержанию в крови. С другой стороны, концентрация глюкозы повышается в результате постоянного ее введения.

В итоге этих двух взаимосвязанных процессов находим, что изменение концентрации глюкозы в крови по времени

$$\frac{d\xi}{dt}=\frac{\rho}{V}-k\xi, \tag{1}$$

где k — постоянная скорость вливания, ρ — количество вводимой глюкозы, *мг/мин*.

Если глюкоза не прибавляется, $\rho=0$, уравнение (1) сводится к равенству

$$\frac{d\xi}{dt}=-k\xi,$$

тогда как при отсутствии вливания $k=0$ и уравнение (1) примет вид

$$\frac{d\xi}{dt}=\frac{\rho}{V}.$$

Представляя уравнение (1) в виде

$$\frac{d\xi}{dt}+k\xi=\frac{\rho}{V}, \tag{2}$$

замечаем, что оно имеет интегрирующий множитель $e^{\int k\,dt}=e^{kt}$, так что, умножая на него обе стороны равенства (2), имеем

$$e^{kt}\frac{d\xi}{dt}+ke^{kt}\xi=\frac{\rho}{V}e^{kt},$$

и так как в левой части равенства полный дифференциал ξe^{kt}, то дифференциальное уравнение процесса

$$\frac{d}{dt}(\xi e^{kt})=\frac{\rho}{V}e^{kt},$$

откуда

$$\int d(\xi e^{kt}) = \frac{\rho}{V}\int e^{kt}\,dt.$$

Интегрируя последнее равенство, находим

$$\xi e^{kt} = \frac{\rho}{kV}e^{kt} + C,$$

где C — постоянная интегрирования.

Начальное условие: при $t=0$ $\xi=0$, поэтому

$$0 = \frac{\rho}{kV} + C,$$

откуда

$$C = -\frac{\rho}{kV}.$$

Следовательно,

$$\xi e^{kt} = \frac{\rho}{kV}e^{kt} - \frac{\rho}{kV}$$

или после деления на e^{kt}:

$$\xi = \frac{\rho}{kV}(1 - e^{-kt}). \qquad (3)$$

Концентрация глюкозы в крови при $t=0$ не равна нулю, но формула (3) остается правильной, если C представляет концентрацию глюкозы, превышающую в момент введения первоначальное значение.

Экспериментальными наблюдениями установлено, что

$$\xi = 53{,}8(1 - e^{-0{,}0519t}). \qquad (4)$$

Сопоставляя уравнения (3) и (4), находим:

$$k = 0{,}0519, \quad \frac{\rho}{kV} = 53{,}8.$$

Количество вводимой глюкозы $\rho = 297$ *мг/мин*, так что объем распространения глюкозы $V = 10{,}6$ *л*.

Глава VII

ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ЛИНЕЙНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Дифференциальное уравнение

$$M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy=0,$$

разрешенное относительно производной y' и принявшее вид

$$y'+P(x)\,y=Q(x), \tag{1}$$

называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка. При отсутствии члена $Q(x)$, т. е. при $Q(x)\equiv 0$, уравнение (1) называется однородным.

Искомая функция y и ее производная входят в уравнение линейно, т. е. в первой степени. В частном случае переменные величины $P(x)$ и $Q(x)$ или одна из них могут быть постоянными. Тогда уравнение (1) в первом предположении примет вид

$$y'+Py=Q.$$

Общий интеграл уравнения (1) находится:

1) подстановкой Бернулли $y=uz$, и, следовательно,

$$dy=udz+zdu,$$

где u и z — неизвестные функции x, которые определяются из двух условий

$$\left.\begin{aligned} &\frac{du}{dx}+P(x)\,u=0,\\ &u\,\frac{dz}{dx}=Q(x); \end{aligned}\right\}$$

2) при помощи интегрирующего множителя $\mu=e^{\int P(x)dx}$ — путем приведения к полному дифференциалу

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)\,e^{\int P(x)dx}\,dx+C\right];$$

3) если известно какое-либо частное решение $y_1(x)$ линейного уравнения, по формуле

$$y=y_1(x)+Ce^{-\int P(x)dx};$$

4) если известны два линейно независимых частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ (т. е. решения, линейная комбинация которых C_1y_1+ $+C_2y_2$ ни при каких значениях C_1 и C_2, кроме $C_1=C_2=0$, не обращается тождественно для всех значений x на данном интервале в нуль), по формуле

$$y=y_1+C(y_2-y_1).$$

§ 1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Задача 89. Найти кривую, проходящую через точку (1, 1), у которой отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат, равен абсциссе точки касания.

Решение. Наклон кривой в какой-либо точке определяется угловым коэффициентом k касательной в этой точке и, следовательно, производной $k=\operatorname{tg}\alpha=\frac{dy}{dx}$. Поэтому уравнение касательной

$$y-y_0=\frac{dy}{dx}(x-x_0). \qquad (1)$$

Точка пересечения касательной с осью ординат имеет координаты, удовлетворяющие системе

$$\left.\begin{aligned} y-y_0&=\frac{dy}{dx}(x-x_0),\\ x_0&=0. \end{aligned}\right\}$$

Координаты точки касания $x_0=0$, $y_0=y-x\frac{dy}{dx}$. Отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат, равный y_0, будет $y-x\frac{dy}{dx}$. По условию этот отрезок равен абсциссе x точки касания. Отсюда дифференциальное уравнение искомого семейства

$$y-x\frac{dy}{dx}=x. \qquad (2)$$

Уравнение (2) является линейным уравнением, которое после преобразования принимает вид

$$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=-1. \qquad (3)$$

Применяем подстановку Бернулли

$$y=uz, \quad dy=udz+zdu.$$

Тогда уравнение (3) приводится к виду

$$u\frac{dz}{dx}+z\left(\frac{du}{dx}-\frac{u}{x}\right)=-1.$$

Неизвестные функции u и z определяются из условий:

а) $\frac{du}{dx}-\frac{u}{x}=0$ или после интегрирования $u=x$;

б) $x\frac{dz}{dx}=-1$ или после интегрирования $z=\ln\frac{C}{x}$.

Искомое общее решение уравнения (2) принимает теперь вид

$$y=uz=x\ln\frac{C}{x}.$$

Начальное условие: точка (1, 1) лежит на кривой, отсюда

$$1=1\ln\frac{C}{1}$$

или

$$C=e.$$

Уравнение кривой будет

$$y=x\ln\frac{e}{x}=x(\ln e-\ln x)=x(1-\ln x)=x-x\ln x.$$

Задача 90. В точке с ординатой 2 кривая наклонена к оси Oy под углом 45°. Касательная отсекает на оси абсцисс отрезок, равный квадрату ординаты точки касания. Найти уравнение этой кривой.

Решение. Отрезок, отсекаемый касательной на оси абсцисс, равен $x-y\frac{dx}{dy}$. По условию задачи

$$x-y\frac{dx}{dy}=y^2$$

или дифференциальное уравнение искомого семейства

$$\frac{dx}{dy}-\frac{1}{y}x=-y. \tag{1}$$

Уравнение (1) является линейным относительно x, общий интеграл его

$$x+y^2-Cy=0. \tag{2}$$

Дополнительное условие: при $y=2$ $\frac{dx}{dy}=\operatorname{tg} 45^\circ=1.$

Дифференцируя почленно уравнение (2) по y, имеем

$$\frac{dx}{dy}=C-2y$$

и частное значение этой производной при $y=2$

$$\left.\frac{dx}{dy}\right|_{y=2}=C-2\cdot 2=C-4,$$

откуда

$$C-4=1$$

или

$$C=5.$$

Уравнение искомой кривой

$$x+y^2-5y=0.$$

Задача 91. Площадь треугольника, образованного радиус-вектором любой точки кривой, касательной в этой точке и осью абсцисс, равна 2. Найти уравнение кривой, если она проходит через точку $(2, -2)$.

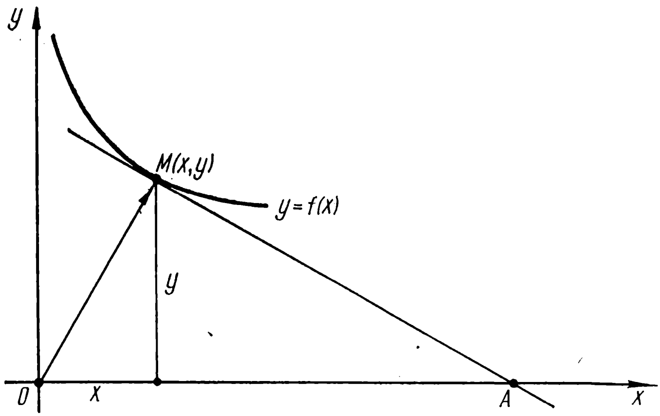

Рис. 53

Решение. Основанием треугольника OMA является отрезок OA (рис. 53), отсекаемый касательной на оси Ox. Аналогично задаче 89 для отрезка, отсекаемого на оси Ox касательной, найдем выражение $x-y\frac{dx}{dy}$.

Высотой треугольника будет ордината y. Площадь треугольника

$$\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot y=\frac{1}{2}y\left(x-y\frac{dx}{dy}\right).$$

По условию задачи

$$\frac{1}{2}y\left(x-y\frac{dx}{dy}\right)=2,$$

откуда дифференциальное уравнение искомого семейства

$$\frac{dx}{dy}-\frac{1}{y}x=-\frac{4}{y^2}. \qquad (1)$$

Уравнение (1) является линейным относительно x, а его общее решение

$$x=Cy+\frac{2}{y}.$$

Дополнительное условие: кривая проходит через точку $(2, -2)$, откуда

$$2=C(-2)+\frac{2}{-2}$$

и

$$C=-\frac{3}{2}.$$

Уравнение искомой кривой

$$3y^2+2xy-4=0.$$

§ 2. ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Закон движения — алгебраический многочлен

Задача 92. В любой момент t скорость v точки превышает среднюю скорость за время t с начала движения на величину t^2. Найти закон движения, если при $t=0$ $s=s_0$, $v=0$.

Решение. Скорость в момент t будет $v=\frac{ds}{dt}$. Средняя скорость за время t с начала движения $v_{ср}=\frac{s-s_0}{t}$. По условию задачи $v-v_{ср}=t^2$. Отсюда дифференциальное уравнение движения

$$\frac{ds}{dt}-\frac{s-s_0}{t}=t^2$$

или

$$\frac{ds}{dt}-\frac{1}{t}s=t^2-\frac{s_0}{t}, \qquad (1)$$

т. е. это линейное уравнение.

Общее решение уравнения (1)

$$s=s_0+\frac{1}{2}t^3+Ct. \qquad (2)$$

Начальное условие: при $t=0$ $v=\frac{ds}{dt}=0$. Дифференцируя общее решение (2), получаем зависимость

$$\frac{ds}{dt}=\frac{3}{2}t^2+C,$$

откуда

$$0=\frac{3}{2}\cdot 0^2+C$$

или

$$C=0. \qquad (3)$$

Подставляя значение (3) в общее решение (2), получим искомый закон движения

$$s=s_0+\frac{1}{2}t^3.$$

Периодический закон движения

Задача 93. Скорость v, путь s и время t связаны уравнением $v\cos t+s\sin t=1$. Найти закон движения, если при $t=0$ $s=2$.

Решение. Так как $v=\frac{ds}{dt}$, то, подставляя это значение v в данное уравнение, получаем дифференциальное уравнение движения

$$\frac{ds}{dt}\cos t+s\sin t=1.$$

Решая это линейное уравнение, получаем

$$s=\sin t+C\cos t.$$

Начальное условие: при $t=0$ $s=2$, откуда

$$2=\sin 0+C\cos 0$$

или

$$C=2. \qquad (1)$$

Подставляя выражение (1) в общее решение, получаем искомый закон движения

$$s=\sin t+2\cos t.$$

Падение тела переменной массы

Задача 94. Капля с начальной массой M *г*, свободно падая в воздухе, равномерно испаряется и ежесекундно теряет m *г*. Сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости движения капли. Найти зависимость скорости движения капли от времени, прошедшего с начала падения капли, если в начальный момент времени скорость капли равна нулю. Принять, что коэффициент пропорциональности $k \neq m$.

Решение. Ввиду равномерного испарения капли ее масса в момент t равна $M-mt$, а сила тяжести капли — $(M-mt)g$, где g — ускорение силы тяжести. Силу тяжести считаем положительной, т. е. направленной вниз.

По условию сила сопротивления воздуха $F_1=-kv$ (знак минус, так как она направлена вверх). Равнодействующая всех сил, приложенных к капле,

$$F=(M-mt)g-kv,$$

а так как по второму закону Ньютона

$$F=(M-mt)\frac{dv}{dt},$$

то дифференциальное уравнение задачи

$$(M-mt)\frac{dv}{dt}=(M-mt)g-kv$$

или

$$\frac{dv}{dt}+\frac{k}{M-mt}v-g=0.$$

Решая это линейное уравнение подстановкой $v=uw$, находим

$$w=(M-mt)^{\frac{k}{m}}$$

и

$$u=\int g(M-mt)^{-\frac{k}{m}}dt=\frac{\frac{g}{m}(M-mt)^{-\frac{k}{m}+1}}{\frac{k}{m}-1}+C.$$

Отсюда

$$v=uw=\frac{g(M-mt)}{k-m}+C(M-mt)^{\frac{k}{m}}. \qquad (1)$$

Начальное условие: при $t=0$ $v=0$. Следовательно,

$$0=\frac{gM}{k-m}+CM^{\frac{k}{m}},$$

откуда

$$C=\frac{gMM^{-\frac{k}{m}}}{m-k}=\frac{gM^{1-\frac{k}{m}}}{m-k}.$$

Найденную постоянную интегрирования подставляем в равенство (1), и тогда скорость движения капли

$$v=\frac{g}{m-k}\left[-M+mt+\left(1-\frac{m}{M}t\right)^{\frac{k}{m}}M\right].$$

§ 3. ТЕМПЕРАТУРА ОХЛАЖДАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА

Задача 95. Найти закон изменения температуры T охлаждающегося тела массы m и теплоемкости c. Температура окружающей среды t, причем $T>t$. Когда температура окружающей среды $t=0$, температура тела равна T_1.

Решение. По закону Ньютона бесконечно малое количество теплоты dQ, отданное телом в течение бесконечно малого промежутка времени dt, пропорционально разности температур тела и окружающей среды:

$$dQ=-k(T-t)\,dt,$$

где k — коэффициент пропорциональности. Знак минус указывает, что потеря теплоты dQ — величина отрицательная.

С другой стороны,

$$Q=mc(T-t), \qquad (1)$$

где m — масса тела, c — его теплоемкость.

Предполагая, что теплоемкость есть величина, не зависящая от температуры, после дифференцирования уравнения (1) находим

$$dQ=mc\,dT.$$

Следовательно,

$$mc\,dT=-k(T-t)\,dt.$$

Разделяя переменные и интегрируя полученное уравнение, имеем:

$$T=t+Ce^{-\frac{kt}{mc}}. \qquad (2)$$

Начальное условие: при $t=0$ температура $T=T_1$. Отсюда

$$T_1=t+Ce^{-\frac{k}{mc}\cdot 0}$$

или

$$C=T_1-t. \qquad (3)$$

Подставляя найденное значение постоянной интегрирования (3) в общее решение (2), получаем искомый закон

$$T=t+(T_1-t)e^{-\frac{kt}{mc}}.$$

§ 4. НАГРЕВ ТЕЛА ПРИ СТАЦИОНАРНОМ ТЕПЛОПОТОКЕ

Задача 96. Найти закон нагрева теплообменника при постоянном притоке теплоты.

Решение. Пусть: dT — изменение температуры отопительного аппарата в течение времени dt; G — вес аппарата; c — специфическая теплота материала аппарата; λ — коэффициент теплопереноса поверхностью аппарата (на единицу площади для повышения температуры на 1° С); Q — количество поступающей теплоты в единицу времени; S — поверхность теплопередачи аппарата; T_1 — наружная температура; $T-T_1$ — превышение наружной температуры теплообменника.

В течение времени dt происходят следующие процессы:

а) в теплообменник поступает количество теплоты, равное Qdt;

б) в аппарате накапливается количество теплоты, равное $GcdT$;

в) отдается в окружающую среду количество теплоты, равное $S(T-T_1)\lambda dt$.

Суммируя эти количества, получаем уравнение теплового баланса

$$GcdT+S(T-T_1)\lambda dt=Qdt$$

или

$$\frac{dT}{dt}+\frac{S\lambda}{Gc}(T-T_1)=\frac{Q}{Gc}.$$

Полагая $a=\frac{S\lambda}{Gc}$ и $b=\frac{Q}{Gc}$, дифференциальное уравнение процесса запишем в виде:

$$\frac{dT}{dt}+a(T-T_1)=b.$$

Разделяем переменные

$$\frac{dT}{b-a(T-T_1)}=dt. \qquad (1)$$

Для облегчения интегрирования преобразуем левую часть уравнения (1) так, чтобы в числителе получить дифференциал знаменателя:

$$-\frac{1}{a}\cdot\frac{d[b-a(T-T_1)]}{b-a(T-T_1)}=dt.$$

Умножаем это уравнение на $(-a)$ и тогда

$$\frac{d[b-a(T-T_1)]}{b-a(T-T_1)}=-adt. \qquad (2)$$

Интегрируя равенство (2), получаем

$$\ln[b-a(T-T_1)]=-at+C_1$$

и после потенцирования

$$b-a(T-T_1)=e^{C_1}e^{-at}=Ce^{-at},$$

откуда

$$T-T_1=\frac{b}{a}+\frac{C}{a}e^{-at}=\frac{b}{a}+C^*e^{-at}.$$

Начальное условие: при $t=0$ $T=T_1$. Отсюда

$$C^*=-\frac{b}{a}.$$

Тогда уравнение процесса принимает вид

$$T-T_1=\frac{b}{a}(1-e^{-at}) \qquad (3)$$

или, подставляя значения a и b, имеем:

$$T-T_1=\frac{Q}{S\lambda}\left(1-e^{-\frac{S\lambda}{Gc}t}\right).$$

При $T_1=0$ из уравнения (3) получим

$$T=\frac{b}{a}(1-e^{-at}). \qquad (4)$$

Исследуем этот закон. При $t \to \infty$ получаем

$$T = \frac{b}{a} = T_к,$$

где $T_к$ — конечная температура теплообменника.

Уравнение (4) может быть записано в виде

$$T = T_к(1 - e^{-at}). \qquad (5)$$

Подставляя теперь в уравнение (5) значение $t = \frac{1}{a} = \tau$, получаем

$$T = T_к\left(1 - \frac{1}{e}\right) = 0{,}63T_к.$$

Время $\tau = \frac{1}{a}$ называется постоянной времени.

§ 5. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Составление уравнений для токов в электрических цепях основывается на законах Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа. Алгебраическая сумма всех токов, притекающих к любой точке цепи, равна нулю (рис. 54).

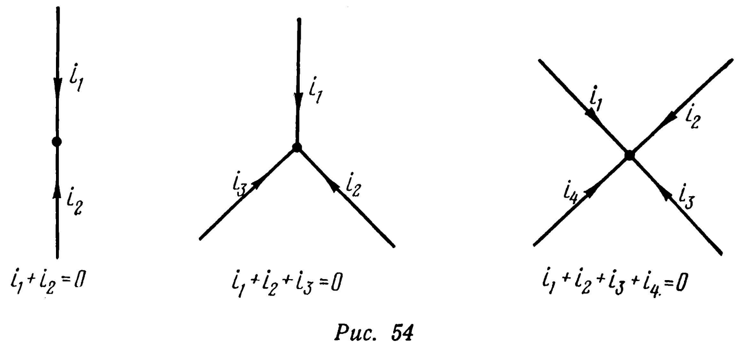

Рис. 54

Второй закон Кирхгофа. Для каждого замкнутого контура цепи алгебраическая сумма падений напряжения в отдельных ветвях контура равна нулю (рис. 55).

При составлении дифференциальных уравнений электрических цепей следует учитывать, что падения напряжения на самоиндукции, сопротивлении и емкости выражаются соответственно $L\frac{di}{dt}$, Ri, $\frac{Q}{C}$, а заряд конденсатора

$$Q(t) = \int_0^t i(t)\,dt + Q(0).$$

Параметры R, C, L предполагаются постоянными, кроме особо оговоренных случаев. Здесь U — падение напряжения на каком-либо определенном участке контура.

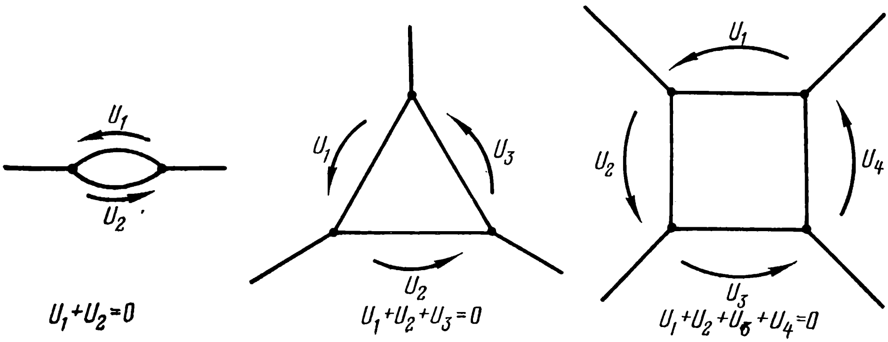

Рис. 55

Цепь «сопротивление — самоиндукция»

а) Постоянная электродвижущая сила

Задача 97. При размыкании цепи (в момент появления искры) сопротивление цепи R быстро возрастает от первоначальной величины R_0 до бесконечности. На основании опыта допускают, что зависимость R от t в этом процессе выражается

$$R = R_0 \frac{\tau}{\tau - t},$$

где τ — время всего процесса размыкания. Найти силу тока i в любой момент в цепи при постоянной электродвижущей силе E и самоиндукции L.

Решение. Так как в цепи действуют электродвижущая сила источника E и электродвижущая сила самоиндукции $-L\frac{di}{dt}$, то результирующая электродвижущая сила

$$V = E - L\frac{di}{dt}.$$

По закону Ома

$$iR=V$$

или

$$iR=E-L\frac{di}{dt}.$$

В процессе размыкания цепи $R=R_0\frac{\tau}{\tau-t}$. Отсюда получаем дифференциальное уравнение процесса

$$\frac{di}{dt}+\frac{R_0\tau}{L(\tau-t)}i=\frac{E}{L}, \tag{1}$$

которое является линейным.

Общее решение уравнения (1)

$$i=\frac{E}{L}(\tau-t)^{\frac{R_0\tau}{L}}\left[\int(\tau-t)^{-\frac{R_0\tau}{L}}dt+C\right].$$

Возможны два случая: $\frac{R_0\tau}{L}\neq 1$ и $\frac{R_0\tau}{L}=1$.

В первом случае после раскрытия интеграла в квадратных скобках общее решение будет

$$i=\frac{E(\tau-t)}{R_0\tau-L}+\frac{CE}{L}(\tau-t)^{\frac{R_0\tau}{L}}. \tag{2}$$

Во втором случае общее решение примет вид

$$i=\frac{E}{L}(\tau-t)[C-\ln(\tau-t)]. \tag{3}$$

Начальное условие: в момент начала размыкания при $t=0$ сила тока $i=i_0=\frac{E}{R_0}$. Тогда в первом случае

$$\frac{E}{R_0}=\frac{E(\tau-0)}{R_0\tau-L}+\frac{CE}{L}(\tau-0)^{\frac{R_0\tau}{L}},$$

откуда

$$\frac{CE}{L}=-\frac{EL}{R_0(R_0\tau-L)}\tau^{-\frac{R_0\tau}{L}}. \tag{4}$$

Выражение (4) подставляем в общее решение (2) и получаем

$$i=\frac{E}{R_0(R_0\tau-L)}\left[R_0(\tau-t)-L\left(1-\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{R_0\tau}{L}}\right].$$

Аналогично во втором случае

$$\frac{E}{R_0}=\frac{E}{L}(\tau-0)\left[C-\ln(\tau-0)\right],$$

откуда

$$C=\frac{L}{R_0\tau}+\ln\tau$$

или, так как $\frac{R_0\tau}{L}=1$, то

$$C=1+\ln\tau. \qquad (5)$$

Подставляя выражение (5) в общее решение (3), имеем

$$i=\frac{E}{L}(\tau-t)\left[1+\ln\frac{\tau}{\tau-t}\right].$$

Задача 98. В цепи поддерживается напряжение $E=300$ *в*. Сопротивление цепи $R=150$ *ом*. Коэффициент самоиндукции $L=30$ *гн*. За какое время с момента замыкания цепи возникающий в ней ток i достигнет 99% своей предельной величины?

Решение. Электродвижущая сила самоиндукции пропорциональна скорости нарастания силы тока. Коэффициентом пропорциональности служит коэффициент L самоиндукции цепи.

В процессе замыкания цепи в ней действуют две прямо противоположные электродвижущие силы: напряжение цепи E и электродвижущая сила самоиндукции $E_1=-L\frac{di}{dt}$.

Алгебраическая сумма этих электродвижущих сил

$$V=E-L\frac{di}{dt}.$$

По закону Ома сила тока в цепи

$$i=\frac{V}{R}$$

или

$$i=\frac{E-L\frac{di}{dt}}{R}. \qquad (1)$$

Преобразуем последнее равенство

$$Ri=E-L\frac{di}{dt}$$

или

$$Ridt=Edt-Ldi,$$

откуда

$$Ldi=(E-Ri)dt$$

и

$$dt=\frac{Ldi}{E-Ri}. \qquad (2)$$

Интегрируя равенство (2), имеем:

$$t=L\int\frac{di}{E-Ri}=-\frac{L}{R}\int\frac{d(E-Ri)}{E-Ri}$$

или

$$t=-\frac{L}{R}\ln(E-Ri)+C.$$

Начальное условие: при $t=0$ $i=0$, следовательно,

$$0=-\frac{L}{R}\ln(E-R\cdot 0)+C,$$

откуда

$$C=\frac{L}{R}\ln E.$$

Таким образом, закон процесса:

$$t=\frac{L}{R}\ln\frac{E}{E-Ri}.$$

Так как предельным значением i будет $I=\frac{E}{R}$, то по условию $i=0{,}99\frac{E}{R}$, и поэтому искомое время

$$t=\frac{L}{R}\ln\frac{E}{E-0{,}99E}=\frac{L}{R}\ln 100. \qquad (3)$$

Подставляя в равенство (3) числовые значения L и R, окончательно получим

$$t=\frac{30}{150}\ln 100\approx 0{,}92 \textit{ сек.}$$

б) *Периодическая электродвижущая сила*

Задача 99. В цепи с сопротивлением R и самоиндукцией L действует периодическая электродвижущая сила

$$E_1 = a \sin \frac{2\pi}{T} t,$$

где T — период, t — время, a — постоянное число, равное, очевидно, максимальному значению величины E_1. Определить силу тока i в цепи в любой момент времени, если в начальный момент при $t=0$ сила тока равна нулю.

Решение. В цепи действуют две силы: электродвижущая сила

$$E_1 = a \sin \frac{2\pi}{T} t$$

и противоположная ей электродвижущая сила самоиндукции

$$E_2 = -L \frac{di}{dt}.$$

Общая электродвижущая сила

$$E = E_1 + E_2 = a \sin \frac{2\pi}{T} t - L \frac{di}{dt}.$$

По закону Ома сила тока в цепи

$$i = \frac{E}{R}.$$

Таким образом,

$$i = \frac{a \sin \frac{2\pi}{T} t - L \frac{di}{dt}}{R}.$$

Обозначая для краткости $\frac{2\pi}{T} = k$, запишем дифференциальное уравнение процесса

$$L \frac{di}{dt} + Ri = a \sin kt. \qquad (1)$$

Уравнение (1) является неоднородным линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Решаем соответствующее однородное уравнение

$$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=0 \quad \text{или} \quad \frac{di}{i}=-\frac{R}{L}dt.$$

Интегрируя, найдем

$$\int\frac{di}{i}=-\frac{R}{L}\int dt,$$

откуда

$$\ln i=-\frac{R}{L}t+\ln C.$$

Потенцируя обе части равенства, получим

$$i=Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Частное решение неоднородного уравнения (1) ищем в виде

$$i_{\text{частн}}=A\sin kt+B\cos kt. \tag{2}$$

Коэффициенты A и B подлежат определению. Дифференцируем равенство (2), считая A и B постоянными:

$$\frac{di_{\text{частн}}}{dt}=Ak\cos kt-Bk\sin kt. \tag{3}$$

Подставляя значения (3) и (2) в уравнение (1), после очевидных алгебраических преобразований имеем:

$$\left(A\frac{R}{L}-Bk\right)\sin kt+\left(Ak+B\frac{R}{L}\right)\cos kt=\frac{a}{L}\sin kt.$$

Приравнивая коэффициенты обеих частей этого тождества, получаем систему

$$\left.\begin{aligned} &A\frac{R}{L}-Bk=\frac{a}{L},\\ &Ak+B\frac{R}{L}=0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Решая систему (4) относительно неизвестных A и B, получим

$$A=\frac{aR}{k^2L^2+R^2}, \quad B=-\frac{akL}{k^2L^2+R^2}.$$

Итак, частное решение, согласно равенству (2),

$$i_{\text{частн}}=\frac{aR}{k^2L^2+R^2}\sin kt-\frac{akL}{k^2L^2+R^2}\cos kt.$$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (1) будет

$$i=Ce^{-\frac{R}{L}t}+\frac{aR}{k^2L^2+R^2}\sin kt-\frac{akL}{k^2L^2+R^2}\cos kt. \tag{5}$$

Постоянную интегрирования C определим из начального условия: при $t=0$ $i=0$. Отсюда

$$0=Ce^{-\frac{R}{L}\cdot 0}+\frac{aR}{k^2L^2+R^2}\sin k\cdot 0-\frac{akL}{k^2L^2+R^2}\cos k\cdot 0$$

и

$$C=\frac{akL}{k^2L^2+R^2}. \tag{6}$$

Подставляя выражение (6) в общее решение (5), получим

$$i=\frac{a}{k^2L^2+R^2}\left(kLe^{-\frac{Rt}{L}}+R\sin kt-kL\cos kt\right).$$

Для упрощения частного решения вводим сдвиг фаз φ при помощи соотношений

$$\cos\varphi=\frac{R}{\sqrt{k^2L^2+R^2}},\quad \sin\varphi=\frac{kR}{\sqrt{k^2L^2+R^2}},\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.$$

Тогда частное решение

$$i_{\text{частн}}=\frac{a}{\sqrt{k^2L^2+R^2}}\sin(kt-\varphi),$$

а общее решение

$$i=\underbrace{\frac{akL}{k^2L^2+R^2}e^{-\frac{R}{L}t}}_{\text{затухающая часть}}+\underbrace{\frac{a}{\sqrt{k^2L^2+R^2}}\sin(kt-\varphi)}_{\text{периодическая часть}}.$$

Цепь «сопротивление — емкость» (постоянная электродвижущая сила)

Задача 100. Конденсатор емкостью C включается в цепь с напряжением U и сопротивлением R. Определить заряд q конденсатора в момент t после включения.

Решение. Сила i электрического тока представляет производную от количества электричества q, протекшего через проводник, по времени t: $\frac{dq}{dt}$.

В момент t заряд конденсатора q и сила тока $i=\frac{dq}{dt}$; в цепи действует электродвижущая сила V, равная разности между напряжением цепи U и напряжением конденсатора $\frac{q}{C}$, т. е.

$$V=U-\frac{q}{C}.$$

По закону Ома сила тока $i=\frac{V}{R}$ или иначе,

$$\frac{dq}{dt}=\frac{U-\frac{q}{C}}{R}.$$

Тогда дифференциальное уравнение процесса примет вид

$$R\frac{dq}{dt}=U-\frac{q}{C}. \tag{1}$$

Интегрируя линейное уравнение (1), получим общее решение

$$q=CU-C_1e^{-\frac{t}{CR}}. \tag{2}$$

По условию при $t=0 \quad q=0$, откуда

$$0=CU-C_1e^{-\frac{0}{CR}}$$

и

$$C_1=CU. \tag{3}$$

Таким образом, закон рассматриваемого процесса

$$q=CU\left(1-e^{-\frac{t}{CR}}\right).$$

§ 6. РАЦИОНАЛИЗАТОРСКИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Задача 101. Предприятие установило, что скорость изменения расходов по реализации взаимосвязана с рационализаторскими предложениями в производстве. В частности, если y — расходы по реализации (в тыс. руб.), а x — число новаторских предложений в производстве, то изменение y в зависимости от изменения x равно $-1/8\ y$. Определить расходы по реализации в виде функции рационализаторских предложений производства, если известно, что когда число рационализаторских предложений 4, то расходы по реализации составляют 3000 руб.

Решение. По условию зависимость переменных величин

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{8} y,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{8} y = 0.$$

Общее решение этого однородного линейного уравнения первого порядка

$$y = Ce^{-\frac{1}{8}x}.$$

Начальное условие: при $x=4$ $y=3$. Тогда

$$3 = Ce^{-\frac{1}{2}} = 0{,}607C,$$

откуда постоянная интегрирования

$$C = 4{,}9.$$

Искомый закон принимает вид

$$y = 4{,}9e^{-\frac{x}{8}}.$$

Это уравнение позволяет оценить расходы по реализации при разных количествах рационализаторских предложений.

Так, при отсутствии рационализаторских предложений в определенный период расходы по реализации составили бы

$$y = 4{,}9e^{-\frac{1}{8}\cdot 0} = 4{,}9e^0 = 4{,}9,$$

т. е. 4900 руб. С другой стороны, если за этот же период было сделано 8 рационализаторских предложений, то расходы по реализации сокращаются до размера

$$y=4{,}9e^{-\frac{1}{8}\cdot 8}=4{,}9e^{-1}=4{,}9\cdot 0{,}368=1{,}8,$$

т. е. до 1800 руб.

§ 7. РАБОТА СЕРДЦА

Задача 102. Найти закон изменения давления крови в аорте во время работы сердца человека.

Решение. Сердечно-сосудистая система представляет собой замкнутую систему, состоящую из множества крупных и мелких сосудов, по которым непрерывно движется кровь.

От сердца кровь по артериям идет ко всем органам и возвращается обратно по венам к сердцу. Самая большая артерия (аорта) постепенно разветвляется на все более мелкие артерии (артериолы), которые заканчиваются тончайшими кровеносными сосудами (капиллярами), снабжающими все органы человека кровью.

Для того чтобы кровь могла достигнуть самых отдаленных участков тела, необходимо в сосудах поддерживать определенное давление. Это достигается работой сердца, а также обусловлено состоянием стенок сосудов, особенно артерий.

Сердце — полый мышечный орган, состоящий из четырех полостей: двух предсердий и двух желудочков. Оно работает по принципу нагнетательного насоса: при сокращении сердца кровь с силой выталкивается из левого и правого желудочков в сосуды.

Артерии представляют собой полые трубы, в стенках которых имеются мышцы и эластичные волокна, которые могут растягиваться и сокращаться. Когда волна крови, нагнетаемой сердцем, проходит по артериям и давит на их стенки, сосуды растягиваются, а затем под действием эластичных волокон суживаются. При сужении сосуды давят на кровь, находящуюся внутри них. Таким образом в сосудах создается давление крови.

Давление крови в сосудах во время сокращения (систолы) сердца называется систолическим (или максимальным), а во время покоя (диастолы) сердца называется диастолическим (или минимальным).

Рассмотрим математическую модель сердечно-сосудистой системы, учитывая лишь основные ее свойства. В связи с этим представим аорту (рис. 56) в виде упругого объемного сосуда, емкость которого зависит от давления, развиваемого во время работы сердца.

Этот упругий сосуд связан с трубкой, оказывающей потоку крови определенное сопротивление, которое назовем артериальным.

Будем различать две последовательные фазы:

1) диастолическую фазу — количество притоков от сердца к аорте равно нулю;

2) систолическую фазу — кровь поступает в аорту из сердца.

Диастолическая фаза.

При рассмотрении работы сосуда учтем дополнительно:

а) линейную зависимость между объемом и давлением в нем;

б) подчинение системы закону Пуазейля.

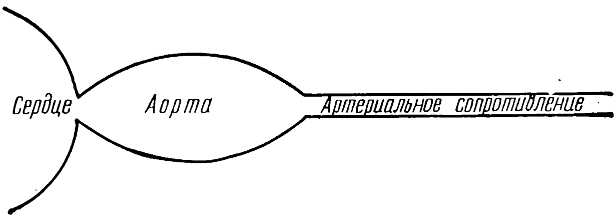

Рис. 56

Линейная зависимость между давлением и объемом выражается отношением

$$\left|\frac{dp}{dV}\right|=k, \tag{1}$$

где k — постоянная, p — давление во вмещающем сосуде, V — объем крови. Чем больше сопротивление вмещающих сосудов, тем больше давление в момент сокращения сердца и во время диастолы.

По закону Пуазейля объем жидкости, протекающей за секунду через сечение трубки, прямо пропорционален разности давлений у входа в трубку и на выходе из нее, четвертой степени диаметра трубки и обратно пропорционален длине трубки и коэффициенту вязкости.

Если принять давление на наружном конце трубки равным нулю, то закон Пуазейля можно записать

$$\frac{dV}{dt}=-\frac{p}{\omega}, \tag{2}$$

где

$$\omega=\frac{8l\mu}{\pi r^4}.$$

Здесь ω — постоянное сопротивление; r — радиус трубки; μ — вязкость крови; l — длина трубки.

Знак минус обозначает, что большему давлению p в сердце соответствует большее уменьшение объема в единицу времени.

Исключая из равенств (1) и (2) величину dV, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dp}{p} = -\frac{k}{\omega} dt. \qquad (3)$$

Решение уравнения (3) находится непосредственным интегрированием

$$p = C^* e^{-\frac{k}{\omega} t},$$

где $C^* = e^C$.

При $t=0$ $C^* = p(0) = p_0$, и тогда

$$p = p_0 e^{-\frac{k}{\omega} t}.$$

Таким образом, в течение диастолического периода (клапаны аорты закрыты) давление в аорте падает по показательному закону.

Систолическая фаза.

Особенностью этой фазы является то, что кровь накачивается в аорту путем сокращения мышцы сердца. Скорость изменения объема в аорте является результатом двух факторов: количества притоков (от сердца) и оттоков (вытеканий) по артерии.

Количество вытеканий на основании закона Пуазейля

$$\frac{dV}{dt} = \frac{p}{\omega}.$$

Знак минус отсутствует, так как теперь $\frac{dV}{dt}$ является не изменением объема в единицу времени в аорте, а объемом потока, проходящего через поперечное сечение в единицу времени.

Обозначим объем потока, поступающего в единицу времени в аорту, функцией $i(t)$.

Очевидно, что изменение объема в аорте

$$\frac{dV}{dt} = i(t) - \frac{p}{\omega}. \qquad (4)$$

Если $i > \frac{p}{\omega}$, то отношение $\frac{dV}{dt}$ положительно, т. е. объем потока крови в аорте увеличивается, и наоборот. Учитывая равенство (1), уравнение (4) перепишем в виде

$$\frac{dp}{dt} = k\left[i(t) - \frac{p}{\omega}\right]$$

или

$$\frac{dp}{dt} + \frac{k}{\omega} p = ki(t). \qquad (5)$$

Функция $i(t)$ является неизвестной. В качестве приближения принимаем закон $i=A\sin Bt$, т. е. число вытеканий потока крови в аорту аппроксимируется функцией синуса. Тогда уравнение (5) принимает вид

$$\frac{dp}{dt}+\frac{k}{\omega}p=kA\sin Bt.$$

Интегрирующий множитель $\mu=e^{\frac{k}{\omega}t}$ и искомое значение

$$p=Ce^{-\frac{k}{\omega}t}+e^{-\frac{k}{\omega}t}\int kA\sin Bt\, e^{\frac{k}{\omega}t}dt.$$

Применяя метод интегрирования по частям ($u=e^{\frac{k}{\omega}t}$, $dv=\sin Btdt$) и решая полученное затем равенство относительно искомых интегралов, получим

$$p=Ce^{-\frac{k}{\omega}t}+Ak\frac{\left(\frac{k}{\omega}\right)\sin Bt-B\cos Bt}{\frac{k^2}{\omega^2}+B^2}. \qquad (6)$$

При $t=0$ $p=p_0$, откуда

$$C=p_0+\frac{kAB}{\frac{k^2}{\omega^2}+B^2}. \qquad (7)$$

Окончательно, после подстановки в равенство (6) значения (7), получаем

$$p=\left(p_0+\frac{kAB}{\frac{k^2}{\omega^2}+B^2}\right)e^{-\frac{k}{\omega}t}+\frac{Ak\left[\frac{k}{\omega}\sin Bt-B\cos Bt\right]}{\frac{k^2}{\omega^2}+B^2}.$$

§ 8. ЗАДАЧА О СИГАРЕТЕ

Задача 103. Исследовать вопрос фильтрации дыма (газового потока) через горящую сигарету.

Решение. Это задача о фильтрации с подвижным краем. Она может быть обобщена на другие аналогичные модели задач о фильтрации и горении.

Предположим, что:

1) в продолжение непрерывного вдыхания (т. е. при постоянной скорости воздуха и горящих газов, проходящих через сигарету, и установившемся коэффициенте горения) в табаке сохраняется постоянная доля a любой его составляющей Z, а оставшаяся часть $1-a$ улетучивается в воздух;

2) относительно фильтрации составляющей Z коэффициент абсорбции (поглощения) табака постоянен и равен b, аналогично

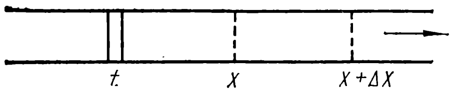

Рис. 57

при наличии фильтра у наконечника коэффициент абсорбции наконечника также постоянный и равен β;

3) скорость изменения длины при сгорании является настолько медленной, что можно пренебречь временем отставания, вызванным конечной скоростью газового потока вдоль сигареты, т. е. отложение доли a определенного количества составляющей Z по длине сигареты от фильтрации проходит непрерывно при сгорании этого количества до наконечника.

Рассмотрим абсорбцию составляющей Z при курении по длине сигареты.

Пусть x — расстояние вдоль сигареты, исчисляемое с любого ее конца. Предположим для простоты, что дым движется вдоль сигареты с постоянной скоростью, и рассмотрим очень тонкий слой сигареты толщиною t, который будет передвигаться при курении (рис. 57). Пусть общий вес составляющей Z в слое, когда он проходит сечение x, будет $w(x)$. Тогда общий вес в сечении $x+\Delta x$ составит $w(x+\Delta x)$. Следовательно, из определения коэффициента абсорбции b вес составляющей Z, перемещаемой со слоем, когда он движется от сечения x к сечению $x+\Delta x$, составит $bw\Delta x$.

Поэтому

$$w(x)-w(x+\Delta x)=bw\Delta x.$$

При $\Delta x \to 0$ получаем

$$\frac{dw}{dx}=-bw \tag{1}$$

или после интегрирования

$$w=w_0e^{-bx},$$

где w_0 — значение w при $x=0$.

Так как вес, заключенный между сечениями x и $x+\Delta x$, равен $bw\Delta x$, то вес, приходящийся на единицу длины в точке x, будет

$$\frac{bw\Delta x}{\Delta x}=bw_0e^{-bx}. \tag{2}$$

Если в сечении $x=X$ прекращено курение сигареты, то, очевидно, что это не влияет на результат анализа от сечения $x=0$ до $x=X$ и дым идет через сечение $x=X$ так же, как и раньше.

Вес части составляющей Z, которая проходит через сечение $x=X$, может быть найден путем вычисления количества, которое могло бы находиться в интервале от $x=X$ до бесконечности, если бы сигарета была бесконечно длинной. Таким образом, согласно выражению (2), имеем:

$$\int_X^\infty bw_0e^{-bx}\,dx=w_0e^{-bX}. \tag{3}$$

Аналогично, если сигарета имеет в интервале $0\leqslant x\leqslant\xi$ коэффициент абсорбции b и в интервале $\xi\leqslant x\leqslant X$ коэффициент абсорбции β, то, подставляя их в уравнение (3), получим:

$$w=w_0e^{-bx} \quad \text{при } 0\leqslant x\leqslant\xi,$$
$$w=We^{-\beta x} \quad \text{при } \xi\leqslant x\leqslant X,$$

где постоянная W определяется из условия непрерывности w в точке $x=\xi$, т. е.

$$w_0e^{-b\xi}=We^{-\beta\xi}$$

или

$$W=w_0e^{-b\xi-\beta(x-\xi)}, \quad \xi\leqslant x\leqslant X.$$

Вес, приходящийся на единицу длины в сечении $x>\xi$, будет

$$\beta w_0e^{-b\xi-\beta(x-\xi)}, \tag{4}$$

а вес, который проходит через сечение $x=X$, составляет

$$w_0e^{-b\xi-\beta(X-\xi)}. \tag{5}$$

Следовательно, отношение веса части составляющей Z, которая проходит через сечение $x=X$ при наличии фильтра (5), к аналогичному весу без фильтра (3) будет

$$e^{-(\beta-b)(X-\xi)}. \tag{6}$$

Оно зависит только от длины фильтра, но не от длины сигареты.

В действительности задача более сложная, чем выше рассмотренная.

Предположим, что сигарета имеет начальную длину l и конец ее сгорает со скоростью v, так что в момент времени t длина сигареты $l-vt$ (рис. 58).

Пусть $W(x, t)$ — вес составляющей Z на единицу длины сигареты в сечении x в момент t, где x измеряется от начального положения с левого (горящего) конца сигареты при $t=0$. Вес Z на единицу длины при горящем конце будет $W(vt, t)$.

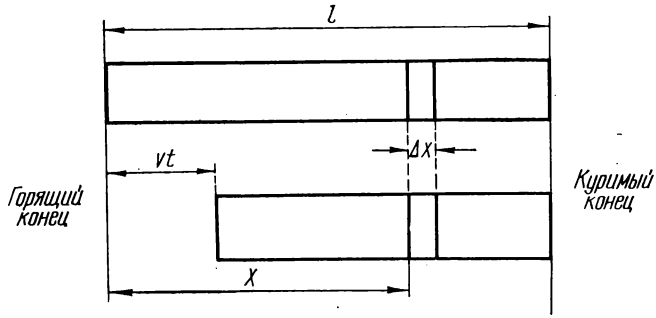

Рис. 58

За время Δt сгорает кусок сигареты длиною $v\Delta t$, содержащий $v\Delta t\, W(vt, t)$ составляющей Z табака, часть которой $av\Delta t\, W(vt, t)$ проходит в сигарету.

Согласно выражению (2), количество, заключенное между сечениями x и $x+\Delta x$, будет

$$abv\Delta t\; W(vt, t)\, e^{-b(x-vt)}\, \Delta x.$$

Поэтому общий вес, сохраненный дисперсией во время t между сечениями x и $x+\Delta x$, составляет

$$abv\int_0^t W(v\tau, \tau)\, e^{-b(x-v\tau)}\, d\tau \Delta x = w(x, t)\Delta x, \tag{7}$$

причем он определяется функцией $w(x, t)$. Общий вес в этом сечении определяется добавлением $W(x, 0)\Delta x$ к количеству, определяемому зависимостью (7), и в результате должен быть равным $W(x, t)\Delta x$.

Следовательно,

$$W(x, t) = W(x, 0) + abve^{-bx}\int_0^t W(v\tau, \tau)\, e^{bv\tau}\, d\tau. \tag{8}$$

Можно получить уравнение, из которого найдется функция $W(vt, t)$, подставляя в уравнение (8) $x=vt$.

Имеем:

$$W(vt, t)e^{bvt} = W(vt, 0)e^{bvt} + abv\int_0^t W(v\tau, \tau)e^{bv\tau}\,d\tau \tag{9}$$

или, полагая

$$f(t) = W(vt, t)e^{bvt}, \tag{10}$$

уравнение (9) запишем в более компактном виде

$$f(t) = W(vt, 0)e^{bvt} + abv\int_0^t f(\tau)\,d\tau. \tag{11}$$

Уравнение (11) может быть решено дифференцированием.

Ограничимся случаем, когда начальная концентрация постоянна — не зависит от x, т. е. $W(x, 0) = W_0$. Тогда дифференциальное уравнение задачи после дифференцирования уравнения (11) будет

$$\frac{df(t)}{dt} - abvf(t) = bvW_0e^{bvt}.$$

Решая это линейное неоднородное уравнение с учетом соотношения (10), находим

$$W(vt, t) = \frac{W_0}{1-a} + Ce^{-b(1-a)vt},$$

где постоянная интегрирования C определяется из начального условия $W(0, 0) = W_0$.

Отсюда

$$C = W_0 - \frac{W_0}{1-a} = -\frac{a}{1-a}W_0.$$

Таким образом,

$$W(vt, t) = \frac{W_0}{1-a}\left[1 - ae^{-b(1-a)vt}\right]. \tag{12}$$

Подставляя это выражение в уравнение (8), окончательно получаем

$$W(x, t) = W_0\left[1 + \frac{a}{1-a}e^{-bx}\left(e^{bvt} - e^{abvt}\right)\right].$$

Если ξ — длина сгоревшей части сигареты, так что $vt = \xi$, то

$$W(x, t) = W_0\left[1 + \frac{a}{1-a}e^{-bx}\left(e^{b\xi} - e^{ab\xi}\right)\right].$$

Это выражение не зависит от скорости сгорания v, что принималось в третьей предпосылке.

Вес части составляющей Z, которая будет проходить через конец сигареты при $x=X$ во время ее курения до сечения $x=\xi$, получается из уравнения (7), так как $t=\frac{\xi}{v}$, с учетом соотношения (12):

$$\int_X^\infty w\left(x, \frac{\xi}{v}\right) dx = ave^{-bX} \int_0^{\frac{\xi}{v}} W(v\tau, \tau) e^{bv\tau} d\tau =$$

$$= \frac{aW_0}{b(1-a)} e^{-bX} \left(e^{b\xi} - e^{ab\xi}\right). \tag{13}$$

При наличии фильтра наконечника в интервале $\xi \leqslant x \leqslant X$ при $x > \xi$, учитывая соотношение (4), имеем:

$$w(x, t) = a\beta v \int_0^t W(v\tau, \tau) e^{-b(\xi - vt) - \beta(x-\xi)} d\tau.$$

Таким образом, вес части составляющей, прошедшей через сечение $x=X$, равен

$$ave^{-\beta X + (\beta - b)\xi} \int_0^t W(v\tau, \tau) e^{bv\tau} d\tau. \tag{14}$$

Отношение веса части составляющей Z, которая проходит через сечение $x=X$ при наличии фильтра (14), к аналогичному весу при его отсутствии (13) составляет $e^{-(\beta-b)(X-\xi)}$. Это отношение совпадает с отношением (6) и зависит только от длины фильтра, но не от длины самой сигареты.

Глава VIII

ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К СПЕЦИАЛЬНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА (УРАВНЕНИЯМ БЕРНУЛЛИ, РИККАТИ, ЛАГРАНЖА И КЛЕРО)

§ 1. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

Дифференциальное уравнение Бернулли имеет вид

$$y'+P(x)y=Q(x)y^n, \tag{1}$$

где n — постоянная, не равная 0 или 1.

Это уравнение после деления на y^n и введения переменной

$$z=\frac{1}{y^{n-1}}=y^{-n+1}=y^{1-n} \tag{2}$$

решается, как обычное линейное уравнение первого порядка относительно z. Обратной подстановкой получается общее решение:

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[C+(1-n)\int Q(x)e^{(1-n)\int P(x)dx}\,dx\right]^{\frac{1}{1-n}}. \tag{3}$$

Геометрические приложения

Задача 104. Нормаль отсекает на оси абсцисс отрезок, равный квадрату радиус-вектора любой точки кривой. Найти уравнение кривой, если она проходит через точку (0, 3).

Решение. Отрезок x_0, отсекаемый нормалью на оси Ox, равен абсциссе точки пересечения нормали с осью Ox. Координаты этой точки удовлетворяют системе:

$$\left.\begin{aligned} y-y_0&=-\frac{dx}{dy}(x-x_0),\\ y_0&=0, \end{aligned}\right\}$$

образованной уравнением нормали и уравнением оси Ox. Решая систему, получим

$$x_0=x+y\frac{dy}{dx}.$$

Квадрат радиус-вектора любой точки равен x^2+y^2.

По условию задачи имеем дифференциальное уравнение искомого семейства

$$x+y\frac{dy}{dx}=x^2+y^2, \tag{2}$$

которое преобразуется в уравнение Бернулли

$$\frac{dy}{dx}-y=(x^2-x)y^{-1}.$$

Уравнение (2) приведем к виду

$$y\frac{dy}{dx}-y^2=x^2-x \tag{3}$$

и выполним замену

$$z=\frac{1}{y^{n-1}}=\frac{1}{y^{-2}}=y^2,$$

откуда

$$y=\sqrt{z} \quad \text{и} \quad dy=\frac{dz}{2\sqrt{z}}. \tag{4}$$

Подставляем значения (4) в уравнение (3) и тогда получаем линейное уравнение

$$dz-2zdx=2(x^2-x)dx,$$

которое в результате подстановки $z=uv$, $dz=vdu+udv$ приводится к виду

$$u(dv-2vdx)+vdu=2(x^2-x)dx.$$

Будем искать такую функцию u, которая обращала бы в нуль первое выражение в скобках. Для этого решаем уравнение

$$dv-2vdx=0,$$

откуда вспомогательная функция

$$v=e^{2x}.$$

Тогда

$$e^{2x}du=2(x^2-x)dx$$

и

$$u=2\int\frac{(x^2-x)}{e^{2x}}dx=2\int\frac{x^2dx}{e^{2x}}-2\int\frac{xdx}{e^{2x}}+C.$$

Интегралы в правой части последнего равенства находятся интегрированием по частям:

$$2\int \frac{xdx}{e^{2x}} = -\int e^{-2x}xd(-2x) = -xe^{-2x} + \int e^{-2x}dx =$$

$$= -\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-2x},$$

$$2\int \frac{x^2dx}{e^{2x}} = -\int e^{-2x}x^2d(-2x) = -x^2e^{-2x} - \int e^{-2x}xd(-2x) =$$

$$= -\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)e^{-2x},$$

и вторая вспомогательная функция

$$u = C - x^2e^{-2x}.$$

Тогда

$$z = uv = Ce^{2x} - x^2,$$

а общее решение дифференциального уравнения (2) ввиду соотношения $z=y^2$ примет вид

$$x^2+y^2=Ce^{2x}.$$

Дополнительное условие: кривая проходит через точку (0, 3), откуда

$$0^2+3^2=Ce^{2\cdot 0}$$

или

$$C=9.$$

Уравнение искомой кривой

$$x^2+y^2=9e^{2x}.$$

Задача 105. Среднее геометрическое координат точки касания равно отношению отрезка, отсекаемого касательной на оси ординат, к удвоенной ординате точки касания. Найти уравнение кривой, если она проходит через точку (1, 1).

Решение. Среднее геометрическое координат точки касания $\sqrt{xy}$. Отрезок, отсекаемый касательной на оси Oy, равен ординате точки пересечения касательной с осью Oy. Координаты этой точки удовлетворяют системе

$$\left.\begin{aligned} y-y_0 &= \frac{dy}{dx}(x-x_0), \\ x_0 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

образованной уравнением касательной и уравнением оси Oy. Решая систему, получим

$$y_0 = y - x\frac{dy}{dx}.$$

По условию задачи получаем уравнение

$$\sqrt{xy} = \frac{y - x\dfrac{dy}{dx}}{2y}, \qquad (1)$$

которое является дифференциальным уравнением искомого семейства. Уравнение (1) может быть представлено в виде

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 2x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}. \qquad (2)$$

Это уравнение Бернулли.

Общее решение этого уравнения

$$x - y(x-C)^2 = 0. \qquad (3)$$

Дополнительное условие: кривая проходит через точку (1, 1), откуда

$$1 - 1(1-C)^2 = 0$$

и

$$C_1 = 0; \quad C_2 = 2. \qquad (4)$$

Получаем две искомые кривые:

$$xy = 1 \quad \text{и} \quad x - y(x-2)^2 = 0.$$

§ 2. УРАВНЕНИЕ РИККАТИ

Дифференциальное уравнение Риккати имеет вид

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x). \qquad (1)$$

Уравнение (1) в общем случае не интегрируется в квадратурах, т. е. нахождение его решения не может быть сведено к конечному числу последовательных интегрирований.

Возможны следующие способы определения общего решения:

1) если известно одно частное решение y_1 уравнения (1), то подстановка

$$y = y_1 + \frac{1}{z},$$

где z — новая переменная, приводит уравнение Риккати к линейному уравнению;

2) если известны два решения y_1 и y_2, то $z_1=\dfrac{1}{y_2-y_1}$ будет частным решением линейного уравнения относительно z, что позволит упростить его интегрирование;

3) если известны три частных решения y_1, y_2 и y_3, то общий интеграл будет

$$\frac{y-y_2}{y-y_1}:\frac{y_3-y_2}{y_3-y_1}=C.$$

Уравнение Риккати заменой переменных $y=\dfrac{u}{P(x)}+\beta(x)$ сводится к более простому виду

$$\frac{du}{dx}=u^2+R(x),$$

что облегчает нахождение общего интеграла исходного уравнения.

Падение тел

Задача 106. Тело массы m падает под действием силы тяжести в среде, оказывающей сопротивление, пропорциональное квадрату скорости падения. Найти закон движения тела.

Решение. Пусть s — расстояние, пройденное телом к моменту t. Тогда движение определяется уравнением

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=mg-k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

которое может быть представлено в виде

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv^2, \qquad (1)$$

где скорость $v=\dfrac{ds}{dt}$. Дифференциальное уравнение (1) является уравнением Риккати.

Разделяя в нем переменные, имеем

$$\frac{mdv}{mg-kv^2}=dt$$

или после сокращения левой части равенства на m

$$\frac{dv}{g-\frac{k}{m}v^2}=dt.$$

Интегрируя это равенство, получаем

$$\int \frac{dv}{g-\frac{k}{m}v^2}=t+C_1. \tag{2}$$

Для вычисления интеграла в левой части уравнения (2) применяем метод неопределенных коэффициентов, и тогда

$$\int \frac{dv}{g-\frac{k}{m}v^2}=\int \frac{A\,dv}{\sqrt{g}-\sqrt{\frac{k}{m}}\,v}+\int \frac{B\,dv}{\sqrt{g}+\sqrt{\frac{k}{m}}\,v}, \tag{3}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} A-B&=0,\\ A+B&=\frac{1}{\sqrt{g}} \end{aligned}\right\}$$

или

$$A=B=\frac{1}{2\sqrt{g}}.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в интеграл (3), имеем

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{gk}}\int \frac{d\left(g+\sqrt{\frac{gk}{m}}\,v\right)}{g+\sqrt{\frac{gk}{m}}\,v}-$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{gk}}\int \frac{d\left(g-\sqrt{\frac{gk}{m}}\,v\right)}{g-\sqrt{\frac{gk}{m}}\,v}=t+C_1.$$

Для краткости обозначим $\sqrt{\frac{gk}{m}}=r$. Тогда после умножения равенства на $2\sqrt{\frac{gk}{m}}$ находим

$$\int \frac{d(g+rv)}{g+rv}-\int \frac{d(g-rv)}{g-rv}=2r(t+C_1)$$

или

$$\ln(g+rv)-\ln(g-rv)=2rt+2rC_1,$$

откуда

$$\ln\frac{g+rv}{g-rv}=2rt+C^*,$$

где $C^*=2rC_1$.

Потенцируя уравнение (2), получаем

$$\frac{g+rv}{g-rv}=e^{2rt+C^*}=C^{**}e^{2rt}$$

или

$$g+rv=(g-rv)C^{**}e^{2rt},$$

откуда

$$rv(C^{**}e^{2rt}+1)=g(C^{**}e^{2rt}-1)$$

и искомая функция

$$v=\frac{g}{r}\cdot\frac{(C^{**}e^{2rt}-1)}{(C^{**}e^{2rt}+1)}=\frac{r^2m}{rk}\cdot\frac{C^{**}e^{rt}\left(e^{rt}-\dfrac{1}{C^{**}e^{rt}}\right)}{C^{**}e^{rt}\left(e^{rt}+\dfrac{1}{C^{**}e^{rt}}\right)}=$$

$$=\frac{rm}{k}\cdot\frac{e^{rt}-Ce^{-rt}}{e^{rt}+Ce^{-rt}},\qquad (4)$$

где $C=\dfrac{1}{C^{**}}$, а $g=\dfrac{r^2m}{k}$.

Из уравнения (4) очевидно, что при t, стремящемся к бесконечности, скорость v достигает предельного значения

$$v_{\max}=V,$$

для которого

$$V=\frac{rm}{k}=\sqrt{\frac{mg}{k}}.$$

Следовательно, уравнение (4) записывается в виде

$$v=V\left(\frac{e^{rt}-Ce^{-rt}}{e^{rt}+Ce^{-rt}}\right).\qquad (5)$$

Начальное условие: при $t=0$ $v=v_0$.

Пусть ради краткости записи $u_0=\dfrac{v_0}{V}$. Тогда постоянная интегрирования C в уравнении (5) принимает значение

$$C=\frac{1-u_0}{1+u_0}.$$

Подставляя это значение в уравнение (5), замечаем, что v может быть записана в виде

$$v=V\left(\frac{u_0+\operatorname{th} rt}{1+u_0 \operatorname{th} rt}\right).$$

Принимая, что при $t=0$ $s=0$, можем теперь определить s:

$$s=\int_0^t v(t)\,dt=\frac{V}{r}\ln(\operatorname{ch} rt+u_0 \operatorname{sh} rt).$$

Подставляя $r=\frac{g}{V}$ и $u_0=\frac{v_0}{V}$ в это равенство, окончательно получаем искомый закон движения

$$s=\frac{V^2}{g}\ln\left(\operatorname{ch}\frac{gt}{V}+\frac{v_0}{V}\operatorname{sh}\frac{gt}{V}\right).$$

§ 3. УРАВНЕНИЕ ЛАГРАНЖА

Дифференциальное уравнение Лагранжа — это уравнение типа $x=\varphi(y, y')$ или $y=\psi(x, y')$, не разрешенное относительно производной искомой функции.

Вид уравнения Лагранжа

$$a(y')x+b(y')y+c(y')=0, \tag{1}$$

где $a(y')$, $b(y')$, $c(y')$ — функции y'.

Уравнение (1) интегрируется подстановкой

$$y'=\frac{dy}{dx}=p,$$

после выполнения которой, разрешая уравнение (1) относительно y, получаем

$$y=x\varphi(p)+\psi(p).$$

Величина p рассматривается как вспомогательная переменная. Продифференцировав это уравнение по p, получим уравнение

$$[p-\varphi(p)]\frac{dx}{dp}-\varphi'(p)x-\psi'(p)=0,$$

линейное относительно x.

Общий интеграл уравнения

$$x=e^{\int \frac{\varphi'(p)dp}{p-\varphi(p)}}\left[C+\int \frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}e^{-\int \frac{\varphi'(p)dp}{p-\varphi(p)}}dp\right]. \qquad (2)$$

Исключая из уравнения (2) p, получаем общий интеграл исходного уравнения.

Поверхность вращения, фокусирующая параллельные световые лучи

Задача 107. Какую форму должен иметь меридиан поверхности вращения, чтобы световые лучи, падающие на эту поверхность параллельно оси вращения, после отражения сходились в одной точке на оси вращения.

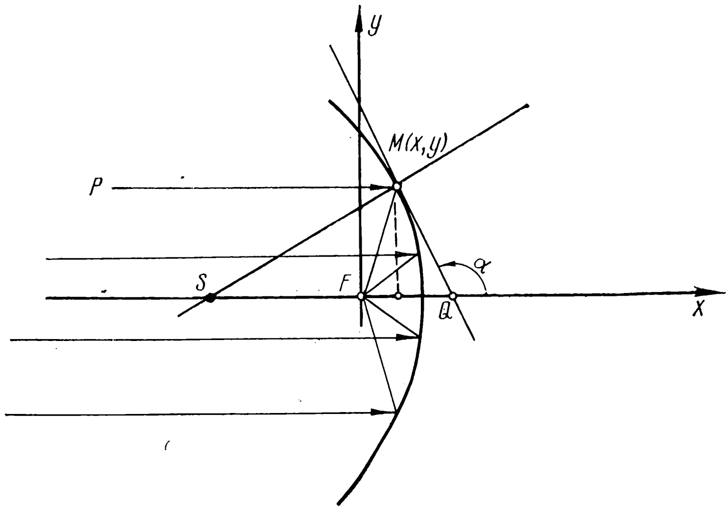

Рис. 59

Решение. Пусть фокус будет началом принятой нами системы координат (рис. 59). Луч P падает в точку M поверхности и, отразившись, проходит через фокус F. В точке M проводим касательную, пересекающую ось абсцисс в точке Q, и нормаль, пересекающую ось абсцисс в точке S.

Пусть α — угол между касательной и положительным направлением оси абсцисс.

Тогда

$$\angle FSM=\alpha-\angle SMQ=\alpha-\frac{\pi}{2},$$

так как внешний угол треугольника равен сумме внутренних неприлегающих углов.

Далее

$$\angle SMP = \angle FSM = \alpha - \frac{\pi}{2},$$

так как это накрест лежащие углы, образуемые пересечением прямой параллельных линий;

$$\angle SMF = \angle SMP = \alpha - \frac{\pi}{2}$$

на основании теоремы об углах падения и отражения лучей;

$$\angle QFM = \angle FSM + \angle SMF,$$

так как внешний угол треугольника равен сумме внутренних неприлегающих углов, или

$$\angle QFM = \alpha - \frac{\pi}{2} + \alpha - \frac{\pi}{2} = 2\alpha - \pi.$$

Обозначая координаты точки M через x и y, имеем:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}(2\alpha - \pi) = \operatorname{tg} 2\alpha.$$

Как известно,

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

но, с другой стороны,

$$\operatorname{tg} \alpha = y'.$$

Поэтому

$$\frac{y}{x} = \frac{2y'}{1 - y'^2}$$

или

$$y = 2x \frac{y'}{1 - y'^2}. \qquad (1)$$

Это уравнение Лагранжа. Дифференцируя обе части равенства (1), имеем:

$$y' = 2 \frac{y'}{1 - y'^2} + 2x \frac{1 - y'^2 + 2y'^2}{(1 - y'^2)^2} y''.$$

Пусть

$$y' = p, \quad y'' = \frac{dp}{dx}.$$

Тогда

$$\frac{dx}{dp}=-\frac{2x}{p(1-p^2)}$$

или после разделения переменных

$$\int\frac{dx}{x}=-\int\frac{2dp}{p(1-p^2)}. \tag{2}$$

Преобразуем интеграл в правой части равенства (2):

$$\int\frac{2dp}{p(p^2-1)}=\int\frac{2pdp}{p^2(p^2-1)}.$$

Применяем подстановку

$$p^2=t, \quad 2pdp=dt.$$

Тогда

$$\int\frac{2dp}{p(p^2-1)}=\int\frac{dt}{t(t-1)}=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt=$$

$$=\ln\frac{t-1}{t}=\ln\frac{p^2-1}{p^2}.$$

Подставляя полученное значение в равенство (2), после интегрирования, полагая $C=-\ln a$, имеем

$$\ln x-\ln a=\ln\frac{p^2-1}{p^2},$$

откуда

$$\frac{x}{a}=\frac{p^2-1}{p^2}$$

и

$$x=a\frac{p^2-1}{p^2}. \tag{3}$$

Из уравнения (1) получаем

$$y=2x\frac{p}{1-p^2}=2a\frac{p^2-1}{p^2}\cdot\frac{p}{1-p^2}=-\frac{2a}{p}$$

или

$$p=-\frac{2a}{y}.$$

Это выражение подставляем в уравнение (3):

$$x=a\frac{\frac{4a^2}{y^2}-1}{\frac{4a^2}{y^2}},$$

отсюда

$$y^2=-4ax+4a^2.$$

Итак, меридиан описывается уравнением параболы, симметричной относительно оси абсцисс. (Ср. с задачей 84.)

§ 4. УРАВНЕНИЕ КЛЕРО

Дифференциальное уравнение Клеро имеет вид

$$y=xp+\psi(p), \tag{1}$$

где

$$p=\frac{dy}{dx}.$$

Уравнение (1) является частным случаем уравнения Лагранжа.

Общий интеграл уравнения Клеро находится путем подстановки вместо p произвольной постоянной C, т. е.

$$y=Cx+\psi(C).$$

Особое решение (см. гл. I) находится исключением p из уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} x+\psi'(p)=0, \\ y=xp+\psi(p). \end{array}\right\}$$

Геометрические места точек

Задача 108. Найти кривую, если произведение перпендикуляров, опущенных из двух данных точек на касательную в любой точке, имеет постоянную величину $\pm b^2$.

Решение. За ось абсцисс принимаем прямую, проходящую через данные точки M_1 и M_2. Начало координат — в середине отрезка $\overline{M_1M_2}$.

Пусть $\overline{M_1M_2}=2c$. Тогда точки $M_1(c,\ 0)$ и $M_2(-c,\ 0)$ лежат по одну сторону от касательной. В этом случае длины перпендикуляров имеют одинаковые знаки и получаем уравнение

$$\frac{(y-xp)^2-c^2p^2}{1+p^2}=b^2 \tag{1}$$

или

$$y=xp+\sqrt{a^2p^2+b^2}, \tag{2}$$

где

$$b^2+c^2=a^2.$$

Общее решение уравнения Клеро (2) имеет вид

$$y=Cx+\sqrt{a^2C^2+b^2}. \tag{3}$$

Ответ задачи дает его особое решение, которое находится путем исключения C из уравнения (3) и уравнения, которое получается из уравнения (3) дифференцированием по C, т. е.

$$0=x+\frac{a^2C}{\sqrt{a^2C^2+b^2}},$$

откуда

$$x=-\frac{a^2C}{\sqrt{a^2C^2+b^2}}. \tag{4}$$

Подставляем это значение x в уравнение (3):

$$y=\frac{b^2}{\sqrt{a^2C^2+b^2}}. \tag{5}$$

Исключая C из уравнений (4) и (5), получаем уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2C^2+b^2}{a^2C^2+b^2}=1$$

эллипса с фокусами в данных точках.

В случае, когда данные точки лежат по разные стороны от касательной, надо в правой части уравнения (1) поставить минус.

Поступая аналогично и обозначая $c^2-b^2=a^2$, получим уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Задача 109. Найти кривую, если геометрическое место середин отрезков касательных, заключенных между осями координат, есть прямая $y=kx+\frac{l}{2}$.

Решение. Координаты середины отрезка будут

$$\xi=\frac{X_t}{2}=\frac{px-y}{2p},\quad \eta=\frac{Y_t}{2}=\frac{y-px}{2}.$$

Здесь X_t — отрезок, отсекаемый касательной на оси Ox; Y_t — отрезок, отсекаемый касательной на оси Oy; $p=y'=\operatorname{tg}\alpha$.

Так как точка (ξ, η) описывает заданную прямую, то

$$\frac{y-px}{2}=k\frac{px-y}{2p}+\frac{l}{2}$$

или

$$y=px+\frac{lp}{k+p}. \tag{1}$$

Уравнение (1) представляет уравнение Клеро, особое решение которого

$$\left.\begin{aligned} x&=-\frac{kl}{(k+p)^2}, \\ y&=\frac{lp^2}{(k+p)^2} \end{aligned}\right\}$$

дает в параметрической форме решение задачи.

Глава IX

ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ВТОРОГО ПОРЯДКА, РАЗРЕШЕННЫМ ОТНОСИТЕЛЬНО ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ($y''=C$)

§ 1. СКОЛЬЖЕНИЕ ТЕЛА ПОД НАКЛОНОМ

Задача 110. По наклонной плоскости длиной $l=10$ *м* скользит тело A (рис. 60). Угол наклона плоскости $\alpha=45°$. Коэффициент трения тела по поверхности плоскости $k=0{,}5$. Определить закон движения тела и время, в течение которого тело пройдет вдоль всей наклонной плоскости, если в начальный момент оно находилось в покое на верхней грани этой плоскости.

Р е ш е н и е. В любой момент t на тело действуют три силы: вес P, сила трения F и реакция плоскости N_1. Нормальная и тангенциальная составляющие N и T силы P равны

$$N=P\cos\alpha, \quad T=P\sin\alpha.$$

Как известно, сила трения

$$F=-kN=-kP\cos\alpha.$$

Действующие силы P, F, N_1 заменяем эквивалентной системой сил T и F (так как силы N и N_1 взаимно уравновешиваются, а система сил T, N эквивалентна силе P). Равнодействующая эквивалентной системы

$$R=T+F$$

или

$$R=P\sin\alpha-kP\cos\alpha$$

действует по направлению движения.

С другой стороны,

$$P=mg, \quad R=m\frac{d^2s}{dt^2},$$

откуда дифференциальное уравнение движения

$$\frac{d^2s}{dt^2}=g(\sin\alpha-k\cos\alpha).$$

Это уравнение типа $y''=C$.

Решая его непосредственным интегрированием, получаем

$$\frac{ds}{dt}=g(\sin\alpha-k\cos\alpha)t+C_1$$

и общее решение

$$s=\frac{g}{2}(\sin\alpha-k\cos\alpha)t^2+C_1t+C_2.$$

Постоянные C_1 и C_2 определяем из начальных условий: при $t=0$ $s=0$ и $\frac{ds}{dt}=0$. Получаем систему

$$\left.\begin{aligned}&0=g(\sin\alpha-k\cos\alpha)\cdot 0+C_1,\\&0=\frac{g}{2}(\sin\alpha-k\cos\alpha)\cdot 0+C_1\cdot 0+C_2,\end{aligned}\right\}$$

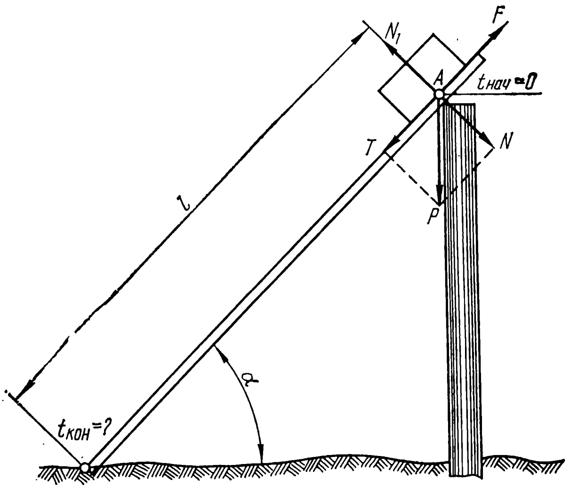

Рис. 60

откуда

$$C_1=C_2=0.$$

Подставляя эти значения в общее решение, получим искомый закон движения

$$s=\frac{g}{2}(\sin\alpha-k\cos\alpha)t^2. \tag{1}$$

Для определения времени прохождения тела вдоль плоскости подставляем в уравнение (1) числовые данные

$$s=\frac{g}{2}(\sin 45^\circ-0{,}5\cos 45^\circ)t^2=\frac{g\sqrt{2}}{8}t^2 \tag{2}$$

и решаем уравнение (2) относительно t:

$$t=2\sqrt{\frac{s\sqrt{2}}{g}}.$$

При $s=l=10$ *м* искомое время соскальзывания тела

$$t=2\sqrt{\frac{l\sqrt{2}}{g}}=2\sqrt{\frac{10\sqrt{2}}{9{,}81}}=2{,}4 \text{ сек.}$$

§ 2. ДВИЖЕНИЕ В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ ПРИ СОПРОТИВЛЕНИИ, ПРОПОРЦИОНАЛЬНОМ СИЛЕ ТЯЖЕСТИ

Задача 111. Электровоз движется по горизонтальному железнодорожному пути со скоростью 72 *км/ч*. Машинист включает тормоз и сопротивление движению после начала торможения равно 0,2 веса электровоза. Найти время от момента включения тормоза до полной остановки электровоза и расстояние, пройденное за это время.

Решение. Пусть m — масса электровоза. Тогда сила тяжести электровоза

$$P=mg, \tag{1}$$

где g — ускорение силы тяжести. Расстояние, пройденное центром тяжести электровоза после начала торможения, есть неизвестная функция времени $s=f(t)$.

Скорость движения электровоза

$$v=\frac{ds}{dt},$$

а ускорение

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}. \tag{2}$$

На основании второго закона Ньютона (произведение массы на ускорение движущегося тела равно действующей на него силе)

$$ma=-0{,}2P, \tag{3}$$

где минус указывает, что сила торможения направлена против движения электровоза.

Подставляем значения (1) и (2) в уравнение (3), откуда

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=-0{,}2mg$$

или

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-0{,}2g. \tag{4}$$

После первого интегрирования уравнения (4) получаем

$$\frac{ds}{dt}=v=-0{,}2g\int dt+C_1=-0{,}2gt+C_1. \tag{5}$$

Начальное условие: при $t=0$ начальная скорость электровоза (в начале торможения) $v_0=72$ *км/ч*$=20$ *м/сек*. Отсюда

$$20=-0{,}2g\cdot 0+C_1$$

и

$$C_1=20. \tag{6}$$

Подставляем значение постоянной интегрирования (6) в равенство (5) и получаем уравнение скорости

$$\frac{ds}{dt}=v=-0{,}2gt+20. \tag{7}$$

В момент t остановки электровоза его скорость $v=\frac{ds}{dt}=0$. Подставляя это значение в уравнение (7), находим искомое время остановки электровоза

$$t=\frac{20}{0{,}2g}=\frac{20}{0{,}2\cdot 9{,}81}\approx 10{,}2 \text{ сек.}$$

Интегрируем далее уравнение скорости (7) и получаем

$$s=\int(-0{,}2gt+20)\,dt+C_2=-0{,}1gt^2+20t+C_2.$$

Начальное условие: при $t=0$ $s=0$. Следовательно,

$$0=-0{,}1g\cdot 0^2+20\cdot 0+C_2$$

и

$$C_2=0.$$

Тогда уравнение пройденного электровозом пути будет

$$s=-0{,}1gt^2+20t.$$

За время $t=10{,}2$ *сек* электровоз пройдет расстояние

$$s\approx -0{,}1\cdot 9{,}81\cdot 10{,}2^2+20\cdot 10{,}2\approx 102 \text{ м.}$$

Таким образом, электровоз остановится через 10,2 *сек*, пройдя после начала торможения расстояние 102 *м*.

§ 3. ВЫБРОС ВВЕРХ (БЕЗ УЧЕТА ТРЕНИЯ)

Задача 112. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Определить закон движения, предполагая, что тело движется только под влиянием силы тяжести.

Решение. Под влиянием силы тяжести тело движется с постоянным ускорением, равным g. Ввиду того, что ускорение выражается производной второго порядка от пути по времени, дифференциальное уравнение (после сокращения на массу) в данном случае

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-g. \tag{1}$$

Интегрируя дважды, получим

$$\frac{ds}{dt}=-gt+C_1, \tag{2}$$

откуда

$$s=\int(-gt+C_1)\,dt=-\frac{gt^2}{2}+C_1t+C_2. \tag{3}$$

Постоянные C_1 и C_2 определяем из начальных условий.

Так как отсчет пути ведется от начального момента, то при $t=0$ $s=0$ и, следовательно, $C_2=0$.

Так как при $t=0$ начальная скорость $v_0=\frac{ds}{dt}$, то из уравнения (2) получаем

$$C_1=v_0.$$

Итак, зависимость пройденного телом пути s от времени t:

$$s=v_0t-\frac{gt^2}{2}.$$

§ 4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛОТЫ В СТЕРЖНЕ

Задача 113. Стержень длиною $2l$ и площадью поперечного сечения S на концах имеет одинаковую температуру t_0. По стержню проходит ток постоянной величины I, плотность которого $i=\frac{I}{S}$. Найти распределение теплоты по стержню, если максимальная температура в центре стержня t_{max}. Пренебречь потерей теплоты в окружающую среду.

Решение. Рассмотрим элемент стержня dx (рис. 61). Поток теплоты через сечение KK_1 по закону Фурье $-\lambda S\frac{dt(x)}{dx}$, а через сечение LL_1 составит $-\lambda S \dfrac{dt(x+dx)}{dx}$. Различие этих потоков обусловлено нагреванием элемента стержня током, выделяющим теплоту в количестве

$$0{,}24I^2R = 0{,}24i^2S^2 \frac{\rho l}{S},$$

где ρ — удельное электрическое сопротивление.

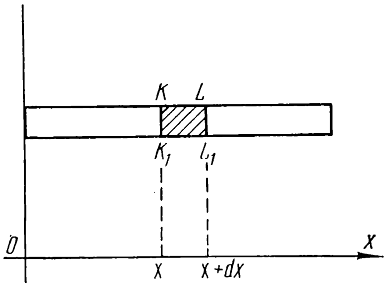

Рис. 61

При установившемся состоянии

$$-\lambda S \frac{dt(x+dx)}{dx} - \lambda S \frac{dt(x)}{dx} = 0{,}24i^2S^2 \frac{\rho l}{S}, \tag{1}$$

откуда дифференциальное уравнение задачи

$$\frac{d^2t(x)}{dx^2} = -\frac{0{,}24i^2\rho l}{\lambda}. \tag{2}$$

Обозначая для краткости правую часть равенства (2) символом A, имеем:

$$\frac{d^2t(x)}{dx^2} = A. \tag{3}$$

Интегрируя это уравнение дважды, получим

$$t(x) = Ax^2 + C_1x + C_2. \tag{4}$$

Начальные условия: при $x=0$ $t=t_0$ и при $x=l$ $t=t_{\max}$ и $\dfrac{dt}{dx}=0$. Отсюда

$$C_1 = -2Al, \quad C_2 = 0. \tag{5}$$

Найденные значения постоянных интегрирования подставляем в уравнение (4), откуда искомое распределение температур по стержню

$$t(x) = Ax^2 - 2Alx + t_0.$$

§ 5. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ФЕРМАМИ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО МОСТА

Задача 114. Расстояние между рельсами железнодорожного пути $c = 1{,}6$ *м*. Наибольшая нагрузка от паровоза на каждый рельс составляет $P = 9$ *Т*. Поперечный брус железнодорожного моста лежит на двух фермах, расположенных на расстоянии l друг от друга. Момент инерции площади сечения бруса $J = 45\,000$ *см*^{4}, модуль упругости $E = 10^5$ *кГ/см*^{2}. Найти расстояние l между фермами из условия, чтобы допустимый прогиб поперечного бруса в середине равнялся 0,2 *см*.

Решение. Задача требует определения упругой линии балки и вычисления прогиба в ее середине. Мерой изгиба балки может служить кривизна ее упругой линии. В курсе сопротивления материалов выводится формула радиуса кривизны R упругой линии для балок любого сечения, которая имеет вид

$$R = \frac{EJ}{M(x)}, \tag{1}$$

где E — модуль упругости балки, J — момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси,* $M(x)$ — изгибающий момент для данного сечения, равный алгебраической сумме моментов относительно нейтральной оси всех внешних сил, приложенных к брусу с одной стороны сечения (справа или слева).

Обычно изгибы балок чрезвычайно малы, и упругая линия мало отклоняется от оси абсцисс. Поэтому в любой ее точке угловой коэффициент касательной $\frac{dy}{dx}$ весьма мал, и в известном из дифференциального исчисления выражении для радиуса кривизны $R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$ можно пренебречь величиной y'^2.

Отсюда на основании формулы (1) получаем дифференциальное уравнение упругой линии в упрощенном виде

$$\frac{1}{y''} = \frac{EJ}{M(x)}$$

* Нейтральной осью данного сечения балки называется прямая пересечения нейтрального слоя с плоскостью данного сечения. Нейтральный слой — слой, в котором волокна балки не деформируются (не растягиваются и не сжимаются) под действием сил.

или

$$y'' = \frac{M(x)}{EJ}.$$

Очевидно, что

$$M(x) = EJy'' = EJ\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Поперечный брус представляет собой балку на двух опорах A и B, нагруженную двумя сосредоточенными силами P, приложенными в точках D и E.

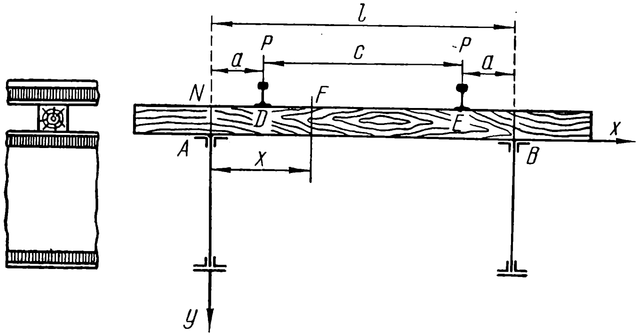

Рис. 62

Реакции опор $N = P$.

Для любого сечения F на участке DE (рис. 62) изгибающий момент

$$M = P(l-a-x) - P(l-x)$$

или

$$M = -Pa.$$

Дифференциальное уравнение упругой линии принимает вид

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Pa}{EJ}. \tag{2}$$

Интегрируя уравнение (2), как уравнение типа $y'' = C$, получим общее решение

$$y = -\frac{Pa}{EJ}\left(\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2\right). \tag{3}$$

Из начальных условий $x = 0$, $y = 0$ и $x = l$, $y = 0$ следует

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= -\frac{l}{2}, \\ C_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Подставляя выражения (4) в общее решение (3), получим уравнение упругой линии участка DE:

$$y = \frac{Pax}{2EJ}(l - x).$$

При $x = \frac{l}{2}$ прогиб середины поперечного бруса

$$h = \frac{Pal^2}{8EJ}.$$

Так как $l = 2a + c$, то

$$h = \frac{P}{8EJ} a(2a + c)^2.$$

Преобразуя это кубическое уравнение, получим

$$4a^3 + 4ca^2 + c^2a - \frac{8EJh}{P} = 0. \qquad (5)$$

Подставляем числовые данные. Тогда уравнение (5) примет вид

$$a^3 + 160a^2 + 6400a - 200\,000 = 0.$$

Для упрощения вводим новую неизвестную $z = \frac{a}{10}$ или иначе $a = 10z$. Тогда

$$1000z^3 + 16\,000z^2 + 64\,000z - 200\,000 = 0.$$

Сокращая на 1000, получим

$$z^3 + 16z^2 + 64z - 200 = 0.$$

Разлагаем левую часть последнего равенства на множители:

$$(z - 2)(z^2 + 18z + 100) = 0. \qquad (6)$$

Алгебраическое уравнение (6) имеет три корня: $z_1 = 2$ и два комплексных корня z_2 и z_3, которые не соответствуют физическому смыслу рассматриваемой задачи.

Таким образом,

$$a = 10z = 20 \text{ } см,$$

и искомое расстояние между фермами

$$l = 2a + c = 2 \cdot 20 + 160 = 200 \text{ } см = 2 \text{ } м.$$

Глава X

ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К НЕПОЛНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Общий вид дифференциального уравнения второго порядка

$$F(x, y, y', y'')=0.$$

Разрешив его относительно второй производной (если это возможно), получим

$$y''=f(x, y, y').$$

В приложениях часто встречаются следующие пять специальных типов уравнений, называемые неполными дифференциальными уравнениями второго порядка

$$\left.\begin{aligned} y''&=f(x),\\ y''&=f(y),\\ y''&=f(y'),\\ y''&=f(x, y'),\\ y''&=f(y, y'). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Уравнения (1) решаются методом понижения порядка, т. е. введением новой искомой функции

$$p=\frac{dy}{dx}=y'. \tag{2}$$

Тогда

$$y''=\frac{dp}{dx} \tag{3}$$

или (во втором и пятом случаях при наличии y)

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}p. \tag{3a}$$

Подстановка значений (2) и (3) или (3a) в уравнения (1) сводит их к уравнениям первого порядка

$$\left.\begin{aligned} dp&=f(x)\,dx,\\ p\,dp&=f(y)\,dy,\\ \frac{dp}{f(p)}&=dx,\\ dp&=f(x, p)\,dx,\\ p\,dp&=f(y, p)\,dy. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Общее решение уравнений (4) имеет вид

$$p=\varphi(x)+C$$

или

$$p=\psi(y)+C.$$

Используя зависимость (2), получаем уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x)+C$$

или

$$\frac{dy}{dx}=\psi(y)+C.$$

I. УРАВНЕНИЯ ТИПА $y''=f(x)$

§ 1. ПЕРЕХОДНАЯ КРИВАЯ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ПУТИ

Задача 115. Найти уравнение кривой железнодорожного пути, переходящей плавно от прямого направления к круговому, если длина переходной кривой l, а радиус кругового пути r.

Решение. Кривизна переходной кривой $\frac{1}{R}$ равномерно изменяется от нуля до $\frac{1}{r}$ (рис. 63).

Следовательно, $\frac{1}{R}=ks$, где k — коэффициент пропорциональности, s — длина дуги от начала переходной кривой до текущей точки $M(x, y)$.

Коэффициент k определяется из условия: при $s=l$ $\frac{1}{R}=\frac{1}{r}$; откуда

$$\frac{1}{r}=kl$$

и

$$k=\frac{1}{rl}.$$

Итак, имеем:

$$\frac{1}{R}=\frac{s}{rl}.$$

Переходная кривая по всей длине l незначительно отклоняется от оси абсцисс, и величину s можно заменить абсциссой x точки M.

Следовательно, угловой коэффициент касательной $\frac{dy}{dx}$ в точке M будет очень мал, и поэтому в дифференциальной формуле кривизны

$$\frac{1}{R}=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

величиной y'^2 можно пренебречь.

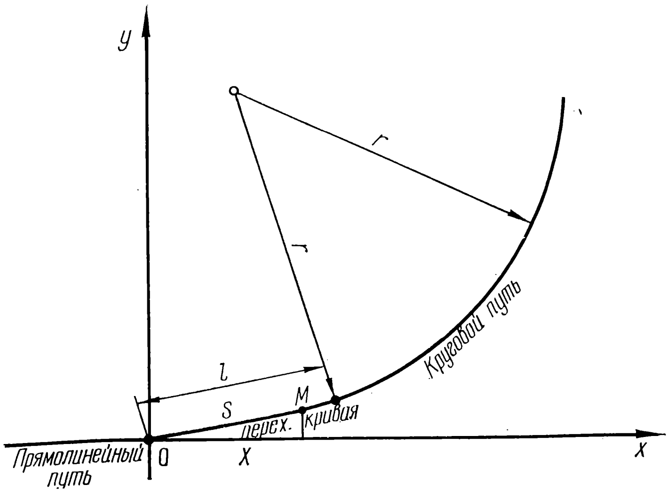

Рис. 63

Таким образом, полагаем $s=x$ и

$$\frac{1}{R}=y''.$$

Упрощенное дифференциальное уравнение переходной кривой

$$y''=\frac{x}{rl}.$$

Общее решение этого уравнения

$$y=\frac{x^3}{6rl}+C_1x+C_2.$$

Начальные условия: при $x=0$ $y=0$ и $y'=0$, откуда

$$C_1=0, \quad C_2=0.$$

Подставляя эти значения в общее решение, находим искомое уравнение переходной кривой

$$y=\frac{x^3}{6rl}.$$

§ 2. ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Сила зависит от времени: $F=F(t)$

Задача 116. Вожатый трамвая, выключая постепенно реостат, увеличивает мощность вагонного двигателя таким образом, что сила тяги возрастает от нуля пропорционально времени, увеличиваясь на 120 *кГ* в течение каждой секунды. Найти закон движения вагона, если сила тяжести вагона $P=10$ *Т*; сопротивление трения постоянно и равно 200 *кГ*; начальная скорость равна нулю.

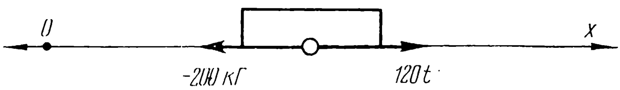

Рис. 64

Решение. Центр тяжести вагона движется по горизонтальной прямой. Начало координат поместим в начальное положение центра тяжести вагона (рис. 64). Проектируя внешние силы, приложенные к вагону, на ось абсцисс, получим силу тяги, равную $120t$, и силу сопротивления, равную 200 *кГ*, где t — время с момента выключения реостата. На основании второго закона Ньютона запишем дифференциальное уравнение движения вагона

$$\frac{P}{g}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}=120t-200. \qquad (1)$$

Начало движения вагона не совпадает с моментом выключения реостата. Время t_0 соответствует началу движения и определяется из условия равенства силы тяги и силы сопротивления

$$120t_0=200,$$

откуда

$$t_0=\frac{5}{3}\ сек.$$

Для удобства вычислений величину $120t-200$ обозначим через $120t_1$. Тогда

$$t_1=t-\frac{200}{120}=t-\frac{5}{3},$$

где t — время начала выключения реостата.

Дифференциальное уравнение (1) примет вид

$$\frac{P}{g}\,\frac{d^2x}{dt^2}-120t_1=0. \qquad (2)$$

Интегрируя уравнение (2), получим

$$\frac{dx}{dt_1}=\frac{120g}{P}\cdot\frac{t_1^2}{2}+C_1. \qquad (3)$$

Определим постоянную интегрирования C_1. При $t_1=0$ $\frac{dx}{dt_1}=0$. Отсюда

$$C_1=0.$$

Интегрируя уравнение (3), находим общее решение уравнения (2):

$$x=\frac{120g}{P}\cdot\frac{t_1^3}{6}+C_2. \qquad (4)$$

Определяем величину C_2. При $t_1=0$ $x=0$. Следовательно,

$$C_2=0.$$

На основании равенства (4) находим решение уравнения движения вагона

$$x=\frac{120g}{6P}\left(t-\frac{5}{3}\right)^3=\frac{120\cdot 9{,}81}{6\cdot 10\,000}\left(t-\frac{5}{3}\right)^3$$

или

$$x=0{,}01962\left(t-\frac{5}{3}\right)^3 \text{ м}.$$

Сила обратно пропорциональна кубу расстояния

Задача 117. Найти закон движения материальной точки массой m по прямой OA (рис. 65) под действием отталкивающей силы, обратно пропорциональной третьей степени расстояния точки $x=OM$ от неподвижного центра O.

Решение. Дифференциальное уравнение движения точки, согласно второму закону динамики,

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{k}{x^3}, \tag{1}$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Уравнение (1) можно представить в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{k}{m}\cdot\frac{1}{x^3}=a^2\frac{1}{x^3}$$

или

$$x''=a^2\frac{1}{x^3}.$$

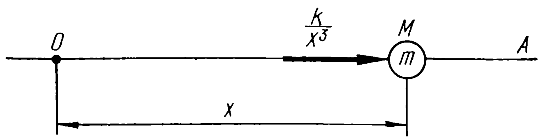

Рис. 65

Умножим обе части уравнения на $2x'dt$:

$$2x'x''dt=2a^2\frac{x'dt}{x^3}.$$

Левая часть последнего равенства есть дифференциал от x'^2:

$$d(x'^2)=2a^2\frac{dx}{x^3}=a^2d\left(-\frac{1}{x^2}\right);$$

отсюда

$$x'^2=a^2\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{C_1}\right)=\frac{a^2}{C_1}\cdot\frac{x^2-C_1}{x^2}$$

и

$$x'=\pm\frac{a}{\sqrt{C_1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2-C_1}}{x}$$

или

$$\frac{dx}{dt}=\pm\frac{a}{\sqrt{C_1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2-C_1}}{x}.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{xdx}{\sqrt{x^2-C_1}}=\pm\frac{a}{\sqrt{C_1}}dt. \tag{2}$$

Решая уравнение (2), придем к равенству

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-C_1}} = \pm \frac{a}{\sqrt{C_1}}(t+C_2).$$

Окончательно

$$\sqrt{x^2-C_1} = \pm \frac{a}{\sqrt{C_1}}(t+C_2)$$

или

$$x^2-C_1 = \frac{a^2}{C_1}(t+C_2)^2.$$

§ 3. УПРУГАЯ ЛИНИЯ БАЛОК

Консоли

Задача 118. Консольная стальная балка длиной $l=6$ *м* нагружена сосредоточенной силой $P=2T$ в конце B (рис. 66). Найти уравнение упругой линии (кривой изгиба) и определить величину прогиба конца балки (модуль упругости $E=2\,100\,000$ *кГ/см*^{2}, $J=30\,000$ *см*^{4}).

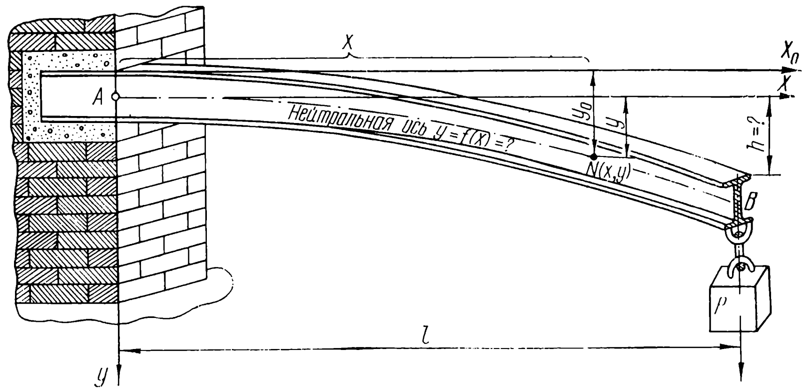

Рис. 66

Решение. Определяем изгибающий момент M для сечения с центром в точке $N(x, y)$ (рис. 66). В данном случае M равен моменту силы P относительно точки N, взятому со знаком плюс (сила приложена к балке справа от сечения и вращает правую часть балки по часовой стрелке), т. е.

$$M=P(l-x). \tag{1}$$

Подставляя выражение (1) в уравнение (2) задачи 114, получаем дифференциальное уравнение упругой линии

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{P}{EJ}(l-x). \qquad (2)$$

Непосредственным интегрированием находим

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{P}{EJ}\int(l-x)d(l-x)=-\frac{P}{EJ}\cdot\frac{(l-x)^2}{2}+C_1,$$

откуда общее решение

$$y=\frac{P}{EJ}\cdot\frac{(l-x)^3}{6}+C_1x+C_2. \qquad (3)$$

Константы C_1 и C_2 определяем из начального условия: на заделанном конце $x=0$, $y=0$ и $\frac{dy}{dx}=0$. Отсюда

$$\left.\begin{aligned}0&=\frac{P}{EJ}\cdot\frac{l^3}{6}+C_1\cdot 0+C_2,\\ 0&=-\frac{P}{EJ}\cdot\frac{l^2}{2}+C_1\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

и окончательно

$$C_1=\frac{P}{EJ}\cdot\frac{l^2}{2}, \quad C_2=-\frac{P}{EJ}\cdot\frac{l^3}{6}.$$

Подставляя значения C_1 и C_2 в общее решение (3), получим искомое уравнение упругой линии

$$y=\frac{P}{2EJ}\left(lx^2-\frac{x^3}{3}\right). \qquad (5)$$

Прогибом балки называется ордината упругой линии в рассматриваемом сечении. Величина прогиба h на конце балки B получается из уравнения (5) при $x=l$:

$$h=\frac{P}{2EJ}\left(l^3-\frac{l^3}{3}\right)=\frac{Pl^3}{3EJ}.$$

Подставляя числовые значения и приводя их к единой размерности, находим величину прогиба

$$h=\frac{2000\cdot 600^3}{3\cdot 2\,100\,000\cdot 30\,000}=2{,}3\ \textit{см}.$$

Задача 119. Труба для стока воды выходит из стены на длину l. Внутренний диаметр трубы $d=16$ *см*. Толщина стенки 2 *см*. Чему должна равняться длина l, чтобы прогиб на конце трубы $h=0{,}5$ *см*? Удельный вес стали $\gamma=7{,}8$; модуль упругости $E=2\cdot 10^6$ *кГ/см²*.

Решение. Трубу можно рассматривать как консольную балку, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой q. На элемент трубы $d\xi$ (рис. 67) действует элементарная нагрузка $qd\xi$.

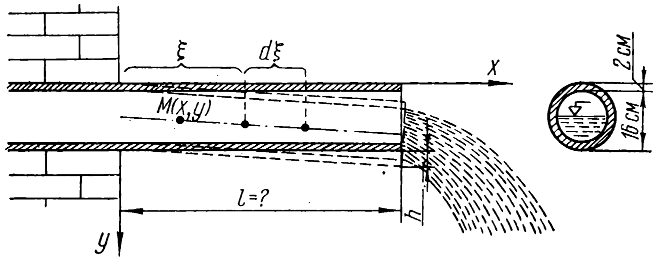

Рис. 67

Ее момент относительно точки N равен $q(\xi-x)d\xi$, откуда изгибающий момент

$$M=\int_x^l q(\xi-x)\,d\xi=q\frac{(l-x)^2}{2}.$$

Подставляя это значение в дифференциальное уравнение упругой линии, получим

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{q}{2EJ}(l-x)^2. \qquad (1)$$

Интегрируя уравнение (1), находим общее решение

$$y=\frac{q}{24EJ}(l-x)^4+C_1x+C_2. \qquad (2)$$

Начальные условия: в заделанном конце балки $x=0$, $y=0$, $y'=0$, откуда

$$C_1=\frac{ql^3}{6EJ},\quad C_2=-\frac{ql^4}{24EJ}. \qquad (3)$$

Подставляя значения (3) в общее решение (2), запишем искомое уравнение упругой линии

$$y=\frac{q}{24EJ}(6l^2x^2-4lx^3+x^4).$$

Прогиб на конце

$$h = \frac{q}{24EJ}(6l^4 - 4l^4 + l^4) = \frac{ql^4}{8EJ}. \qquad (4)$$

Решая уравнение (4) относительно искомого l, получим

$$l = \sqrt[4]{\frac{8EJh}{q}}.$$

Определяем нагрузку q и момент инерции J.

Пусть q_1 — вес 1 *см* трубы; q_2 — вес воды на 1 *см* длины трубы. Тогда общая нагрузка $q = q_1 + q_2$. Так как

$$q_1 = \frac{\pi}{4}(20^2 - 16^2)\,7{,}8 = 882\ \textit{Г/см},$$

$$q_2 = \frac{\pi}{4}\cdot 16^2 \cdot 1 = 201\ \textit{Г/см},$$

то

$$q = 1083\ \textit{Г/см} = 1{,}083\ \textit{кГ/см}.$$

Момент инерции круга относительно диаметра d равен $\frac{\pi d^4}{64}$. Таким образом, момент инерции относительно нейтральной оси площади поперечного сечения трубы

$$J = \frac{\pi}{64}(20^4 - 16^4) = 4710\ \textit{см}^4.$$

Подставляя найденные и данные величины в уравнение (5), найдем искомую длину трубы

$$l = \sqrt[4]{\frac{8\cdot 2\cdot 10^6\cdot 4710\cdot 0{,}5}{1{,}083}} = 431\ \textit{см}.$$

Балки на двух опорах

Задача 120. На двухопорную балку OA длиной l действует сосредоточенная сила P, приложенная к точке B на расстояниях l_1 и l_2 от концов. Найти уравнение упругой линии и определить прогиб h в точке B.

Решение. Для определения неизвестных опорных реакций N_1 и N_2 напишем в точках O и A уравнения моментов действующих сил относительно этих опор:

$$N_1 l = P l_2 \quad \text{и} \quad N_2 l = P l_1,$$

откуда

$$N_1 = \frac{Pl_2}{l}, \quad N_2 = \frac{Pl_1}{l}.$$

Составим уравнение для изгибающего момента.

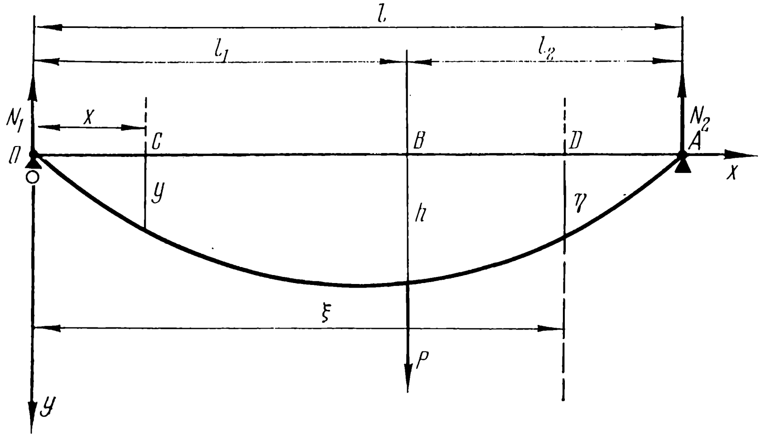

Рис. 68

В любом сечении $C(x, y)$ части OB балки (рис. 68) получим

$$M = P(l_1 - x) - N_2(l - x)$$

или

$$M = P(l_1 - x) - \frac{Pl_1}{l}(l - x). \tag{1}$$

В любом сечении $D(\xi, \eta)$ части BA балки имеем:

$$M = -N_2(l - \xi) = -\frac{Pl_1}{l}(l - \xi). \tag{2}$$

Моменты (1) и (2) подставим в дифференциальное уравнение упругой линии и получим два разных дифференциальных уравнения соответственно для частей OB и BA балки:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{EJ}(l_1 - x) - \frac{Pl_1}{lEJ}(l - x),$$

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = -\frac{Pl_1}{lEJ}(l - \xi).$$

Решая оба эти уравнения типа $y''=f(x)$, получим для левой части балки: первый интеграл

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{P}{2EJ}(l_1-x)^2+\frac{Pl_1}{2lEJ}(l-x)^2+C_1,$$

второй интеграл, т. е. общее решение,

$$y=\frac{P}{6EJ}(l_1-x)^3-\frac{Pl_1}{6lEJ}(l-x)^3+C_1x+C_2.$$

Для правой части балки: первый интеграл

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{Pl_1}{2lEJ}(l-\xi)^2+C_3,$$

второй интеграл, т. е. общее решение,

$$\eta=-\frac{Pl_1}{6lEJ}(l-\xi)^3+C_3\xi+C_4.$$

Начальные условия на опорах O и A:

1) $x=0$ и $y=0$; 2) $\xi=l$ и $\eta=0$;

в точке B приложения силы P:

3) $x=\xi=l_1$, $y=\eta$ (общая ордината);

4) $x=\xi=l_1$, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d\eta}{d\xi}$ (общая касательная).

Подставив начальные условия в первые и вторые интегралы, найдем:

$$\left.\begin{aligned}&C_2=\frac{Pl_1}{6EJ}(l^2-l_1^2),\\&C_4=-C_3l,\\&C_2+C_1l_1=C_4+C_3l_1,\\&C_1=C_3.\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

Решаем систему (5):

$$\left.\begin{aligned}C_1&=-\frac{Pl_1}{6EJl}(l^2-l_1^2), & C_3&=-\frac{Pl_1}{6EJl}(l^2-l_1^2),\\C_2&=\frac{Pl_1}{6EJ}(l^2-l_1^2), & C_4&=\frac{Pl_1}{6EJ}(l^2-l_1^2).\end{aligned}\right\}$$

Подставляем найденные значения C_1, C_2, C_3 и C_4 в общее решение и получаем уравнение упругой линии для левой части балки

$$y=\frac{Pl_2}{6EJl}(-x^3+l^2x-l_2^2x),$$

для правой части балки

$$\eta=\frac{Pl_1}{6EJl}(\xi^3+2l^2\xi-3l\xi^2+l_1^2x-ll_1^2).$$

Стрела прогиба h при $x=\xi=l_1$:

$$y=\eta=h=\frac{Pl_1^2l_2^2}{3EJl}.$$

Задача 121. Балка на двух опорах длиной l прогибается под действием равномерно распределенной нагрузки, общий вес которой равен P. Определить уравнение упругой линии и прогиб в середине пролета.

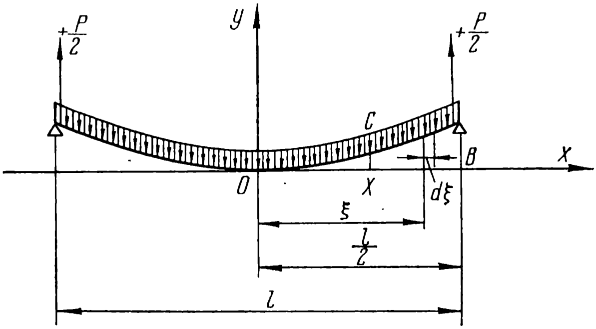

Рис. 69

Р е ш е н и е. Опорные реакции равны $+\frac{P}{2}$; на единицу длины приходится нагрузка $-\frac{P}{l}$.

Рассмотрим сечение C балки на расстоянии x от начала координат (рис. 69). Вправо от сечения сила $+\frac{P}{2}$ дает момент:

$$\left(\frac{l}{2}-x\right)\left(+\frac{P}{2}\right).$$

Вычислим момент относительно сечения C, создаваемый равномерно распределенной нагрузкой.

Нагрузка на элемент длины балки $d\xi$ с абсциссой ξ имеет величину $-\frac{P}{l}d\xi$, а ее момент относительно сечения C будет $-(\xi-x)\frac{P}{l}d\xi$. Полный момент всей нагрузки, соответствующей части балки CB, равен

$$-\int\limits_x^{\frac{l}{2}}(\xi-x)\frac{P}{l}d\xi.$$

Следовательно, суммарный момент

$$M(x)=-\int\limits_x^{\frac{l}{2}}(\xi-x)\frac{P}{l}d\xi+$$

$$+\left(\frac{l}{2}-x\right)\left(+\frac{P}{2}\right)=+\frac{P}{2}\left(\frac{l}{4}-\frac{x^2}{l}\right).$$

Как известно, дифференциальное уравнение изогнутой балки:

$$y''=\frac{M(x)}{EJ}, \tag{1}$$

где E — модуль упругости, J — момент инерции.

Для условий задачи уравнение (1) принимает вид

$$y''=\frac{P}{2EJ}\left(\frac{l}{4}-\frac{x^2}{l}\right). \tag{2}$$

Начальные условия: при $x=0$ $y=0$ и $y'=0$.

Решая полученное уравнение (2) при данных начальных условиях, получаем

$$y'=\frac{P}{2EJ}\int\limits_0^x\left(\frac{l}{4}-\frac{x^2}{l}\right)dx=\frac{P}{2EJ}\left(\frac{lx}{4}-\frac{x^3}{3l}\right),$$

и общее решение

$$y=\frac{P}{2EJ}\left(\frac{lx^2}{8}-\frac{x^4}{12l}\right)=\frac{P}{48EJ}\left(3lx^2-\frac{2x^4}{l}\right);$$

Стрела прогиба в середине пролета $\left(x=\frac{l}{2}\right)$ равна

$$h=\frac{P}{48EJ}\left(3l\cdot\frac{l^2}{4}-\frac{2}{l}\cdot\frac{l^4}{16}\right)=\frac{5}{8}\cdot\frac{Pl^3}{48EJ}.$$

Задача 122. Найти уравнение упругой линии и стрелу прогиба h бруса длиной l и шириной b, опирающегося на две опоры O и A (рис. 70) и подверженного напору воды, уровень которой приходится против верхней опоры.

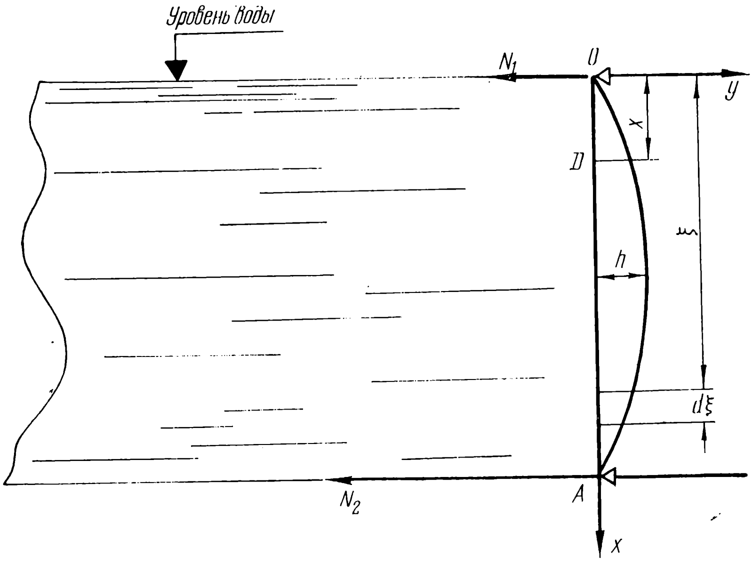

Рис. 70

Решение. На глубине ξ выделим элементарную площадку бруса шириной b и высотой $d\xi$. Поскольку площадь ее $bd\xi$, а глубина погружения ξ, то гидростатическое давление воды на площадку будет $dQ=b\xi d\xi$. Это элементарное давление вызовет на опорах элементарные реакции

$$dN_1=\frac{l-\xi}{l}dQ \quad \text{и} \quad dN_2=\frac{\xi dQ}{l}$$

или

$$dN_1=\frac{(l-\xi)\,b\xi d\xi}{l} \quad \text{и} \quad dN_2=\frac{b\xi^2 d\xi}{l},$$

откуда опорные реакции

$$N_1=\frac{b}{l}\int_0^l (l-\xi)\xi d\xi=\frac{bl^2}{6},\quad N_2=\frac{b}{l}\int_0^l \xi^2 d\xi=\frac{bl^2}{3}.$$

Момент элементарной нагрузки $b\xi d\xi$ относительно точки D будет $b\xi d\xi(\xi-x)$. Отсюда изгибающий момент для сечения D от всех действующих сил

$$M=b\int_x^l (\xi-x)\xi d\xi-N_2(l-x)=b\int_x^l (\xi-x)\xi d\xi-\frac{al^2}{3}(l-x)=$$
$$=\frac{b}{6}(x^3-l^2x).$$

Дифференциальное уравнение упругой линии

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{b}{6EJ}(x^3-l^2x).$$

Это уравнение типа $y''=f(x)$. Его общее решение

$$y=\frac{b}{6EJ}\left(\frac{x^5}{20}-\frac{l^2x^3}{6}+C_1x+C_2\right).$$

Начальные условия: при $x=0$ $y=0$ и при $x=l$ $y=0$. Отсюда получаем систему уравнений для определения постоянных интегрирования

$$\left.\begin{aligned}&\frac{C_2b}{6EJ}=0,\\&\left(C_1l+C_2-\frac{7l^5}{60}\right)\frac{b}{6EJ}=0,\end{aligned}\right\}$$

откуда

$$C_1=\frac{7}{60}l^4,\quad C_2=0. \tag{1}$$

Подставляем значения (1) в общее решение и получаем искомое уравнение упругой линии:

$$y=\frac{b}{360EJ}(3x^5-10l^2x^3+7l^4x).$$

Стрела прогиба $h=y_{\max}$.

Для удобства отыскания максимума y введем новую переменную t подстановкой $x=lt$. Когда x изменяется в интервале $(0, l)$, величина t изменяется в интервале (0, 1). После подстановки получим

$$y=\frac{bl^5}{360EJ}(3t^5-10t^3+7t)$$

и

$$\frac{dy}{dt}=\frac{bl^5}{360EJ}(15t^4-30t^2+7). \tag{2}$$

Для определения максимума приравниваем нулю переменную часть уравнения (2):

$$15t^4-30t^2+7=0. \tag{3}$$

В интервале (0, 1) уравнение (3) имеет корень

$$t_0=\sqrt{1-2\sqrt{\frac{2}{15}}}=0{,}519,$$

соответствующий максимуму для y, что легко проверяется второй производной.

Итак, стрела прогиба

$$h=\frac{bl^5}{360EJ}(3t_0^5-10t_0^3+7t_0)=2{,}348\frac{bl^5}{360EJ}\approx 0{,}0065\frac{bl^5}{EJ}.$$

Многопролетная балка

Задача 123. Для любого сечения изогнутого под давлением P рельса железнодорожного пути изгибающий момент

$$M=P\sqrt[4]{\frac{EJ}{64k}}\cdot e^{-x\sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}}\left(\cos x\sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}-\sin x\sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}\right);$$

где k — коэффициент жесткости упругого основания пути.

Составить уравнение упругой линии и вычислить прогиб h рельса в точке приложения силы давления P (рис. 71), учитывая, что

$$y=0 \text{ при } x=\frac{3}{4}\pi\sqrt[4]{\frac{4EJ}{k}} \text{ и } \frac{dy}{dx}=0 \text{ при } x=0.$$

Решение. Вводим обозначения:

$$P\sqrt[4]{\frac{EJ}{64k}}=a \quad\text{и}\quad \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}=b.$$

Тогда уравнение упругой линии

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M(x)}{EJ}$$

или

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{a}{EJ}e^{-bx}(\cos bx-\sin bx). \qquad (1)$$

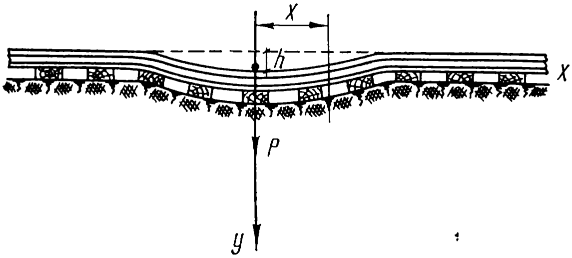

Рис. 71

Интегрируя уравнение (1), получим

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a}{EJ}\left[\int e^{-bx}\cos bxdx-\int e^{-bx}\sin bxdx\right]; \qquad (2)$$

Для вычисления правой части первый из интегралов берем по частям.

Пусть

$$u=e^{-bx},\ du=-be^{-bx}dx,\ dv=\cos bxdx,\ v=\frac{1}{b}\sin bx.$$

Тогда

$$\int e^{-bx}\cos bxdx=\frac{1}{b}e^{-bx}\sin bx+\int e^{-bx}\sin bxdx.$$

Для вычисления второго интеграла из уравнения (2) полагаем

$$u=e^{-bx},\quad dv=\sin bxdx.$$

Тогда

$$du=-be^{-bx}dx,\quad v=-\frac{1}{b}\cos bx.$$

Следовательно,

$$\int e^{-bx}\sin bxdx=-\frac{1}{b}e^{-bx}\cos bx-\int e^{-bx}\cos bxdx.$$

Подставляя полученные выражения для интегралов в равенство (2), получаем

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a}{bEJ}e^{-bx}\sin bx+C_1. \qquad (3)$$

Так как при $x=0$ $\frac{dy}{dx}=0$, то

$$0=\frac{a}{bEJ}e^{-b\cdot 0}\sin b\cdot 0+C_1$$

и

$$C_1=0.$$

Таким образом, первый интеграл равен

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a}{bEJ}e^{-bx}\sin bx.$$

Интегрируя вторично, получим второй интеграл

$$y=-\frac{a}{2b^2EJ}e^{-bx}(\sin bx+\cos bx)+C_2. \qquad (4)$$

Так как при $x=\frac{3}{4}\pi\sqrt[4]{\frac{4EJ}{k}}=\frac{3\pi}{4b}$ $y=0$, то

$$0=-\frac{a}{2b^2EJ}e^{-b\cdot\frac{3\pi}{4b}}\left(\sin b\cdot\frac{3\pi}{4b}+\cos b\cdot\frac{3\pi}{4b}\right)+C_2$$

и

$$C_2=0.$$

Уравнение упругой линии

$$y=-\frac{a}{2b^2EJ}e^{-bx}(\sin bx+\cos bx)$$

или, возвращаясь к данным величинам,

$$y=-\frac{P}{\sqrt[4]{64EJk^3}}e^{-x\sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}}\left(\cos x\sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}+\sin x\sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}\right)$$

и при $x=0$ находим абсолютную величину стрелы прогиба

$$h=\frac{P}{\sqrt[4]{64EJk^3}}.$$

II. УРАВНЕНИЯ ТИПА $y''=f(y)$

§ 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Задача 124. Радиус кривизны в произвольной точке кривой равен кубу длины нормали в этой точке. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (0, 1) и в этой точке параллельной оси абсцисс.

Решение. Длина нормали $y\sqrt{1+y'^2}$. По условию задачи получаем дифференциальное уравнение искомого семейства

$$R=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}=(y\sqrt{1+y'^2})^3$$

или

$$y''=\frac{1}{y^3}.$$

Решая это дифференциальное уравнение, находим

$$x+C_2=\frac{1}{C_1}\sqrt{C_1y^2-1}. \qquad (1)$$

Дополнительные условия: кривая проходит через точку (0, 1) и при $x=0$ $y'=0$. Отсюда

$$0+C_2=\frac{1}{C_1}\sqrt{C_1\cdot 1^2-1}$$

или

$$C_1^2C_2^2=C_1-1. \qquad (2)$$

Так как, дифференцируя уравнение (1), находим

$$y'=\frac{C_1(x+C_2)}{\sqrt{C_1(x+C_2)^2+1}},$$

то

$$0=\frac{C_1(0+C_2)}{\sqrt{C_1(0+C_2)^2+1}}. \qquad (3)$$

Для определения постоянных интегрирования имеем систему уравнений (2) и (3). Из равенства (3) находим $C_1C_2=0$, т. е. $C_1=0$ или $C_2=0$. Если $C_1=0$, то уравнение (2) дает $-1=0$, следовательно, $C_1\neq 0$ и $C_2=0$. Тогда из уравнения (2) $C_1=1$.

Подставляем значения $C_1=1$ и $C_2=0$ в общее решение (1) и получаем уравнение искомой кривой

$$y^2-x^2=1.$$

§ 5. ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ ПРИТЯЖЕНИЯ

Задача 125. Материальная точка массой m движется по прямой линии к центру O (рис. 72), притягивающему ее с силой $\frac{mk^2}{r^3}$, где r — расстояние точки от центра. Движение начинается с состояния покоя при $r=a$. Найти время, по истечении которого точка достигнет центра.

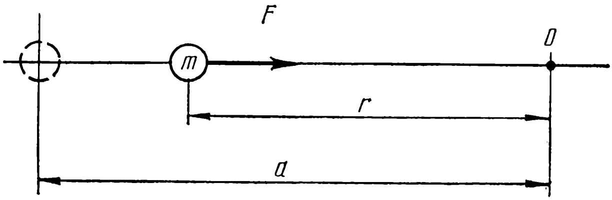

Рис. 72

Решение. По условию задачи в любой момент t на точку действует сила $F=-\frac{km}{r^3}$.

Отсюда получаем дифференциальное уравнение движения

$$m\frac{d^2r}{dt^2}=-\frac{km}{r^3}$$

или

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-\frac{k}{r^3}.$$

Решая его как уравнение типа $y''=f(y)$, находим общее решение

$$t+C_2=-\frac{\sqrt{C_1r^2+k}}{C_1}. \qquad (1)$$

Начальные условия: при $t=0$ $r=a$ и $\frac{dr}{dt}=0$. Из первого условия имеем:

$$0+C_2=-\frac{\sqrt{C_1a^2+k}}{C_1}.$$

Второе условие

$$\frac{ds}{dt}=-\frac{\sqrt{C_1r^2+k}}{r}$$

или

$$0=-\frac{\sqrt{C_1a^2+k}}{a}.$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 имеем систему

$$\left.\begin{array}{l} C_1C_2=-\sqrt{C_1a^2+k}, \\ C_1a^2+k=0, \end{array}\right\}$$

откуда

$$C_1=-\frac{k}{a^2}; \quad C_2=0. \tag{2}$$

Подставляя значения (2) в общее решение (1), получим

$$t=\frac{a\sqrt{a^2-r^2}}{\sqrt{k}}.$$

Когда точка достигает центра O, расстояние $r=0$ и искомое время

$$t=\frac{a^2}{\sqrt{k}}.$$

III. УРАВНЕНИЯ ТИПА $y''=f(y')$

§ 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИВОЙ ПО РАДИУСУ КРИВИЗНЫ

Задача 126. Кривая, проходящая через точки $A(5, 7)$ и $B(6, 6)$, имеет радиус кривизны $R=5$. Найти уравнение этой кривой.

Решение. Радиус кривизны

$$R=\frac{[1+y'^2]^{3/2}}{y''}.$$

По условию задачи $R=5$ и получаем дифференциальное уравнение искомого семейства

$$\frac{[1+y'^2]^{3/2}}{y''}=5. \tag{1}$$

Общее решение дифференциального уравнения (1) типа $y''=f(y')$ будет

$$(x-C_1)^2+(y-C_2)^2=25.$$

Дополнительное условие: кривая проходит через точки $A(5, 7)$ и $B(6, 6)$, откуда

$$\left.\begin{aligned}(5-C_1)^2+(7-C_2)^2=25,\\(6-C_1)^2+(6-C_2)^2=25.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Из системы (2) определяем $C_1=2$, $C_2=3$. Подставляя эти значения в общее решение, получим

$$(x-2)^2+(y-3)^2=25.$$

Задача 127. Проекция радиуса кривизны R на ось абсцисс равна постоянной величине $a=1$. Найти уравнение кривой, если она проходит через начало координат и в этой точке ортогональна оси абсцисс.

Решение. Радиус кривизны $R=\dfrac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$. Направляющий косинус радиуса кривизны как направляющий косинус нормали

$$\cos\alpha=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

По условию задачи

$$R\cos\alpha=a,$$

откуда дифференциальное уравнение искомого семейства кривых

$$y'(1+y'^2)=ay''.$$

Решаем это уравнение типа $y''=f(y')$ и получаем его общий интеграл

$$\frac{x-C_1}{a}=\ln\sin\frac{y-C_2}{a}$$

или общее решение

$$y=a\arcsin e^{\frac{x-C_1}{a}}+C_2.$$

Начальные условия: точка (0, 0) лежит на кривой и при $x=0$ $y'=\infty$. Тогда

$$0=a\arcsin e^{\frac{0-C_1}{a}}+C_2$$

и, так как

$$y'=\frac{e^{\frac{x-C_1}{a}}}{\sqrt{1-e^{\frac{2(x-C_1)}{a}}}}$$

то

$$\infty = \frac{e^{\frac{0-C_1}{a}}}{\sqrt{1-e^{\frac{2(0-C_1)}{a}}}}.$$

Для определения постоянных интегрирования имеем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} a \arcsin e^{-\frac{C_1}{a}} + C_2 &= 0, \\ 1 - e^{-\frac{2C_1}{a}} &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда

$$C_1 = 0; \quad C_2 = -\frac{a\pi}{2}.$$

Подставляем найденные значения в общее решение и получаем

$$y = a \arcsin e^{\frac{x}{a}} - \frac{a\pi}{2}.$$

При $a=1$ имеем уравнение искомой кривой

$$y = \arcsin e^x - \frac{\pi}{2}$$

или

$$x = \ln \cos y.$$

§ 7. ГОРИЗОНТАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

Сила зависит от скорости: $F = F(v)$

Задача 128. Вагон с силой тяжести $Q=9216$ *кГ* приходит в движение под действием ветра, дующего по направлению полотна, и движется по горизонтальному участку пути (рис. 73). Сопротивление движению R вагона равно 1/200 его силы тяжести. Сила давления ветра $P=kSu^2$ *кГ*, где S — площадь задней стенки вагона, подверженная давлению ветра и равная 6 $м^2$, u — скорость ветра относительно вагона, а $k=0{,}12$ *кГ·сек²/м⁴*. Абсолютная скорость ветра $\omega=12$ *м/сек*. Считая начальную скорость вагона равной нулю, найти:

1) наибольшую скорость вагона;

2) время T, необходимое для достижения этой скорости;

3) путь x_1, который должен пройти вагон, чтобы приобрести скорость 3 *м/сек*.

Решение. Проектируя все действующие силы на горизонтальную ось, получаем уравнение равновесия рассматриваемой системы

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+R-P=0. \qquad (1)$$

Скорость ветра относительно вагона равна

$$u=\omega-\frac{dx}{dt}$$

или после дифференцирования

$$\frac{du}{dt}=-\frac{d^2x}{dt^2}. \qquad (2)$$

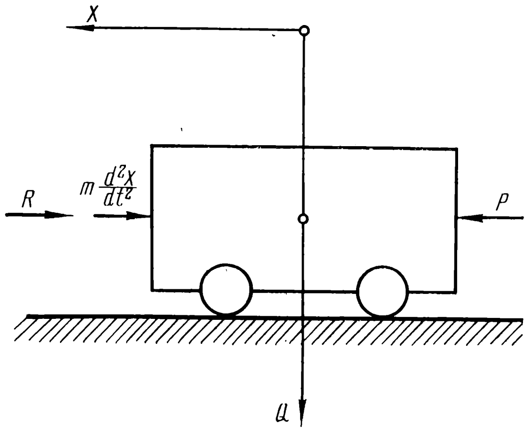

Рис. 73

Подставив значения сил в уравнение (1) и разделив его на m, получаем

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{Q}{m\cdot 200}-\frac{kSu^2}{m}=0. \qquad (3)$$

Используя равенство (2), уравнение (3) приведем к виду

$$-\frac{du}{dt}+\frac{g}{200}-\frac{kSu^2}{m}=0. \qquad (4)$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$-\int\frac{du}{\frac{g}{200}\left(1-\frac{200kS}{mg}u^2\right)}=-t+C, \qquad (5)$$

Для удобства вводим обозначение $\frac{200kS}{mg}=\alpha^2$. Тогда из уравнения (5) получаем

$$\frac{200}{\alpha g}\left[\frac{1}{2}\int\frac{-d(\alpha u)}{(\alpha u+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{d(\alpha u)}{(\alpha u-1)}\right]=-t+C$$

или

$$\frac{100}{\alpha g}\ln\frac{\alpha u-1}{\alpha u+1}=-t+C.$$

Постоянную интегрирования в общем решении уравнения (4) определяем, используя начальные условия: при $t=0$ $\frac{dx}{dt}=0$, $u=\omega$. Тогда

$$C=\frac{100}{\alpha g}\ln\frac{\alpha\omega-1}{\alpha\omega+1}.$$

Искомое частное решение

$$-t=\frac{100}{\alpha g}\ln\frac{(\alpha u-1)(\alpha\omega+1)}{(\alpha u+1)(\alpha\omega-1)},$$

откуда при $t=0$

$$\alpha=\sqrt{\frac{200kS}{mg}}=\frac{1}{8}.$$

1. Максимальная скорость вагона $v_{\max}$ будет достигнута при $t\to\infty$. Тогда

$$\alpha u-1=0,$$

$$\alpha\left(\omega-\frac{dx}{dt}\bigg|_{\infty}\right)-1=0.$$

Отсюда

$$\frac{dx}{dt}\bigg|_{\infty}=\omega-\frac{1}{\alpha}=\omega-\sqrt{\frac{mg}{200kS}}=12-\sqrt{\frac{9216}{200\cdot 0{,}12\cdot 6}}.$$

Таким образом,

$$v_{\max}=\frac{dx}{dt}\bigg|_{\infty}=4\ \textit{м/сек}.$$

2. Время, которое потребовалось бы для достижения этой скорости,

$$T\to\infty.$$

3. Найдем путь x_1, который должен пройти вагон, чтобы приобрести скорость $\frac{dx}{dt}=3$ *м/сек*:

$$\frac{du}{dt}=\frac{du}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dt}=\frac{du}{d\xi}u,$$

$$\frac{d\xi}{dt}=u=\omega-\frac{dx}{dt},$$

$$\frac{du}{dt}=-\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Интегрируем предпоследнее равенство:

$$\xi=\omega t-x.$$

Таким образом, уравнение (4) примет вид

$$-\frac{du}{d\xi}u+\frac{g}{200}-\frac{kSu^2}{m}=0.$$

Разделяя переменные, находим

$$\frac{udu}{\frac{g}{200}-\frac{kSu^2}{m}}=d\xi$$

или

$$\frac{200}{g}\cdot\frac{udu}{\left(1-\frac{kS\cdot 200}{mg}u^2\right)}=d\xi. \qquad (6)$$

Вводя предыдущее обозначение $\alpha^2=\frac{kS\cdot 200}{mg}$ и интегрируя, приходим к равенству, представляющему общее решение уравнения (6):

$$-\frac{m}{2kS}\ln C(1-\alpha^2u^2)=\xi=\omega t-x.$$

Постоянную интегрирования C определяем из начальных условий: при $x=0$ $t=0$, $u=\omega$. Тогда

$$C=\frac{1}{1-\alpha^2\omega^2}.$$

Искомое частное решение:

$$x=\omega t+\frac{m}{2kS}\ln\frac{1-\alpha^2u^2}{1-\alpha^2\omega^2}.$$

При $x=x_1$ $\frac{dx}{dt}=3$ *м/сек*, $u=9$ *м/сек* и

$$t=\frac{100}{\frac{1}{8}g}\ln\frac{1\cdot 20}{17\cdot 4}=99{,}8 \text{ сек}$$

имеем:

$$x_1=99{,}8\cdot 12+\frac{9216}{9{,}81\cdot 0{,}12\cdot 6}\ln\frac{0{,}265}{1{,}25}=187 \text{ м}.$$

Задача 129. Самолет на лыжах приземляется на горизонтальное поле; летчик подводит самолет к посадочной площадке без вертикальной скорости в момент приземления (рис. 74). Коэффициент

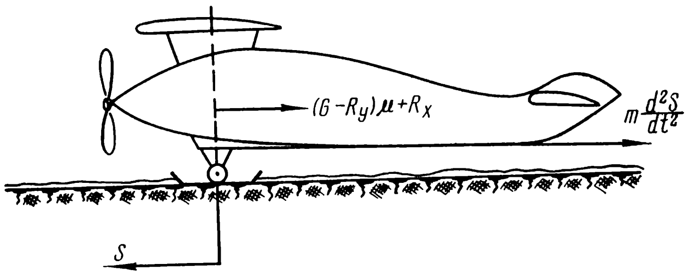

Рис. 74

трения лыж самолета о снег $\mu=0{,}08$. Сила сопротивления воздуха движению самолета пропорциональна квадрату скорости. При скорости, равной 1 *м/сек*, горизонтальная составляющая силы сопротивления $R_x=0{,}09$ *кГ*, а вертикальная составляющая, направленная вверх, $R_y=0{,}7$ *кГ*. Сила тяжести самолета 2000 *кГ*. Найти длину и время пробега самолета до остановки.

Решение. Горизонтальная составляющая силы сопротивления

$$R_x=k_x v^2,$$

где

$$k_x=0{,}09 \text{ кГ}\cdot\text{сек}^2/\text{м}^2.$$

Вертикальная составляющая силы сопротивления

$$R_y=k_y v^2,$$

где

$$k_y=0{,}7 \text{ кГ}\cdot\text{сек}^2/\text{м}^2.$$

Так как $v=\frac{ds}{dt}$, то горизонтальная и вертикальная составляющие соответственно равны

$$R_x=k_x\left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \quad R_y=k_y\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

Составляя дифференциальное уравнение движения самолета, получим

$$m\frac{d^2s}{dt^2}+R_x+\mu(mg-R_y)=0$$

или

$$m\frac{d^2s}{dt^2}+k_x\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\mu\left[mg-k_y\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right]=0. \qquad (1)$$

Делим уравнение (1) на m. Тогда дифференциальное уравнение задачи

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{k_x-\mu k_y}{m}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\mu g=0. \qquad (2)$$

Вводим обозначения:

$$\frac{k_x-\mu k_y}{m}=A; \quad \mu g=B.$$

Кроме того,

$$\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{dv}{ds}v.$$

Уравнение (2) можно записать:

$$v\frac{dv}{ds}+Av^2+B=0.$$

Разделив переменные, получаем дифференциальное уравнение

$$-\frac{vdv}{B+Av^2}=ds. \qquad (3)$$

Интегрируя обе части равенства (3), получаем

$$-\int\frac{vdv}{B+Av^2}=-\frac{1}{2A}\int\frac{d(B+Av^2)}{B+Av^2}=-\frac{1}{2A}\ln(B+Av^2)+C=s.$$

Определяем постоянную интегрирования C, используя начальное условие: при $s=0$ $v=v_0$. Тогда

$$C=\frac{1}{2A}\ln(B+Av_0^2)$$

и искомое частное решение

$$-\frac{1}{2A}\ln\left(\frac{B+Av^2}{B+Av_0^2}\right)=s.$$

При скорости $v=0$ находим длину пробега самолета до остановки:

$$s\Big|_{v=0}=\frac{1}{2A}\ln\left(1+\frac{A}{B}v_0^2\right)=$$

$$=\frac{1}{34\cdot 9{,}81}\cdot 10^6\ln\left(1+\frac{34}{16}\cdot 10^{-4}\cdot 18{,}5^2\right)=216\ \text{м}.$$

Время пробега определяем, используя уравнение (2) и соотношение $\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{dv}{dt}$. Уравнение (2) принимает вид

$$\frac{dv}{dt}+Av^2+B=0. \qquad (4)$$

В уравнении (4) разделяем переменные:

$$\frac{dv}{Av^2+B}=-dt.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\sqrt{AB}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{A}{B}}\cdot v\right)=-t+T.$$

При $t=0$ $v=v_0$ и искомое время пробега

$$T=\frac{1}{\sqrt{AB}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{A}{B}}\cdot v_0\right)=$$

$$=\frac{10^4}{g\sqrt{136}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{34}{16}}\cdot 10^{-2}\cdot 18{,}5\right)=22{,}5\ \text{сек}.$$

Движение тела в воде

Задача 130. Корабль водоизмещением $P=1500$ *т* преодолевает сопротивление воды, равное $R=\alpha v^2 m$, где $\alpha=0{,}12$, m — масса, а v — скорость корабля. Сила упора винтов направлена по скорости в сторону движения и изменяется по закону:

$$T=T_0\left(1-\frac{v}{v_s}\right),$$

где $T_0=120m$ — сила упора винтов, когда корабль находится без движения, а $v_s=\text{const}=33$ *м/сек*. Начальная скорость равна v_0.

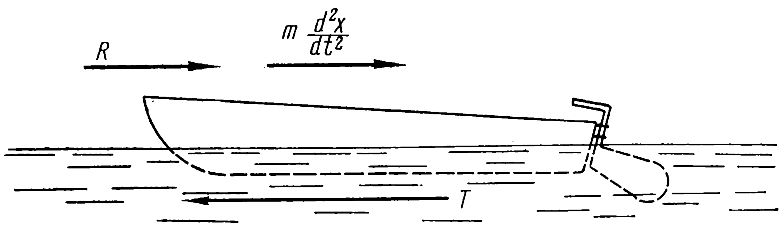

Рис. 75

Найти зависимость:

1) скорости корабля от времени;
2) пройденного пути от скорости;
3) пути от времени при $v_0=10$ *м/сек*.

Решение. Проектируя действующие силы на горизонталь (рис. 75) с учетом знаков и скорости движения корабля в виде $v=\frac{dx}{dt}$, получаем уравнение движения корабля

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\alpha\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-T_0\left(1-\frac{\frac{dx}{dt}}{v_s}\right)=0$$

или

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=T_0\left(1-\frac{\frac{dx}{dt}}{v_s}\right)-\alpha\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

Разделяя переменные, имеем

$$m\frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{T_0\left(1-\frac{\frac{dx}{dt}}{v_s}\right)-\alpha\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}=dt$$

или

$$-m\frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\alpha\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{T_0\frac{dx}{dt}}{v_s}-T_0}=dt. \qquad (1)$$

Интегрируя уравнение (1), найдем общий интеграл

$$-\frac{m}{2\sqrt{T_0\left(\alpha+\frac{T_0}{4v_s^2}\right)}}\ln\left[\frac{\sqrt{T_0\left(\alpha+\frac{T_0}{4v_s^2}\right)}-\frac{T_0}{2v_s}-\alpha\frac{dx}{dt}}{\sqrt{T_0\left(\alpha+\frac{T_0}{4v_s^2}\right)}+\frac{T_0}{2v_s}+\alpha\frac{dx}{dt}}\right]=t+C. \qquad (2)$$

Вводим обозначение:

$$\sqrt{T_0\left(\alpha+\frac{T_0}{4v_s^2}\right)}=\beta.$$

Частный интеграл находим из уравнения (2), используя начальное условие: при $t=0$ скорость $\frac{dx}{dt}=v_0$.

Вычисляем постоянную интегрирования

$$C=-\frac{m}{2\beta}\ln\left[\frac{\beta-\frac{T_0}{2v_s}-\alpha v_0}{\beta+\frac{T_0}{2v_s}+\alpha v_0}\right].$$

Искомый частный интеграл

$$t=\frac{m}{2\beta}\ln\left[\frac{\left(\beta-\frac{T_0}{2v_s}+\alpha\frac{dx}{dt}\right)\left(\beta+\frac{T_0}{2v_s}+\alpha v_0\right)}{\left(\beta+\frac{T_0}{2v_s}+\alpha\frac{dx}{dt}\right)\left(\beta-\frac{T_0}{2v_s}-\alpha v_0\right)}\right]. \qquad (3)$$

Подставляя числовые значения, согласно условиям задачи, получаем

$$\beta=4{,}2;\quad \frac{T_0}{2v_0}=1{,}8;\quad \frac{2\beta}{m}=0{,}055.$$

Тогда уравнение (3) принимает вид

$$\frac{\left(50+\dfrac{dx}{dt}\right)}{\left(20-\dfrac{dx}{dt}\right)}\,\frac{(20-v_0)}{(50+v_0)}=e^{0,055t}.$$

Разрешая последнее равенство относительно $\frac{dx}{dt}$, находим

$$\frac{dx}{dt}=v=\frac{70v_0+20(v_0+50)\,(e^{0,055t}-1)}{70+(v_0+50)\,(e^{0,055t}-1)}. \tag{4}$$

Здесь v_0 в *м/сек*.

Зависимость пройденного пути от скорости находится следующим образом.

Уравнение (1) может быть записано в виде

$$\frac{mvdv}{\alpha v^2+\dfrac{T_0}{v_s}v-T_0}=-dx. \tag{5}$$

Интегрируя уравнение (5), находим

$$x=\int\frac{mvdv}{T_0-\dfrac{T_0}{v_s}v-\alpha v^2}+x_0$$

или

$$x-x_0=\frac{m}{2\alpha}\ln\left\{1-\left(\frac{\varphi+v}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2\right\}+$$

$$+\frac{m\varphi\sqrt{\varepsilon}}{2\alpha\varepsilon}\ln\left\{\frac{1+\dfrac{\varphi+v}{\sqrt{\varepsilon}}}{1-\dfrac{\varphi+v}{\sqrt{\varepsilon}}}\right\}. \tag{6}$$

Здесь для упрощения принято

$$\varphi=\frac{T_0}{2\alpha v_s}=15\ \text{м/сек};\qquad \varepsilon=\frac{T_0}{\alpha}\left(1+\frac{T_0}{4\alpha v_s^2}\right)=1225\ \text{м}^2/\text{сек}^2.$$

Подставляя числовые значения φ и ε в уравнение (6), получаем

$$x_0-x=637,5\ln\left\{1-\left(\frac{15+v}{35}\right)^2\right\}+273,9\ln\left\{\frac{50+v}{20-v}\right\}.$$

Пользуясь начальными условиями, определим величину x_0. При $t=0$ $x=0$, $v=v_0$. Следовательно,

$$x_0=637{,}5\ln\left\{1-\left(\frac{15+v_0}{35}\right)^2\right\}+273{,}9\ln\left(\frac{50+v_0}{20-v_0}\right).$$

Таким образом, искомая зависимость:

$$x=637{,}5\ln\frac{v_0^2+30v_0-1000}{v^2+30v-1000}+273{,}9\ln\frac{(v-20)(v+50)}{(v_0-20)(v_0+50)}.$$

Найдем зависимость пути от времени при начальной скорости $v_0=10$ *м/сек.*

Из уравнения (4) имеем:

$$dx=\frac{20(v_0+50)(e^{0,055t}-1)+70v_0}{(v_0+50)(e^{0,055t}-1)+70}dt=$$

$$=20dt-\frac{70(20-v_0)dt}{(v_0+50)e^{0,055t}+(20-v_0)}. \qquad (7)$$

Интегрируя уравнение (7), получаем

$$C+x=20t-70\frac{20-v_0}{v_0+50}\int\frac{dt}{e^{0,055t}+\dfrac{20-v_0}{v_0+50}}. \qquad (8)$$

Вводим обозначение $z=\dfrac{20-v_0}{v_0+50}$ и применяем подстановку $e^{0,055t}=y$; тогда $dt=\dfrac{1}{0{,}055y}dy$. Равенство (8) принимает вид

$$C+x=20t-\frac{70z}{0{,}055z}\ln\frac{e^{0,055t}}{e^{0,055t}+\dfrac{20-v_0}{v_0+50}}.$$

Находим постоянную интегрирования C, используя начальное условие: при $t=0$ $x=0$. Следовательно,

$$C=-\frac{70}{0{,}055}\ln\frac{1}{1+\dfrac{20-v_0}{v_0+50}}=196{,}3.$$

Подставляя значение $v_0=10$ *м/сек*, находим искомую зависимость пути от времени:

$$s=x\Big|_{v_0=10\text{ м/сек}}=20t-127^2\ln\frac{6e^{0,055t}}{6e^{0,055t}+1}-196{,}3.$$

Движение пули внутри вещества

Задача 131. Пуля входит в брус толщиной 12 *см* со скоростью 200 *м/сек*, а вылетает, пробив его, со скоростью 60 *м/сек*. Брус сопротивляется движению пули с силой, пропорциональной квадрату скорости движения (рис. 76). Найти время движения пули через брус.

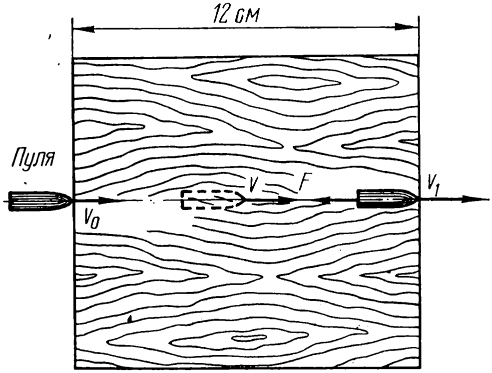

Рис. 76

Решение. Внутри бруса в любой момент t на пулю действует сила сопротивления бруса F. Она направлена против движения, а по величине пропорциональна квадрату скорости движения пули в данный момент. Таким образом,

$$F = -kv^2.$$

На основании второго закона динамики сила равна произведению массы точки на ускорение a, которое сообщается точке, т. е.

$$F = ma.$$

Сопоставляя уравнения, получим

$$ma = -kv^2. \tag{1}$$

Как известно, скорость точки

$$v = \frac{ds}{dt}, \tag{2}$$

а ускорение

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}. \tag{3}$$

Здесь s — путь, t — время.

Подставляя значения v и w в дифференциальной форме из равенств (2) и (3) в уравнение (1), получим дифференциальное уравнение движения

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{k}{m}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2. \tag{4}$$

Уравнение (4) представляет собой неполное линейное уравнение второго порядка типа

$$y'' = f(y')$$

и решается методом понижения порядка путем введения новой искомой функции:

$$\left.\begin{aligned} p = y' = \frac{dy}{dx}, \\ p' = y'' = \frac{dp}{dx}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Применение этого метода для рассматриваемого уравнения (4) приводит к следующему:

$$\frac{ds}{dt} = p; \quad \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dp}{dt}.$$

Уравнение (4) примет вид

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{k}{m}p^2.$$

Разделяя переменные p и t,

$$\frac{dp}{p^2} = -\frac{k}{m}dt$$

и почленно интегрируя, получаем

$$-\frac{1}{p} = -\frac{k}{m}t + C_1.$$

Подставляем значение p и интегрируем еще раз:

$$-\frac{dt}{ds} = -\frac{k}{m}t + C_1;$$

$$ds = \frac{dt}{\frac{k}{m}t - C_1};$$

$$s = \frac{m}{k}\int \frac{d\left(\frac{k}{m}t - C_1\right)}{\frac{k}{m}t - C_1} = \frac{m}{k}\ln\left(\frac{k}{m}t - C_1\right) + C_2. \quad (6)$$

Для перехода от общего решения (6) к частному решению определим значения произвольных постоянных C_1 и C_2 по условию задачи.

Начальные условия: при $t=0$ $s=0$ и $\frac{ds}{dt} = 200$ *м/сек*. Кроме того, продифференцировав уравнение (6), получим

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\frac{k}{m}t - C_1}. \quad (7)$$

Из уравнения (7) определим C_1:

$$200 = \frac{1}{\frac{k}{m}\cdot 0 - C_1}; \qquad C_1 = -\frac{1}{200},$$

а из уравнения (6) — C_2:

$$0 = \frac{m}{k}\ln\left(\frac{k}{m}\cdot 0 + \frac{1}{200}\right) + C_2$$

или

$$C_2 = -\frac{m}{k}\ln\frac{1}{200} = \frac{m}{k}\ln 200.$$

Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в общее решение (6), получим частное решение, изображающее уравнение движения в условиях задачи:

$$s = \frac{m}{k}\ln\left(\frac{k}{m}t + \frac{1}{200}\right) + \frac{m}{k}\ln 200 =$$

$$= \frac{m}{k}\ln\left[\left(\frac{k}{m}t + \frac{1}{200}\right)200\right] = \frac{m}{k}\ln\left(200\frac{k}{m}t + 1\right);$$

$$s = \frac{m}{k}\ln\left(200\frac{k}{m}t + 1\right). \quad (8)$$

Разрешая уравнение (8) относительно t, получим

$$200\frac{k}{m}t+1=e^{\frac{ks}{m}}$$

или

$$t=\frac{m}{200k}\left(e^{\frac{ks}{m}}-1\right). \tag{9}$$

Как видно из уравнений (8) и (9), для определения искомого времени t необходимо найти величины k и m.

Коэффициент пропорциональности k определим из дополнительного условия: при $s=h=12$ *см*$=0,12$ *м* $\frac{ds}{dt}=60$ *м/сек*.

Для применения этого дополнительного условия необходимо продифференцировать уравнение (8):

$$\frac{ds}{dt}=\frac{200}{200\frac{k}{m}t+1}. \tag{10}$$

Найденную величину t из уравнения (9) подставляем в уравнение (10), которое примет вид

$$\frac{ds}{dt}=\frac{200}{e^{\frac{ks}{m}}}. \tag{11}$$

Подстановка дополнительных условий приводит к равенству

$$60=\frac{200}{e^{0,12\frac{k}{m}}}, \tag{12}$$

откуда

$$k=\frac{\ln\frac{10}{3}}{0,12}m\approx 10,03m.$$

Анализируя полученную формулу, замечаем, что k является линейной функцией m и нет надобности в определении m, а достаточно найти величину $e^{\frac{k}{m}}$. Это упрощает выкладки.

Из уравнения (12)

$$e^{\frac{k}{m}}=\left(\frac{10}{3}\right)^{\frac{25}{3}}.$$

Подставляя числовые значения величин k и $e^{\frac{k}{m}}$ в уравнение (9), получим

$$t=\frac{m}{200\cdot 10{,}08m}\left[\left(\frac{10}{3}\right)^{\frac{25}{3}0{,}12}-1\right]=\frac{1}{2006}\left(\frac{10}{3}-1\right)\approx 0{,}00114\ \textit{сек}.$$

Итак, время прохождения пули через брус равно 0,00114 *сек* (немногим более одной тысячной доли секунды).

§ 8. ДВИЖЕНИЕ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Падение тела в воздухе

Задача 132. Тело массой m падает с некоторой высоты со скоростью v. При падении оно испытывает сопротивление, пропорциональное квадрату скорости. Найти закон движения падающего тела.

Решение. В момент времени t тело находится под действием двух сил: тяжести и сопротивления среды. Сила тяжести равна mg, сила сопротивления среды направлена в сторону, противоположную движению, и равна kv^2. Следовательно, равнодействующая этих сил равна $mg-kv^2$. С другой стороны, величина силы, действующей на тело, пропорциональна ускорению движения a и равна ma.

Итак,

$$ma=mg-kv^2. \tag{1}$$

Если путь, считая от начала отсчета, равен s, то скорость $v=\frac{ds}{dt}$, и при прямолинейном движении $a=\frac{d^2s}{dt^2}$. Равенство (1) принимает вид

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=mg-k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2. \tag{2}$$

Так как $\frac{ds}{dt}=v$, то, дифференцируя это равенство по t, имеем

$$\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{dv}{dt},$$

откуда правая часть представляется в виде

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\frac{dv}{ds}v$$

и тогда

$$\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{dv}{ds}v.$$

Преобразуем уравнение (2):

$$m\frac{dv}{ds}v=mg-kv^2$$

или

$$\frac{mvdv}{mg-kv^2}=ds,$$

откуда

$$\int\frac{mvdv}{mg-kv^2}=\int ds$$

или

$$-\frac{m}{2k}\ln|mg-kv^2|+C=s. \tag{3}$$

Пусть в начальный момент времени $t=0$ тело находилось в начале отсчета пути, т. е. $s=0$, и нáчало падать с начальной скоростью, равной нулю, т. е. $v=0$.

Подставив в уравнение (3) $s=0$ и $v=0$, находим

$$-\frac{m}{2k}\ln mg+C=0 \quad \text{и} \quad C=\frac{m}{2k}\ln mg.$$

Таким образом,

$$-\frac{m}{2k}\ln|mg-kv^2|+\frac{m}{2k}\ln mg=s$$

или

$$s=\frac{m}{2k}\ln\left|\frac{mg}{mg-kv^2}\right|.$$

Так как $\frac{ds}{dt}=v$, то

$$s=\frac{m}{2k}\ln\left|\frac{mg}{mg-k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}\right|. \tag{4}$$

Уравнение (4) представляет дифференциальное уравнение первого порядка. Решаем его относительно $\frac{ds}{dt}$:

$$\ln\left|\frac{mg}{mg-k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}\right| = \frac{2ks}{m}.$$

Так как тело падает, то, согласно уравнению (2), $m\frac{d^2s}{dt^2}>0$; следовательно,

$$mg-k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2>0$$

и

$$\frac{mg}{mg-k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}>0,$$

а поэтому имеем:

$$\frac{mg}{mg-k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}=e^{\frac{2ks}{m}}, \quad \frac{mg-k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{mg}=e^{-\frac{2ks}{m}},$$

$$\frac{ds}{dt}=\pm\sqrt{\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{2ks}{m}}\right)}.$$

Так как s — возрастающая функция t, то $\frac{ds}{dt}>0$ и перед корнем берется знак плюс:

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{2ks}{m}}\right)}.$$

Разделив переменные, получим

$$\frac{ds}{\sqrt{1-e^{-\frac{2ks}{m}}}}=\sqrt{\frac{mg}{k}}\,dt,$$

отсюда

$$\int\frac{ds}{\sqrt{1-e^{-\frac{2ks}{m}}}}=\sqrt{\frac{mg}{k}}\,t+C. \qquad (5)$$

Интеграл в левой части равенства (5) берется подстановкой

$$z=e^{\frac{ks}{m}}, \quad dz=\frac{k}{m}e^{\frac{ks}{m}}\,ds,$$

и тогда

$$ds = \frac{m}{k} e^{-\frac{ks}{m}} dz = \frac{m}{k} \cdot \frac{dz}{z}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{ds}{\sqrt{1 - e^{-\frac{2ks}{m}}}} = \frac{m}{k} \int \frac{dz}{z\sqrt{1 - \frac{1}{z^2}}} = \frac{m}{k} \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} =$$

$$= \frac{m}{k} \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) = \frac{m}{k} \ln\left(e^{\frac{ks}{m}} + \sqrt{e^{\frac{2ks}{m}} - 1}\right) = \sqrt{\frac{mg}{k}}\, t + C.$$

Подставляя в последнее равенство начальные условия $t=0$ и $s=0$, получим $C=0$.

Итак, уравнение (5) принимает вид

$$\frac{m}{k} \ln\left(e^{\frac{ks}{m}} + \sqrt{e^{\frac{2ks}{m}} - 1}\right) = \sqrt{\frac{mg}{k}}\, t,$$

откуда

$$e^{\frac{ks}{m}} + \sqrt{e^{\frac{2ks}{m}} - 1} = e^{\sqrt{\frac{kg}{m}}\, t}, \tag{6}$$

$$\frac{1}{e^{\frac{ks}{m}} + \sqrt{e^{\frac{2ks}{m}} - 1}} = e^{-\sqrt{\frac{kg}{m}}\, t}. \tag{7}$$

Умножая числитель и знаменатель левой части равенства (7) на выражение

$$e^{\frac{ks}{m}} - \sqrt{e^{\frac{2ks}{m}} - 1},$$

получаем

$$e^{\frac{ks}{m}} - \sqrt{e^{\frac{2ks}{m}} - 1} = e^{-\sqrt{\frac{kg}{m}}\, t}$$

и, учитывая равенство (6),

$$e^{\frac{ks}{m}} = \frac{e^{\sqrt{\frac{kg}{m}}\, t} + e^{-\sqrt{\frac{kg}{m}}\, t}}{2}.$$

Закон движения падающего тела:

$$s=\frac{m}{k}\ln\frac{e^{\sqrt{\frac{kg}{m}}t}+e^{-\sqrt{\frac{kg}{m}}t}}{2}.$$

Погружение тел в воду

Задача 133. Подводная лодка, не имевшая хода, получив небольшую отрицательную плавучесть P, погружается на глубину, двигаясь поступательно (рис. 77). Сопротивление воды при небольшой отрицательной плавучести можно принять пропорциональным первой степени скорости погружения и равным kSv, где k — коэф-

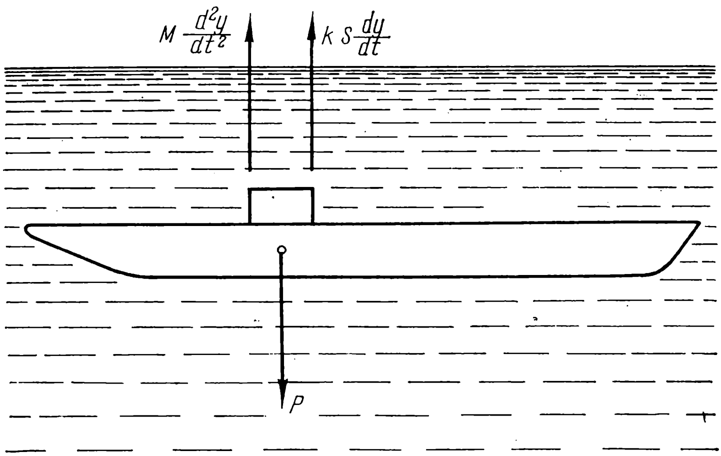

Рис. 77

фициент пропорциональности, S — площадь горизонтальной проекции лодки, v — скорость погружения. Масса лодки равна m.

Найти:

1) скорость погружения v, если при $t=0$ начальная скорость $v_0=0$;

2) путь, пройденный погружающейся лодкой за время T.

Решение. Проектируя действующие при погружении лодки силы на вертикальную ось, получаем дифференциальное уравнение движения

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+kS\frac{dy}{dt}-P=0. \tag{1}$$

Здесь $m\frac{d^2y}{dt^2}$ — произведение массы на ускорение (сила тяжести погружающейся лодки), $kS\frac{dy}{dt}$ — сопротивление воды.

Вводя подстановку $v=\frac{dy}{dt}$ и деля уравнение (1) на m, получим

$$\frac{dv}{dt}+\frac{kSv}{m}-\frac{P}{m}=0. \tag{2}$$

В уравнении (2) отделяем переменные и приходим к равенству

$$\frac{mdv}{P-kSv}=dt. \tag{3}$$

Интегрируя уравнение (3), получаем зависимость

$$-\frac{m}{kS}\ln C(P-kSv)=t. \tag{4}$$

Постоянную C определяем из начального условия: при $t=0$ $v=0$:

$$C=\frac{1}{P}.$$

Таким образом, уравнение (4) принимает вид

$$-\frac{m}{kS}\ln\frac{1}{P}(P-kSv)=-\frac{m}{kS}\ln\left(1-\frac{k}{P}Sv\right)=t.$$

После простых алгебраических преобразований найдем искомую скорость погружения:

$$\ln\left(1-\frac{k}{P}Sv\right)=-\frac{kS}{m}t,$$

$$1-\frac{k}{P}Sv=e^{-\frac{kS}{m}t},$$

$$v=\frac{P}{kS}\left(1-e^{-\frac{kS}{m}t}\right). \tag{5}$$

Для определения пути, пройденного погружающейся лодкой за время T, уравнение (5) переписываем в виде

$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{P}{kS}\left(1-e^{-\frac{kS}{m}t}\right)$$

или

$$ds=\frac{P}{kS}\left(1-e^{-\frac{kS}{m}t}\right)dt.$$

Интегрируя это уравнение первого порядка с разделенными переменными, находим путь в зависимости от времени:

$$s=\frac{P}{kS}\left(t+\frac{m}{kS}e^{-\frac{kS}{m}t}+C\right). \tag{6}$$

Определим постоянную C, используя для этого начальное условие задачи: при $t=0$ $s=0$. Из уравнения (6) получим

$$0=\frac{P}{kS}\left(\frac{m}{kS}+C\right)$$

или

$$C=-\frac{m}{kS}. \tag{7}$$

Тогда искомое частное решение

$$s=\frac{P}{kS}\left(t+\frac{m}{kS}e^{-\frac{kS}{m}t}-\frac{m}{kS}\right)=$$

$$=\frac{P}{kS}\left[t-\frac{m}{kS}\left(1-e^{-\frac{kS}{m}t}\right)\right]. \tag{8}$$

При $t=T$ пройденный путь $s=z$ выразится соотношением

$$z=\frac{P}{kS}\left[T-\frac{P}{kS}\left(1-e^{-\frac{kS}{m}T}\right)\right].$$

§ 9. РАВНОВЕСИЕ ТЯЖЕЛОЙ НИТИ

Задача 134. Определить форму, которую принимает под влиянием собственного веса гибкая тяжелая нить, подвешенная за концы C и D.

Решение. Построим систему координат в плоскости нити (рис. 78). Начало координат выберем на некотором, пока не определенном, расстоянии OA от самой низкой точки A кривой.

Рассмотрим часть кривой CD — дугу AB. На эту часть действуют силы: в точке A — горизонтальное натяжение H, в точке B — направленное по касательной натяжение T и вес части нити AB, пропорциональный длине нити. Собственный вес участка нити AB равен ps, где p — вес единицы длины нити, s — длина дуги AB.

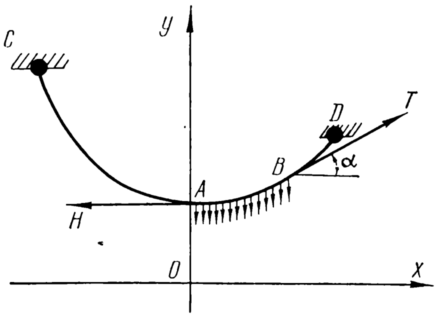

Рис. 78

Согласно условиям равновесия статики, сумма проекций вертикальных и горизонтальных составляющих равна нулю. Проектируя все силы на оси Ox и Oy, получаем соответственно

$$\left.\begin{aligned} T\cos\alpha &= H, \\ T\sin\alpha &= ps. \end{aligned}\right\}$$

Деля второе равенство на первое, находим

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{ps}{H}.$$

Так как

$$\operatorname{tg}\alpha = y',$$

то

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{ps}{H}. \tag{1}$$

Для устранения третьей неизвестной s дифференцируем уравнение (1) по x. Тогда

$$y'' = \frac{p}{H} \cdot \frac{ds}{dx}.$$

Так как

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2},$$

то уравнение примет вид

$$y''=\frac{p}{H}\sqrt{1+y'^2}. \tag{2}$$

Уравнение (2) представляет уравнение типа $y''=f(y')$. Решаем его подстановкой $y'=z$. Отсюда $y''=z'$, и уравнение (2), полагая $\frac{p}{H}=\frac{1}{a}$, перепишем в виде

$$z'=\frac{p}{H}\sqrt{1+z^2}=\frac{1}{a}\sqrt{1+z^2}. \tag{3}$$

Разделяем переменные:

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=\frac{dx}{a},$$

откуда после интегрирования найдем

$$\ln(z+\sqrt{1+z^2})=\frac{x}{a}+C_1.$$

Постоянную интегрирования определяем из начальных условий. Касательная в точке A параллельна оси абсцисс, так что при $x=0$ $y'=z=0$. Таким образом,

$$\ln 1=C_1,$$

т. е.

$$C_1=0.$$

Итак, для условий задачи

$$\ln(z+\sqrt{1+z^2})=\frac{x}{a} \tag{4}$$

или, потенцируя обе части равенства (4), получим

$$z+\sqrt{1+z^2}=e^{\frac{x}{a}}. \tag{5}$$

Уравнение (5) можно преобразовать, умножив обе его части на $z-\sqrt{1+z^2}$. Тогда

$$-1=(z-\sqrt{1+z^2})e^{\frac{x}{a}},$$

откуда

$$z-\sqrt{1+z^2}=-e^{-\frac{x}{a}}. \tag{6}$$

Складывая уравнения (5) и (6) и деля обе части полученного уравнения на 2, находим

$$z=y'=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right). \tag{7}$$

Интегрируем уравнение (7):

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)+C_2=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}+C_2.$$

Если начало координат расположено на расстоянии a от точки A, то при $x=0$ $y=a$, а поэтому $C_2=0$. При этом уравнение кривой приводится к уравнению цепной линии:

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}.$$

Форму цепной линии, в частности, принимает подвешенная за концы цепь (поскольку цепь с некоторым приближением можно считать гибкой нитью), отсюда и происхождение наименования линии.

§ 10. ГИБКАЯ НИТЬ РАВНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Задача 135. Найти уравнение подвешенной за оба конца гибкой нити, площадь поперечного сечения которой всегда пропорциональна натяжению.

Решение. При отыскании уравнения цепной линии предполагалось, что поперечные размеры нити во всех сечениях одинаковы. По условию данной задачи площадь поперечного сечения нити изменяется пропорционально натяжению. Очевидно, что в этом случае напряжения в любых сечениях нити по величине одинаковы.

Пусть ρ — плотность нити; F — переменная площадь ее поперечного сечения.

Уравнения равновесия части $AB=s$ нити принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &-H+T\cos\alpha=0,\\ &T\sin\alpha-\int\limits_0^s\rho\,F\,ds=0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где H — натяжение нити в нижней ее точке A; T — натяжение в любой точке нити; α — угол между натяжением T и осью абсцисс.

Из первого уравнения системы (1)

$$T=\frac{H}{\cos\alpha},$$

а из второго уравнения

$$T=\frac{1}{\sin\alpha}\int_0^s \rho\, Fds.$$

Приравнивая эти значения, умножая почленно на $\sin\alpha$ и учитывая, что $\operatorname{tg}\alpha=y'$, имеем:

$$H\operatorname{tg}\alpha=Hy'=\int_0^s \rho\, Fds. \qquad (2)$$

Дифференцируем уравнение (2), откуда

$$Hy''dx=\rho\, Fds.$$

Пусть σ — одинаковое для всех сечений напряжение. Тогда

$$H=F_0\sigma, \quad T=F\sigma,$$

где F_0 — площадь поперечного сечения, центр тяжести которого по сравнению с центрами тяжести других сечений имеет самое низкое положение. В этой точке расположим начало координат. Граничные условия: при $x=0$ $y=0$ и $\operatorname{tg}\alpha=y'=0$. Тогда

$$T=F\sigma=\frac{H}{\cos\alpha}=\frac{Hds}{dx},$$

следовательно,

$$F=\frac{Hds}{\sigma dx}$$

и

$$y''=\frac{\rho}{\sigma}\left(\frac{ds}{dx}\right)^2.$$

Так как

$$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

то

$$y''=\frac{\rho}{\sigma}(1+y'^2). \qquad (3)$$

Уравнение (3) есть дифференциальное уравнение типа $f(y', y'')=0$. Преобразуем его к виду

$$\frac{dy'}{1+y'^2}=\frac{\rho dx}{\sigma},$$

откуда после интегрирования получим

$$\operatorname{arctg} y' = \frac{\rho}{\sigma} x + C.$$

На основании второго граничного условия (при $x=0$ $y'=0$) находим $C=0$.

Следовательно,

$$y' = \operatorname{tg} \frac{\rho}{\sigma} x,$$

откуда

$$y = -\frac{\sigma}{\rho} \ln \cos \frac{\rho}{\sigma} x,$$

так как новая постоянная интегрирования на основании первого граничного условия (при $x=0$ $y=0$) также равна нулю.

Уравнение цепной линии равного сопротивления имеет вид

$$e^{\frac{\rho}{\sigma} y} \cos \frac{\rho}{\sigma} x = 1.$$

IV. УРАВНЕНИЯ ТИПА $y'' = f(x, y')$

§ 11. КРИВАЯ И РАДИУС КРИВИЗНЫ

Задача 136. В точке (1, —2) кривая параллельна оси абсцисс. В любой точке радиус кривизны R равен квадрату абсциссы этой точки. Найти уравнение кривой.

Решение. По условию задачи $R=x^2$ и, приравнивая это значение дифференциальной формуле радиуса кривизны, получаем дифференциальное уравнение искомого семейства кривых

$$\frac{[1+(y')^2]^{3/2}}{y''} = x^2.$$

Решение этого дифференциального уравнения типа $y''=f(x, y')$ приводит к первому интегралу

$$C_1 - \frac{1}{x} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}},$$

где $p = \frac{dy}{dx}$.

Постоянную интегрирования определяем из дополнительного условия: в точке (1, —2) кривая параллельна оси абсцисс, т. е. при

$x=1 \quad \dfrac{dy}{dx}=p=0$, откуда

$$C_1-\frac{1}{1}=\frac{0}{\sqrt{1-0^2}}$$

или

$$C_1=1.$$

Первый интеграл принимает вид

$$1-\frac{1}{x}=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

или

$$p=\frac{dy}{dx}=\frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}.$$

Интегрируя далее, получим второй интеграл

$$y+C_2=\frac{1}{6}(2x-1)^{3/2}. \tag{1}$$

Так как кривая проходит через точку $(1, -2)$, то

$$-2+C_2=\frac{1}{6}(2\cdot 1-1)^{3/2}$$

или

$$C_2=\frac{13}{6}.$$

Подставляя значение (2) во второй интеграл (1), получим уравнение искомой кривой

$$6y=(2x-1)^{3/2}-13.$$

V. УРАВНЕНИЯ ТИПА $y''=f(y, y')$

§ 12. НАХОЖДЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КРИВОЙ ПО НОРМАЛИ И РАДИУСУ КРИВИЗНЫ

Задача 137. Длина нормали в любой точке кривой равна радиусу кривизны R кривой в этой точке. Найти уравнение кривой, параллельной оси абсцисс в точке $(0, 1)$.

Решение. Длина нормали $y\sqrt{1+y'^2}$. По условию задачи она равна радиусу кривизны. Поэтому дифференциальное уравнение искомого семейства кривых

$$\frac{[1+y'^2]^{3/2}}{y''}=y\sqrt{1+y'^2}$$

или

$$y=\frac{1+y'^2}{y''}. \tag{1}$$

Общий интеграл дифференциального уравнения (1) типа $y''=f(y, y')$ будет

$$y+\sqrt{y^2-C_1^2}=C_1e^{\frac{x+C_2}{C_1}}.$$

Дополнительное условие: кривая проходит через точку (0, 1) и в этой точке $y'=0$. Тогда

$$1+\sqrt{1^2-C_1^2}=C_1e^{\frac{0+C_2}{C_1}} \tag{2}$$

и так как

$$y'=-\frac{-e^{\frac{x+C_2}{C_1}}}{1+\frac{y}{\sqrt{y^2-C_1^2}}}=\frac{e^{\frac{x+C_2}{C_1}}\sqrt{y^2-C_1^2}}{y+\sqrt{y^2-C_1^2}},$$

то при $x=0$, $y=1$ получим

$$\frac{e^{\frac{0+C_2}{C_1}}\sqrt{1^2-C_1^2}}{1+\sqrt{1^2-C_1^2}}=0. \tag{3}$$

Постоянные интегрирования найдем из системы уравнений (2) и (3)

$$\left.\begin{aligned} &1+\sqrt{1-C_1^2}=C_1e^{\frac{C_2}{C_1}},\\ &\frac{e^{\frac{C_2}{C_1}}\sqrt{1-C_1^2}}{1+\sqrt{1-C_1^2}}=0. \end{aligned}\right\}$$

Решая ее, находим

$$C_1=1, \quad C_2=0.$$

Подставляем найденные значения постоянных интегрирования в общий интеграл и получаем уравнение искомой кривой

$$y+\sqrt{y^2-1}=e^x$$

или

$$x=\ln(y+\sqrt{y^2-1}).$$

Глава XI

ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ЛИНЕЙНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Общий вид линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$A_1y''+A_2y'+A_3y=f(x), \tag{1}$$

где A_1, A_2, A_3 — постоянные действительные коэффициенты, $f(x)$ — некоторая данная функция x или (в частном случае) постоянное число.

При $f(x)\equiv 0$ уравнение принимает вид

$$A_1y''+A_2y'+A_3y=0 \tag{2}$$

и называется однородным линейным уравнением.

Если соответственно данному уравнению (2) составить алгебраическое уравнение вида

$$A_1r^2+A_2r+A_3=0, \tag{3}$$

то такое уравнение называется характеристическим по отношению к уравнению (2). Вид общего решения уравнения (2) зависит от рода корней характеристического уравнения (3).

Случай 1. Корни характеристического уравнения r_1 и r_2 — действительные и разные числа.

Общее решение

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}.$$

Случай 2. Корни уравнения (3) — кратные (равные) действительные числа $r_1=r_2=r$.

Тогда

$$y=C_1e^{rx}+C_2xe^{rx}=(C_1+C_2x)e^{rx}.$$

Случай 3. Корни характеристического уравнения — комплексные сопряженные числа: $r_{1,2}=a\pm bi$.

Общее решение:

$$y=e^{ax}(C_1\cos bx+C_2\sin bx). \tag{4}$$

Общее решение (4) может быть также представлено в эквивалентной тригонометрической форме

$$y=Me^{ax}\sin(bx+\varphi),$$

где M и φ — постоянные величины.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения Y представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного дифференциального уравнения y и какого-либо одного частного решения неоднородного дифференциального уравнения V:

$$Y=y+V.$$

Определение частного решения, зависящего от вида правой части уравнения (1) $f(x)$, в практически встречающихся случаях сводится к следующему.

Случай 1. Правая часть представляет многочлен вида

$$f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}x+a_m.$$

Тогда

$$V=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}x+A_m.$$

Если характеристическое уравнение имеет корень, равный нулю, кратности k $(k=1, 2)$, то тогда

$$V=x^k(A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}x+A_m).$$

Случай 2. Правая часть представляет собой показательную функцию вида

$$f(x)=ae^{px},$$

где a — постоянная величина или многочлен от x; p — постоянное число. Тогда

$$V=Ae^{px},$$

где A — соответственно константа или многочлен.

Если характеристическое уравнение имеет корень p кратности k $(k=1, 2)$, то

$$V=Ax^ke^{px}.$$

Случай 3. Правая часть — тригонометрический многочлен

$$f(x)=a_1\sin bx+a_2\cos bx.$$

Тогда

$$V=A_1\sin bx+A_2\cos bx.$$

Если характеристическое уравнение имеет корни $\pm bi$ кратности k, то

$$V=x^k(A_1\sin bx+A_2\cos bx).$$

Случай 4. Правая часть представляет собой комбинированный случай вида

$$f(x)=e^{ax}(c_1\sin bx+c_2\cos bx).$$

Тогда

$$V = e^{ax}(C_1 \sin bx + C_2 \cos bx).$$

Здесь c_1, c_2 и соответственно C_1 и C_2 могут быть многочленами или постоянными величинами.

Если характеристическое уравнение имеет корни $a+bi$ и $a-bi$ кратности k, то

$$V = x^k e^{ax}(C_1 \sin bx + C_2 \cos bx).$$

Случай 5. Если правая часть $f(x)$ представляет сумму функций рассмотренных видов, то частное решение V равно сумме соответствующих функций.

Коэффициенты $A, A_1, A_2, \ldots, A_m, C_1, C_2$ являются коэффициентами или многочленами, подлежащими определению. Они должны определяться так, чтобы V действительно являлось частным решением уравнения (1): после подстановки V в уравнение (1) оно обратится в тождество, из которого приравниванием коэффициентов подобных членов обеих частей определяются искомые коэффициенты или многочлены при условии, что их полная форма предварительно задана.

Динамика точки

Если материальная точка находится под воздействием силы $f\left(x, \dfrac{dx}{dt}, t\right)$, то уравнение ее движения вдоль прямой имеет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right). \qquad (1)$$

Рассмотрим частные случаи дифференциального уравнения движения точки.

Случай 1. Сила f зависит только от скорости $v = \dfrac{dx}{dt}$.

а) Сила сопротивления f_c (сопротивление среды) пропорциональна скорости $f_c = kv$.

б) Сила сопротивления f_c пропорциональна квадрату скорости $f_c = kv^2$.

Уравнение движения точки (1) принимает вид

$$m\frac{dv}{dt} = f(v) = f\left(\frac{dx}{dt}\right).$$

Это уравнение типа $y'' = F(y')$.

Случай 2. Сила f зависит только от пройденного расстояния x. Уравнение движения точки (1) принимает вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \qquad (2)$$

Это уравнение типа $y''=F(x)$.

Уравнение (2) решаем не общим методом, а как линейное уравнение с постоянными коэффициентами.

Случай 3. Сила f зависит от пройденного расстояния x и скорости $v=\frac{dx}{dt}$, но не зависит явно от времени t (или зависит от времени t и скорости $v=\frac{dx}{dt}$, но не зависит явно от x).

а) Прямолинейное движение материальной точки подчинено упругой связи с трением, причем сила трения пропорциональна скорости. Уравнение движения (1) принимает вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-\beta\frac{dx}{dt}.$$

Это однородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами $\frac{\beta}{m}$ и $\frac{k}{m}$.

б) На материальную точку действует периодическая сила $f=A\sin\omega t$. Сопротивление среды пропорционально скорости движения v.

Уравнение движения (1) принимает вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=A\sin\omega t-\beta\frac{dx}{dt}.$$

Это неоднородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами.

в) На материальную точку действует периодическая сила $f=A\sin\omega t$. Сопротивление среды пропорционально квадрату скорости.

Уравнение движения (1) принимает вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=A\sin\omega t-\beta\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

Понижаем порядок уравнения подстановкой $\frac{dx}{dt}=v$:

$$m\frac{dv}{dt}=A\sin\omega t-\beta v^2. \tag{3}$$

Уравнение (3) интегрируется приближенными способами.

Случай 4 (общий). Сила f зависит от времени t, расстояния x и скорости $v=\frac{dx}{dt}$, т. е. имеют место вынужденные колебания материальной точки, подчиненной упругой связи под действием внешней периодической силы.

Уравнение движения (1) примет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+ax=A\sin\omega t$$

или с учетом сопротивления среды

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+k\frac{dx}{dt}+ax=A\sin\omega t,$$

т. е. представляет неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами $\frac{k}{m}$ и $\frac{a}{m}$.

Исследование колебаний

Свободные колебания

Пусть груз массой m подвешен на пружинной рессоре.

Отклонение груза от положения равновесия y, направленное вниз, считается положительным, вверх — отрицательным.

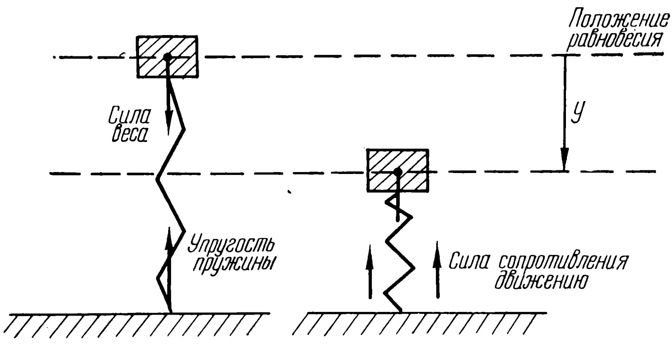

Рис. 79

В положении равновесия сила тяжести равна упругости пружины. Силу, стремящуюся вернуть груз в положение равновесия, будем считать пропорциональной отклонению, т. е. равной ky, где k — постоянная для данной рессоры величина (рис. 79).

Предположим, что движению груза препятствует сила сопротивления, пропорциональная скорости $\frac{dy}{dt}$ движения груза, т. е. сила $\lambda\frac{dy}{dt}$, где λ — коэффициент пропорциональности.

Таким образом, на груз действует сила $ky+\lambda\frac{dy}{dt}$. На основании закона Ньютона

$$ky+\lambda\frac{dy}{dt}=-m\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad (1)$$

где знак минус означает, что сила действует против движения.

Уравнение (1) может быть представлено в виде

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+\lambda\frac{dy}{dt}+ky=0$$

или

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\lambda}{m}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{k}{m}y=0,$$

откуда, обозначая $\frac{\lambda}{m}=p$, $\frac{k}{m}=q$, имеем:

$$y''+py'+qy=0. \qquad (2)$$

Характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (2), будет

$$r^2+pr+q=0,$$

а его корни

$$r_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}; \quad r_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Случай 1. Если сопротивление p настолько велико, что подкоренное выражение положительно, то корни r_1, r_2 будут действительными отрицательными числами.

Общее решение будет

$$y=C_1e^{-r_1t}+C_2e^{-r_2t}. \qquad (3)$$

Из равенства (3) следует, что отклонение y стремится к нулю (груз движется к положению равновесия) при возрастании времени t. Колебаний в этом случае не будет.

Случай 2. Если сопротивление таково, что $\left(\frac{p}{2}\right)^2=q$, то

$$r_1=r_2=-\frac{p}{2}.$$

Общее решение будет

$$y=C_1e^{-\frac{p}{2}t}+C_2te^{-\frac{p}{2}t}=(C_1+C_2t)e^{-\frac{p}{2}t}.$$

Здесь отклонение y стремится к нулю при возрастании t, но более медленно благодаря наличию сомножителя t.

Случай 3. Если сопротивление отсутствует, т. е. $p=0$, то корни

$$r_{1,2}=\pm\beta i,$$

где $\beta=\sqrt{q}$.

Общее решение будет

$$y=C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t. \tag{4}$$

В уравнении (4) постоянные C_1 и C_2 заменим другими, для чего разделим и умножим правую часть на $\sqrt{C_1^2+C_2^2}$, откуда

$$y=\sqrt{C_1^2+C_2^2}\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\cos\beta t+\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\sin\beta t\right). \tag{5}$$

Вводим обозначения

$$A=\sqrt{C_1^2+C_2^2},\quad \sin\varphi_0=\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}},\quad \cos\varphi_0=\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}.$$

Тогда уравнение (5) принимает вид

$$y=A(\sin\varphi_0\cos\beta t+\cos\varphi_0\sin\beta t)$$

или

$$y=A\sin(\beta t+\varphi_0).$$

Колебания в этом случае называются *гармоническими.* Промежуток времени T, за который аргумент синуса изменяется на 2π, называется *периодом колебаний*, в данном случае $T=\frac{2\pi}{\beta}$. *Частотой* колебаний называется число колебаний за время $t=2\pi$; в данном случае частота будет β. Величина A наибольшего отклонения равновесия называется *амплитудой* колебания; величина φ_0 — *начальной фазой.*

Случай 4. Если сопротивление настолько мало, что подкоренное выражение отрицательно, то корни будут комплексными

$$r_1=-\frac{p}{2}+\beta i,\quad r_2=-\frac{p}{2}-\beta i,$$

где

$$\beta=\sqrt{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}.$$

Общее решение

$$y=e^{-\frac{p}{2}t}\,(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t)$$

или после аналогичной замены постоянных интегрирования C_1 и C_2 имеем

$$y=\frac{A}{e^{\frac{p}{2}t}}\sin(\beta t+\varphi_0).$$

Здесь величина $\dfrac{A}{e^{\frac{p}{2}t}}$ представляет амплитуду, зависящую от времени t и стремящуюся к нулю с его возрастанием. Колебания будут *затухающими.*

Вынужденные колебания

Пусть сопротивление движению отсутствует ($p=0$), а нижняя точка рессоры совершает колебания по закону $z=l\sin\omega t$, т. е. груз колеблется при наличии внешней периодической силы. В этом случае сила, стремящаяся вернуть груз в положение равновесия, будет $k(y+l\sin\omega t)$, и по закону Ньютона получаем уравнение

$$ky+kl\sin\omega t=-m\frac{d^2y}{dt^2},$$

которое можно представить в виде

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+ky=-kl\sin\omega t$$

или

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{k}{m}y=-\frac{kl}{m}\sin\omega t. \qquad (6)$$

Обозначая $\dfrac{k}{m}=q$ и $-\dfrac{kl}{m}=a$, уравнение (6) запишем

$$y''+qy=a\sin\omega t. \qquad (7)$$

Так как $q>0$, то общее решение соответствующего однородного уравнения будет

$$y_{\text{одн}}=C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t=A\sin(\beta t+\varphi_0).$$

Если частота внешней силы ω не равна частоте собственных колебаний, то частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y_{\text{частн}}=A_1\cos\omega t+A_2\sin\omega t.$$

Подставляя это выражение в уравнение (7), находим

$$A_1=0, \quad A_2=\frac{a}{q-\omega^2}.$$

Общее решение

$$y=y_{\text{одн}}+y_{\text{частн}}=A\sin(\beta t+\varphi_0)+\frac{a}{q-\omega^2}\sin\omega t.$$

Колебания груза получаются в результате наложения собственного колебания с частотой β и вынужденного колебания с частотой ω.

Если частота внешней среды ω совпадает с частотой собственных колебаний β, то частное решение будем искать в виде

$$y_{\text{частн}}=t(A_1\cos\omega t+A_2\sin\omega t).$$

Подстановка этого выражения в уравнение (7) приводит к определению значений:

$$A_1=-\frac{a}{2\omega}, \quad A_2=0.$$

Следовательно,

$$y_{\text{частн}}=-\frac{a}{2\omega}t\cos\omega t.$$

Общее решение

$$y=y_{\text{одн}}+y_{\text{частн}}=A\sin(\beta t+\varphi_0)-\frac{a}{2\omega}t\cos\omega t. \tag{8}$$

Второй член правой части равенства (8) показывает, что амплитуда колебаний неограниченно возрастает с увеличением t. Это явление (при совпадении частоты собственных колебаний системы с частотой внешней силы) называется *резонансом.*

I. НЕПОЛНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Колебательное движение от силы, пропорциональной расстоянию, до центра притяжения

Задача 138. Определить закон движения материальной частицы массой m под влиянием силы, направленной к центру O и прямо пропорциональной удалению x частицы от центра притяжения (рис. 80).

Решение. Если на материальную частицу массы m действует центральная сила f, пропорциональная удалению x частицы от центра притяжения O, то такая сила называется восстанавливающей.

Восстанавливающая сила для рассматриваемой задачи равна

$$f=-ax.$$

По второму закону динамики она выражается уравнением

$$f=m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

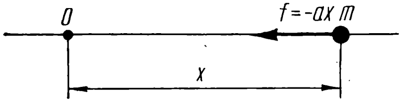

Рис. 80

Отсюда дифференциальное уравнение движения

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-ax$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0,$$

где $\omega^2=\frac{a}{m}$; здесь a — коэффициент упругости, ω — частота колебаний.

Это неполное линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Соответствующее характеристическое уравнение

$$r^2+\omega^2=0$$

имеет корни

$$r_{1,2}=\pm\sqrt{-\omega^2}=\pm\omega i.$$

Так как корни характеристического уравнения мнимые, то общее решение имеет вид

$$x=C_1\sin\omega t+C_2\cos\omega t$$

или

$$x=C_1\left(\sin\omega t+\frac{C_2}{C_1}\cos\omega t\right).$$

Введем вспомогательный угол φ соотношением

$$\frac{C_2}{C_1}=\operatorname{tg}\varphi.$$

Тогда

$$x=\frac{C_1}{\cos\varphi}(\cos\varphi\sin\ \omega t+\sin\varphi\cos\omega t)$$

или, обозначая

$$\frac{C_1}{\cos\varphi}=A,$$

получим

$$x=A\sin(\omega t+\varphi). \tag{1}$$

Выражение (1) представляет собой гармоническое колебание с амплитудой A и начальной фазой φ. Период колебания T найдем из формулы:

$$\omega(t+T)+\varphi=\omega t+\varphi+2\pi,$$

где 2π — период синуса, откуда

$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$

или

$$\omega=\frac{2\pi}{T}. \tag{2}$$

Подставляя значение (2) в общее решение (1), получим

$$x=A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right).$$

Притяжение материальной точки двумя равномощными центрами

Задача 139. Материальная точка M массой m притягивается двумя равномощными центрами A и B, расположенными один от другого на расстоянии $2a$. Сила притяжения пропорциональна расстоянию от центра до точки M. В начальный момент точка находится в покое на линии центров, на расстоянии b от ее середины (рис. 81). Найти закон движения точки.

Решение. В любой момент на точку M действуют две силы притяжения центрами A и B

$$\left.\begin{aligned} f_A&=-\varkappa(a+x), \\ f_B&=\varkappa(a-x), \end{aligned}\right\}$$

где $\varkappa$ — коэффициент пропорциональности.

Равнодействующая этих сил

$$R=f_A+f_B=-2\varkappa x.$$

На основании второго закона динамики получим дифференциальное уравнение движения

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-2\varkappa x$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{2\varkappa}{m}x=0. \qquad (1)$$

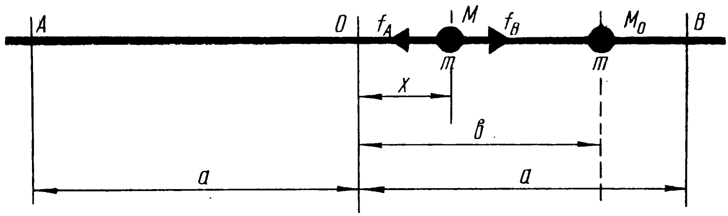

Рис. 81

Вводим обозначение $k^2=\frac{2\varkappa}{m}$, и тогда уравнение (1) принимает вид

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0.$$

Общее решение этого уравнения

$$x=C_1\sin kt+C_2\cos kt. \qquad (2)$$

Начальные условия: при $t=0$ $x=b$, $\frac{dx}{dt}=0$. Отсюда

$$b=C_1\sin(k\cdot 0)+C_2\cos(k\cdot 0), \qquad (3)$$

и так как

$$\frac{dx}{dt}=C_1k\cos kt-C_2k\sin kt,$$

то

$$0=C_1k\cos(k\cdot 0)-C_2k\sin(k\cdot 0). \qquad (4)$$

Решая систему уравнений (3) и (4), получаем искомые постоянные интегрирования

$$C_1=0, \quad C_2=b. \qquad (5)$$

Подстановка значений (5) в общее решение (2) определяет закон движения материальной точки

$$x=b\cos kt.$$

Притяжение камня, упавшего в глубь Земли, ее центром

Задача 140. Допустим, что через земной шар проложен узкий трубопровод, проходящий через центр Земли (рис. 82). Упавший в него камень притягивается центром Земли с силой, прямо пропорциональной расстоянию между ними. Через какое время камень пролетит сквозь всю Землю?

Решение. В любой момент на точку M действует сила F притяжения к центру Земли, пропорциональная расстоянию x тела от этого центра и направленная к центру, т. е. при положительном x, в сторону его убывания $F=-\varkappa x$. На основании второго закона динамики получим дифференциальное уравнение движения тела

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\varkappa x$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\varkappa}{m}x=0. \tag{1}$$

Вводим обозначение $k^2=\frac{\varkappa}{m}$. Тогда неполное линейное дифференциальное уравнение (1) примет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0. \tag{2}$$

Общее решение уравнения (2):

$$x=C_1\sin kt+C_2\cos kt. \tag{3}$$

Начальные условия: при $t=0$ $x=-R$, $\frac{dx}{dt}=0$. Отсюда

$$-R=C_1\sin(k\cdot 0)+C_2\cos(k\cdot 0) \tag{4}$$

и, так как

$$\frac{dx}{dt}=C_1k\cos kt-C_2k\sin kt,$$

то

$$0=C_1k\cos(k\cdot 0)-C_2k\sin(k\cdot 0). \tag{5}$$

Решая систему уравнений (4) и (5), находим

$$C_1=0,\quad C_2=-R. \tag{6}$$

Значения постоянных интегрирования (6) подставляем в общее решение (3) и тогда

$$x=-R\cos kt,$$

откуда

$$t = \frac{1}{k} \arccos\left(-\frac{x}{R}\right).$$

На противоположном конце трубопровода $x=R$ и искомое время

$$t = \frac{\pi}{k}.$$

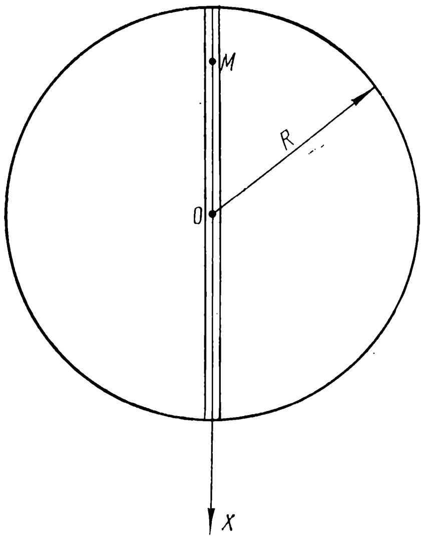

Рис. 82

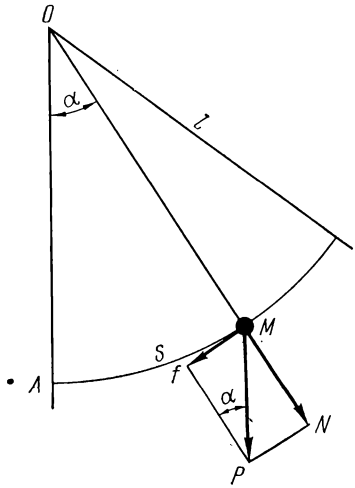

Рис. 83

Дополнительное условие: при $t=0$ $F=mg$ и $x=-R$. Исходя из этого, имеем

$$mg = \varkappa R$$

или

$$\frac{\varkappa}{m} = \frac{g}{R}$$

и коэффициент

$$k = \sqrt{\frac{\varkappa}{m}} = \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

Таким образом,

$$t = \frac{\pi}{k} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} = \pi\sqrt{\frac{6377 \cdot 10^3}{9{,}81}} \approx 42{,}3 \text{ мин.}$$

Математический маятник

Задача 141. Найти закон движения и определить период T математического маятника длиной l при малых отклонениях.

Решение. Силу тяжести P в точке M, разложим на две составляющие: N по направлению нити и f — по касательной к траектории. Сила N уравновешивается сопротивлением нити, и, таким образом, вся система сил эквивалентна силе f. Из рис. 83 видно:

$$|f| = P\sin\alpha = mg\sin\alpha,$$

где m — масса, g — ускорение силы тяжести.

Так как для положительных углов α касательная составляющая f направлена в отрицательную сторону, то

$$f = -mg\sin\alpha \approx -mg\,\alpha,$$

так как при малых отклонениях нити $\sin\alpha \approx \alpha$.

Ввиду очевидного равенства $\alpha = \frac{s}{l}$ составляющая

$$f = -\frac{mg}{l}s.$$

Здесь $s = \breve{AM}$ — длина пройденного шариком криволинейного пути. На основании второго закона динамики запишем дифференциальное уравнение движения:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{mg}{l}s$$

или

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{l}s = 0.$$

Интегрируя это неполное линейное уравнение второго порядка, получим общее решение

$$s = C_1\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + C_2\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t.$$

Используем начальные условия: при $t = 0$ $s = a$ и $\frac{ds}{dt} = 0$. Отсюда

$$C_1 = 0, \quad C_2 = a.$$

Подставляя эти значения в общее решение, получим

$$s=a\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t,$$

где a — амплитуда колебания.

Движение математического маятника представляет гармоническое колебание с периодом

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Физический маятник

Задача 142. Найти закон движения физического маятника (ось Oz перпендикулярна к плоскости чертежа).

Решение. Физическим (или сложным) маятником называется твердое тело, вращающееся вокруг горизонтальной оси Oz под действием силы тяжести (рис. 84). Обозначим расстояние OC центра тяжести маятника от оси вращения через a и силу тяжести маятника через P, причем $P=Mg$, где M — масса маятника.

Так как заданной силой является только сила P, то главный момент (сумма моментов всех сил системы) относительно оси Oz равен

$$M_z=-Mga\sin\varphi,$$

где φ — угол отклонения маятника от вертикали, отсчитываемый в направлении, обратном движению часовой стрелки.

Как известно из динамики, дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси

$$J_z\frac{d^2\varphi}{dt^2}=M_z, \tag{1}$$

где J_z — момент инерции тела относительно оси вращения Oz.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$J_z\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-Mga\sin\varphi. \tag{2}$$

Уравнение (2) представляет дифференциальное уравнение движения физического маятника.

При малых отклонениях маятника приближенно можно принять $\sin\varphi\approx\varphi$. Получим приближенное дифференциальное уравнение малых колебаний маятника

$$J_z\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-Mga\,\varphi.$$

Пусть

$$\frac{Mga}{J_z}=k^2,$$

откуда

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+k^2\varphi=0. \tag{3}$$

Уравнение (3) представляет дифференциальное уравнение гармонических колебаний.

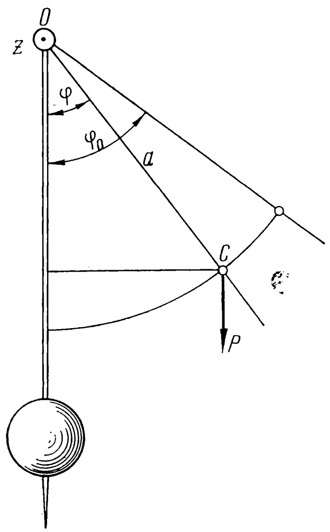

Рис. 84

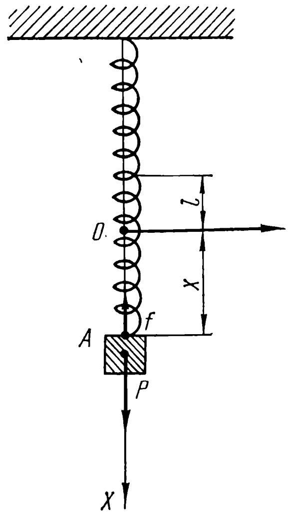

Рис. 85

Интегрируем уравнение (3), предполагая, что начальная угловая скорость маятника равна нулю $\left(\omega_0=\frac{d\varphi}{dt}=0\right)$. Так как корнями соответствующего характеристического уравнения $r^2+k^2=0$ являются мнимые числа $\pm ik$, то общее решение уравнения (3) выразится

$$\varphi=C_1\cos kt+C_2\sin kt. \tag{4}$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 вычисляем из равенства (4), используя начальные условия:

1) при $t=0$ $\varphi=\varphi_0$:

$$\varphi_0=C_1\cdot 1+C_2\cdot 0,$$

$$C_1=\varphi_0;$$

2) при $t=0$ $\omega_0=\frac{d\varphi}{dt}=0$:

$$\frac{d\varphi}{dt}=-kC_1\sin kt+kC_2\cos kt,$$

$$-k\varphi_0\cdot 0+k\cdot C_2\cdot 1=0,$$

$$C_2=0.$$

Подставляя найденные значения в уравнение (4), получим уравнение движения физического маятника при малых колебаниях

$$\varphi=\varphi_0\cos kt.$$

Полный период колебаний

$$T=\frac{2\pi}{k}=2\pi\sqrt{\frac{J_z}{Mga}}.$$

Колебание удлиненной упругой пружины с грузом

Задача 143. К вертикальной пружине, силой тяжести которой пренебрегаем, подвешен груз P, удлиняющий ее на величину l (рис. 85). Оттянув груз на длину a вниз, его оставляют свободно колебаться. Найти закон этого движения, пренебрегая побочными сопротивлениями.

Решение. Ось Ox направим вертикально вниз и начало O возьмем в том месте, где находился груз в положении статического равновесия. В любом положении A на груз действуют две силы: сила тяжести $P=mg$ и упругая восстанавливающая сила пружины f.

По закону Гука при малых деформациях упругие силы пропорциональны соответствующим деформациям.

В точке O упругая сила равна силе тяжести P, а соответствующая деформация l. Следовательно,

$$|P|=kl. \tag{1}$$

В точке A упругая сила f, соответствующая деформация равна $l+x$:

$$|f|=k(l+x). \tag{2}$$

Поделив почленно равенство (2) на равенство (1), получим

$$\frac{|f|}{|P|}=\frac{l+x}{l},$$

откуда абсолютная величина силы f:

$$|f|=P+\frac{P}{l}x.$$

Так как при положительном x сила f действует в отрицательную сторону, ее надо считать силой отрицательной, а поэтому

$$f=-P-\frac{P}{l}x.$$

Равнодействующая обеих сил

$$R=P+f$$

или

$$R=-\frac{P}{l}x=-\frac{mg}{l}x.$$

На основании второго закона динамики дифференциальное уравнение движения

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{mg}{l}x$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{g}{l}x=0.$$

Это неполное линейное уравнение второго порядка. Интегрируя его, получим общее решение

$$x=C_1\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t+C_2\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t. \qquad (3)$$

Используем начальные условия. В самом нижнем положении оттянутого груза имеем:

$$t=0,\quad x=a,\quad \frac{dx}{dt}=0.$$

На основании этих условий находим

$$C_1=0,\qquad C_2=a.$$

Подставляя эти значения в общее решение (3), получим закон гармонического колебания

$$x=a\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t$$

с периодом $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

§ 2. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА БЕЗ ТРЕНИЯ

Горизонтальное скольжение цепи

Задача 144. Цепь длиной $l=4$ *м* соскальзывает с гладкого горизонтального стола. В начальный момент движения со стола свисал конец цепи длиной $a=0{,}5$ *м* (рис. 86). Пренебрегая трением, найти время соскальзывания всей цепи.

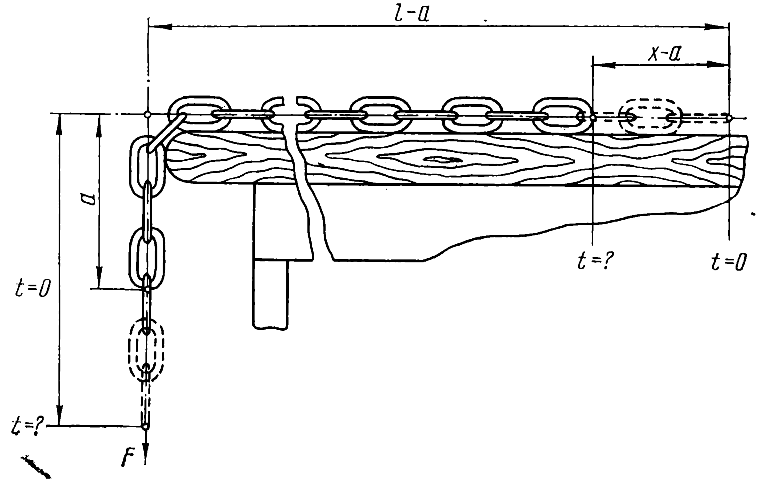

Рис. 86

Решение. В любой момент времени на цепь действует сила F, равная силе тяжести свесившейся со стола к этому моменту части цепи длиной x.

Обозначая силу тяжести всей цепи P, получим очевидную пропорцию

$$\frac{F}{P}=\frac{x}{l},$$

откуда

$$F=\frac{P}{l}x=\frac{mg}{l}x, \tag{1}$$

где m — масса.

На основании второго закона динамики

$$F=m\frac{d^2x}{dt^2}. \tag{2}$$

Приравнивая зависимости (1) и (2), получим дифференциальное уравнение движения цепи

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{mg}{l}x$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{g}{l}x=0.$$

Подставляя числовые значения и принимая приближенно $g=10$ *м/сек*^{2}, неполное линейное дифференциальное уравнение второго порядка запишем в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2}-2{,}5x=0.$$

Соответствующее характеристическое уравнение

$$r^2-2{,}5=0$$

имеет корни

$$r_1=\sqrt{\frac{5}{2}},\quad r_2=-\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Общее решение

$$x=C_1e^{\sqrt{\frac{5}{2}}t}+C_2e^{-\sqrt{\frac{5}{2}}t}. \tag{3}$$

Определим произвольные постоянные C_1 и C_2 из начальных условий: при $t=0$ $x=a=0{,}5$ *м*, $v=\frac{dx}{dt}=0$, откуда

$$a=C_1e^0+C_2e^0=C_1+C_2 \tag{4}$$

и, так как

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{5}{2}}C_1e^{\sqrt{\frac{5}{2}}t}-\sqrt{\frac{5}{2}}C_2e^{-\sqrt{\frac{5}{2}}t},$$

то

$$0=\sqrt{\frac{5}{2}}C_1e^0-\sqrt{\frac{5}{2}}C_2e^0. \tag{5}$$

Из системы уравнений (4) и (5) находим

$$C_1=C_2=\frac{a}{2}=0{,}25.$$

Подставляя эти значения в общее решение, получим частное решение уравнения (3):

$$x=0{,}25\left(e^{\sqrt{\frac{5}{2}}t}+e^{-\sqrt{\frac{5}{2}}t}\right). \tag{6}$$

Разрешаем уравнение (6) относительно t. Имеем

$$e^{\sqrt{\frac{5}{2}}t}+e^{-\sqrt{\frac{5}{2}}t}=4x$$

или

$$\frac{e^{2\sqrt{\frac{5}{2}}t}+1}{e^{\sqrt{\frac{5}{2}}t}}=4x.$$

Это выражение приводит к квадратному уравнению относительно $e^{\sqrt{\frac{5}{2}}t}$:

$$\left(e^{\sqrt{\frac{5}{2}}t}\right)^2-4xe^{\sqrt{\frac{5}{2}}t}+1=0.$$

Решая его, получим

$$\left(e^{\sqrt{\frac{5}{2}}t}\right)_{1,\,2}=\frac{4x\pm\sqrt{16x^2-4}}{2}=2x\pm\sqrt{4x^2-1}. \qquad (7)$$

В выражении (7) знак минус перед корнем отбрасывается, так как при $t>0$ $e^{\sqrt{\frac{5}{2}}t}>e^{-\sqrt{\frac{5}{2}}t}$. Следовательно,

$$e^{\sqrt{\frac{5}{2}}t}=2x+\sqrt{4x^2-1},$$

откуда

$$t=\sqrt{\frac{2}{5}}\ln(2x+\sqrt{4x^2-1})$$

и при $x=l=4$ *м* искомое время

$$t=\sqrt{\frac{2}{5}}\ln(8+\sqrt{63})\approx 1{,}75 \text{ сек.}$$

Итак, в течение 1,75 *сек* вся цепь соскользнет со стола.

Вертикальное скольжение цепи

Задача 145. Цепь длиною l *м* переброшена через блок. С одной стороны свисает $a=10$ *м* цепи, с другой $b=8$ *м* цепи (рис. 87). Через какое время цепь сойдет с блока?

Решение. В любой момент на цепь действует сила F, равная разности сил тяжести P_1 и P_2 двух концов цепи с разных сторон блока. Если в момент t больший конец цепи имеет длину x, то меньший конец имеет длину $a+b-x$.

Обозначим силу тяжести цепи P. Тогда получим пропорцию

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{x}{a+b-x}$$

или

$$\frac{P_1-P_2}{P_1+P_2}=\frac{2x-a-b}{a+b}. \tag{1}$$

Так как общая сила тяжести цепи $P_1+P_2=P$, а длина $a+b=l$, то соотношение (1) примет вид

$$\frac{F}{P}=\frac{2x-l}{l},$$

откуда

$$F=\frac{P}{l}(2x-l)=\frac{mg}{l}(2x-l).$$

На основании второго закона динамики получим дифференциальное уравнение движения цепи

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{mg}{l}(2x-l)$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{g}{l}(2x-l)=0.$$

Введем новую переменную $2x-l=y$. Тогда

$$\frac{d^2y}{dt^2}=2\frac{d^2x}{dt^2}$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{d^2y}{dt^2},$$

откуда

$$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{2g}{l}y=0. \tag{2}$$

Обозначим

$$k^2 = \frac{2g}{l}.$$

Тогда уравнение (2) запишется

$$\frac{d^2y}{dt^2} - k^2 y = 0.$$

Общее решение этого неполного линейного уравнения второго порядка

$$y = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}. \tag{3}$$

Начальные условия: при $t=0$ $x=10$ *м*, $y=1$, $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$. Отсюда

$$1 = C_1 e^{k\cdot 0} + C_2 e^{-k\cdot 0}, \tag{4}$$

и так как

$$\frac{dy}{dt} = C_1 k e^{kt} - C_2 k e^{-kt},$$

то

$$0 = C_1 k e^{k\cdot 0} - C_2 k e^{-k\cdot 0}. \tag{5}$$

Решая систему уравнений (4) и (5), находим постоянные интегрирования

$$C_1 = \frac{1}{2}, \quad C_2 = \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Значения (6) подставляем в общее решение (3)

$$y = \frac{1}{2}(e^{kt} + e^{-kt})$$

или

$$2y = e^{kt} + \frac{1}{e^{kt}} = \frac{e^{2kt}+1}{e^{kt}},$$

$$e^{2kt} - 2ye^{kt} + 1 = 0,$$

откуда

$$e^{kt} = y \pm \sqrt{y^2-1}.$$

Знак минус перед корнем надо отбросить, так как при $t>0$ $e^{kt} > e^{-kt}$. С другой стороны, мы имели $e^{kt}+e^{-kt}=2y$. Следовательно, $e^{kt}>y$. Итак,

$$e^{kt} = y + \sqrt{y^2-1}. \tag{7}$$

Разрешая равенство (7) относительно t, имеем

$$t=\frac{1}{k}\ln(y+\sqrt{y^2-1})$$

или

$$t=\sqrt{\frac{l}{2g}}\ln\left[(2x-l)+\sqrt{(2x-l)^2-1}\right]$$

и при $x=l$

$$t=\sqrt{\frac{l}{2g}}\ln(l+\sqrt{l^2-1})=\frac{3\ln(9+\sqrt{80})}{\sqrt{9{,}81}}\approx 2{,}8\ \textit{сек.}$$

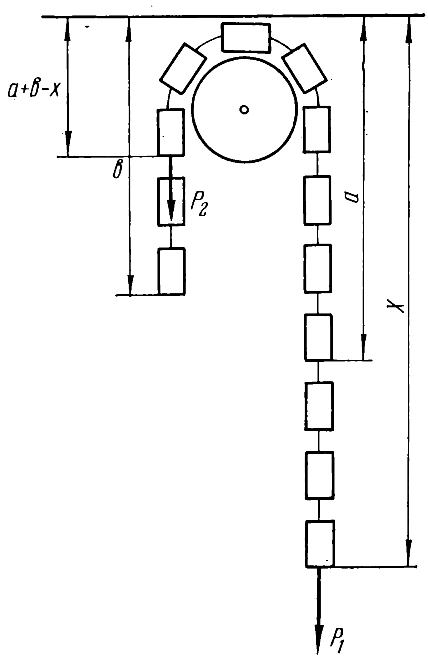

Рис. 87

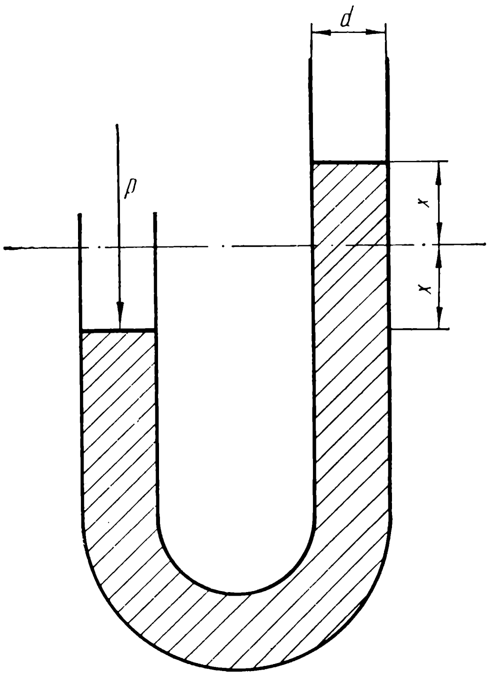

Рис. 88

§ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ МАНОМЕТР

Задача 146. Манометр, применяемый для измерения давления в гидромеханической лаборатории, работает под давлением воздуха p *кГ/см*^{2} и принимает положение, показанное на рис. 88. Определить уравнение движения столба жидкости, когда давление p внезапно понижается до нуля, если общая длина жидкости в манометре l, а удельный вес γ *кГ/см*^{3}.

Решение. Для трубки диаметра d общий вес жидкости $G=\frac{\pi}{4}d^2l\gamma$. Возмущающая сила обусловлена разностью уровня в двух рукавах манометра. Если она взята как среднее арифметическое общей разницы уровней, то ее величина

$$F=2\left(\frac{\pi}{4}d^2\right)x\gamma.$$

Поэтому дифференциальное уравнение

$$-F=\frac{\gamma}{g}\cdot\frac{d^2x}{dt^2},$$

причем знак минус обозначает, что длина координаты x берется от начала отсчета в направлении, положительном вниз.

Следовательно,

$$-2\left(\frac{\pi}{4}d^2\right)x\gamma=\frac{\frac{\pi}{4}d^2l\gamma}{g}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{2g}{l}x=0.$$

Общее решение

$$x=C_1\sin\sqrt{\frac{2g}{l}}\,t+C_2\cos\sqrt{\frac{2g}{l}}\,t.$$

Частота колебаний

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2g}{l}}.$$

§ 4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛОТЫ В СТЕРЖНЯХ

Распределение теплоты в стержне от стационарного источника

Задача 147. На левом конце стержня (при $x=0$) постоянная температура τ_0. В точках стержня, лежащих на разных расстояниях x от левого конца, устанавливается температура $\tau=\tau(x)$. Найти температуру в точке с абсциссой x.

Решение. Стержень отдает свою теплоту в воздух и поэтому охлаждается. Теплота переходит от более теплых частей стержня к менее теплым. Левый конец постоянно подогревается, чтобы уравновесить потерю теплоты. В каждой точке стержня будет своя собственная температура, не зависящая от времени.

Пусть на расстоянии x от произвольной точки стержня до его нагретого конца температура $\tau(x)$. Во всем элементе от x до $x+dx$ будет приблизительно одна и та же температура $\tau(x)$.

В единицу времени элемент dx потеряет $k\tau(x)dA$ теплоты, где dA — площадь соприкосновения с воздухом, k — коэффициент пропорциональности.

Если Φ — поперечное сечение стержня, то количество теплоты, полученное холодным концом элемента, благодаря градиенту $\frac{d\tau}{dx}$ равно

$$-\lambda\Phi\, dt \frac{d\tau}{dx}\bigg|_x,$$

где λ — коэффициент теплопроводности, а количество теплоты, потерянное теплым концом элемента, будет

$$-\lambda\Phi\, dt \frac{d\tau}{dx}\bigg|_{x+dx}.$$

Так как температура стационарна, т. е. не меняется со временем, то количество притекшей теплоты равно количеству потерянной теплоты:

$$-\lambda\Phi\, dt \frac{d\tau}{dx}\bigg|_x = -\lambda\Phi\, dt \frac{d\tau}{dx}\bigg|_{x+dx} + k\tau(x)dAdt. \qquad (1)$$

Так как dx бесконечно мало, то

$$\frac{d\tau}{dx}\bigg|_{x+dx} = \frac{d\tau}{dx}\bigg|_x + \frac{d^2\tau}{dx^2}\bigg|_x dx.$$

Величина dA равна длине окружности поперечного сечения стержня C, умноженной на длину элемента dx.

Подставляя эти значения в уравнение (1), после преобразований получим

$$k\tau C dx dt = \lambda\Phi\, dt \frac{d^2\tau}{dt^2}\bigg|_x dx$$

или

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} - \frac{kC}{\lambda\Phi}\tau = 0. \qquad (2)$$

Обозначая $\frac{kC}{\lambda\Phi} = p^2$, уравнение (2) запишем в виде

$$\tau'' - p^2\tau = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$r^2-p^2=0,$$

откуда

$$r_{1,2}=\pm p.$$

Общее решение

$$\tau=C_1e^{px}+C_2e^{-px}.$$

Учитывая, что на больших расстояниях от начала координат ($x\to\infty$) температура $\tau=0$, получим $C_1=0$, что дает зависимость $\tau=C_2e^{-px}$.

Начальное условие: при $x=0$ $\tau=\tau_0$, и тогда

$$C_2=\tau_0.$$

Температура в точке с абсциссой x будет

$$\tau=\tau_0e^{-px}.$$

Задача 148. Один конец стержня нагрет до 100° С. На расстоянии единицы длины от этого конца температура равна 95° С. Найти температуру в точке, удаленной от конца стержня на 10 единиц.

Решение. На расстоянии x от начала стержня (нагретого конца) выделим элемент длиною dx. Температуру $T(x)$ на данном элементе можно считать постоянной.

По закону Ньютона элемент стержня за время dt теряет теплоту в количестве

$$k(T-T_0)Pdxdt,$$

где k — коэффициент пропорциональности, P — периметр поперечного сечения стержня, Pdx — площадь поверхности элемента, соприкасающаяся с окружающей средой, T_0 — температура окружающей среды.

Пусть Φ — площадь поперечного сечения стержня. По закону Фурье количество теплоты, полученное холодным концом элемента стержня за время dt, равно

$$-\lambda\Phi\frac{dT(x)}{dx}dt$$

и количество теплоты, потерянное теплым концом элемента стержня, будет

$$-\lambda\Phi\frac{dT(x+dx)}{dx}dt=-\lambda\Phi\left(\frac{dT}{dx}+\frac{d^2T}{dx^2}dx\right)dt,$$

где λ — коэффициент теплопроводности.

На элементе dx температуру $T(x)$ можно считать постоянной, и количество притекшей теплоты должно равняться количеству потерянной.

Следовательно,

$$-\lambda\Phi\frac{dT}{dx}dt=-\lambda\Phi\frac{dT}{dx}dt-\lambda\Phi\frac{d^2T}{dx^2}dt\ dx+k(T-T_0)Pdxdt,$$

откуда

$$\frac{d^2T}{dx^2}-\frac{kP}{\lambda\Phi}(T-T_0)=0$$

или, обозначая для краткости $\frac{kP}{\lambda\Phi}=n^2$, получим

$$\frac{d^2(T-T_0)}{dx^2}-n^2(T-T_0)=0. \qquad (1)$$

Общее решение неполного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (1)

$$T(x)=T_0+C_1e^{nx}+C_2e^{-nx}. \qquad (2)$$

Начальные условия: а) при $x=0$ $T=100$; б) на очень большом расстоянии стержень должен иметь температуру, как и окружающая среда, т. е. при $x\to\infty$ $(T-T_0)\to 0$. Но тогда $e^{-nx}\to 0$, а $e^{nx}\to\infty$.

Так как $T(x)$ не может обращаться в бесконечность, то постоянная интегрирования C_1 должна быть равна нулю, т. е. $C_1=0$, а $C_2=100$, так как при $x\to\infty$ $T=T_0=0$.

Тогда равенство (2) принимает вид

$$T(x)=100e^{-nx}. \qquad (3)$$

Для определения параметра n используем дополнительное условие: при $x=1$ $T=95°$, откуда

$$95=100e^{-nx}.$$

Следовательно,

$$-n=\ln 0{,}95.$$

Подставляем эту величину в уравнение (3) и получаем закон изменения температуры по длине стержня

$$T(x)=100(0{,}95)^x.$$

При $x=10$ искомая температура

$$T(10)\approx 59{,}9°\,C.$$

Распределение теплоты в продольном ребре прямоугольного сечения

Задача 149. Найти распределение температуры в продольном ребре жесткости прямоугольного сечения металлической конструкции (рис. 89) длиной l. Условия работы: 1) тепловой поток постоянный, т. е. температура в любой точке ребра жесткости не изменяется с течением времени; 2) материал ребра однородный и теплопроводность постоянная; 3) коэффициент передачи теплоты сплошной гранью поверхности ребра постоянный; 4) температура окружающей жидкости постоянная; 5) не имеется других источников теплоты, кроме самого ребра; 6) отсутствуют температурные градиенты (перепады) поперек ширины ребра.

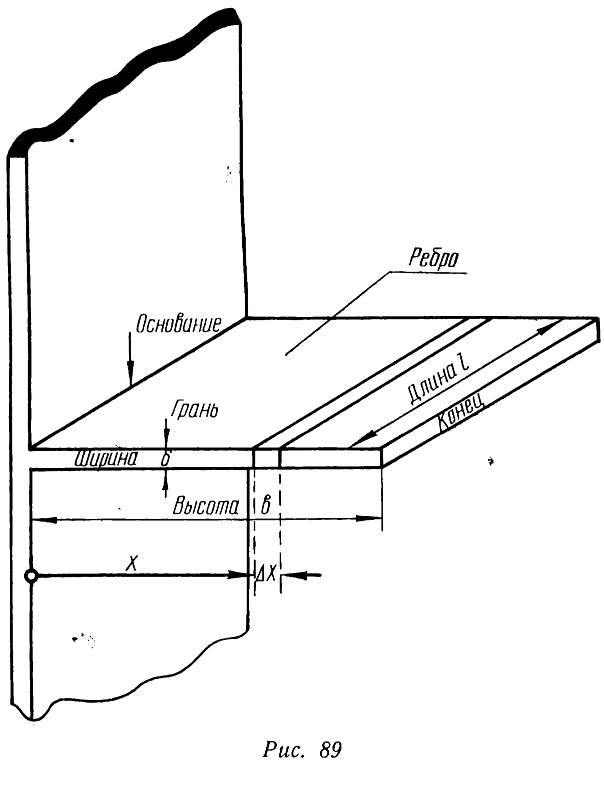

Рис. 89

Решение. Рассмотрим небольшой элемент ребра высотой Δx. Элемент имеет площадь поперечного сечения $A=\delta l$, а площадь поверхности $\Delta S=2(l+\delta)\Delta x$, которая будет $\Delta S=2l\Delta x$, если принять, что длина и высота ребра очень большие по отношению к его ширине ($l\gg\delta$, $b\gg\delta$).

Пусть T — температура ребра в элементе Δx. Поскольку окружающая жидкость рассматривается при постоянной температуре T_S, то избыток температуры или разница между температурой ребра и окружающей жидкости $\theta = T - T_S$, откуда, дифференцируя, получаем $d\theta = dT$.

Предполагаем, что ребро передает теплоту окружающей среде. Тепловой баланс: поступающая теплота равна убывающей из элемента высотой Δx теплоте. Поступающая теплота в сечении x, согласно закону Фурье,

$$q_x = -kA \left.\frac{dT}{dx}\right|_x = -k\delta l \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_x,$$

где k — теплопроводность.

Аналогично выходящая из элемента в сечении $x+\Delta x$ теплота

$$q_{x+\Delta x} = -kA \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x+\Delta x} = -k\delta l \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x+\Delta x}.$$

Следовательно, теплота выходит из элемента Δx через поверхность ΔS путем конвекции.

Таким образом, эта теплота

$$q_S = h\Delta S (T - T_S) = 2hl\Delta x\theta.$$

Тепловой баланс примет вид

$$q_x = q_{x+\Delta x} + q_S$$

или

$$-k\delta l \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_x = -k\delta l \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x+\Delta x} + 2hx\Delta x\theta,$$

который может быть представлен

$$\frac{\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_x}{\Delta x} - \frac{2h}{k\delta}\theta = 0. \qquad (1)$$

В предельном случае, когда Δx стремится к нулю, уравнение (1) принимает вид неполного линейного уравнения второго порядка

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0,$$

где

$$m = \sqrt{\frac{2h}{k\delta}}.$$

Общее решение этого уравнения

$$\theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}.$$

В случае отсутствия теплового потока на конце ребра, где $x=b$,

$$q|_{x=b} = -k\delta l \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=b} = \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=b} = 0, \tag{2}$$

так как ни k, ни δ или l не равны нулю.

Кроме того, при постоянной температуре излишек у основания

$$\theta|_{x=0} = \theta_0. \tag{3}$$

Уравнения (2) и (3) образуют начальные условия. Чтобы использовать первое из них, необходимо продифференцировать общее решение дифференциального уравнения. Тогда

$$\frac{d\theta}{dx} = mC_1 e^{mx} - mC_2 e^{-mx}$$

и, подставляя условие (2), получаем

$$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=b} = 0 = mC_1 e^{mb} - mC_2 e^{-mb}$$

или

$$C_1 e^{mb} = C_2 e^{-mb}. \tag{4}$$

У основания излишек температуры равен разности температуры основания и окружающей среды и тогда

$$T_0 - T_S = \theta_0 = C_1 + C_2. \tag{5}$$

Уравнения (4) и (5) используются для определения постоянных интегрирования:

$$\left.\begin{aligned} e^{mb}C_1 - e^{-mb}C_2 &= 0, \\ C_1 + C_2 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

откуда

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -e^{-mb} \\ \theta_0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{mb} & -e^{-mb} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\theta_0 e^{-mb}}{e^{mb} + e^{-mb}} = \frac{\theta_0 e^{-mb}}{2\,\mathrm{ch}\,mb},$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} e^{mb} & 0 \\ 1 & \theta_0 \end{vmatrix}}{2\,\mathrm{ch}\,mb} = \frac{\theta_0 e^{mb}}{2\,\mathrm{ch}\,mb}.$$

Таким образом, искомое решение

$$\theta=\frac{\theta_0}{2\operatorname{ch} mb}\left(e^{-mb}e^{mx}+e^{mb}e^{-mx}\right)=\frac{\theta_0}{2\operatorname{ch} mb}\left[e^{m(b-x)}+e^{-m(b-x)}\right]=$$

$$=\frac{\theta_0 \operatorname{ch} m(b-x)}{\operatorname{ch} mb}.$$

Оно представляет избыток температуры в любой точке ребра как функцию расстояния x от его основания.

§ 5. ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ

Стержень постоянного поперечного сечения со свободными концами

Задача 150. Определить критическую нагрузку стержня OA длиной l, если оба его конца подвижны, но не могут сходить с первоначальной неискривленной оси стержня (рис. 90).

Решение. Критическим называется то значение силы P, при котором начинается искривление оси стержня. Для любого сечения $D(x, y)$ изгибающий момент

$$M=-Py.$$

В дифференциальном уравнении упругой линии

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M}{EJ}$$

определяем изгибающий момент для сечения в точке $D(x, y)$ и тогда

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{P}{EJ}y, \tag{1}$$

где E — модуль упругости, J — момент инерции площади поперечного сечения стержня.

Дифференциальное уравнение упругой линии (1) можно преобразовать к виду

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{P}{EJ}y=0$$

или, обозначая $q^2=\frac{P}{EJ}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}+q^2y=0.$$

Общее решение полученного уравнения

$$y = C_1 \sin qx + C_2 \cos qx. \qquad (2)$$

Граничные условия: так как концы стержня O и A должны оставаться на оси x, то при $x=0$ $y=0$ и при $x=l$ $y=0$. Отсюда

$$\left.\begin{aligned} 0 &= C_1 \sin(q\cdot 0) + C_2 \cos(q\cdot 0), \\ 0 &= C_1 \sin ql + C_2 \cos ql \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} C_2 &= 0, \\ C_1 \sin ql &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

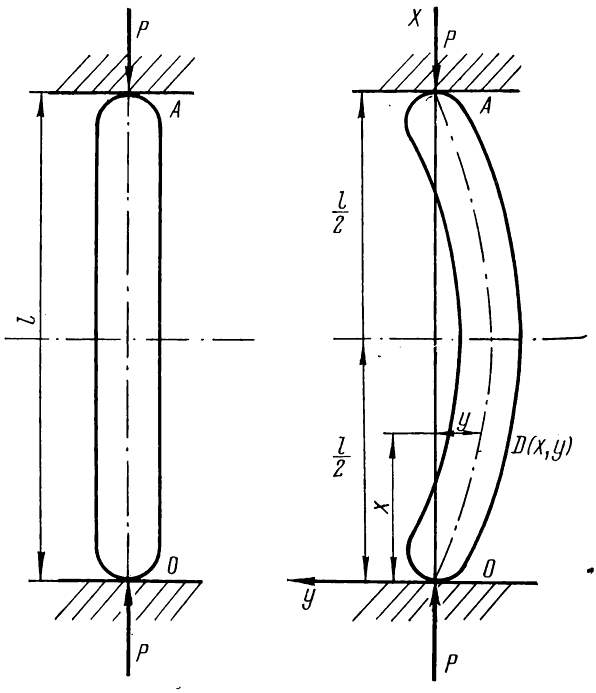

Рис. 90

Одно из решений системы (3) будет $C_1=0$, $C_2=0$. Подставляя в общее решение (2), получим

$$y=0,$$

т. е. упругая линия совпадает с осью x и стержень не искривлен.

Этот случай, очевидно, соответствует такой нагрузке P, которая меньше критической нагрузки $P_{\text{кр}}$.

Для искривления стержня необходимо, следовательно, чтобы $C_1 \neq 0$. Согласно системе (3), это возможно лишь при условии

$$\sin ql = 0,$$

откуда

$$ql = n\pi$$

или

$$q = \frac{n\pi}{l},$$

где n — любое целое число.

Если $n=0, 1, 2, 3, \ldots$, то соответственно $q = 0, \frac{\pi}{l}, \frac{2\pi}{l}, \frac{3\pi}{l}, \ldots$

Подставляя эти значения q в общее решение и принимая во внимание, что $C_2=0$, получим соответственно такие уравнения упругой линии

$$\left.\begin{aligned} &y = C_1 \sin(0 \cdot x) = 0, \\ &y = C_1 \sin\frac{\pi}{l}x, \\ &y = C_1 \sin\frac{2\pi}{l}x, \\ &y = C_1 \sin\frac{3\pi}{l}x, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\}$$

Первое уравнение дает упругую линию еще не искривленного стержня. Второе уравнение дает для упругой линии одну полуволну синусоиды (y обращается в нуль на протяжении длины стержня l только 2 раза: при $x=0$ и при $x=l$), и стержень уже искривлен. Третье уравнение дает синусоиду, состоящую из двух полуволн (y обращается в нуль на протяжении длины стержня l 3 раза: при $x=0$, $\frac{l}{2}$ и l). Упругая линия, заданная четвертым уравнением, содержит три полуволны синусоиды и т. д.

Итак, стержень впервые искривляется при $q=\frac{\pi}{l}$. Это и будет критическим значением $q_{\text{кр}}=\frac{\pi}{l}$.

С другой стороны,

$$q = \sqrt{\frac{P}{EJ}}.$$

Поэтому

$$q_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{P_{\text{кр}}}{EJ}},$$

откуда

$$\sqrt{\frac{P_{\text{к}}}{EJ}}=\frac{\pi}{l}.$$

Разрешая последнее равенство относительно $P_{\text{к}}$, получим значение критической нагрузки

$$P_{\text{к}}=\pi^2\frac{EJ}{l^2}.$$

Стержень постоянного сечения с защемленным концом

Задача 151. Найти критическую нагрузку упругого стержня с одним защемленным и другим свободным концом, если стержень нагружен центрально приложенной сжимающей силой P (рис. 91).

Решение. Составим дифференциальное уравнение задачи, исходя из условий равновесия. При определении момента внешних сил необходимо учесть действующую поперек стержня опорную реакцию A, которая связана с моментом защемления зависимостью

$$M_{\text{защ}}=Al.$$

Изгибающий момент M в произвольном сечении x выражается через момент внешних сил:

$$M(x)=Py-Ax. \tag{1}$$

С другой стороны, изгибающий момент выражается зависимостью

$$M(x)=-EJy'', \tag{2}$$

где E — модуль упругости материала, J — постоянный момент инерции стержня.

Приравнивая уравнения (1) и (2), имеем:

$$EJy''=-(Py-Ax). \tag{3}$$

Уравнение (3) приводится к виду

$$y''+\frac{P}{EJ}y=\frac{A}{EJ}x. \tag{4}$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{одн}}=C_1\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EJ}}x\right)+C_2\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EJ}}x\right). \tag{5}$$

Частное решение, исходя из вида правой части уравнения (4), ищем в форме

$$y_{\text{частн}}=a_1x+a_0. \tag{6}$$

Подстановка $y_{\text{частн}}$, согласно (6), и $y''_{\text{частн}}=0$ в уравнение (4) приводит к уравнению

$$\frac{P}{EJ}(a_1x+a_0)=\frac{A}{EJ}x,$$

откуда, приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях x, имеем

$$a_0=0, \quad a_1=\frac{A}{P}.$$

Тогда частное решение (6) принимает вид

$$y_{\text{частн}}=\frac{A}{P}x. \tag{7}$$

Суммируя решения (5) и (7), получаем общее решение неоднородного уравнения

$$y=\frac{A}{P}x+C_1\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EJ}}x\right)+C_2\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EJ}}x\right). \tag{8}$$

Начальные условия: на шарнирно опертом конце стержня ($x=0$) прогиб $y=0$, отсюда $C_2=0$; на защемленном неподвижном конце ($x=l$) прогиб y и наклон y' должны быть равны нулю, т. е. $y=y'=0$, откуда, подставляя эти значения в функцию (8) и ее производную, получаем систему

$$\left.\begin{aligned}0&=\frac{A}{P}l+C_1\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EJ}}l\right),\\0&=\frac{A}{P}+C_1\sqrt{\frac{P}{EJ}}\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EJ}}l\right).\end{aligned}\right\}$$

Таким образом, имеем два значения для постоянной интегрирования:

$$C_1=-\frac{Al}{P\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EJ}}l\right)}$$

и

$$C_1=-\frac{A}{P\sqrt{\frac{P}{EJ}}\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EJ}}l\right)}.$$

Эти два равенства только тогда взаимосвязаны, если

$$\frac{l}{\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EJ}}\,l\right)}=\frac{1}{\sqrt{\frac{P}{EJ}}\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EJ}}\,l\right)}$$

или

$$\operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{P}{EJ}}\,l\right)=\sqrt{\frac{P}{EJ}}\,l. \tag{9}$$

Решение трансцендентного уравнения (9) невозможно в замкнутом виде.

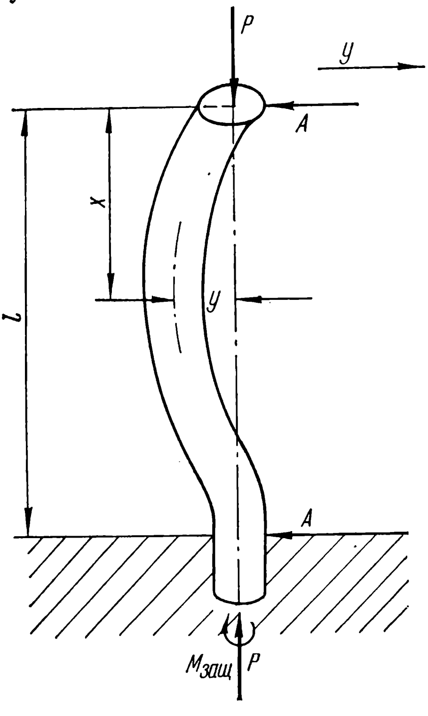

Рис. 91

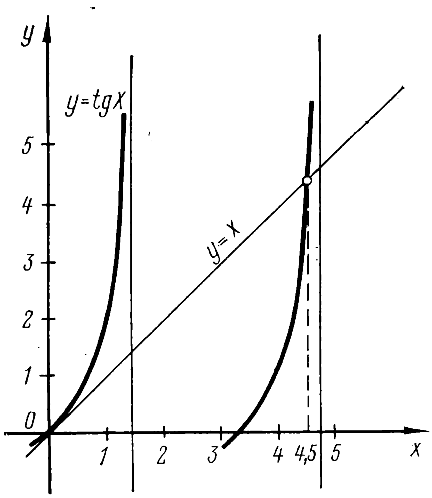

Рис. 92

Если надо решить уравнение $\operatorname{tg} x = x$, то берут функции $y=x$ и $y=\operatorname{tg} x$ и находят бесконечно много точек пересечения этих линий. С точки зрения технических приложений интерес представляет только наименьшее положительное число x, которое удовлетворяет уравнению.

Из графика (рис. 92) можно получить, что первая точка пересечения этих двух линий приближенно имеет абсциссу $x=4{,}5$.

Применяя правило хорд, уравнение приводим к виду

$$y=\operatorname{tg} x-x=\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)-x=\operatorname{ctg}(4{,}7124-x)-x$$

и находим корни этой функции, значения которых приведены в нижеследующей таблице

x	$\frac{3}{2}\pi-x$	$\operatorname{tg} x$	y
4,500	0,2124	4,637	0,137
4,450	0,2624	3,723	—0,727
4,492	0,2204	4,463	—0,029
4,493	0,2194	4,485	—0,008
4,494	0,2184	4,506	0,012

Итак, $x=4{,}4934$.

Таким образом, решение уравнения (9) будет

$$\sqrt{\frac{P}{EJ}}\,l=4{,}493.$$

Следовательно, положение равновесия будет нарушено, когда сила P достигнет критического значения

$$P_{\text{кр}}=\frac{20{,}19EJ}{l^2}. \qquad (10)$$

Так как $20{,}19\approx 2\pi^2$, то выражение (10) можно записать также в виде

$$P_{\text{кр}}\approx\frac{2\pi^2EJ}{l^2}.$$

Ступенчатое поперечное сечение

Задача 152. Стержень OA (рис. 93) со ступенчатым изменением сечения в средней части сжимается с обоих концов одинаковыми по величине, но противоположными по направлению силами P. Найти величину критической силы $P_{\text{кр}}$.

Решение. Если изгиб малый, то, выбрав точку O за начало координат и расположив оси так, как указано на рис. 93, получим для участка I уравнение

$$EJ_1y''=-Py$$

или, обозначая $m_1^2=\frac{P}{EJ_1}$,

$$y''+m_1^2y=0. \qquad (1)$$

Для участка *II* дифференциальное уравнение примет вид

$$EJ_2 y'' = -Py$$

или, обозначая $m_2^2 = \frac{P}{EJ_2}$, получим

$$y'' + m_2^2 y = 0. \tag{2}$$

Общие решения уравнений (1) и (2) примут вид

$$y = C_1 \cos m_1 x + C_2 \sin m_1 x, \quad y = C_3 \cos m_2 x + C_4 \sin m_2 x.$$

Граничные условия: 1) при $x=0$ $y=0$, откуда

$$0 = C_1 \cos m_1 \cdot 0 + C_2 \sin m_1 \cdot 0$$

или

$$C_1 = 0;$$

2) при $x=a$ ординаты обоих участков совпадают, т. е.

$$C_2 \sin m_1 a = C_3 \cos m_2 a + C_4 \sin m_2 a; \tag{3}$$

3) изогнутая ось в точке B имеет в частях *I* и *II* общую касательную (производные от ординат равны), что дает

$$C_2 m_1 \cos m_1 a = -C_3 m_2 \sin m_2 a + C_4 m_2 \cos m_2 a; \tag{4}$$

4) в середине стержня при $x=a+b$ касательная параллельна оси абсцисс, откуда

$$-C_3 \sin m_2 (a+b) + C_4 \cos m_2 (a+b) = 0. \tag{5}$$

Пусть f — ордината изогнутой оси при $x=a+b$; тогда

$$C_3 \cos m_2 (a+b) + C_4 \sin m_2 (a+b) = f. \tag{6}$$

Уравнения (3), (5) и (6) дают

$$C_3 = f \cos m_2 (a+b), \quad C_4 = f \sin m_2 (a+b).$$

Подставляем эти значения в уравнение (4) и получаем

$$\operatorname{tg} m_1 a \cdot \operatorname{tg} m_2 b = \frac{m_1}{m_2}. \tag{7}$$

Так как

$$\frac{m_1}{m_2} = \sqrt{\frac{J_2}{J_1}}$$

и полагая

$$k=\sqrt{\frac{J_2}{J_1}},$$

имеем

$$m_1=m_2k.$$

Уравнение (7) примет тогда вид

$$\operatorname{tg} m_2a\cdot\operatorname{tg} m_2b=k. \tag{8}$$

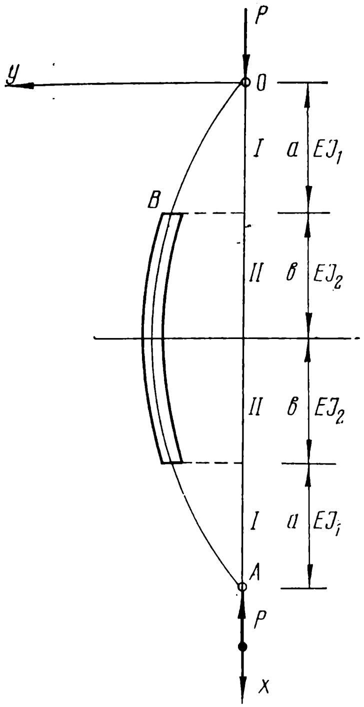

Рис. 93

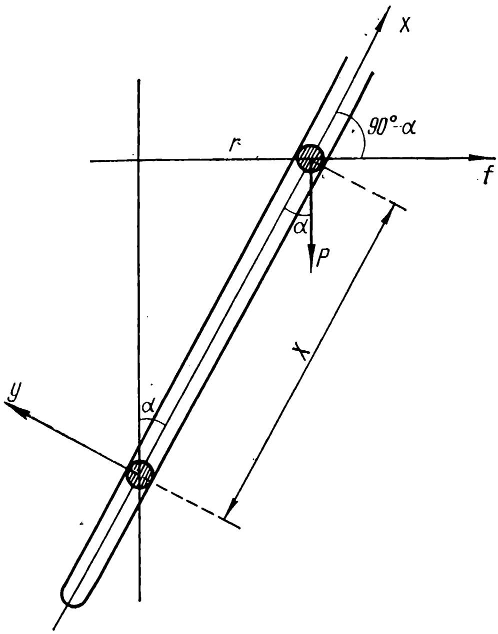

Рис. 94

Из уравнения (8) находим наименьший положительный корень m_2 и определяем тогда критическую силу

$$P_{\text{кр}}=EJ_2m_2^2=EJ_1m_1^2.$$

§ 6. ДВИЖЕНИЕ ШАРИКА В ТРУБКЕ (ЗАДАЧА АМПЕРА)

Задача 153. Трубка наклонена к вертикальной оси под углом α и вращается вокруг нее с постоянной угловой скоростью ω. В трубке катится без трения шарик (рис. 94). Найти закон движения шарика вдоль оси трубки, если в начальный момент он находился на оси вращения и имел скорость v_0, направленную в положительном направлении оси трубки.

Решение. В любой момент на шарик действуют сила тяжести $P=mg$ и центробежная сила $f=m\omega^2$. Составляющая их равнодействующей на оси x

$$X=-P\cos\alpha+F\cos(90^\circ-\alpha)$$

или

$$X=m(r\omega^2\sin\alpha-g\cos\alpha).$$

Так как

$$r=x\sin\alpha,$$

то

$$X=m(x\omega^2\sin^2\alpha-g\cos\alpha).$$

На основании второго закона динамики получаем дифференциальное уравнение движения шарика вдоль оси трубки

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=m(x\omega^2\sin^2\alpha-g\cos\alpha)$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2}-(\omega^2\sin^2\alpha)x=-g\cos\alpha. \qquad (1)$$

Вводим обозначение $k^2=\omega^2\sin^2\alpha$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2}-k^2x=-g\cos\alpha. \qquad (2)$$

Общее решение неоднородного линейного уравнения второго порядка (2) будет

$$x=C_1e^{kt}+C_2e^{-kt}+\frac{g\cos\alpha}{k^2}. \qquad (3)$$

Начальные условия: при $t=0$ $x=0$, $\frac{dx}{dt}=v_0$. Отсюда

$$0=C_1e^{k\cdot 0}+C_2e^{-k\cdot 0}+\frac{g\cos\alpha}{k^2}, \qquad (4)$$

и так как

$$\frac{dx}{dt}=C_1ke^{kt}-C_2ke^{-kt},$$

то

$$v_0=C_1ke^{k\cdot 0}-C_2ke^{-k\cdot 0}. \qquad (5)$$

Уравнения (4) и (5) образуют систему

$$\left.\begin{aligned} C_1+C_2&=-\frac{g\cos\alpha}{k^2}, \\ C_1-C_2&=\frac{v_0}{k}. \end{aligned}\right\}$$

Решая ее, получаем значения постоянных интегрирования

$$C_1=\frac{v_0k-g\cos\alpha}{2k^2},\quad C_2=-\frac{v_0k+g\cos\alpha}{2k^2}. \tag{6}$$

Подставляем значения (6) в общее решение (3) и получаем

$$x=\frac{1}{2k^2}\left[(v_0k-g\cos\alpha)e^{kt}-(v_0k+g\cos\alpha)e^{-kt}+2g\cos\alpha\right],$$

где $k=\omega\sin\alpha$.

II. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 7. ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

Движение материальной точки под действием восстанавливающей силы с учетом сопротивления

Задача 154. Определить закон движения материальной частицы массы m под действием силы, притягивающей точку к неподвижному центру O и прямо пропорциональной удалению x частицы от центра притяжения O. Материальная частица колеблется в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости движения v.

Исследовать три случая:

1) коэффициент сопротивления h невелик по сравнению с коэффициентом упругости k^2 $\left(k^2=\frac{a}{m}\right)$, так что $h^2-k^2<0$;

2) $h^2-k^2>0$;

3) $h^2-k^2=0$.

Решение. Если материальная частица массы m движется под действием восстанавливающей силы в среде с сопротивлением f_1, пропорциональным скорости v, то f_1 называется силой сопротивления. На частицу, кроме восстанавливающей силы $f=-ax$, действует также сила сопротивления среды $f_1=-bv$.

Равнодействующая R этих сил будет $R=f+f_1$, откуда на основании второго закона динамики получим дифференциальное уравнение движения

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-ax-b\frac{dx}{dt}$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2h\frac{dx}{dt}+k^2x=0, \tag{1}$$

где $h=\frac{b}{2m}$ — коэффициент сопротивления, $k^2=\frac{a}{m}$ — коэффициент упругости.

Уравнение (1) является линейным однородным уравнением второго порядка.

Характеристическое уравнение

$$r^2+2hr+k^2=0.$$

Корни характеристического уравнения

$$r_{1,2}=-h\pm\sqrt{h^2-k^2}.$$

Рассмотрим три случая значений дискриминанта h^2-k^2.

Случай 1: $h^2-k^2<0$.

Введем обозначение $h^2-k^2=-p^2$. Тогда

$$r_{1,2}=-h\pm pi.$$

Общее решение имеет вид

$$x=e^{-ht}(C_1\sin pt+C_2\cos pt)$$

или

$$x=C_1e^{-ht}\left(\sin pt+\frac{C_2}{C_1}\cos pt\right).$$

Вводим вспомогательный угол φ посредством зависимости

$$\frac{C_2}{C_1}=\operatorname{tg}\varphi.$$

Тогда

$$x=\frac{C_1}{\cos\varphi}e^{-ht}(\cos\varphi\sin pt+\sin\varphi\cos pt)$$

или, обозначая для краткости

$$\frac{C_1}{\cos\varphi}=A,$$

получим

$$x=Ae^{-ht}\sin(pt+\varphi). \tag{2}$$

Уравнение (2) представляет затухающее гармоническое колебание с начальной амплитудой A и начальной фазой φ.

Множитель e^{-ht} характеризует быстроту убывания амплитуды.

При $t=0$ амплитуда $A_0=Ae^{-h\cdot 0}=A$,

при $t=T$ амплитуда $A_1=Ae^{-hT}$,

при $t=2T$ амплитуда $A_2=A(e^{-hT})^2$.

Таким образом, амплитуда колебаний убывает в геометрической прогрессии со знаменателем e^{-hT}. Период колебания T находится из равенства

$$p(t+T)+\varphi=pt+\varphi+2\pi,$$

откуда

$$T=\frac{2\pi}{p}$$

или

$$p=\frac{2\pi}{T}. \tag{3}$$

Подставляем значение (3) в общее решение и имеем:

$$x=Ae^{-ht}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right).$$

Случай 2: $h^2-k^2>0$.

Введем обозначение $h^2-k^2=q^2$. Тогда корни характеристического уравнения примут вид

$$r_{1,2}=-h\pm q=-(h\mp q).$$

Общее решение будет

$$x=C_1e^{-(h-q)t}+C_2e^{-(h+q)t}.$$

Итак, получаем апериодическое движение.

При положительных C_1 и C_2 величина x во все время движения будет тоже положительной, но убывающей и скорость $\frac{dx}{dt}$ — все время отрицательной, т. е. направленной к центру O.

При $t=0$ $x=C_1+C_2$, при $t\to\infty$ $x\to\infty$.

Случай 3: $h^2-k^2=0$.

Характеристическое уравнение имеет кратные корни

$$r_1=r_2=-h.$$

Общее решение в этом случае

$$x=e^{-ht}(C_1+C_2t),$$

т. е. получаем опять апериодическое движение.

Величина x будет иметь некоторый максимум, после которого она начнет убывать и частица будет приближаться к точке O.

Момент этого максимума, т. е. наибольшего удаления частицы от центра притяжения, находится из уравнения

$$\frac{dx}{dt}=-he^{-ht}(C_1+C_2t)+C_2e^{-ht}=0$$

или

$$C_2-C_1h-C_2ht=0,$$

откуда

$$t=\frac{C_2-C_1t}{C_2h}.$$

В случаях 2 и 3 вязкость среды, характеризуемая величиной h, слишком велика и не допускает возникновения колебаний.

Колебания маятника в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости качания

Задача 155. Определить закон и период колебаний маятника в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости качания v.

Решение. Кроме восстанавливающей силы $f=-\frac{mg}{l}s$ математического маятника (задача 141), здесь действует еще сила сопротивления $f_1=-bv$. Равнодействующая этих сил

$$R=f+f_1=-\left(\frac{mg}{l}s+bv\right).$$

На основании второго закона динамики получаем дифференциальное уравнение движения

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=-\left(\frac{mg}{l}s+bv\right)$$

или

$$\frac{d^2s}{dt^2}+2h\frac{ds}{dt}+k^2s=0, \qquad (1)$$

где $h=\frac{b}{2m}$ — коэффициент сопротивления, $k^2=\frac{g}{l}$ — коэффициент упругости.

Характеристическое уравнение

$$r^2+2hr+k^2=0$$

и его корни

$$r_{1,2}=-h\pm\sqrt{h^2-k^2}.$$

Так как h мало по сравнению с k^2, то здесь имеем случай $h^2-k^2<0$.

Общее решение дифференциального уравнения (1) для этого случая

$$s=e^{-ht}(C_1\sin pt+C_2\cos pt), \qquad (2)$$

где $p=\sqrt{k^2-h^2}$.

Начальные условия: при $t=0$ $s=a$, $\frac{ds}{dt}=0$. Имеем:

$$\frac{ds}{dt}=-he^{-ht}(C_1 \sin pt+C_2 \cos pt)+e^{-ht}(C_1 p \cos pt-C_2 p \sin pt). \quad (3)$$

При $t=0$ уравнения (2) и (3) приводят к системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &a=e^{-h\cdot 0}\,[C_1 \sin(p\cdot 0)+C_2 \cos(p\cdot 0)],\\ &0=-he^{-h\cdot 0}\,[C_1 \sin(p\cdot 0)+C_2 \cos(p\cdot 0)]+\\ &+e^{-h\cdot 0}\,[C_1 p \cos(p\cdot 0)-C_2 p \sin(p\cdot 0)]. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} C_2&=a,\\ C_1 p-C_2 h&=0 \end{aligned}\right\}$$

или

$$C_1=\frac{ah}{p}, \quad C_2=a. \quad (4)$$

Значения (4) подставляем в общее решение (2) и тогда

$$s=e^{-ht}\left(\frac{ah}{p}\sin pt+a \cos pt\right)$$

или

$$s=\frac{ah}{p}e^{-ht}\left(\sin pt+\frac{p}{h}\cos pt\right). \quad (5)$$

Введем обозначение

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{p}{h}.$$

Тогда уравнение (5) примет вид

$$s=\frac{ah}{p\cos\varphi}e^{-ht}\sin(pt+\varphi).$$

Период колебания $T=\frac{2\pi}{p}$, но величина

$$p=\sqrt{k^2-h^2}=\sqrt{\frac{g}{l}-\frac{b^2}{4m^2}}=\frac{1}{2m}\sqrt{\frac{4m^2g-lb^2}{l}},$$

и тогда

$$T=4m\pi\sqrt{\frac{l}{4m^2g-lb^2}}.$$

При $b=0$, т. е. без учета сопротивления среды, этот результат совпадает с результатом предыдущей задачи

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

§ 8. ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

Колебательный замкнутый контур

Задача 156. Колебательный контур, представляющий собой замкнутую электрическую цепь, обладает емкостью C, самоиндукцией L и активным сопротивлением R. При переходе энергии электрического поля конденсатора в энергию магнитного поля катушки

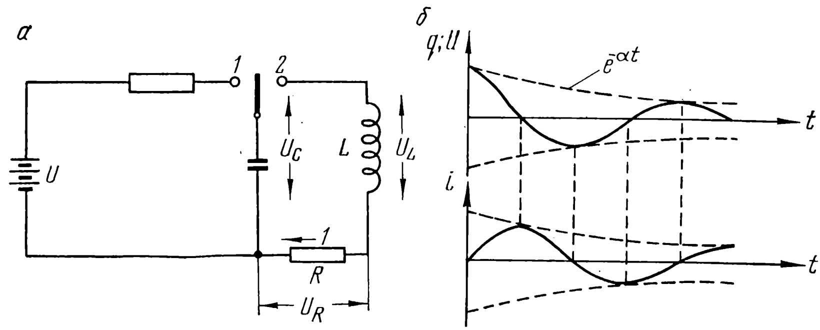

Рис. 95

(и обратно) часть энергии контура затрачивается на активных сопротивлениях, в результате чего величина напряжения на конденсаторе постепенно уменьшается. Найти законы изменения заряда конденсатора q и тока в контуре i, а также напряжения на конденсаторе U (рис. 95, a).

Решение. Ток в контуре определяется как частное от деления падения напряжения на сопротивлении на величину этого сопротивления:

$$i=\frac{U_R}{R}=\frac{U_C-U_L}{R}.$$

Здесь U_C — напряжение на конденсаторе, U_L — напряжение на катушке индуктивности, т. е.

$$U_L=L\frac{di}{dt}.$$

Проводим алгебраические преобразования и получаем исходное дифференциальное уравнение цепи

$$L\frac{di}{dt}+iR-U_C=0.$$

Ток в контуре $i=-\frac{dq}{dt}$, где q — заряд конденсатора;

$$\frac{di}{dt}=-\frac{d^2q}{dt^2}, \quad U=\frac{q}{C}.$$

Тогда уравнение цепи примет вид

$$-L\frac{d^2q}{dt^2}-R\frac{dq}{dt}-\frac{q}{C}=0$$

или

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L}\cdot\frac{dq}{dt}+\frac{q}{LC}=0. \tag{1}$$

Подставляя в уравнение (1) величину $q=CU$, запишем дифференциальное уравнение изменения напряжения на конденсаторе

$$\frac{d^2U}{dt^2}+\frac{R}{L}\cdot\frac{dU}{dt}+\frac{U}{LC}=0.$$

Уравнение (1) дифференцируем по t.

Так как

$$-\frac{d^3q}{dt^3}=\frac{d^2i}{dt^2}, \quad -\frac{d^2q}{dt^2}=\frac{di}{dt}, \quad -\frac{dq}{dt}=i,$$

то уравнение для определения тока будет

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{R}{L}\,\frac{di}{dt}+\frac{i}{LC}=0.$$

Решение уравнения (1) будем искать в виде $q=Ae^{mt}$. Тогда

$$\frac{dq}{dt}=Ame^{mt}, \quad \frac{d^2q}{dt^2}=Am^2e^{mt}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (1), получаем

$$Ae^{mt}\left(m^2+\frac{R}{L}m+\frac{1}{LC}\right)=0.$$

Выражение Ae^{mt} не равно нулю, так как отсутствие заряда на конденсаторе обозначало бы отсутствие колебательного процесса.

Следовательно,

$$m^2+\frac{R}{L}m+\frac{1}{LC}=0,$$

откуда

$$m_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}.$$

Для краткости введем обозначения:

$$\frac{1}{LC}=\omega_U^2, \quad \frac{R}{2L}=\alpha.$$

Тогда

$$m_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_U^2}=-\alpha\pm j\sqrt{\omega_U^2-\alpha^2}.$$

Обозначая $\sqrt{\omega_U^2-\alpha^2}=\omega_p$, получим

$$m_1=-\alpha+j\omega_p,$$

$$m_2=-\alpha-j\omega_p.$$

Заряд конденсатора

$$q=A_1e^{m_1t}+A_2e^{m_2t}=e^{-\alpha t}(A_1e^{j\omega_pt}+A_2e^{-j\omega_pt}).$$

Используем формулу Эйлера:

$$e^{j\omega_pt}=\cos\omega_pt+j\sin\omega_pt,$$

$$e^{-j\omega_pt}=\cos\omega_pt-j\sin\omega_pt.$$

Тогда

$$q=e^{-\alpha t}\left[(A_1+A_2)\cos\omega_pt+j(A_1-A_2)\sin\omega_pt\right].$$

Обозначая $A_1+A_2=M$, $j(A_1-A_2)=N$, получим

$$q=e^{-\alpha t}(M\cos\omega_{pt}+N\sin\omega_pt). \qquad (2)$$

Значения M и N находятся из начальных условий:

при $t=0$ $\quad q=Q_{\max}$;

при $t=0$ $\quad i=0$.

Таким образом, при $t=0$ на конденсаторе максимальный заряд $q=Q_{\max}$, но по уравнению (2) при $t=0$ $\quad q=M$.

Следовательно,

$$q=e^{-\alpha t}(Q_{\max}\cos\omega_pt+N\sin\omega_pt), \qquad (3)$$

$$i=-\frac{dq}{dt}=-e^{-\alpha t}\left[(\omega_p N-\alpha Q_{max})\cos\omega_p t-\right.$$
$$\left.-(\omega_p Q_{max}+\alpha N)\sin\omega_p t\right]. \qquad (4)$$

В начальный момент, при $t=0$, разряда конденсатора нет ($q=0$) и ток в цепи отсутствует ($i=0$).

Из второго начального условия и уравнения (4) следует, что

$$\omega_p N-\alpha Q_{max}=0,$$

откуда

$$N=Q_{max}\frac{\alpha}{\omega_p}.$$

Подставляя значение N в уравнения (3) и (4), получим

$$q=Q_{max}e^{-\alpha t}\left(\cos\omega_p t+\frac{\alpha}{\omega_p}\sin\omega_p t\right), \qquad (5)$$

$$i=Q_{max}\left(\omega_p+\frac{\alpha^2}{\omega_p}\right)e^{-\alpha t}\sin\omega_p t. \qquad (6)$$

Член $Q_{max}\left(\omega_p+\frac{\alpha^2}{\omega_p}\right)=I_{max}$ представляет максимальное значение тока.

Итак,

$$i=I_{max}\,e^{-\alpha t}\sin\omega_p t.$$

Используя зависимость $U=\frac{q}{C}$ и равенство (5), получим напряжение на конденсаторе

$$U=U_{max}\,e^{-\alpha t}\left(\cos\omega_p t+\frac{\alpha}{\omega_p}\sin\omega_p t\right). \qquad (7)$$

Уравнения затухающих колебаний (5), (6) и (7) изображены графически на рис. 95, *б*.

Колебательный разряд конденсатора

Задача 157. Конденсатор емкостью C, заряженный до разности потенциалов V_0, разряжается через проводник с сопротивлением R и самоиндукцией L. Исследовать характер разряда при различных значениях R, L и C.

Решение. В процессе разряда конденсатора разность потенциалов на его обкладках переменна. Пусть в момент t эта разность V. Тогда разряд конденсатора Q в этот момент будет

$$Q=CV. \qquad (1)$$

При изменении V будет изменяться величина Q. Скорость $-\frac{dQ}{dt}$ этого изменения равна силе тока в цепи i. Поэтому

$$i=-\frac{dQ}{dt}. \tag{2}$$

Дифференцируя соотношение (1), получаем

$$\frac{dQ}{dt}=C\frac{dV}{dt}.$$

Подставляем это значение в равенство (2) и имеем:

$$i=-C\frac{dV}{dt}.$$

В любой момент t в цепи действуют две противоположные электродвижущие силы: напряжение конденсатора V и электродвижущая сила самоиндукции $-L\frac{di}{dt}$. Общая электродвижущая сила будет

$$E=V-L\frac{di}{dt}. \tag{3}$$

По закону Ома $iR=E$. Подставляя это соотношение в левую часть уравнения (3), получим

$$iR=V-L\frac{di}{dt}$$

или с учетом зависимости (2)

$$-RC\frac{dV}{dt}=V+LC\frac{d^2V}{dt^2},$$

откуда

$$\frac{d^2V}{dt^2}+\frac{R}{L}\cdot\frac{dV}{dt}+\frac{1}{CL}V=0. \tag{4}$$

Вводим обозначения $h=\frac{R}{2L}$ и $k^2=\frac{1}{CL}$.

Дифференциальное уравнение задачи (4) принимает вид

$$\frac{d^2V}{dt^2}+2h\frac{dV}{dt}+k^2V=0. \tag{5}$$

Это уравнение затухающих колебаний.

Характеристическое уравнение

$$r^2+2hr+k^2=0$$

имеет корни

$$r_{1,2}=-h\pm\sqrt{h^2-k^2}.$$

Исследуем три возможных случая.

Случай 1. Сопротивление R мало, т. е. $h<k$, или $h^2-k^2<0$ или $R<2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Общее решение уравнения (5) в этом случае

$$V=e^{-ht}(C_1\sin pt+C_2\cos pt), \tag{6}$$

где

$$p=\sqrt{k^2-h^2}=\sqrt{\frac{1}{CL}-\frac{R^2}{4L^2}}.$$

Начальные условия: при $t=0$ $V=V_0$, $i=-C\frac{dV}{dt}=0$, откуда

$$V_0=e^{-h\cdot 0}[C_1\sin(p\cdot 0)+C_2\cos(p\cdot 0)]$$

и так как

$$\frac{dV}{dt}=-he^{-ht}(C_1\sin pt+C_2\cos pt)+e^{-ht}(C_1p\cos pt-C_2p\sin pt),$$

то

$$0=-he^{-h\cdot 0}[C_1\sin(p\cdot 0)+C_2\cos(p\cdot 0)]+$$
$$+e^{-h\cdot 0}[C_1p\cos(p\cdot 0)-C_2p\sin(p\cdot 0)],$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} V_0&=C_2,\\ 0&=-hC_2+C_1p.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Решаем систему (7):

$$C_1=\frac{h}{p}V_0,\quad C_2=V_0. \tag{8}$$

Подставляем значения (8) в общее решение (6) и получаем

$$V=e^{-ht}\left(\frac{h}{p}V_0\sin pt+V_0\cos pt\right)$$

или

$$V=V_0e^{-ht}\left(\frac{h}{p}\sin pt+\cos pt\right);$$

Вводим вспомогательный угол φ соотношением

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{h}{p}.$$

Тогда разряд совершается по закону

$$V = \frac{V_0}{\sin\varphi} e^{-ht} \sin(pt + \varphi).$$

В исследуемом случае цепь является вибратором, в котором происходят электрические затухающие колебания с периодом

$$T = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}}.$$

При достаточно малом R, которым можно пренебречь, получим формулу Томсона для периода колебательного разряда

$$T = 2\pi\sqrt{CL}.$$

Случай 2. Сопротивление R велико, т. е. $h > k$, или $h^2 - k^2 > 0$ или $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Общее решение уравнения (5) принимает вид

$$V = C_1 e^{(q-h)t} + C_2 e^{-(q+h)t}, \tag{9}$$

где

$$q = \sqrt{h^2 - k^2}.$$

При тех же начальных условиях имеем

$$V_0 = C_1 e^{(q-h)\cdot 0} + C_2 e^{-(q+h)\cdot 0},$$

и так как

$$\frac{dV}{dt} = C_1 (q-h) e^{(q-h)t} - C_2 (q+h) e^{-(q+h)t},$$

то

$$0 = C_1 (q-h) e^{(q-h)\cdot 0} - C_2 (q+h) e^{-(q+h)\cdot 0},$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} C_1 + C_2 &= V_0, \\ (q-h)C_1 - (q+h)C_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Решение системы (10) дает значения постоянных интегрирования

$$C_1=\frac{q+h}{2q}V_0,\quad C_2=\frac{q-h}{2q}V_0. \tag{11}$$

Подставляем значения (11) в общее решение (9) и получаем

$$V=\frac{q+h}{2q}V_0e^{(q-h)t}+\frac{q-h}{2q}e^{-(q+h)t}$$

или

$$V=\frac{V_0}{2q}e^{-ht}\left[(q+h)e^{qt}+(q-h)e^{-qt}\right].$$

В этом случае разряд происходит апериодически. Разность потенциалов V асимптотически приближается к нулю.

Случай 3. При $h=k$ или $h^2-k^2=0$ сопротивление $R=2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Общее решение уравнения (5) будет

$$V=e^{-ht}(C_1+C_2t). \tag{12}$$

При тех же начальных условиях имеем

$$V_0=e^{-h\cdot 0}(C_1+C_2\cdot 0),$$

и так как

$$\frac{dV}{dt}=-he^{-ht}(C_1+C_2t)+e^{-ht}C_2,$$

то

$$0=-he^{-h\cdot 0}(C_1+C_2\cdot 0)+C_2e^{-h\cdot 0},$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} V_0&=C_1,\\ 0&=-C_1h+C_2.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Решение системы (13) определяет значения постоянных интегрирования

$$C_1=V_0,\quad C_2=hV_0. \tag{14}$$

Подставляя значения (14) в общее решение (12), имеем

$$V=e^{-ht}(V_0+hV_0t)$$

или

$$V=V_0e^{-ht}(1+ht).$$

Разряд происходит апериодически, а разность потенциалов V стремится к нулю.

Изменяя постепенно сопротивление R цепи, можно переходить от одного вида разряда к другому.

§ 9. КОЛЕБАНИЯ МАГНИТНОЙ СТРЕЛКИ БЕЗ И ПРИ НАЛИЧИИ УСПОКОИТЕЛЯ

Задача 158. Магнитная стрелка помещена в равномерное магнитное поле, отклонена на угол φ_0 от положения равновесия и предоставлена самой себе. Исследовать характер движения магнитной стрелки, пренебрегая внешними сопротивлениями, а также при наличии успокоителя.

Решение. На каждый полюс стрелки действует магнитная сила F поля. Таким образом, магнит находится под влиянием вращающей его пары сил F.

Обозначим: H — горизонтальную составляющую напряжения однородного магнитного поля, m — равные, разноименные количества магнетизма на полюсах.

Тогда

$$F = Hm. \tag{1}$$

Обе силы F разложим на составляющие P и f (рис. 96). Силы P взаимно уравновешиваются и поэтому пара сил F эквивалентна паре сил f.

Из рис. 96 очевидно, что

$$f = -F\sin\varphi = -mH\sin\varphi.$$

Знак минус показывает, что сила f действует в сторону убывания угла φ.

Элементарная работа dA пары f при повороте стрелки на бесконечно малый угол $-d\varphi$ будет

$$dA = 2f d\sigma = -2F\sin\varphi d\sigma. \tag{2}$$

Дуга $d\sigma$ круга равна линейной мере угла, умноженной на радиус, т. е. $d\sigma = \frac{l}{2} d\varphi$.

Отсюда

$$dA = -2F\sin\varphi \frac{l}{2} d\varphi = -Fl\sin\varphi d\varphi. \tag{3}$$

Учитывая соотношение (1), равенство (3) запишем в виде

$$dA = -mlH\sin\varphi d\varphi. \tag{4}$$

Величина $ml = M$ называется магнитным моментом стрелки. Тогда соотношение (4) принимает вид

$$dA = -MH\sin\varphi d\varphi. \tag{5}$$

С другой стороны, элементарная работа dA равна приращению dH кинетической энергии U стрелки.

Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг оси,

$$U=\frac{1}{2}I\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2,$$

где I — момент инерции тела относительно оси вращения, а $\frac{d\varphi}{dt}$ — угловая скорость вращения.

Отсюда

$$dU=\frac{I}{2}\cdot 2\frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2}dt$$

или

$$dU=dA=I\frac{d^2\varphi}{dt^2}d\varphi. \qquad (6)$$

Сравнивая зависимости (5) и (6), получаем

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2}d\varphi=-MH\sin\varphi d\varphi$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{MH}{I}\sin\varphi=0.$$

При малых колебаниях $\sin\varphi\approx\varphi$. Обозначая постоянную величину $\frac{MH}{I}=k^2$, получаем дифференциальное уравнение магнита

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+k^2\varphi=0. \qquad (7)$$

Общее решение неполного линейного дифференциального уравнения (7) имеет вид

$$\varphi=C_1\sin kt+C_2\cos kt. \qquad (8)$$

Начальные условия: при $t=0$ $\varphi=\varphi_0$, $\frac{d\varphi}{dt}=0$. Отсюда

$$\varphi_0=C_1\sin(k\cdot 0)+C_2\cos(k\cdot 0). \qquad (9)$$

Дифференцируя уравнение (8), находим

$$\frac{d\varphi}{dt}=C_1k\cos kt-C_2k\sin kt$$

и

$$0=C_1k\cos(k\cdot 0)-C_2k\sin(k\cdot 0). \qquad (10)$$

Из системы уравнений (9) и (10) получаем:

$$C_1=0, \quad C_2=\varphi_0.$$

Подставляя значения постоянных интегрирования в общее решение (8), находим закон колебаний

$$\varphi=\varphi_0 \cos kt$$

или

$$\varphi=\varphi_0 \cos \sqrt{\frac{MH}{I}}\, t.$$

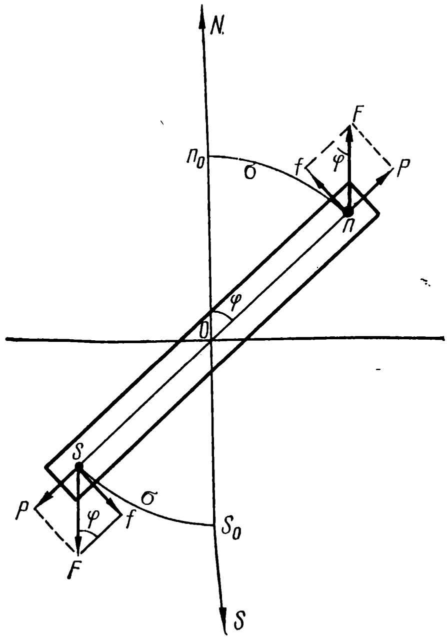

Рис. 96

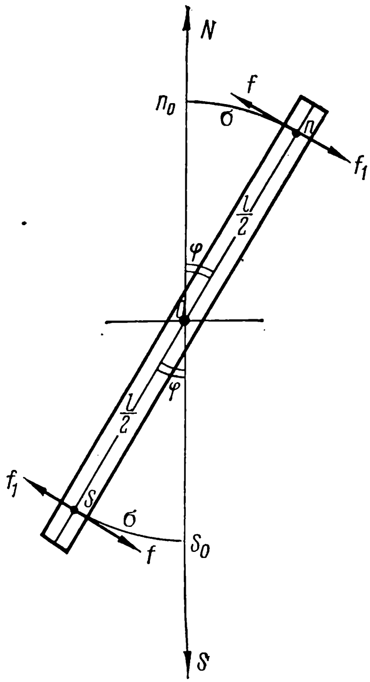

Рис. 97

Стрелка совершает чисто гармонические колебания с периодом

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{MH}{I}}}$$

или

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{MH}}.$$

Итак, период T колебаний магнитной стрелки обратно пропорционален $\sqrt{H}$. Следовательно, число n колебаний стрелки в секунду прямо пропорционально $\sqrt{H}$. Этим обстоятельством пользуются для определения напряжения H магнитного поля при помощи наблюдения за колебаниями магнитной стрелки.

Исследуем движение магнитной стрелки при наличии успокоителя, т. е. расположенной вблизи стрелки массы немагнитного металла, например меди.

При вращении магнитной стрелки в успокоителе возникают индукционные токи, которые, действуя обратно на стрелку, препятствуют ее движению. Сила токов в успокоителе и их действие на стрелку в каждый момент пропорциональны угловой скорости вращения стрелки.

Кроме магнитного поля, на стрелку действует еще пара сил f_1 (рис. 97), момент которой противоположен по знаку моменту пары сил f, а по величине пропорционален угловой скорости $\frac{d\varphi}{dt}$ вращения стрелки.

Этот момент

$$\mu = -n\frac{d\varphi}{dt}.$$

Пусть стрелка поворачивается на бесконечно малый угол $-d\varphi$. Определим приращение dU ее кинетической энергии U, работу dA пары сил f и работу dA_1 пары сил f_1.

Аналогично вышеизложенному находим

$$dU = I\frac{d^2\varphi}{dt^2}\,d\varphi, \tag{11}$$

$$dA = -MH\sin\varphi\, d\varphi \tag{12}$$

и

$$dA_1 = -2f_1(-d\sigma) = 2f_1\frac{l}{2}\,d\varphi = f_1 l\, d\varphi.$$

Так как момент пары $\mu = f_1 l$, то

$$dA_1 = \mu\, d\varphi = -n\frac{d\varphi}{dt}\,d\varphi. \tag{13}$$

Приращение dU кинетической энергии стрелки должно равняться совершенной над стрелкой работе и поэтому

$$dU = dA + dA_1.$$

Подставляя соотношения (11), (12) и (13) в равенство (2), получаем

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2}d\varphi = -MH\sin\varphi d\varphi - n\frac{d\varphi}{dt}d\varphi$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{n}{I}\cdot\frac{d\varphi}{dt} + \frac{MH}{I}\sin\varphi = 0.$$

Для малых колебаний $\sin\varphi \approx \varphi$. Обозначая $\frac{n}{2I} = h$, $\frac{MH}{I} = k^2$, получим дифференциальное уравнение движения

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2h\frac{d\varphi}{dt} + k^2\varphi = 0. \tag{14}$$

Коэффициент сопротивления h является мерой успокоения. Коэффициент упругости k^2 пропорционален напряжению H поля и является мерой силы поля.

Характеристическим уравнением для однородного линейного уравнения (14) будет

$$r^2 + 2hr + k^2 = 0.$$

Это уравнение имеет два корня

$$r_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2}.$$

Исследуем три возможных случая значения подкоренного выражения.

Случай 1. Успокоитель слабый: $h < k$ или $h^2 - k^2 < 0$.

Общее решение уравнения (14) имеет вид

$$\varphi = e^{-ht}(C_1 \sin pt + C_2 \cos pt), \tag{15}$$

где $h^2 - k^2 = -p^2$.

Начальные условия: при $t = 0$ $\varphi = \varphi_0$, $\frac{d\varphi}{dt} = 0$. Отсюда

$$\varphi_0 = e^{-h\cdot 0}[C_1 \sin(p\cdot 0) + C_2 \cos(p\cdot 0)],$$

и так как

$$\frac{d\varphi}{dt} = -he^{-ht}(C_1 \sin pt + C_2 \cos pt) + e^{-ht}(C_1 p \cos pt - C_2 p \sin pt),$$

то

$$0 = -he^{-h\cdot 0}[C_1 \sin(p\cdot 0) + C_2 \cos(p\cdot 0)] + \\ + e^{-h\cdot 0}[C_1 p \cos(p\cdot 0) - C_2 p \sin(p\cdot 0)],$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \varphi_0 &= C_2, \\ 0 &= -hC_2 + C_1 p. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Решая систему (16), находим

$$C_1=\frac{h}{p}\varphi_0,\quad C_2=\varphi_0.$$

Подставляем найденные значения в общее решение (15) и получаем

$$\varphi=e^{-ht}\left(\frac{h}{p}\varphi_0\sin pt+\varphi_0\cos pt\right)$$

или

$$\varphi=\varphi_0e^{-ht}\left(\frac{h}{p}\sin pt+\cos pt\right).$$

Вводим вспомогательный угол α соотношением

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{h}{p}$$

и получаем

$$\varphi=\frac{\varphi_0}{\sin\alpha}e^{-ht}\sin(pt+\varphi).$$

Стрелка совершает затухающие гармонические колебания с периодом

$$T=\frac{2\pi}{p}=\frac{2\pi}{\sqrt{k^2-h^2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{MH}{I}-h^2}}.$$

Случай 2. Успокоитель сильный: $h>k$ или $h^2-k^2>0$.

Общее решение уравнения (14) в этом случае

$$\varphi=C_1e^{(q-h)t}+C_2e^{-(q+h)t},\tag{17}$$

где $q=\sqrt{h^2-k^2}$.

Начальные условия: при $t=0$ $\varphi=\varphi_0$, $\frac{d\varphi}{dt}=0$. Отсюда

$$\varphi_0=C_1e^{(q-h)\cdot 0}+C_2e^{-(q+h)\cdot 0},$$

и так как

$$\frac{d\varphi}{dt}=(q-h)C_1e^{(q-h)t}-(q+h)C_2e^{-(q+h)t},$$

то

$$0=(q-h)C_1e^{(q-h)\cdot 0}-(q+h)C_2e^{-(q+h)\cdot 0},$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}&C_1+C_2=\varphi_0,\\&(q-h)C_1-(q+h)C_2=0.\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

Решая систему (18), находим

$$C_1=\frac{q+h}{2q}\varphi_0, \quad C_2=\frac{q-h}{2q}\varphi_0. \tag{19}$$

Подставляем значения постоянных интегрирования (19) в общее решение (17) и получаем

$$\varphi=\frac{q+h}{2q}\varphi_0 e^{(q-h)t}+\frac{q-h}{2q}e^{-(q+h)t}$$

или

$$\varphi=\frac{\varphi_0}{2q}e^{-ht}\left[(q+h)e^{qt}+(q-h)e^{-qt}\right].$$

Приближение стрелки к положению равновесия апериодическое.

Случай 3. $h=k$ или $h^2-k^2=0$.

Общее решение уравнения (14)

$$\varphi=e^{-ht}(C_1+C_2t). \tag{20}$$

Начальные условия прежние: при $t=0$ $\varphi=\varphi_0$ и $\frac{d\varphi}{dt}=0$. Отсюда

$$\varphi_0=e^{-h\cdot 0}(C_1+C_2\cdot 0),$$

и так как

$$\frac{d\varphi}{dt}=-he^{-ht}(C_1+C_2t)+C_2e^{-ht},$$

то

$$0=-he^{-h\cdot 0}(C_1+C_2\cdot 0)+C_2e^{-h\cdot 0},$$

откуда

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_0=C_1,\\ 0=-hC_1+C_2.\end{array}\right\} \tag{21}$$

Решая систему (21), находим постоянные интегрирования

$$C_1=\varphi_0, \quad C_2=h\varphi_0. \tag{22}$$

Подставляем значения постоянных интегрирования (22) в общее решение (20) и имеем

$$\varphi=e^{-ht}(\varphi_0+h\varphi_0t)$$

или

$$\varphi=\varphi_0e^{-ht}(1+ht).$$

Итак, имеем опять апериодическое приближение стрелки к положению равновесия.

§ 10. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Колебания материальной точки под действием восстанавливающей силы, сопротивления среды и внешней периодической силы

Задача 159. Определить закон движения материальной частицы массы m под влиянием восстанавливающей силы (силы, направленной к центру O и прямо пропорциональной удалению x частицы от центра притяжения O), силы сопротивления и внешней силы $F=c_1\sin(qt+\varphi_0)$ для случая $h^2-k^2<0$.

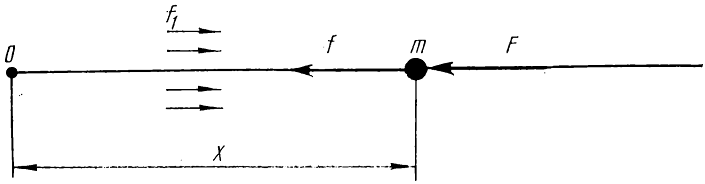

Рис. 98

Решение. Кроме восстанавливающей силы $f=-ax$ и силы сопротивления $f_1=-bv$, на частицу действует внешняя сила $F=c_1\sin(qt+\varphi_0)$. Как видно из рис. 98, равнодействующая всех сил

$$R=F+f+f_1.$$

На основании второго закона динамики дифференциальное уравнение движения

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+ax=c_1\sin(qt+\varphi_0)$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2h\frac{dx}{dt}+k^2x=c_1\sin(qt+\varphi_0), \tag{1}$$

где $2h=\frac{b}{m}$, $k^2=\frac{a}{m}$.

Это неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Решаем его для случая $h^2-k^2<0$ (случай малого сопротивления).

Пусть

$$h^2-k^2=-p^2.$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} r_1&=-h+pi,\\ r_2&=-h-pi.\end{aligned}\right\}$$

Характеристическое уравнение дифференциального уравнения (1)

$$r^2+2hr+k^2=0$$

имеет комплексные корни

$$r_{1,2}=-h\pm\sqrt{h^2-k^2}=-h\pm\sqrt{-p^2}=-h\pm pi.$$

В этом случае общее решение соответствующего однородного уравнения

$$x=e^{-ht}(C_1\sin pt+C_2\cos pt)$$

или

$$x=C_1e^{-ht}\left(\sin pt+\frac{C_2}{C_1}\cos pt\right).$$

Вводя вспомогательный угол φ соотношением

$$\frac{C_2}{C_1}=\operatorname{tg}\varphi,$$

имеем:

$$x=\frac{C_1}{\cos\varphi}e^{-ht}(\cos\varphi\sin pt+\sin\varphi\cos pt).$$

Обозначая

$$\frac{C_1}{\cos\varphi}=A,$$

получим

$$x=Ae^{-ht}\sin(pt+\varphi).$$

Частное решение уравнения (1) будем искать в виде вспомогательной функции V. Вспомогательная функция и ее производные равны:

$$V=M\sin(qt+\varphi_0)+N\cos(qt+\varphi_0),$$

$$\frac{dV}{dt}=Mq\cos(qt+\varphi_0)-Nq\sin(qt+\varphi_0),$$

$$\frac{d^2V}{dt^2}=-Mq^2\sin(qt+\varphi_0)-Nq^2\cos(qt+\varphi_0).$$

Подстановка этих выражений в уравнение (1) дает равенство:

$$-Mq^2\sin(qt+\varphi_0)-Nq^2\cos(qt+\varphi_0)+2hMq\cos(qt+\varphi_0)-$$
$$-2hNq\sin(qt+\varphi_0)+k^2M\sin(qt+\varphi_0)+k^2N\cos(qt+\varphi_0)=$$
$$=c\sin(qt+\varphi_0)$$

или

$$(k^2M-Mq^2-2hNq)\sin(qt+\varphi_0)+$$
$$+(k^2N-Nq^2+2hMq)\cos(qt+\varphi_0)=c\sin(qt+\varphi_0).$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты, получим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} k^2M-Mq^2-2hNq=c,\\ k^2N-Nq^2+2hMq=0.\end{aligned}\right\}$$

Решая ее, находим значения N и M:

$$\left.\begin{aligned} N=-\frac{2hqc}{4h^2q^2+(k^2-q^2)^2},\\ M=\frac{c(k^2-q^2)}{4h^2q^2+(k^2-q^2)^2}.\end{aligned}\right\}$$

Таким образом, общее решение

$$x=Ae^{-ht}\sin(pt+\varphi)+\frac{c(k^2-q^2)}{4h^2q^2+(k^2-q^2)}\sin(qt+\varphi_0)-$$
$$-\frac{2hqc}{4h^2q^2+(k^2-q^2)}\cos(qt+\varphi_0)$$

или

$$x=Ae^{-ht}\sin(pt+\varphi)+\frac{c(k^2-q^2)}{4h^2q^2+(k^2-q^2)}\Big[\sin(qt+\varphi_0)-$$
$$-\frac{2hq}{k^2-h^2}\cos(qt+\varphi_0)\Big].$$

Вводя вспомогательный угол φ_1 соотношением

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{2hq}{k^2-h^2}$$

и обозначая

$$\frac{c(k^2-q^2)}{[4h^2q^2+(k^2-q^2)^2]\cos\varphi_1}=B,$$

окончательно получим

$$x=Ae^{-ht}\sin(pt+\varphi)+B\sin(qt+\varphi_0-\varphi_1). \tag{2}$$

Колебательное движение, описываемое уравнением (2), состоит из двух частей: собственного (свободного) колебания $x_1=$ $=Ae^{-ht}\sin(pt+\varphi)$ и вынужденного колебания $x_2=B\sin(qt+\varphi_0-\varphi_1)$.

Первая часть оказывает существенное влияние на общее колебание только при малом t, т. е. в первое время движения. Это объясняется тем, что множитель e^{-ht} с возрастанием t быстро стремится к нулю. Таким образом, первая часть имеет значение только во время установления процесса. В дальнейшем величина x почти исключительно определяется вторым слагаемым, которое дает закон установившегося вынужденного колебания.

Упругая пружина с подвешенным грузом, совершающим периодические колебания с учетом сопротивления

Задача 160. Груз массы m подвешен на пружине с жесткостью c. Конец пружины K совершает вертикальные гармонические колебания по закону $\overline{KL}=A\sin(pt)$. Найти закон движения груза, если сила сопротивления движению пропорциональна скорости груза.

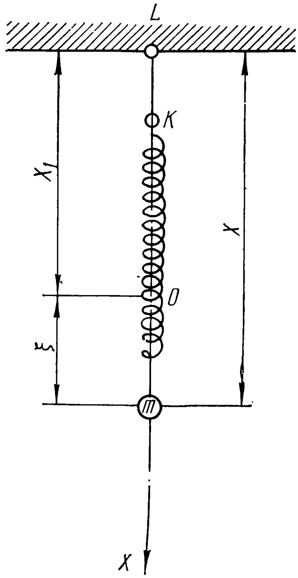

Рис. 99

Решение. Начало координат поместим в точке L, ось x направим по вертикали вниз. Дифференциальное уравнение движения груза в данном случае будет

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg-c\lambda-k\frac{dx}{dt}, \tag{1}$$

где λ — удлинение пружины, $c\lambda$ — проекция на ось x реакции пружины, k — коэффициент сопротивления.

Если l_0 — естественная длина пружины, то, согласно рис. 99, удлинение

$$\lambda=x-\overline{KL}-l_0=x-A\sin(pt)-l_0. \tag{2}$$

Подставляя выражение (2) в уравнение (1), находим

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg-cx+cA\sin(pt)+cl_0-k\frac{dx}{dt}. \tag{3}$$

Произведем замену переменного x. Пусть

$$x=\xi+x_1,$$

где ξ — новая переменная, x_1 — постоянная величина.

Тогда

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d\xi}{dt}, \quad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2\xi}{dt^2},$$

и вместо уравнения (3) получаем

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2}=mg-c\xi-cx_1+cA\sin(pt)+cl_0-k\frac{d\xi}{dt}. \tag{4}$$

Выберем x_1 так, чтобы в правой части уравнения (4) исчезли постоянные члены, т. е. пусть

$$mg-cx_1+cl_0=0,$$

отсюда

$$x_1=l_0+\frac{mg}{c}. \tag{5}$$

Согласно закону Гука, сила упругости (реакция) пружины F пропорциональна ее удлинению, т. е. $F=c\lambda$, где c — коэффициент пропорциональности, называемый жесткостью пружины. Так как в положении равновесия модуль силы F равен силе тяжести P, то

$$P=c\lambda_{\text{ст}},$$

где $\lambda_{\text{ст}}$ — статическое удлинение пружины.

Отсюда

$$c=\frac{P}{\lambda_{\text{ст}}}.$$

Обратно, зная жесткость c пружины, находим ее статическое удлинение

$$\lambda_{\text{ст}}=\frac{P}{c}=\frac{mg}{c}.$$

Тогда равенство (5) примет вид

$$x_1=l_0+\lambda_{\text{ст}}.$$

Как видно из вышеизложенного, замена переменной эквивалентна переносу начала координат из точки L в положение равновесия груза O, если конец пружины закрепить в точке L. После замены дифференциальное уравнение (4) будет

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2}+k\frac{d\xi}{dt}+c\xi=cA\sin(pt)$$

или

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}+2n\frac{d\xi}{dt}+s^2\xi=h\sin(pt), \tag{6}$$

где

$$h=\frac{cA}{m}, \quad 2n=\frac{k}{m}$$

и

$$s=\sqrt{\frac{c}{m}}=\sqrt{\frac{g}{\lambda_{\text{ст}}}}.$$

Уравнение (6) есть линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение этого уравнения можно представить в виде

$$\xi=X_1+X_2, \tag{7}$$

где X_1 — общее решение соответствующего однородного уравнения (без правой части), X_2 — какое-либо частное решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения.

Находим общее решение X_1 соответствующего однородного уравнения

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}+2n\frac{d\xi}{dt}+s^2\xi=0. \tag{8}$$

Для интегрирования этого уравнения применим способ замены переменной.

Пусть

$$\xi=\eta e^{-nt}, \tag{9}$$

где η — новая переменная.

Дифференцируя равенство (9) по t, получим

$$\frac{d\xi}{dt}=e^{-nt}\left(\frac{d\eta}{dt}-n\eta\right)$$

и вторая производная

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = e^{-nt}\left(\frac{d^2\eta}{dt^2}-2n\frac{d\eta}{dt}+n^2\eta\right)$$

Подставляя значения функции ξ и ее производных в дифференциальное уравнение (8), после сокращения на общий множитель e^{-nt} находим

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}-2n\frac{d\eta}{dt}+n^2\eta+2n\frac{d\eta}{dt}-2n^2\eta+s^2\eta=0$$

или

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}+(s^2-n^2)\eta=0.$$

Допустим, что $s>n$; полагая тогда $s^2-n^2=s_1^2$, последнее уравнение приведем к виду

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}+s_1^2\eta=0. \tag{10}$$

Это неполное линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Проведем подробное интегрирование уравнения (10).

Соответствующее характеристическое уравнение $r^2+s_1^2=0$ имеет мнимые корни

$$r_{1,2}=\pm\sqrt{-s_1^2}=\pm is_1.$$

Частные решения дифференциального уравнения (9) будут:

$$\eta_1=e^{r_1t}=e^{s_1it},$$

$$\eta_2=e^{r_2t}=e^{-s_1it}.$$

Так как корни мнимые, а частные решения независимые (отношение $\frac{e^{s_1it}}{e^{-s_1it}}$ — переменное), то общее решение уравнения (10) выразится функцией

$$\eta=e^{\alpha t}\left[C_1\cos(s_1t)+C_2\sin(s_1t)\right],$$

причем $\alpha=0$. Окончательно:

$$\eta=C_1\cos(s_1t)+C_2\sin(s_1t). \tag{11}$$

В практических применениях это общее решение дифференциального уравнения обычно преобразуется путем замены двучлена в правой части выражения (11).

В равенстве (11) выносим за скобки величину $\sqrt{C_1^2+C_2^2}$. Тогда

$$\eta=\sqrt{C_1^2+C_2^2}\left[\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\cos(s_1t)+\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\sin(s_1t)\right], \tag{12}$$

причем

$$\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\right)^2+\left(\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\right)^2=$$

$$=\frac{C_1^2}{C_1^2+C_2^2}+\frac{C_2^2}{C_1^2+C_2^2}=\frac{C_1^2+C_2^2}{C_1^2+C_2^2}=1.$$

На основании вышеизложенного величину $\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}$ можно принять за $\sin\varphi$, а $\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}$ за $\cos\varphi$.

Таким путем из равенства (12) находим

$$\eta=\sqrt{C_1^2+C_2^2}\,[\sin\varphi\cos(s_1t)+\cos\varphi\sin(s_1t)].$$

Обозначая

$$\sqrt{C_1^2+C_2^2}=C^*$$

и применяя формулу синуса суммы

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B,$$

получим

$$\eta=C^*\sin(s_1t+\varphi). \tag{13}$$

Уравнение (13) представляет уравнение гармонических колебаний.

Так как $\xi=\eta e^{-nt}$, то, следуя обозначению, принятому в соотношении (7), общее решение уравнения (8) запишем в виде

$$X_1=C^*e^{-nt}\sin(s_1t+\varphi), \tag{14}$$

где C^* и φ — произвольные постоянные; а $s_1=\sqrt{s^2-n^2}$.

Уравнение (14) представляет уравнение затухающих колебаний.

Найдем частное решение X_2 данного неоднородного уравнения (6).

Предположим, что

$$X_2=C^{**}\sin(pt+\psi),$$

где C^{**} и ψ — некоторые постоянные величины, которые нужно подобрать так, чтобы это значение X_2 тождественно удовлетворяло данному дифференциальному уравнению (6).

Находим

$$\frac{dX_2}{dt}=C^{**}p\cos(pt+\psi)$$

и

$$\frac{d^2X_2}{dt^2}=-C^{**}p^2\sin(pt+\psi).$$

Подставляя эти значения производных, а также значение X_2 в дифференциальное уравнение (6), получим

$$-C^{**}p^2\sin(pt+\psi)+2nC^{**}p\cos(pt+\psi)+$$
$$+s^2C^{**}\sin(pt+\psi)=h\sin(pt)$$

или, полагая для краткости $pt+\psi=\theta$,

$$C^{**}(s^2-p^2)\sin\theta+2nC^{**}p\cos\theta=h\sin(\theta-\psi)$$

и

$$C^{**}(s^2-p^2)\sin\theta+2nC^{**}p\cos\theta=h\sin\theta\cos\psi-h\cos\theta\sin\psi.$$

Так как это равенство должно выполняться тождественно (при всяком θ), то коэффициенты при $\sin\theta$ и $\cos\theta$ в левой и правой частях должны быть равными, т. е.

$$\left.\begin{aligned} h\cos\psi&=C^{**}(s^2-p^2),\\ h\sin\psi&=-2nC^{**}p.\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

Из системы (15) находим

$$\left.\begin{aligned} C^{**}&=\frac{h}{\sqrt{(s^2-p^2)^2+4n^2p^2}},\\ \operatorname{tg}\psi&=-\frac{2np}{s^2-p^2}.\end{aligned}\right\}$$

Тем самым частное решение X_2 линейного неоднородного дифференциального уравнения определено полностью.

Таким образом, общее решение данного дифференциального уравнения, представляющее закон движения точки при наличии возмущающей силы, выражается зависимостью

$$\xi=X_1+X_2=C^*e^{-nt}\sin(s_1t+\varphi)+C^{**}\sin(pt+\psi).$$

Ввиду того что множитель e^{-nt} быстро стремится к нулю, то через достаточно большой промежуток времени можно пренебречь членом, выражающим затухающие колебания. Тогда $\xi=C^{**}\sin(pt+\psi)$, т. е. груз совершает только вынужденные колебания около положения равновесия O.

Вынужденные колебания двигателя на балке

Задача 161. На балке, свободно лежащей на двух опорах, установлен двигатель, маховик которого насажен на вал с небольшим эксцентриситетом ε, и на вал действует центробежная сила, расшатывающая систему. Найти закон вынужденных колебаний системы,

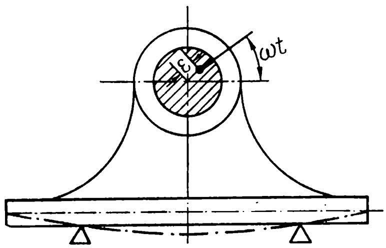

Рис. 100

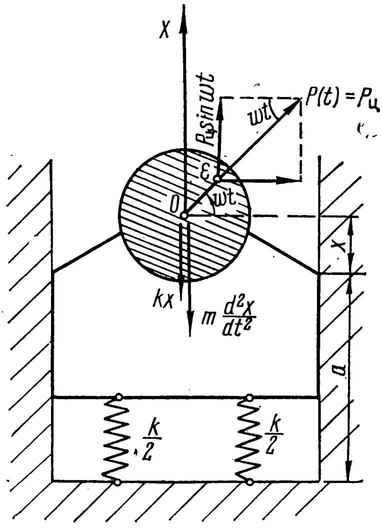

Рис. 101

а также исследовать влияние сопротивления среды, пропорционального скорости движения.

Решение. Центробежная сила

$$P_ц = \frac{\mu v^2}{\varepsilon},$$

где μ — масса маховика, $\frac{v^2}{\varepsilon}$ — центробежное ускорение.

Так как $v = \omega\varepsilon$, где ω — угловая скорость маховика (рис. 100), то центробежная сила $P_ц = \mu\omega^2\varepsilon$.

При колебаниях, вызываемых небалансированным ротором машины при его равномерном вращении, можно считать, что центробежная сила дает чисто гармоническую силу в заданном направлении с частотою оборотов машины.

Допустим, что на массу m машины, стоящей на упругих опорах (рис. 101), действует внешняя периодическая сила $P(t)$, изменяющаяся во времени.

Вертикальная составляющая центробежной силы, вызывающая поперечные колебания балки, равна тогда $P_ц \sin \omega t$.

Без учета сопротивления среды в любое мгновение груз находится под действием трех взаимно уравновешивающихся сил (рис. 101): силы инерции $-m\frac{d^2x}{dt^2}$, силы упругости балки $-kx$ и вертикальной составляющей возмущающей силы $P_ц \sin \omega t$. Здесь k — коэффициент жесткости балки (в *н/м*, *кГ/см* и т. п.).

Проектируя действующие силы на вертикальную ось, получаем уравнение движения

$$P_ц \sin \omega t - kx - m\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

которое принимает вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = P_ц \sin \omega t$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \frac{1}{m}P_ц \sin \omega t.$$

Обозначая $n^2 = \frac{k}{m}$, дифференциальное уравнение задачи записываем в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = P \sin \omega t, \tag{1}$$

где $P = \frac{P_ц}{m}$.

Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения

$$r^2 + n^2 = 0$$

имеет корни

$$r_{1,2} = \pm in.$$

Общее решение однородного уравнения

$$x_{одн} = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt.$$

Частное решение ищем в форме

$$x_{частн} = A \cos \omega t + B \sin \omega t. \tag{2}$$

Так как

$$x'_{частн} = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t$$

и

$$x''_{частн} = -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t,$$

то после подстановки $x''_{\text{частн}}$ и $x_{\text{частн}}$ по формуле (2) в уравнение (1) получим

$$A(n^2-\omega^2)\cos\omega t+B(n^2-\omega^2)\sin\omega t=P\sin\omega t,$$

откуда, приравнивая коэффициенты при соответствующих членах, находим систему

$$\left.\begin{array}{l} A(n^2-\omega^2)=0, \\ B(n^2-\omega^2)=P. \end{array}\right\}$$

В результате решения этой системы

$$A=0, \quad B=\frac{P}{n^2-\omega^2}$$

и частное решение

$$x_{\text{частн}}=\frac{P}{n^2-\omega^2}\sin\omega t.$$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (1) принимает вид

$$x=C_1\cos nt+C_2\sin nt+\frac{P\sin\omega t}{n^2-\omega^2}.$$

Рассмотрим влияние сопротивления среды. Так как сопротивление среды пропорционально скорости, т. е. $k\frac{dx}{dt}$, где $k=2h$ — коэффициент пропорциональности, то дифференциальное уравнение (1) примет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2h\frac{dx}{dt}+n^2x=P\sin\omega t.$$

Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения

$$r^2+2hr+n^2=0$$

имеет корни

$$r_{1,2}=-h\pm\sqrt{h^2-n^2}.$$

Тогда при $h<n$

$$x_{\text{одн}}=e^{-ht}(C_1\cos qt+C_2\sin qt),$$

где $-q^2=h^2-n^2$.

Частное решение ищем в виде

$$x_{\text{частн}}=A\cos\omega t+B\sin\omega t.$$

В результате проведения аналогичных действий получаем общее решение неоднородного уравнения, т. е. закон вынужденных колебаний процесса

$$x = e^{-ht}(C_1 \cos qt + C_2 \sin qt) - \frac{2\omega Ph}{(n^2-\omega^2)^2+4\omega^2h^2} \cos \omega t +$$
$$+ \frac{P(n^2-\omega^2)}{(n^2-\omega^2)^2+4\omega^2h^2} \sin \omega t.$$

Глава XII

ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ВТОРОГО ПОРЯДКА С РАЦИОНАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

I. УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА

1. Дифференциальным уравнением Эйлера второго порядка называется уравнение вида

$$a_0x^2y''+a_1xy'+a_2y=\begin{cases} f(x) \\ 0, \end{cases} \qquad (1)$$

где a_0, a_1, a_2 — постоянные, т. е. оно может быть однородным и неоднородным.

Подстановкой $x=e^t$ уравнение (1) приводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами. При этом

$$y'=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{x_t'}=\frac{1}{e^t}\cdot\frac{dy}{dt},$$

а

$$y''=\frac{d(y')}{dx}=\frac{d\left(\frac{1}{e^t}\cdot\frac{dy}{dt}\right)}{d(e^t)}=\frac{\frac{1}{e^t}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{1}{e^t}\cdot\frac{dy}{dt}}{e^t}=$$

$$=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}}{e^{2t}}.$$

2. Уравнение вида

$$A_0(ax+b)^2y''+A_1(ax+b)y'+A_2y=f(x),$$

где A_0, A_1, A_2, a и b — постоянные коэффициенты, приводится к уравнению с постоянными коэффициентами подстановкой

$$ax+b=e^t.$$

§ 1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В ПРОДОЛЬНОМ РЕБРЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ

Задача 162. Найти распределение температуры в продольном ребре жесткости параболического профиля (рис. 102). Предпосылки исследования такие же, как в задаче 149.

Решение. Здесь профиль определяется уравнением

$$y=\frac{\delta_0}{2}\left(\frac{x}{b}\right)^2,$$

так что площадь поперечного сечения задана на единицу длины в виде функции

$$A(x)=2y=\delta_0\left(\frac{x}{b}\right)^2. \qquad (1)$$

Разница между входящим в элемент dx и выходящим из него количеством теплоты

$$q=\frac{d}{dx}\left[kA(x)\frac{dT}{dx}\right]dx$$

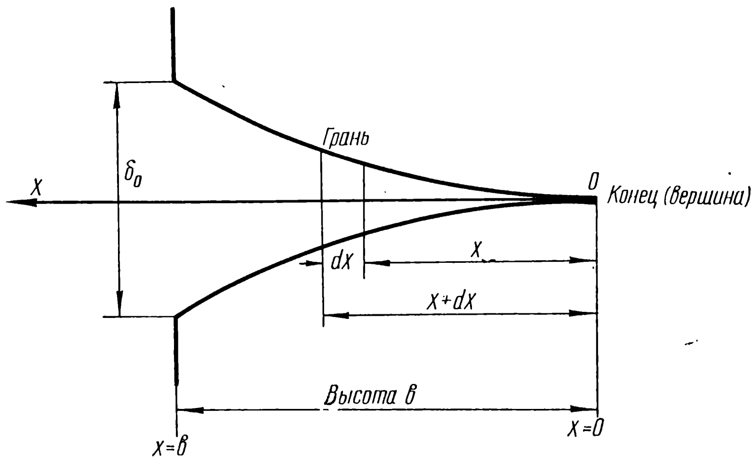

Рис. 102

должна быть равной количеству выходящей из ребра теплоты путем конвекции (также на единицу длины)

$$q_S=2h(T-T_S)\,dx,$$

так что

$$k\frac{d}{dx}\left[A(x)\frac{dT}{dx}\right]dx=2h(T-T_S)\,dx. \qquad (2)$$

Подставляя $\theta=T-T_S$ и $d\theta=dT$, приводим уравнение (2) к виду

$$kA(x)\frac{d^2\theta}{dx^2}+k\frac{dA(x)}{dx}\frac{d\theta}{dx}=2h\theta$$

и, используя равенство (1) для определения $A(x)$ и ее производной, после преобразований получаем

$$x^2\frac{d^2\theta}{dx^2}+2x\frac{d\theta}{dx}-m^2b^2\theta=0, \qquad (3)$$

где

$$m=\sqrt{\frac{2h}{k\delta_0}}.$$

Уравнение (3) является уравнением Эйлера. Оно решается подстановкой

$$x=e^t \quad \text{или} \quad t=\ln x.$$

Тогда

$$\frac{d\theta}{dx}=\frac{d\theta}{dt}\,\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\,\frac{d\theta}{dt}$$

и

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{1}{x}\,\frac{d\theta}{dt}\right)}{dx}=-\frac{1}{x^2}\,\frac{d\theta}{dt}+\frac{1}{x}\,\frac{d\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}{dx}=$$

$$=-\frac{1}{x^2}\,\frac{dx}{dt}+\frac{1}{x^2}\,\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

При этих условиях уравнение (3) принимает вид

$$x^2\left(\frac{1}{x^2}\,\frac{d^2\theta}{dt^2}-\frac{1}{x^2}\,\frac{d\theta}{dt}\right)+2x\frac{1}{x}\,\frac{d\theta}{dt}-m^2b^2\theta=0$$

или, после сокращения подобных членов,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{d\theta}{dt}-m^2b^2\theta=0.$$

Это однородное дифференциальное уравнение имеет решение

$$\theta=C_1e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4m^2b^2}\right)t}+C_2e^{\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4m^2b^2}\right)t}$$

и, возвращаясь снова к независимой переменной x, имеем

$$\theta=C_1x^{P_1}+C_2x^{P_2},$$

где

$$P_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{1+4m^2b^2}.$$

Общее решение

$$\theta=C_1x^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4m^2b^2}}+\frac{C_2}{x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4m^2b^2}}},$$

и можно заметить, что при $x=0$ избыток температуры будет неограниченным, если не принять $C_2=0$.

Следовательно, общее решение окончательно принимает вид

$$\theta=C_1x^{p_1}. \tag{4}$$

Излишек температуры у основания при $x=b$ составляет

$$\theta_0=C_1b^{p_1},$$

поэтому постоянная интегрирования

$$C_1=\frac{\theta_0}{b^{p_1}}.$$

Подставляя найденное значение C_1 в уравнение (4), получаем искомый закон распределения температуры

$$\theta=\theta_0\left(\frac{x}{b}\right)^{p_1}.$$

II. ЛИНЕЙНОЕ ОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с рациональными коэффициентами имеет вид

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0, \tag{1}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — рациональные функции x.

Его общее решение

$$y=C_1y_1+C_2y_2,$$

где y_1 и y_2 — частные линейно независимые решения уравнения (1).

Если известно одно решение, то можно определить второе по формуле

$$y_2=Ay_1\int e^{-\int p(x)dx}\frac{dx}{y_1^2},$$

где A — произвольное постоянное.

§ 2. ТОЛСТОСТЕННАЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА ПОД ДАВЛЕНИЕМ (ЗАДАЧА ЛЯМЭ)

Задача 163. Составить дифференциальное уравнение деформации толстостенной трубы под действием внутреннего давления (рис. 103). Длина трубы равна единице, и продольные деформации во внимание не принимаются. Под влиянием внутреннего давления труба расширяется.

Решение. Рассмотрим неизвестное пока упругое удлинение u, возникающее под действием внутреннего давления на стенку трубы радиусом x. На рис. 103 показано сечение трубы, на котором двумя радиусами с центральным углом $d\alpha$ и двумя дугами радиусов x и $x+dx$ выделена элементарная площадка.

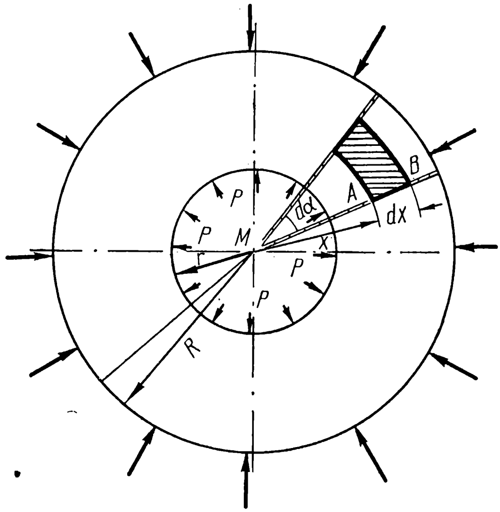

Рис. 103

Тангенциальное растяжение трубы равно отношению удлинения периметра окружности к первоначальному периметру окружности:

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi u}{2\pi x} = \frac{u}{x}. \tag{1}$$

Радиальное удлинение получается при рассмотрении изменения длины отрезка $AB = dx$, расположенного на радиусе. Точка A радиуса $x = MA$ передвигается на отрезок u, а точка B радиуса $x+dx$ соответственно на отрезок $u+du$, т. е. элемент dx удлиняется на величину du. Относительное радиальное удлинение в рассматриваемом месте

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dx}. \tag{2}$$

Рассмотрим совместное действие напряжений на вырезанный элемент стенки (рис. 104).

Силы напряжения σ_t, действующие в тангенциальном направлении, на обеих сторонах элемента равны $\sigma_t dx$, а их равнодействующая CD равна $d\alpha\sigma_t dx$.

Напряжение, действующее в радиальном направлении внутрь, обозначим σ_r. Приложенная к стороне элемента радиальная сила $xd\alpha\sigma_r$. На противоположной стороне элемента напряжение $\sigma_r+d\sigma_r$, а соответствующая сила

$$(\sigma_r+d\sigma_r)(x+dx)\,d\alpha=(\sigma_r x+xd\sigma_r+\sigma_r dx+d\sigma_r dx)\,d\alpha.$$

Слагаемое $d\sigma_r dx$, как малое по сравнению с другими, можно отбросить, а

$$xd\sigma_r+\sigma_r dx=d(x\sigma_r).$$

Тогда равнодействующая радиальных сил $d(x\sigma_r)\,d\alpha$.

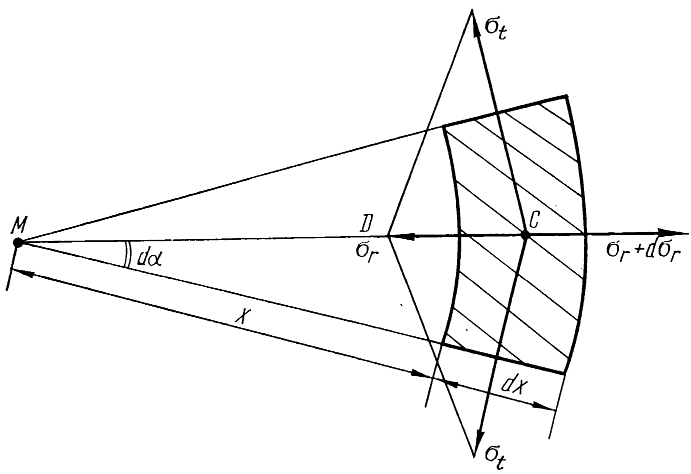

Рис. 104

Между равнодействующими радиальных и тангенциальных сил должно существовать равновесие

$$d\alpha\sigma_t dx=d(x\sigma_r)\,d\alpha,$$

откуда

$$\sigma_t=\frac{d(x\sigma_r)}{dx}. \tag{3}$$

Для взаимосвязи формулы (3) с выражениями (1) и (2) примем во внимание законы теории упругости.

Закон Гука в своей общей форме, учитывающий радиальные и тангенциальные напряжения, дает следующие зависимости для удлинений:

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}\left(\sigma_t - \frac{\sigma_r}{\mu}\right), \quad \varepsilon_r = \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \frac{\sigma_t}{\mu}\right), \tag{4}$$

где E — модуль упругости, $\frac{1}{\mu}$ — коэффициент Пуассона.

Решим уравнение (4) относительно σ_t и σ_r:

$$\sigma_t = \frac{\mu E}{\mu^2 - 1}(\mu\varepsilon_t + \varepsilon_r), \quad \sigma_r = \frac{\mu E}{\mu^2 - 1}(\mu\varepsilon_r + \varepsilon_t). \tag{5}$$

Подставляем выражения (1) и (2) в соотношение (5):

$$\sigma_t = \frac{\mu E}{\mu^2 - 1}\left(\mu\frac{u}{x} + \frac{du}{dx}\right), \quad \sigma_r = \frac{\mu E}{\mu^2 - 1}\left(\mu\frac{du}{dx} + \frac{u}{x}\right). \tag{6}$$

Полученные равенства (6) подставляем в уравнение (3), в результате чего

$$\frac{\mu E}{\mu^2 - 1}\left(\mu\frac{u}{x} + \frac{du}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left[\frac{\mu E}{\mu^2 - 1}x\left(\mu\frac{du}{dx} + \frac{u}{x}\right)\right]$$

или

$$\mu\frac{u}{x} + \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left[x\left(\mu\frac{du}{dx} + \frac{u}{x}\right)\right]. \tag{7}$$

Так как в правой части равенства (7)

$$\frac{d}{dx}\left[x\left(\mu\frac{du}{dx} + \frac{u}{x}\right)\right] = \mu\left(\frac{du}{dx} + x\frac{d^2u}{dx^2}\right) + \frac{du}{dx},$$

то после сокращения подобных членов

$$\mu x\frac{d^2u}{dx^2} + \mu\frac{du}{dx} - \mu\frac{u}{x} = 0.$$

Делим последнее уравнение на μx и окончательно имеем дифференциальное уравнение второго порядка с рациональными коэффициентами:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{du}{dx} - \frac{u}{x^2} = 0. \tag{8}$$

Дифференциальное уравнение задачи (8) является одноразмерным. Этим обстоятельством можно воспользоваться для упрощения решения дифференциального уравнения.

Если x и y считаются первого измерения и все члены дифференциального уравнения оказались одного измерения, то удобно ввести новые переменные ν и z с помощью подстановок

$$x=e^{\nu}, \quad y=ze^{\nu}. \tag{9}$$

Отсюда после дифференцирования

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\nu}\cdot\frac{d\nu}{dx}=\left(\frac{dz}{d\nu}e^{\nu}+ze^{\nu}\right)\frac{d\nu}{dx}.$$

При этом

$$\frac{dx}{d\nu}=e^{\nu}$$

и, следовательно,

$$\frac{d\nu}{dx}=e^{-\nu}.$$

Поэтому

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{d\nu}+z. \tag{10}$$

Аналогичным образом

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{d^2z}{d\nu^2}+\frac{dz}{d\nu}\right)e^{-\nu}. \tag{11}$$

Производим при $u=y$ подстановки (9)—(11) и этим приводим уравнение (8) к более простому виду

$$\frac{d^2z}{d\nu^2}+2\frac{dz}{d\nu}=0.$$

После подстановки

$$\frac{dz}{d\nu}=p \tag{12}$$

получаем уравнение первой степени

$$\frac{dp}{d\nu}+2p=0. \tag{13}$$

Разделяя переменные в уравнении (13), находим

$$d\nu=-\frac{1}{2}\cdot\frac{dp}{p}$$

или после интегрирования

$$\nu=C_1-\frac{1}{2}\ln p,$$

откуда

$$p=e^{2(C_1-\nu)}. \tag{14}$$

Подставляем значение (14) в правую часть соотношения (12):

$$dz=e^{2(C_1-\nu)}\,d\nu. \tag{15}$$

Интегрируем почленно уравнение (15) и получаем общее решение

$$z=C_2-\frac{1}{2}\,e^{2(C_1-\nu)}. \tag{16}$$

Из равенства (16) при помощи равенства (9) находим

$$u=xz=C_2x-\frac{x}{2}\,e^{2(C_1-\nu)}.$$

Замечая, что $x=e^{\nu}$, окончательно получаем

$$u=C_2x-\frac{1}{2}\,\frac{e^{2C_1}}{x}.$$

Если обозначить

$$C_2=C, \quad -\frac{1}{2}\,e^{2C_1}=C^*,$$

то общее решение дифференциального уравнения (8) примет вид

$$u=Cx+\frac{C^*}{x}, \tag{17}$$

где C и C^* — постоянные интегрирования. Для определения постоянных интегрирования подставим равенство (17) в уравнение (6). Тогда

$$\sigma_r=\frac{\mu E}{\mu^2-1}\left[\mu\left(C-\frac{C^*}{x^2}\right)+C+\frac{C^*}{x^2}\right]=$$

$$=\frac{\mu E}{\mu^2-1}\left[C(\mu+1)-\frac{C^*}{x^2}(\mu-1)\right]=\frac{\mu E}{\mu-1}C-\frac{\mu E}{\mu+1}\,\frac{C^*}{x^2}.$$

Для упрощения выкладок вводим обозначения:

$$\frac{\mu E}{\mu-1}C=A, \quad \frac{\mu E}{\mu+1}C^*=B. \tag{18}$$

В итоге получаем

$$\sigma_r=A-\frac{B}{x^2}.$$

Для определения новых постоянных A и B заметим, что на внутренней стороне стенки (при $x=r$) радиальное напряжение σ_r должно равняться давлению p внутри трубы со знаком минус.

При $x=R$ (на внешней поверхности) радиальное напряжение σ_r равно нулю.

Таким образом, начальные условия:

$$\left.\begin{aligned} &\text{при } x=r \qquad -p=A-\frac{B}{r^2},\\ &\text{при } x=R \qquad 0=A-\frac{B}{r^2}. \end{aligned}\right\}$$

Разрешая эту систему относительно A и B, имеем:

$$A=\frac{pr^2}{R^2-r^2},\quad B=\frac{pR^2r^2}{R^2-r^2}. \tag{19}$$

Подставляем найденные значения постоянных (19) в правые части уравнений (18) и находим значения постоянных интегрирования C и C^*:

$$C=\frac{pr^2}{\mu E(R^2-r^2)}(\mu-1);\quad C^*=\frac{pR^2r^2}{\mu E(R^2-r^2)}(\mu+1). \tag{20}$$

Подставляя значения (20) в уравнение (19), получаем

$$u=\frac{pr^2}{\mu E(R^2-r^2)}\left[(\mu-1)x+(m+1)\frac{R^2}{x}\right].$$

Напряжения σ_r и σ_t получаются соответственно равными

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r&=p\frac{r^2}{R^2-r^2}\cdot\frac{x^2-R^2}{x^2};\\ \sigma_t&=p\frac{r^2}{R^2-r^2}\cdot\frac{x^2+R^2}{x^2}. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Чем меньше x, тем большие значения получают оба главных напряжения. Материал будет наиболее напряжен внутри трубы.

Из уравнений (21) видно, что во всех точках абсолютное значение σ_t больше абсолютного значения σ_r.

Наибольшее напряжение в трубе получится, если во втором уравнении (21) принять x равным его наименьшему возможному значению $x=r$. Тогда

$$\sigma_{\max}=p\frac{R^2+a^2}{R^2-a^2}.$$

III. ЛИНЕЙНОЕ НЕОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Вид линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x),$$

где $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ — непрерывные рациональные функции.

Общее решение

$$y=C_1y_1+C_2y_2+V,$$

где y_1 и y_2 — линейно независимые решения соответствующего однородного уравнения; V — частное решение неоднородного уравнения.

Частное решение V находится способом Лагранжа (методом вариаций произвольных постоянных), который дает возможность проинтегрировать неоднородное линейное уравнение, если известно общее решение соответствующего однородного уравнения $y=C_1y_1+$ $+C_2y_2$, считая при этом C_1 и C_2 уже не постоянными, а новыми неизвестными функциями $C_1(x)$ и $C_2(x)$.

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения $V(x)$ ищется в виде

$$V(x)=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2. \tag{1}$$

Тогда

$$\frac{dV}{dx}=(C_1'y_1+C_2'y_2)+(C_1y_1'+C_2y_2') \tag{2}$$

и

$$\frac{d^2V}{dx^2}=(C_1''y_1+C_2''y_2)+2(C_1'y_1'+C_2'y_2')+(C_1y_1''+C_2y_2''). \tag{3}$$

Предполагаем, что C_1' и C_2' удовлетворяют системе

$$\left.\begin{aligned} &C_1'y_1+C_2'y_2=0,\\ &C_1'y_1'+C_2'y_2'=f(x). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Дифференцируя первое уравнение системы (4), получаем

$$(C_1''y_1+C_2''y_2)+(C_1'y_1'+C_2'y_2')=0.$$

Тогда уравнения (1)—(3) примут вид

$$\left.\begin{aligned} &V=C_1y_1+C_2y_2,\\ &\frac{dV}{dx}=C_1y_1'+C_2y_2',\\ &\frac{d^2V}{dx^2}=C_1y_1''+C_2y_2''+f(x). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Умножив первое уравнение (5) на $q(x)$, второе на $p(x)$, третье на 1 и сложив почленно, получаем

$$\frac{d^2V}{dx^2}+p(x)\frac{dV}{dx}+q(x)V=f(x).$$

Ввиду того что y_1 и y_2 — решения однородного уравнения, то

$$y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1=0$$

и

$$y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2=0.$$

Решая систему (4), находим

$$\left.\begin{aligned} C_1'&=-\frac{f(x)}{y_1\left(\ln\dfrac{y_2}{y_1}\right)'},\\ C_2'&=\frac{f(x)}{y_2\left(\ln\dfrac{y_2}{y_1}\right)'}.\end{aligned}\right\}$$

Интегрируя, получаем

$$C_1=C_1(x) \quad \text{и} \quad C_2=C_2(x).$$

§ 3. СКОРОСТЬ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ТРУБОПРОВОДЕ

Задача 164. Жидкость течет в трубопроводе, длина которого l велика по сравнению с радиусом R поперечного сечения. Разность давлений на концах трубопровода p. Найти скорость движения жидкости.

Решение. Рассмотрим установившееся движение жидкости в трубопроводе. Скорость движения жидкости v по мере удаления от стенок и приближения к оси трубопровода увеличивается (рис. 105).

Вообразим внутри потока жидкости плоскую площадку площадью S, параллельную оси трубопровода.

Верхние слои жидкости над S действуют ускоряюще на нижние. Нижние тормозят движение верхних.

По закону Ньютона действующая на площадку сила F равна $kS\frac{dv}{dy}$, где k — коэффициент пропорциональности.

Рассмотрим далее поток жидкости, имеющий форму полого цилиндра (рис. 106). Так как величина dr мала, то скорости частиц жидкости в цилиндре можно считать одинаковыми.

Пусть длина цилиндра равна 1. Тогда на внутреннюю поверхность площадью $2\pi r\cdot 1$ действует сила $2\pi rk\dfrac{dv}{dr}$. На наружную поверхность действует сила $-2\pi rk\dfrac{dv}{dr}-d\left(2\pi kr\dfrac{dv}{dr}\right)$.

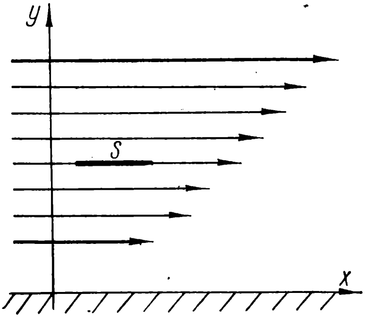

Рис. 105

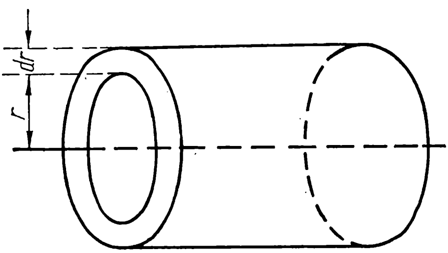

Рис. 106

Сумма этих сил равна $-2\pi kd\left(r\dfrac{dv}{dr}\right)$.

При установившемся движении сила трения равна силе, которая передвигает полый цилиндр вдоль оси. Эта сила равна разности давлений p на концах полого цилиндра длиной 1. Тогда движущая сила равна $2\pi prdr$. Итак,

$$-2\pi kd\left(r\frac{dv}{dr}\right)=2\pi prdr,$$

откуда дифференциальное уравнение процесса

$$\frac{d^2v}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{dv}{dr}=-\frac{p}{k}.$$

Это неполное линейное неоднородное уравнение с рациональными коэффициентами. Для интегрирования его сделаем подстановку $z=\dfrac{dv}{dr}$.

В результате получим линейное уравнение первого порядка

$$\frac{dz}{dr}+\frac{z}{r}=-\frac{p}{k}.$$

Общее решение его

$$z=\frac{dv}{dr}=-\frac{p}{2k}r+\frac{C_1}{r}.$$

Интегрируя еще раз, имеем:

$$v=-\frac{p}{2k}r^2+C_1\ln r+C_2.$$

Постоянная интегрирования C_1 должна быть равна нулю, так как скорость течения жидкости по оси трубы не может быть бесконечно большой (при $r=0$ v обращается в бесконечность). Постоянная интегрирования C_2 определяется из начального условия: при $r=R$ $v=0$ (скорость течения около стенок трубы равна нулю), откуда $C_2=\frac{pR^2}{4k}$.

Искомая скорость движения жидкости

$$v=\frac{p}{4k}(R^2-r^2).$$

§ 4. ИЗГИБ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ

Задача 165. Найти упругую деформацию изгиба плоской круглой пластины от действия равномерно распределенной симметричной нагрузки.

Решение. Предположим, что:

1) закрепление по краям пластины всюду одинаковое;

2) ординаты y упругой поверхности *, отсчитываемые от первоначального положения срединной поверхности, остаются небольшими (малые деформации);

3) ввиду симметрии y зависит только от расстояния x от оси симметрии (от перпендикуляра к срединной плоскости в ее центре), т. е. упругая поверхность должна быть поверхностью вращения;

4) пренебрегается по сравнению с ординатами y теми составляющими упругих перемещений точек срединной поверхности, которые параллельны начальному положению этой плоскости;

5) все точки, лежавшие прежде на одной прямой, перпендикулярной к срединной плоскости, после деформации остаются опять на одной прямой, которая вследствие симметрии должна пересекаться с осью симметрии пластинки;

6) сохраняется закон Гука.

1. Выясним вопрос изменений длины, происходящих при изгибе.

---

* Упругой поверхностью называется поверхность, в которую переходит срединная плоскость пластины при ее деформации.

В точке A на расстоянии x от оси симметрии и на расстоянии z от срединной поверхности (рис. 107) возникают удлинения в тангенциальном и радиальном направлениях ε_t и ε_r. Так как нормаль к упругой поверхности получает наклон φ по отношению к оси симметрии, то радиус x круга, проходящего через данную точку, увеличивается на $z\varphi$.

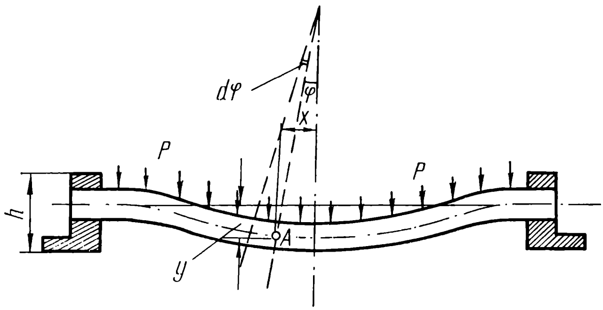

Рис. 107

Принимаем ввиду малости угла φ $\sin\varphi\approx\varphi$.

Длина окружности возрастает пропорционально радиусу. Поэтому относительное удлинение в тангенциальном направлении

$$\varepsilon_t=\frac{z\varphi}{x}. \qquad (1)$$

Проведем на расстоянии dx вторую нормаль к упругой поверхности и обозначим через $d\varphi$ угол между двумя нормалями. Длина волокна, проходящего через точку A и заключенного между двумя нормалями, увеличится на $zd\varphi$ по сравнению с длиной волокна, лежащего в срединной поверхности, которое остается без изменений.

Разделим величину $zd\varphi$ на первоначальную длину dx и получим относительное удлинение

$$\varepsilon_r=\frac{zd\varphi}{dx}. \qquad (2)$$

Удлинения (1), (2) и соответствующие им нормальные напряжения σ_r и σ_t в перпендикулярных направлениях взаимосвязаны основными соотношениями теории упругости

$$\varepsilon_t=\frac{1}{E}\left(\sigma_t-\frac{1}{\mu}\sigma_r\right), \quad \varepsilon_r=\frac{1}{E}\left(\sigma_r-\frac{1}{\mu}\sigma_t\right),$$

где E — модуль Юнга, разрешив которые относительно σ_t и σ_r, получим

$$\sigma_t = \frac{\mu E}{\mu^2-1}(\mu\varepsilon_t+\varepsilon_r), \quad \sigma_r = \frac{\mu E}{\mu^2-1}(\mu\varepsilon_r+\varepsilon_t). \tag{3}$$

Подставляем в равенства (3) значения удлинений (1), (2) и в итоге имеем:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_t &= \frac{\mu E}{\mu^2-1} z\left(\mu\frac{\varphi}{x}+\frac{d\varphi}{dx}\right), \\ \sigma_r &= \frac{\mu E}{\mu^2-1} z\left(\mu\frac{d\varphi}{dx}+\frac{\varphi}{x}\right), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

т. е. напряжения пропорциональны расстояниям от срединной плоскости.

2. Рассмотрим равновесие элемента пластины и составим уравнение равновесия действующих сил.

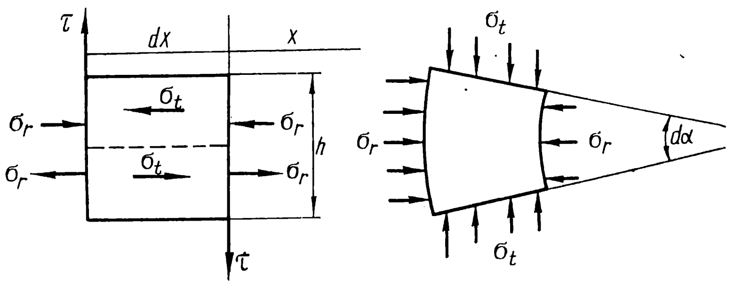

Рис. 108

Проведем через ось симметрии две меридиональные плоскости, образующие бесконечно малый угол $d\alpha$, и между обеими плоскостями проведем два цилиндрических сечения с радиусами x и $x+dx$. Получим элемент пластины, представленный на рис. 108 (разрез и план).

На четырех поверхностях сечений возникают напряжения σ_r и σ_t, которые на каждой поверхности приведем к паре. На цилиндрических сечениях появляются также касательные напряжения τ, при помощи которых нагрузка средней части пластины передается на опору.

а) Напряжения σ_t. Каждой элементарной площадке dF одного меридионального сечения соответствует элементарная площадка другого, на которой напряжение имеет такую же величину. Линии действия обеих сил $\sigma_t dF$ пересекаются в плоскости симметрии элемента пластины. Эти силы можно привести к равнодействующей $\sigma_t dF d\alpha$, приложенной в точке их пересечения и лежащей в плоскости симметрии.

Момент силы $\sigma_t dF d\alpha$ относительно любой точки срединной поверхности равен $\sigma_t z dF d\alpha$. Для всей плоскости симметрии, учитывая равенство (4), получаем

$$M(\sigma_t) = d\alpha \int \sigma_t z dF = d\alpha \frac{\mu E}{\mu^2 - 1} \left(\mu \frac{\varphi}{x} + \frac{d\varphi}{dx}\right) \int z^2 dF.$$

Распространенный по всей площади сечения интеграл $\int z^2 dF$

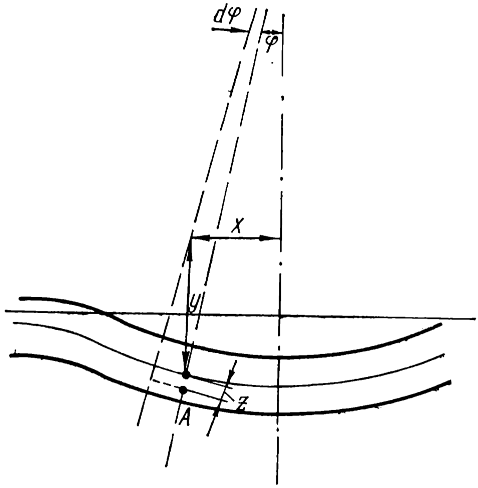

Рис. 109

зависит от вида сечения и представляет момент инерции меридионального сечения, равный $\frac{h^3}{12} dx$. Поэтому момент пары σ_t

$$M(\sigma_t) = \frac{\mu E}{\mu^2 - 1} \cdot \frac{h^3}{12} \left(\mu \frac{\varphi}{x} + \frac{d\varphi}{dx}\right) dx d\alpha. \tag{5}$$

Ординаты z считаем положительными при направлении их вниз. Если величины φ и $\frac{d\varphi}{dx}$ также положительны, то в нижней части будут растягивающие напряжения σ_t и равнодействующая этих напряжений в меридиональных плоскостях направлена в плоскости симметрии элемента в сторону центра пластины, как показано в разрезе (рис. 109).

Наверху при отрицательных z направления сил противоположны и пара, образованная всеми напряжениями σ_t, будет вращать элемент пластины против часовой стрелки. Тогда момент (5) будет иметь отрицательный знак.

б) Напряжения σ_r. В поверхности сечения, соответствующей радиусу x, напряжения σ_r образуют пару сил, момент которой с учетом равенства (4) равен

$$\int \sigma_r dFz = \frac{\mu E}{\mu^2-1}\left(\mu \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varphi}{x}\right)\int z^2 dF.$$

Интеграл $\int z^2 dF$ представляет момент инерции прямоугольника шириной $xd\alpha$ и высотой h. Поэтому последнее равенство принимает вид

$$\int \sigma_r dFz = \frac{\mu E}{\mu^2-1}\cdot\frac{h^3}{12}\left(\mu x \frac{d\varphi}{dx} + \varphi\right) d\alpha. \tag{6}$$

К этому выражению присоединяется еще пара сил от напряжений σ_r на противоположной поверхности сечения, имеющая обратное направление вращения. Таким образом, остается лишь разница между обоими моментами, которая представляет дифференциал выражения (6), соответствующий приращению расстояния x на dx:

$$d\left[\frac{\mu E}{\mu^2-1}\cdot\frac{h^3}{12}\left(\mu x \frac{d\varphi}{dx} + \varphi\right) d\alpha\right] =$$
$$= \frac{\mu E}{\mu^2-1}\cdot\frac{h^3}{12}\left(\mu x \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \mu \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dx}\right) dx d\alpha.$$

Таким образом, момент всех напряжений σ_r:

$$M(\sigma_r) = \frac{\mu E}{\mu^2-1}\cdot\frac{h^3}{12}\left(\mu x \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \mu \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dx}\right) dx d\alpha. \tag{7}$$

Если величины φ и $\dfrac{d\varphi}{dx}$ положительны, то напряжения σ_r в нижней половине растягивающие и пара в сечении x вращает против часовой стрелки.

В сечении $x+dx$ вращение направлено тогда по часовой стрелке. Если предыдущий дифференциал положителен, то он дает момент, вращающий в положительную сторону, т. е. момент всех напряжений σ_r вводится в уравнение моментов без изменения знака.

в) Касательные напряжения τ.

Для того чтобы привести касательные напряжения к паре сил, момент которой мы должны найти, определим передающуюся перерезывающую силу. Предположим, что в пластине проведено кольцеобразное сечение радиуса x. Ограниченная этим сечением внутренняя часть пластины находится под нагрузкой $\pi x^2 p$, которая уравновешивается перерезывающими силами по кольцеобразному сечению.

На часть кольца, заключенного между меридиональными сечениями с центральным углом $d\alpha$, приходится $\frac{d\alpha}{2\pi}$ сечения. Поэтому на элемент пластины в сечении x передается перерезывающая сила $\frac{x^2p}{2}d\alpha$. В сечении $x+dx$ перерезывающая сила больше только что найденной на величину дифференциала. Следовательно, разница между ними соответствует нагрузке, приходящейся на элемент.

Эта разница как бесконечно малая высшего порядка не имеет существенного значения и поэтому

$$M(\tau)=\frac{x^2p}{2}d\alpha dx. \tag{8}$$

Знак момента, как следует из рис. 109, положителен.

3. Элемент пластины относительно вращения будет в равновесии, если алгебраическая сумма всех моментов равна нулю:

$$M(\sigma_t)+M(\sigma_r)+M(\tau)=0. \tag{9}$$

Подставляем в уравнение (9) найденные значения моментов (5), (7), (8) с учетом их знаков и получаем

$$-\frac{\mu E}{\mu^2-1}\cdot\frac{h^3}{12}\left(\mu\frac{\varphi}{x}+\frac{d\varphi}{dx}\right)dxd\alpha+$$

$$+\frac{\mu E}{\mu^2-1}\cdot\frac{h^3}{12}\left(\mu x\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\mu\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\varphi}{dx}\right)dxd\alpha+\frac{x^2p}{2}d\alpha dx=0$$

или после сокращения на $d\alpha dx$ и выполнения упрощений

$$\frac{\mu^2E}{\mu^2-1}\cdot\frac{h^3}{12}\left(x\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d\varphi}{dx}-\frac{\varphi}{x}\right)+\frac{px^2}{2}=0,$$

откуда

$$x\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d\varphi}{dx}-\frac{\varphi}{x}=-\frac{6(\mu^2-1)}{\mu^2Eh^3}px^2$$

или, разделив обе части равенства на x, приводим задачу к следующему неоднородному дифференциальному уравнению с рациональными коэффициентами

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{d\varphi}{dx}-\frac{\varphi}{x^2}=-\frac{6(\mu^2-1)}{\mu^2Eh^3}px. \tag{10}$$

Здесь: φ — угол, образуемый нормалью к элементу пластины после изгиба с первоначальным ее положением; x — расстояние элемента пластины от центра; $\frac{1}{\mu}$ — коэффициент Пуассона; h — толщина пластины; p — давление на пластину.

Соответствующее однородное уравнение для уравнения (10)

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{d\varphi}{dx}-\frac{\varphi}{x^2}=0 \tag{11}$$

совпадает с уравнением (8) предыдущей задачи и поэтому имеет общее решение

$$\varphi=C_1x+\frac{C_2}{x}. \tag{12}$$

Для нахождения общего решения данного неоднородного уравнения (10) предположим, что оно имеет такую же форму (12), но C_1 и C_2 являются теперь функциями x, т. е.

$$\varphi=C_1(x)x+\frac{C_2(x)}{x}.$$

Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ нужно определить, чтобы удовлетворить дифференциальному уравнению (10).

Для этой цели применим к дифференциальному уравнению (10) метод вариации постоянных.

Краткости ради введем обозначение

$$\frac{6(\mu^2-1)}{\mu^2Eh^3}p=N.$$

Тогда уравнение (10) примет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{d\varphi}{dx}-\frac{\varphi}{x^2}=-Nx. \tag{13}$$

Два частных решения соответствующего однородного уравнения (11)

$$\varphi_1=x, \quad \varphi_2=\frac{1}{x}. \tag{14}$$

С помощью линейно независимых частных решений (14) будем искать общее решение уравнения (13) в виде

$$\varphi=C_1(x)\varphi_1+C_2(x)\varphi_2. \tag{15}$$

Дифференцируя это равенство, получаем

$$\frac{d\varphi}{dx}=C_1'\varphi_1+C_1\varphi_1'+C_2'\varphi_2+C_2\varphi_2'. \tag{16}$$

Так как C_1 и C_2 неизвестны, то для них поставим какие-то условия. В виде первого условия поставим

$$C_1'\varphi_1+C_2'\varphi_2=0, \tag{17}$$

после чего уравнение (16) упрощается и принимает вид

$$\frac{d\varphi}{dx}=C_1\varphi_1'+C_2\varphi_2'. \tag{18}$$

Дифференцируя еще раз уравнение (18), получим

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}=C_1\varphi_1''+C_2\varphi_2''+C_1'\varphi_1'+C_2'\varphi_2'. \tag{19}$$

Подставим выражения φ, $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$ из уравнений (15), (18) и (19) в уравнение (13) и после группировки слагаемых получим

$$C_1\left(\varphi_1''+\frac{1}{x}\varphi_1'-\frac{1}{x^2}\varphi_1\right)+C_2\left(\varphi_2''+\frac{1}{x}\varphi_2'-\frac{1}{x^2}\varphi_2\right)+$$
$$+\varphi_1'C_1'+\varphi_2C_2'=-Nx.$$

Так как φ_1 и φ_2 удовлетворяют уравнению (11), то уравнение (13) превращается в нижеследующее

$$C_1\cdot 0+C_2\cdot 0+\varphi_1'C_1'+\varphi_2'C_2'=-Nx$$

или

$$\varphi_1'C_1'+\varphi_2'C_2'=-Nx. \tag{20}$$

Решая теперь систему уравнений (17) и (20), находим C_1' и C_2':

$$C_1'=-\frac{Nx}{\varphi_2\varphi_1'-\varphi_1\varphi_2'}, \quad C_2'=-\frac{Nx}{\varphi_1\varphi_2'-\varphi_2\varphi_1'}.$$

Тогда величины C_1 и C_2 находятся простым интегрированием:

$$\left.\begin{aligned} C_1&=-N\int\frac{\varphi_2 x\,dx}{\varphi_2\varphi_1'-\varphi_1\varphi_2'}+C=-N\int\frac{\frac{1}{x}\,x\,dx}{\frac{1}{x}-x\left(-\frac{1}{x^2}\right)}+C=\\ &=-\frac{N}{2}\int x\,dx+C=-\frac{Nx^2}{4}+C,\\ C_2&=-N\int\frac{\varphi_1 x\,dx}{\varphi_1\varphi_2'-\varphi_2\varphi_1'}+C_*=\frac{N}{2}\int x^3dx+C_*=\frac{N}{8}x^4+C_*. \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Подставляем полученные значения (21) в уравнение (15) и после упрощения найдем общее решение уравнения (13):

$$\varphi=\left(-\frac{Nx^2}{4}+C\right)x+\left(\frac{N}{8}x^4+C_*\right)\frac{1}{x}=-\frac{Nx^3}{8}+Cx+\frac{C_*}{x},$$

где B и C — постоянные интегрирования.

Написанное выражение для φ является наиболее общим решением, так как оно содержит две произвольные постоянные.

Для определения постоянных интегрирования из граничных условий заметим, что в середине пластины при $x=0$ и $\varphi=0$, т. е. $C_*=0$. Постоянная C зависит от условия, которому подчиняется пластина на краях.

Полагаем края пластины защемленными, т. е. считаем, что упругая поверхность касается по кругу радиуса $x=r$ горизонтальной плоскости, с которой вначале совпадала срединная плоскость пластины. Поэтому φ должно обращаться в нуль также при $x=r$.

Тогда

$$0=-\frac{N}{8}r^3+Cr$$

или

$$C=\frac{N}{8}r^2.$$

Итак, для защемленной по периметру пластины

$$\varphi=\frac{N}{8}(r^2x-x^3)=\frac{3(\mu^2-1)}{4\mu^2Eh^3}p(r^2x-x^3). \qquad (22)$$

Подстановка значения φ из равенства (22) в соотношения (1) и (2) дает значения упругих удлинений и напряжений:

$$\varepsilon_t=\frac{N}{8}(r^2-x^2)z, \qquad \varepsilon_r=\frac{N}{8}(r^2-3x^2)z.$$

Глава XIII

ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К СПЕЦИАЛЬНЫМ ЛИНЕЙНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ (УРАВНЕНИЯМ БЕССЕЛЯ, ЛЕЖАНДРА И МАТЬЕ)

Интегрирование дифференциальных уравнений второго порядка с помощью рядов применяется, когда затруднительно нахождение общего решения уравнения.

Рассмотрим интегрирование дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами при помощи рядов.

Метод неопределенных коэффициентов

В уравнении

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

$p(x)$ и $q(x)$ раскладываются в степенные ряды

$$p(x)=\sum_{i,\,l=0}^{\infty} a_i x^l \quad \text{и} \quad q(x)=\sum_{i,\,l=0}^{\infty} b_i x^l.$$

Решение определяется в виде

$$y=\sum_{i,\,l=0}^{\infty} c_i x^l.$$

Коэффициенты c_i находятся способом неопределенных коэффициентов; подставляя значения y, y' и y'' в уравнение и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем уравнения для определения коэффициентов c_i:

$$\begin{array}{r|l}
x^0 & 2\cdot 1c_2+a_0c_1+b_0c_0=0, \\
x^1 & 3\cdot 2c_3+2a_0c_2+a_1c_1+b_0c_1+b_1c_0=0, \\
x^2 & 4\cdot 3c_4+3a_0c_3+2a_1c_2+a_2c_1+b_0c_2+b_1c_1+b_2c_0=0,
\end{array}$$

. . . .

Чтобы получить два частных решения y_1 и y_2, принимаем для y_1 $c_0=1$ $c_1=0$, для y_2 $c_0=0$ $c_1=1$.

После определения c_i необходимо удостовериться в сходимости полученного ряда.

Метод разложения в ряд Тейлора или Маклорена

Решение уравнения

$$y''=f(x, y, y')$$

можно искать в виде ряда Тейлора и Маклорена, если задать для него начальные условия и если ряд при этом получается сходящимся.

Пусть начальные условия:

$$\begin{aligned} &\text{при } x=a \quad y=b; \\ &\text{»} \quad x=a \quad y'=b_1; \\ &\text{»} \quad x=a \quad y''=b_2. \end{aligned}$$

В таком случае общее решение уравнения

$$y=b+b_1\frac{x-a}{1!}+b_2\frac{(x-a)^2}{2!}+y'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!}+ \\ +y^{\mathrm{IV}}(a)\frac{(x-a)^4}{4!}+\ldots$$

Значения $y'''(a)$, $y^{\mathrm{IV}}(a)$ находятся из заданного дифференциального уравнения и из уравнений, полученных из него дифференцированием, подстановкой в них заданных постоянных a, b_1, b_2 вместо x, y, y', y''.

Ряд Тейлора

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^n(a)+\ldots$$

Ряд Маклорена представляет собою частный случай ряда Тейлора, когда разложение функции $f(x)$ по степеням x производится при $a=0$, т. е.

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\ldots$$

Решения нижеизложенных специальных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами основываются на принципе интегрирования уравнений с помощью рядов.

I. УРАВНЕНИЕ БЕССЕЛЯ

Линейное дифференциальное уравнение

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0$$

или

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0, \tag{1}$$

где n — любое число, называется уравнением Бесселя n-го порядка

Известно, что для уравнения типа $x^2y''+xp(x)y'+q(x)y=0$, если функции $p(x)$ и $q(x)$ разлагаются в сходящиеся ряды по степеням x, методом неопределенных коэффициентов могут быть найдены решения вида $y=x^r(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)$. Значения показателя r находятся из характеристического уравнения

$$r(r-1)+p(0)r+q(0)=0.$$

Для уравнения (1) характеристическое уравнение

$$r(r-1)+r-n^2\equiv r^2-n^2=0,$$

откуда

$$r=\pm n.$$

Подставляя

$$y=x^n(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)$$

в уравнение и приравнивая нулю коэффициент при x^{n+k}, находим

$$k(2n+k)a_k+a_{k-2}=0.$$

При $k=1$ получим:

$$(2n+1)a_1=0,$$

$$a_{2m+1}=0 \quad (m=1, 2, 3\ldots).$$

Придавая k значения 2, 3, 4, ..., имеем:

$$a_2=-\frac{a_0}{2(2n+2)};$$

$$a_4=\frac{a_0}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

причем a_0 — произвольно.

Полученный сходящийся ряд при $a_0=\dfrac{1}{2^n\,\Gamma(n+1)}$* определяет

* Понятие факториала распространяется на любые числа x (в том числе и на комплексные) при помощи гамма-функции $\Gamma(x)$, определяемой двояким образом:

$$\Gamma(x)\begin{cases}=\int\limits_0^\infty e^{-t}\,t^{x-1}\,dt & \text{(интеграл Эйлера) (только при } x>0)\\ =\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!\,n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)} & \text{(для любых значений } x\text{, отличных от неотрицательных целых).}\end{cases}$$

Основные свойства гамма-функции:

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x),$$

$$\Gamma(n)=(n-1)! \quad \text{при целом положительном } n.$$

Понятие факториала $n!$, определенное сначала для целых положительных n, обобщается для любого действительного n в виде функций $\Pi(x)=\Gamma(x+1)$.

При целом положительном x: $\Pi(x)=x!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot x$, при $x=0$: $\Pi(0)=\Gamma(1)=1$.

цилиндрическую функцию (функцию Бесселя) n-го порядка 1-го рода:

$$J_n(x)=\frac{x^n}{2^n\,\Gamma(n+1)}\left(1-\frac{x^2}{2(2n+2)}+\frac{x^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)}-\ldots\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!\,\Gamma(n+k+1)}, \tag{2}$$

которая является решением уравнения (1). Здесь $|x|<\infty$.

Решение уравнения Бесселя может быть представлено также функцией Бесселя в виде

$$J_n(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Pi(n+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k},$$

причем

$$\Pi(n+k)=\Gamma(n+k+1)=\Pi(n)(n+1)(n+2)\ldots(n+k). \tag{2a}$$

Общее решение уравнения Бесселя, если n не целое число, имеет вид

$$y=C_1J_n(x)+C_2J_{-n}(x), \tag{3}$$

где $J_{-n}(x)$ определяется рядом, получающимся из приведенного выше ряда для $J_n(x)$ заменой n на $-n$.

При n целом

$$J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x),$$

при $n=\frac{1}{2}$

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x,$$

при $n=-\frac{1}{2}$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

В этом случае функции J_n и J_{-n} — линейно зависимые и их линейная комбинация (3) уже не является общим решением уравнения (1).

В общем решении в этом случае $J_{-n}(x)$ должна быть заменена бесселевой функцией второго рода $Y_n(x)$, называемой функцией

Вебера (или Неймана) и определяемой равенством:

$$Y_n(x) = \lim_{m \to n} \frac{J_m(x)\cos m\pi - J_{-m}(x)}{\sin m\pi}.$$

При помощи этих функций общее решение уравнения Бесселя может быть записано в виде

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x)$$

(как при целом, так и не при целом n).

Уравнение

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + n^2) y = 0$$

называется *модифицированным уравнением Бесселя.* Его отличие — последний член всегда отрицательный.

Модифицированное уравнение Бесселя может быть приведено к виду

$$x^2 y'' + xy' + (i^2 x^2 - n^2) y = 0.$$

Обобщенное дифференциальное уравнение Бесселя

$$\frac{d}{dx}\left(x^p \frac{dy}{dx}\right) + (ax^j + bx^k) y = 0 \qquad (j > k)$$

сводится к уравнению Бесселя

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(m^2 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0.$$

Общее решение (если n — целое число) будет

$$y = x^{\overline{\alpha}} \left[C_1 J_n\left(\omega x^{\frac{1}{a}}\right) + C_2 Y_n\left(\omega x^{\frac{1}{a}}\right)\right].$$

Здесь:

$$\alpha = \frac{2}{2 - p + j}; \quad \beta = \frac{\alpha(1-p)}{2} = \frac{1-p}{2-p+j};$$

$$k = p - 2; \quad n = \frac{\sqrt{(1-p)^2 - 4b}}{2 - p + j} \quad \text{и} \quad \omega = \alpha \sqrt{a}.$$

§ 1. УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЯ ФОРМЫ УСЕЧЕННОГО КОНУСА, СЖИМАЕМОГО ПРОДОЛЬНОЙ СИЛОЙ

Задача 166. Найти уравнение продольного изгиба стержня, имеющего форму усеченного конуса, закрепленного в одном конце и сжимаемого силой P. Найти критическую силу, если радиус нижнего основания конуса $R=2r$ (r — радиус верхнего основания).

Решение. Как известно, дифференциальное уравнение упругой линии

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2}=-Py.$$

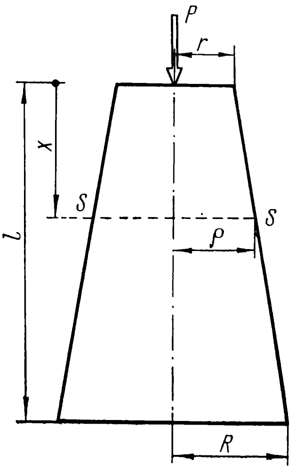

Рис. 110

Радиус ρ некоторого сечения $S-S$ определяется из соотношения (рис. 110):

$$\frac{\rho-r}{R-r}=\frac{x}{l},$$

т. е.

$$\rho=r+\frac{R-r}{l}x.$$

Полагая $\frac{R-r}{r}=\beta$ и замечая, что

$$\frac{\pi r^4}{4}=J_0,$$

где J_0 — момент инерции верхнего сечения, имеем

$$J=J_0\left(1+\frac{\beta x}{l}\right)^4.$$

Начальные (граничные) условия: при $x=0$ $y=0$, при $x=l$ $\frac{dy}{dx}=0$.

Уравнение упругой линии примет вид

$$EJ_0\frac{d^2y}{dx^2}+\left(1+\frac{\beta x}{l}\right)^{-4}Py=0. \qquad (1)$$

Пусть

$$1+\frac{\beta x}{l}=-\frac{1}{t}.$$

Уравнение (1) принимает вид

$$t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + \alpha^2 t y = 0, \tag{2}$$

где

$$\alpha^2 = \frac{Pl^2}{EJ_0\beta^2}.$$

В уравнении (2) положим $y = \frac{z}{\sqrt{t}}$. Тогда получаем дифференциальное уравнение Бесселя

$$t^2 \frac{d^2z}{dt^2} + t \frac{dz}{dt} + \left(\alpha^2 t^2 - \frac{1}{4} \right) z = 0,$$

которое представим в виде

$$(t\alpha)^2 \frac{d^2z}{d(\alpha t^2)} + (t\alpha) \frac{dz}{d(\alpha t)} + \left(\alpha^2 t^2 - \frac{1}{4} \right) z = 0.$$

Замечая, что $n = \frac{1}{2}$, получим общее решение

$$z = C_1 J_{\frac{1}{2}}(\alpha t) + C_2 J_{-\frac{1}{2}}(\alpha t)$$

или

$$z = \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha t}} \, (C_1 \sin \alpha t + C_2 \cos \alpha t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные интегрирования, $J_{\frac{1}{2}}$ и $J_{-\frac{1}{2}}$ — функции Бесселя первого рода и половинного порядка.

Возвращаясь к переменным x и y, находим

$$y = \left(1 + \frac{\beta x}{l} \right) \left(A_1 \sin \frac{\alpha l}{l + \beta x} + A_2 \cos \frac{\alpha l}{l + \beta x} \right),$$

где

$$A_1 = -C_1 \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha}}, \quad A_2 = C_2 \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha}}.$$

Так как при $x = 0$ ордината $y = 0$, то

$$A_1 \sin \alpha + A_2 \cos \alpha = 0,$$

$$A_2 = -A_1 \operatorname{tg} \alpha.$$

Следовательно,

$$y = -\frac{l + \beta x}{l \cos \alpha} \cdot A_1 \sin \frac{\alpha \beta x}{l + \beta x}$$

Находим производную

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{A_1\beta}{\cos\alpha}\left(\frac{1}{l}\sin\frac{\alpha\beta x}{l+\beta x}+\frac{\alpha}{l+\beta x}\cos\frac{\alpha\beta x}{l+\beta x}\right). \qquad (3)$$

Производная (3) равна нулю при $x=l$. Это дает уравнение

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha\beta}{1+\beta}=-\frac{\alpha}{1+\beta}, \qquad (4)$$

из которого при данном β определяем α.

Критическая сила

$$P_{\text{кр}}=\frac{\alpha^2\beta^2EJ_0}{l^2}.$$

Если $R=2r$, то $\beta=1$. Из уравнения (4) имеем

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\frac{\alpha}{2}$$

и

$$\alpha=4{,}06.$$

Тогда искомая критическая сила

$$P_{\text{кр}}=\frac{4{,}06^2EJ_0}{l^2}=\frac{17{,}08EJ_0}{l^2}.$$

§ 2. УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОБСТВЕННОГО ВЕСА

Задача 167. Найти критическую длину цилиндрического стержня с закрепленным нижним концом и со свободным верхним концом под влиянием силы собственного веса. (Критическая длина стержня — длина, при которой может произойти прогиб стержня.)

Решение. Верхний конец стержня примем за начало координат, ось Ox направим вертикально, а ось Oy — горизонтально (рис. 111).

Рассмотрим элемент стержня длиной ds и с координатами центра тяжести K (u, v).

Момент силы тяжести элемента относительно точки S в предположении, что изгиб достаточно мал, равен

$$q(y-v)\,ds\approx q(y-v)\,du,$$

где q — вес единицы длины стержня.

Изгибающий момент в сечении S

$$M=q\int_0^x (y-v)\,du=qxy-q\int_0^x v\,du.$$

Граничные условия:

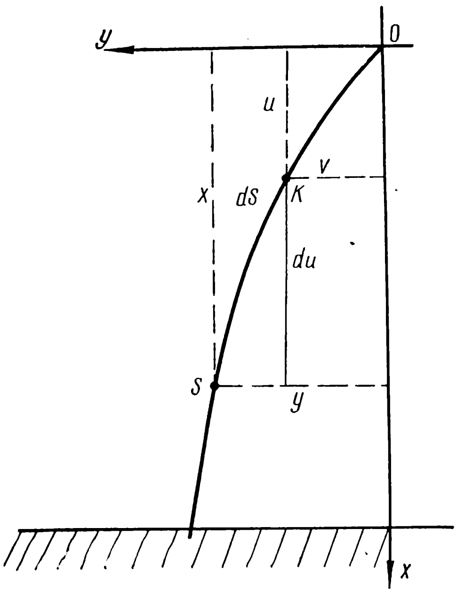

Рис. 111

1) при $x=0$ $y=0$, 2) при $x=0$ $M=\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$, 3) при $x=l$ вследствие защемления конца A $\dfrac{dy}{dx}=0$.

Так как

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2}=-M,$$

то, дифференцируя это равенство, получим

$$EJ\frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{dM}{dx}.$$

С другой стороны,

$$\frac{dM}{dx}=qy+qx\frac{dy}{dx}-q[v]_{u=x}=qx\frac{dy}{dx}$$

и поэтому

$$EJ\frac{d^3y}{dx^3}=-qx\frac{dy}{dx}$$

или, обозначая $\alpha^2=\frac{q}{EJ}$ и $z=\frac{dy}{dx}$, имеем

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\alpha^2xz=0. \tag{1}$$

Полагая $x=\left(\frac{3}{2\alpha}\right)^{\frac{2}{3}}t^{\frac{2}{3}}$, уравнение (1) запишем в виде

$$t\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{dz}{dt}+zt=0.$$

Заменим функцию z через v с помощью подстановки $z=v\sqrt{t}$ и получим уравнение Бесселя

$$t^2\frac{d^2v}{dt^2}+t\frac{dv}{dt}+\left(t^2-\frac{1}{9}\right)v=0. \tag{2}$$

Здесь параметр $n=\frac{1}{3}$.

Общее решение уравнения (2)

$$v=C_1J_{\frac{1}{3}}(t)+C_2J_{-\frac{1}{3}}(t)$$

или

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt[3]{\frac{2\alpha}{3}}\,x^{\frac{1}{2}}\left[C_1J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2\alpha}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)+C_2J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2\alpha}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\right]. \tag{3}$$

Подставляя функции Бесселя $J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2\alpha}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)$ и $J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2\alpha}{3}x^{2}\right)$ в уравнение (3), имеем:

$$\frac{dy}{dx}=C_1(Ax+Bx^4+Cx^7+\ldots)+C_2(K+Lx^3+Mx^6+\ldots).$$

Находим вторую производную $\frac{d^2y}{dx^2}$ и, учитывая второе граничное условие, получим $C_1=0$. Ввиду этого

$$\frac{dy}{dx}=C_2J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2\alpha}{3}x^{\frac{3}{2}}\right).$$

На основании третьего граничного условия

$$C_2 J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2\alpha}{3} l^{\frac{3}{2}}\right)=0.$$

Приняв $C_2=0$, получим прямолинейную форму равновесия $y=0$. Другие формы равновесия получим, приняв

$$J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2\alpha}{3} l^{\frac{3}{2}}\right)=0,$$

т. е. считая, что $\frac{2\alpha}{3} l^{\frac{3}{2}}$ является корнем функции Бесселя $J_{-\frac{1}{3}}$.

Корни этой функции 1,87; 4,49; 8,13; ...

Наименьшему положительному корню соответствует критическая длина $l_{кр}=1,99\sqrt[3]{\frac{EJ}{q}}$.

Первое граничное условие будет удовлетворено, если, проинтегрировав уравнение (3), выбрать новую постоянную интегрирования так, чтобы изогнутая ось проходила через начало системы координат.

§ 3. УСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩЕНИЯ ГИБКОЙ НИТИ

Задача 168. Найти критическое значение угловой скорости вращения тяжелой гибкой нити вокруг вертикальной оси.

Решение. Тяжелая гибкая нить (рис. 112), прикрепленная в точке O, вращается вокруг вертикальной оси Ox. Горизонтальную ось обозначим Oy. Пусть m — масса единицы длины нити.

Рассмотрим элемент нити MM_1 длиной Δs, обозначив через T и T_1 натяжения нити соответственно в точках M и M_1. Натяжения направлены по касательным к изогнутой оси нити и образуют с осью абсцисс углы α и α_1. Кроме того, к элементу MM_1 приложены центробежная сила $m\omega^2 y\Delta s$ и сила тяжести $mg\Delta s$, где ω — угловая скорость вращения, g — ускорение силы тяжести.

Проектируя действующие на элемент силы на координатные оси, имеем:

$$\left.\begin{aligned} T_1\cos\alpha_1 - T\cos\alpha + mg\Delta s = 0, \\ T_1\sin\alpha_1 - T\sin\alpha + m\omega^2 y\Delta s = 0 \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \Delta(T\cos\alpha) + mg\Delta s = 0, \\ \Delta(T\sin\alpha) + m\omega^2 y\Delta s = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Так как

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \sin\alpha = \frac{dy}{ds},$$

то после подстановки этих значений в систему (1) и деления уравнений на Δs, переходя к пределу в предположении, что $\Delta s \to 0$, получим

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) + mg = 0, \quad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + m\omega^2 y = 0. \qquad (2)$$

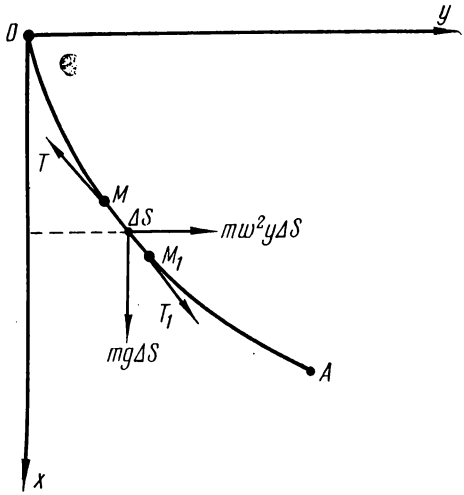

Рис. 112

Если отклонение нити от оси вращения мало, то, полагая $ds = dx$, уравнения (2) запишем в виде

$$\frac{dT}{dx} = -mg, \quad T\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dT}{dx} + m\omega^2 y = 0. \qquad (3)$$

Интегрируем первое из этих уравнений и в итоге получаем

$$T = -mgx + C. \qquad (4)$$

Граничное условие: при $x = l$ (в точке A) $T = 0$, отсюда

$$0 = -mgl + C, \quad C = mgl. \qquad (5)$$

Подставляя найденную постоянную интегрирования (5) в общее решение (4), имеем:

$$T = mg(x - l). \qquad (6)$$

Второе уравнение (3) можно представить в виде

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{T}\cdot\frac{dT}{dx}\,\frac{dy}{dx}+\frac{1}{T}\,m\omega^2y=0$$

или с учетом зависимости (6)

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x-l}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\omega^2y}{g(x-l)}=0,$$

откуда

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{1}{l-x}\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{\omega^2y}{g(l-x)}=0.$$

Полагая $z=2\omega\sqrt{\frac{l-x}{g}}$, получим

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{1}{z}\cdot\frac{dy}{dz}+y=0. \tag{7}$$

Общее решение уравнения (7) примет вид

$$y=C_1J_0(z)+C_2Y_0(z)$$

или

$$y=C_1J_0\left(2\omega\sqrt{\frac{l-x}{g}}\right)+C_2Y_0\left(2\omega\sqrt{\frac{l-x}{g}}\right).$$

Граничные условия: при $x=l$ ордината y должна быть конечной. Но $Y_0(0)=\infty$. Поэтому надо положить $C_2=0$.

При $x=0$ $y=0$, откуда

$$C_1J_0\left(2\omega\sqrt{\frac{l}{g}}\right)=0.$$

Можем принять $C_1=0$ и получим прямолинейную форму равновесия.

Возможно также предположение, что

$$2\omega\sqrt{\frac{l}{g}}=\alpha,$$

где α — корень функции $J_0(t)$, которая обращается в нуль при $t=2{,}40$; $t=5{,}52$; $t=8{,}65$; ...

Для наименьшего из этих корней имеем

$$2\omega\sqrt{\frac{l}{g}}=2{,}40,$$

и тогда

$$\omega=1{,}20\sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{8}$$

При угловой скорости $\omega<1{,}20\sqrt{\frac{g}{l}}$ нить сохраняет прямолинейную форму.

Если же ω равна значению (8), то нить может искривиться.

Итак, критическое значение угловой скорости

$$\omega_{\text{кр}}=1{,}20\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

§ 4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В КОЛЬЦЕВОМ РЕБРЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПРОФИЛЯ

Задача 169. Кольцевое ребро прямоугольного профиля приварено к теплообменнику (рис. 113). Начало радиус-вектора r находится на его оси с положительным направлением от центра. Сохраняются в силе расчетные теплотехнические предпосылки задачи 149. Найти закон распределения температуры.

Решение. Площадь поперечного сечения отдельного элемента высотой dr будет $A=2\pi r\delta$. Площадь поверхности этого элемента $dS=2(2\pi r)\,dr=4\pi r dr$. Разностью между подводимой в направлении r теплотой в отдельный элемент при r и выходящей из отдельного элемента теплотой при $r+dr$ является

$$\frac{d}{dr}\left(2\pi r\delta k\frac{dT}{dr}\right)dr, \tag{1}$$

где T — температура в отдельном элементе.

Для температуры окружающей среды T_S имеем

$$\theta=T-T_S \quad \text{и} \quad d\theta=dT.$$

Предполагаем, что ребро теплее окружающей среды.

В установившемся состоянии общий тепловой баланс требует, чтобы теплота, протекающая через элемент dr, равнялась отдаваемой путем конвекции двумя гранями ребра, т. е.

$$q_{\text{конв}}=h\theta dS=4\pi hr\theta dr. \tag{2}$$

Приравнивая уравнения (1) и (2), имеем

$$\left(2\pi\delta k r \frac{d^2T}{dr^2} + 2\pi\delta k \frac{dT}{dr}\right) dr - 4\pi h r \theta dr = 0$$

или

$$r^2 \frac{d^2\theta}{dr^2} + r \frac{d\theta}{dr} - m^2 r^2 \theta = 0. \qquad (3)$$

Это модифицированное уравнение Бесселя нулевого порядка с параметром $m = \sqrt{\frac{2h}{k\delta}}$.

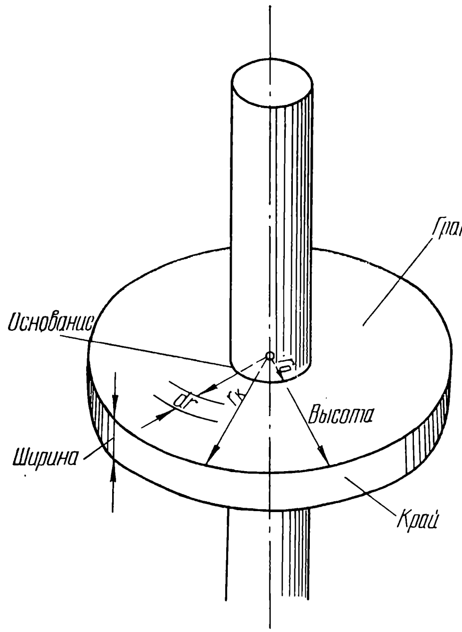

Рис. 113

Общее решение уравнения (3) может быть непосредственно записано в виде

$$\theta = C_1 I_0(mr) + C_2 K_0(mr),$$

где постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются заданными начальными условиями.

Здесь $K_n(x)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода n-го порядка. Для целочисленных значений n имеет вид

$$K_n(x) = \frac{2}{\cos n\pi} \left[\frac{\partial J_{-n}(x)}{\partial n} - \frac{\partial I_n(x)}{\partial n} \right].$$

II. ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ БЕССЕЛЯ

§ 5. МАЯТНИК ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ

Задача 170. Обыкновенный маятник состоит из невесомой нити и веса W на нижнем конце. Найти уравнение движения маятника при малых колебаниях, если его длина непрерывно увеличивается.

Решение. Если при колебании маятника его длина l непрерывно увеличивается, то в момент t она будет $A+Bt$.

Угловой момент количества движения (кинематический момент) есть произведение центробежного момента инерции $J=\frac{W}{g}r^2$ вокруг основания и угловой скорости. Здесь r — радиус инерции.

Для сосредоточенного веса $r=l$ и поэтому момент количества движения равен

$$\frac{W}{g}l^2\frac{d\theta}{dt}.$$

Скорость изменения углового момента количества движения, согласно закону динамики, должна быть связана с восстанавливающей силой. Как видно из рис. 114, эта сила равна $W\sin\theta$ или ввиду малых угловых перемещений приближенно равна $W\theta$.

Восстанавливающая сила образует вокруг опоры момент, плечо которого l, и таким образом

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{W}{g}l^2\frac{d\theta}{dt}\right)=-W\theta l,$$

где знак минус указывает, что скорость изменения углового момента количества движения уменьшается при положительном значении угла θ.

Тогда дифференциальное уравнение движения маятника

$$\frac{W}{g}\left(l^2\frac{d^2\theta}{dt^2}+2l\frac{dl}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}\right)+Wl\theta=0$$

и при $l=A+Bt$ принимает вид

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{2B}{A+Bt}\cdot\frac{d\theta}{dt}+\frac{g}{A+Bt}\theta=0. \tag{1}$$

Уравнение (1) — линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Пусть

$$u=\frac{A+Bt}{B}=\frac{A}{B}+t,$$

тогда

$$du = dt, \quad \frac{d\theta}{du} = \frac{d\theta}{dx},$$

и уравнение (1) принимает вид

$$u^2 \frac{d^2\theta}{du^2} + 2u \frac{d\theta}{du} + m^2 u\theta = 0, \qquad (2)$$

где $m^2 = \frac{g}{B}$.

Уравнение (2) может быть сопоставлено с обобщенным уравнением Бесселя

$$\frac{d}{du}\left(u^p \frac{d\theta}{du}\right) + (au^j + bu^k)\theta = 0.$$

Если сравнение покажет, что $p = k+2$ или $b = 0$, то уравнение (2) приводится к уравнению Бесселя.

В этом случае $b = 0$ и решение

$$\theta = u^{\frac{\beta}{\alpha}}\left[C_1 J_n\left(\omega x^{\frac{1}{\alpha}}\right) + C_2 Y_n\left(\omega x^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right],$$

если n — целое число.

Так как $p = 2$, $j = 1$ и $a = m^2$, то получаем значения постоянных:

$$\alpha = \frac{2}{2-p+j} = 2; \quad \beta = \frac{1-p}{2-p+j} = -1; \quad \omega = \alpha\sqrt{a} = 2m;$$

$$n = \frac{\sqrt{(1-p)^2 - 4b}}{2-p+j} = 1.$$

Общее решение уравнения движения маятника при малых колебаниях будет

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{u}}\left[C_1 J_1(2mu) + C_2 Y_1(2mu)\right].$$

Так как

$$u = \frac{A}{B} + t,$$

то

$$\theta = \sqrt{\frac{B}{A+Bt}}\left[C_1 J_1\left(2m\sqrt{\frac{A}{B}+t}\right) + C_2 Y_1\left(2m\sqrt{\frac{A}{B}+t}\right)\right].$$

§ 6. УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРЕМЕННОЙ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ

Задача 171. Найти критическую нагрузку для защемленного с одного конца стержня переменного момента инерции под действием переменной распределенной нагрузки (рис. 115). Момент инерции стержня изменяется по закону $J(x)=J_0\left(1-\frac{x}{l}\right)^m$, а нагрузка $p(x)=p_0\left(1-\frac{x}{l}\right)^n$, где m, n принимают положительные целочисленные значения.

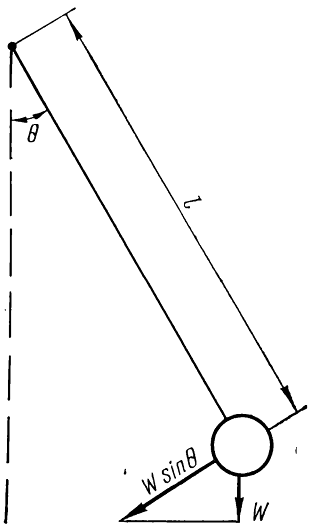

Рис. 114

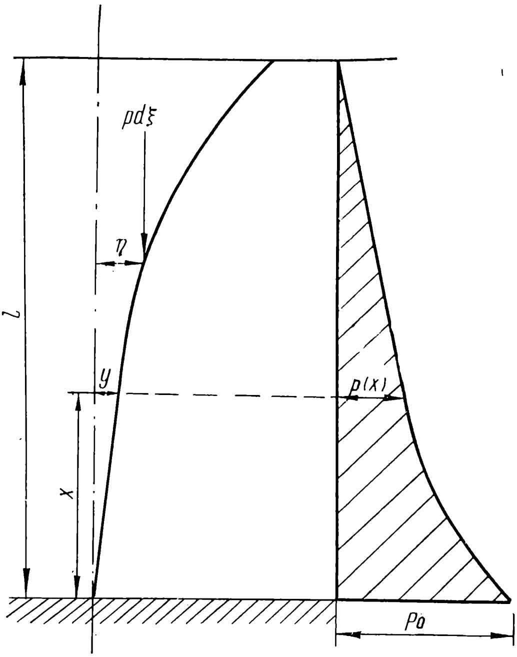

Рис. 115

Решение. Изгибающий момент в сечении (x, y) определяется так:

$$M(x)=-\int_x^l p(\xi)\,d\xi\,(\eta-y)=\int_l^x \eta p(\xi)\,d\xi-y\int_l^x p(\xi)\,d\xi=-EJ(x)\cdot y''.$$

Дифференцируя это уравнение с учетом условий задачи, получим

$$y'''-\frac{\frac{m}{l}}{1-\frac{x}{l}}\,y''+\frac{p_0 l}{(n+1)EJ_0}\left(1-\frac{x}{l}\right)^{n-m+1}y'=0. \qquad (1)$$

При помощи подстановок

$$1-\frac{x}{l}=u;\quad y'=-\frac{1}{l}\cdot\frac{dy}{du}=-\frac{1}{l}v,$$

$$y''=\frac{1}{l^2}\cdot\frac{dv}{du},\quad y'''=-\frac{1}{l^3}\cdot\frac{d^2v}{du^2};\qquad \frac{p_0l^3}{(n+1)EJ_0}=k^2$$

уравнение (1) приводим к виду

$$\frac{d^2v}{du^2}+\frac{m}{u}\cdot\frac{dv}{du}+k^2u^{n-m+1}v=0. \tag{2}$$

Уравнение (2) решается при помощи цилиндрических функций Z_p p-го порядка:

$$v=u^{-\frac{p}{2\nu}}Z_p\left(2k\nu u^{\frac{1}{2\nu}}\right),$$

$$\frac{1}{\nu}=n-m+3,\quad p=\frac{m-1}{n-m+3}.$$

Для нецелочисленного параметра p имеем:

$$\left.\begin{aligned} v&=u^{-\frac{p}{2\nu}}\left[C_1J_p\left(2k\nu u^{\frac{1}{2\nu}}\right)+C_2J_{-p}\left(2k\nu u^{\frac{1}{2\nu}}\right)\right],\\ \frac{dv}{du}&=-ku^{-\frac{p-1}{2\nu}-1}\left[C_1J_{p+1}\left(2k\nu u^{\frac{1}{2\nu}}\right)-C_2J_{-p-1}\left(2k\nu u^{\frac{1}{2\nu}}\right)\right].\end{aligned}\right\}$$

Для целочисленного параметра $p=q_1$, если $m=q_1q_2+1$, $n=(q_1+1)q_2-2$, а q_1 и q_2 принимают целочисленные значения, имеем:

$$\left.\begin{aligned} v&=u^{-\frac{1}{2}q_1q_2}\left[C_1J_{q_1}\left(\frac{2k}{q_2}u^{\frac{1}{2}q_2}\right)+C_2N_{q_1}\left(\frac{2k}{q_2}u^{\frac{1}{2}q_2}\right)\right],\\ \frac{dv}{du}&=-ku^{-\frac{1}{2}q_1(q_2-1)-1}\left[C_1J_{q_1+1}\left(\frac{2k}{q_2}u^{\frac{1}{2}q_2}\right)+\right.\\ &\left.+C_2N_{q_1+1}\left(\frac{2k}{q_2}u^{\frac{1}{2}q_2}\right)\right].\end{aligned}\right\}$$

Начальные условия:

а) при $x=0$ $y'=0$, т. е. $u=1$; $v=0$, б) при $x=l$ $y''=0$, т. е. $u=0$; $\frac{dv}{du}=0$.

В силу

$$\lim_{u\to 0}\left[u^{-\frac{p-1}{2\nu}-1} J_{p+1}\left(2k\nu u^{\frac{1}{2\nu}}\right)\right]=0, \quad n-m+2>0,$$

и $J_{-p-1}(0)=\infty$ или соответственно $N_{q_1+1}(0)=\infty$ из второго условия следует, что $C_2=0$.

Первое условие дает для всех значений p уравнение потери устойчивости

$$J_p(2k\nu)=0.$$

Первый корень $x_1=2k_1\nu$ ввиду того, что

$$\frac{p_{0\text{кр}} l^3}{(n+1)EJ_0}=k_1^2=\left(\frac{x_1}{2\nu}\right)^2$$

дает возможность определить критическую силу

$$P_{\text{кр}}=\frac{p_{0\text{кр}} l}{n+1}=\left(\frac{x_1}{2\nu}\right)^2\frac{EJ_0}{l^2}.$$

Частный случай $n-m+3=0$, т. е. $\nu=\infty$, приводит, согласно уравнению (3), к дифференциальному уравнению Эйлера

$$\frac{d^2v}{du^2}+\frac{n+3}{u}\cdot\frac{dv}{du}+\frac{k^2}{u^2}v=0$$

с критической нагрузкой $(m=n+3)$:

$$P_{\text{кр}}=\frac{p_{0\text{кр}} l}{n+1}=\frac{1}{4}(n+2)^2\frac{EJ_0}{l^2}.$$

Критические нагрузки для различных m и n приводятся в таблице:

n	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$
0	7,87	5,78	3,67	1,0	—
1	16,1	13,0	9,87	6,59	2,25
2	27,3	23,1	18,9	14,7	10,2
3	41,3	36,1	30,9	25,7	20,2
4		52,1	45,8	39,5	33,0

III. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

§ 7. КОЛЕБАНИЯ КРУГЛОЙ МЕМБРАНЫ

Задача 172. Исследовать колебания круглой тонкой мембраны радиуса R и массой ρ недеформированного состояния на единицу площади.

Решение. Для составления дифференциального уравнения, описывающего движение мембраны, рассмотрим усилия, действующие на ее элемент (рис. 116).

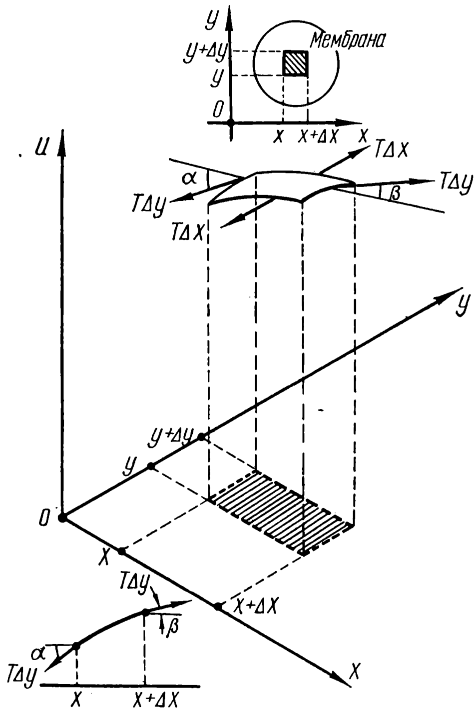

Рис. 116

Так как деформации мембраны и углы наклона малы, то стороны элемента приближенно равны Δx и Δy.

Натяжение T является силой на единицу длины. Поэтому силы, действующие на края элемента, приближенно равны $T\Delta x$ и $T\Delta y$.

Так как мембрана абсолютно гибкая, то эти силы являются касательными к мембране.

Рассмотрим сначала горизонтальные составляющие сил. Эти силы получаются умножением действующих сил на косинусы углов наклона. Поскольку углы малы, то их косинусы близки к единице. Следовательно, горизонтальные составляющие сил на противоположных краях приблизительно равны. В связи с этим движение частицы мембраны в горизонтальном направлении будет ничтожно малым. Отсюда заключаем, что движение мембраны можно рассматривать как поперечное, т. е. каждая ее частица перемещается вертикально.

Вертикальные составляющие сил вдоль краев, параллельных плоскости yOu, будут $T\Delta y \sin\beta$ и $-T\Delta y \sin\alpha$, причем минус указывает, что сила на левом конце направлена вниз. Так как углы малы, то их синусы можно заменить тангенсами. Поэтому равнодействующая этих двух вертикальных составляющих

$$T\Delta y(\sin\beta - \sin\alpha) \approx T\Delta y(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha) = \\ = T\Delta y\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x, y_1) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_2)\right], \qquad (1)$$

где y_1 и y_2 — значения между y и $y+\Delta y$.

Аналогично равнодействующая вертикальных составляющих сил, действующих на двух других краях вырезанного элемента мембраны, будет равна

$$T\Delta x\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x_1, y+\Delta y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x_2, y)\right], \qquad (2)$$

где x_1 и x_2 — значения между x и $x+\Delta x$.

На основании второго закона динамики сумма сил, заданных зависимостями (1) и (2), равна массе $\rho\Delta x\Delta y = \rho\Delta A$ элемента идеально ровной мембраны, умноженной на ускорение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

Таким образом,

$$\rho\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\Delta y\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x, y_1) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_2)\right] + \\ + T\Delta x\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x_1, y+\Delta y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x_2, y)\right],$$

где производная в левой части равенства вычислена в некоторой определенной точке $(\tilde{x}, \tilde{y})$ элемента мембраны.

После деления последнего равенства на $\rho\Delta x\Delta y$ имеем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\left[\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x, y_1) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_2)}{\Delta x} + \right.$$

$$+\frac{\frac{\partial u}{\partial y}(x_1, y+\Delta y)-\frac{\partial u}{\partial y}(x_2, y)}{\Delta y}\Bigg].$$

Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{dt^2}=\frac{T}{\rho}\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x, y_1)-\frac{\partial u}{\partial x}(x, y_2)}{\Delta x}+\right.$$

$$\left.+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{\partial u}{\partial y}(x_1, y+\Delta y)-\frac{\partial u}{\partial y}(x_2, y)}{\Delta y}\right]=$$

$$=\frac{T}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]=\frac{T}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

и, полагая $\frac{T}{\rho}=a^2$, получаем волновое уравнение для двумерного случая

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right). \tag{3}$$

Так как выражение в скобках представляет оператор Лапласа $\nabla^2 u$ для функции $u=u(x, y)$, то выражение (3) записывается

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\nabla^2 u. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь колебания круглой мембраны радиуса R (рис. 117). Применяя полярные координаты $x=r\cos\varphi$ и $y=r\sin\varphi$, волновое уравнение (4) запишем в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right). \tag{5}$$

Будем рассматривать решения $u(r, t)$ уравнения (5), которые являются радиально симметричными, т. е. не зависят от φ. Тогда волновое уравнение примет упрощенный вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}\right). \tag{6}$$

Так как мембрана защемлена по окружности $r=R$, то краевое условие

$$u(R, t)=0 \text{ при } t\geqslant 0. \tag{7}$$

Решения, независимые от φ, будут иметь место, если начальные условия не зависят от φ, т. е. если они вида

$$u(r, 0)=f(r), \tag{8}$$

где $f(r)$ — начальное отклонение, и

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(r), \tag{9}$$

где $g(r)$ — начальная скорость.

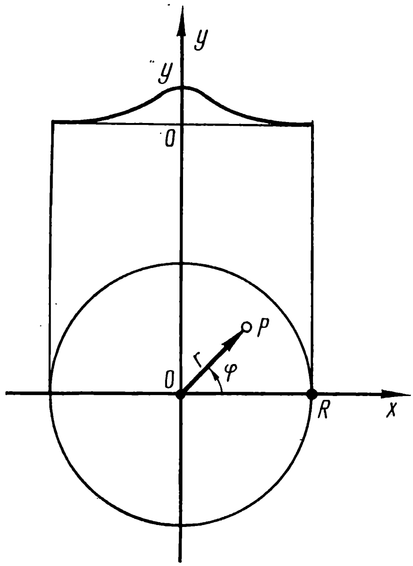

Рис. 117

Применяя метод разделения переменных (метод Фурье), определим решения уравнения (6), удовлетворяющие краевому условию (7). Пусть

$$u(r, t)=W(r)\,G(t). \tag{10}$$

Дифференцируя и подставляя равенство (10) в уравнение (6), после деления полученного уравнения на a^2WG найдем

$$\frac{1}{a^2G}\cdot\frac{d^2G}{dt^2}=\frac{1}{W}\left(\frac{d^2W}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{dW}{dr}\right). \tag{11}$$

Для получения решений, удовлетворяющих краевому условию без наличия тождественного нуля, выражения в обеих частях равенства (11) приравняем постоянной, которая должна быть отрицательной, например, $-k^2$. Таким образом,

$$\frac{1}{a^2G}\frac{d^2G}{dt^2}=\frac{1}{W}\left(\frac{d^2W}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{dW}{dr}\right)=-k^2,$$

откуда получаем обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\frac{d^2G}{dt^2}+\lambda^2G=0,\quad \lambda=ak, \tag{12}$$

и

$$\frac{d^2W}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{dW}{dr}+k^2W=0. \tag{13}$$

Введем в уравнение (3) новую независимую переменную $s=kr$, откуда

$$\frac{1}{r}=\frac{k}{s},\quad \frac{dW}{dr}=\frac{dW}{ds}\cdot\frac{ds}{dr}=\frac{dW}{ds}k$$

и

$$\frac{d^2W}{dr^2}=\frac{d^2W}{ds^2}k^2.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (13) и сокращая на общий множитель k^2, получаем уравнение

$$\frac{d^2W}{ds^2}+\frac{1}{s}\cdot\frac{dW}{ds}+W=0,$$

которое представляет уравнение Бесселя нулевого порядка.

Общее решение

$$W=C_1J_0(s)+C_2Y_0(s),$$

где J_0 и Y_0 — функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка.

Так как отклонение мембраны всегда конечно, а функция Y_0 становится бесконечной при $s\to 0$, то нельзя ее применять и следует положить $C_2=0$. Определенно $C_1\neq 0$, так как иначе $W\equiv 0$.

Можем принять $C_1=1$ и тогда

$$W(r)=J_0(s)=J_0(kr).$$

На окружности $r=R$ должно быть $u(R,t)=W(R)G(t)=0$. Так как $G\equiv 0$ будет предполагать $u\equiv 0$, потребуем, чтобы

$$W(R)=J_0(kR)=0.$$

Обозначая положительные корни функции $J_0(s)$ символами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, получим

$$kR = \alpha_m \quad \text{или} \quad k = k_m = \frac{\alpha_m}{R},$$

где $m = 1, 2, 3, \ldots$

Поэтому решениями уравнения (13), которые исчезают при $r = R$, будут функции

$$W_m(r) = J_0(k_m r) = J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right).$$

Корни $s = \alpha_m$ функции Бесселя нулевого порядка $J_0(s)$

m	α_m	m	α_m
1	2,4048256	11	33,7758202
2	5,5200781	12	36,9170984
3	8,6537279	13	40,0584258
4	11,7915344	14	43,1997917
5	14,9309177	15	46,3411884
6	18,0710640	16	49,4826099
7	21,2116366	17	52,6240518
8	24,3524715	18	55,7655108
9	27,4934791	19	58,9069839
10	30,6346065	20	62,0484692

Соответствующие общие решения уравнения (12) при $\lambda = \lambda_m = a k_m$ будут

$$G_m(t) = a_m \cos \lambda_m t + b_m \sin \lambda_m t.$$

Следовательно, решения волнового уравнения (6), удовлетворяющие краевому условию (7), представляются

$$u_m(r, t) = W_m(r) G_m(t) = (a_m \cos \lambda_m t + b_m \sin \lambda_m t) J_0(k_m r). \quad (14)$$

Функции (14) называются *собственными функциями*, а значения λ_m — *характеристическими числами*. Колебания мембраны, соответствующие u_m, называются *главными колебаниями* m-го порядка. Виды главных колебаний показаны на рис. 118.

При $m = 1$ все точки мембраны перемещаются вверх (или вниз).

Когда $m = 2$, то функция $W_2(r) = J_0\left(\frac{\alpha_2}{R} r\right)$ равна нулю при $\frac{\alpha_2 r}{R} = \alpha_1$ или $r = \frac{\alpha_1 R}{\alpha_2}$. Окружность радиуса $r = \frac{\alpha_1 R}{\alpha_2}$ является, следовательно, линией узлов, и когда в некоторый момент центральная часть мембраны движется вверх, внешняя часть $\left(r > \frac{\alpha_1 R}{\alpha_2}\right)$ движется вниз, и наоборот.

Решение $u_m(r, t)$ имеет $m-1$ линий узлов, представляющих концентрические окружности (рис. 118).

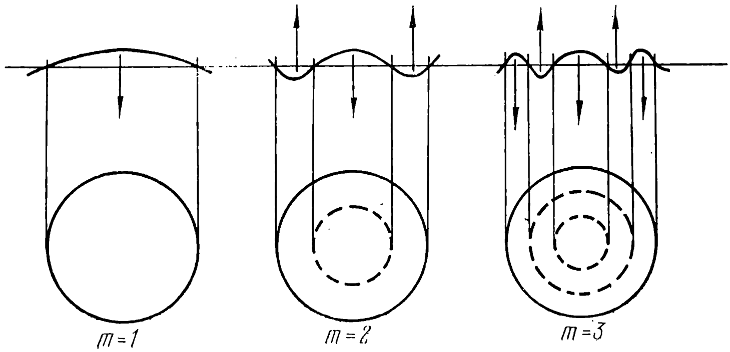

Рис. 118

Для получения решения, удовлетворяющего также начальным условиям (8) и (9), рассмотрим ряд

$$u(r, t)=\sum_{m=1}^{\infty} W_m(r) G_m(t)=\sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos \lambda_m t + b_m \sin \lambda_m t) J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right). \tag{15}$$

Подставляя $t=0$ и используя равенство (8), получаем

$$u(r, 0)=\sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right)=f(r).$$

Следовательно, чтобы ряд (15) удовлетворял условию (8), величины a_m должны быть коэффициентами Фурье ряда Фурье — Бесселя, который представляет разложение $f(r)$ по членам функции Бесселя $J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right)$, т. е.

$$a_m=\frac{2}{R^2 J_1^2(\alpha_m)} \int_0^R r f(r) J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right), \quad m=1, 2, 3, \ldots$$

Дифференцируемость функции $f(r)$ в интервале $0 \leqslant r \leqslant R$ является достаточным условием существования разложения.

Коэффициенты b_m определяются с учетом условия (9) подобным образом:

$$b_m = \frac{2}{a\alpha_m R J_1^2(\alpha_m)} \int_0^R r g(r) J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right) dr.$$

Для получения числовых значений коэффициентов a_m и b_m можно использовать любой метод приближенного интегрирования, применяя таблицы функций Бесселя J_0 и J_1.

IV. УРАВНЕНИЕ ЛЕЖАНДРА

Дифференциальное уравнение Лежандра имеет вид

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \tag{1}$$

где n — целое положительное число ($n=0, 1, 2, \ldots, k$).

Одним из решений уравнения (1) является сходящийся ряд, называемый полиномом Лежандра или шаровой функцией,

$$P_n(x) = \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{n!}\left(x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \ldots + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n}.$$

Фундаментальная система решений (1):

$$y_1 = P_n(x),$$

$$y_2 = Q_n(x) = \frac{1}{2}P_n(x)\ln\frac{x+1}{x-1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}P_{k-1}(x)P_{n-k}(x).$$

$Q_n(x)$ называется функцией Лежандра второго рода.

Тогда общее решение уравнения Лежандра

$$y = C_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x).$$

Основные свойства полиномов Лежандра следующие:

1) $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$;

2) $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$,

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),\quad P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3),$$

$$P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x),$$

$$P_6(x)=\frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5);$$

3) $nP_n(x)=(2n-1)xP_{n-1}(x)-(n-1)P_{n-2}(x)$;

4) $P_n(x)$ имеет n нулевых точек, расположенных между $+1$ и -1;

5) $\int\limits_{-1}^{+1} P_m(x)P_n(x)\,dx=\begin{cases}0 & \text{при } n\neq m,\\ \dfrac{2}{2n+1} & \text{при } n=m;\end{cases}$

6) $\sqrt{\dfrac{1}{1-2rx+r^2}}=\sum\limits_{i=0}^{\infty} P_i(x)r^i,\quad |r|<1.$

§ 8. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ ДВУХ РАВНОСИЛЬНЫХ ЗАРЯДОВ

Задача 173. Найти в произвольной точке пространства электрический потенциал, создаваемый двумя равными и находящимися на расстоянии $2d$ зарядами.

Решение. Задача представляет вращение вокруг прямой, соединяющей эти массы на плоскости (рис. 119).

Пусть $\pm q$ — заряды точек A и B, расположенных на расстоянии $2d$, а $P(x, y)$ — точка, потенциал которой надо определить.

Потенциал

$$V=\frac{q}{r_1}-\frac{q}{r_2}.$$

Обозначим $\overline{OP}=r$ и $\angle POx=\theta$. Тогда

$$r_1^2=r^2+d^2-2dr\cos\theta=r^2\left(1-\frac{2d}{r}\cos\theta+\frac{d^2}{r^2}\right),$$

а

$$r_2^2=r^2+d^2+2dr\cos\theta=r^2\left(1+\frac{2d}{r}\cos\theta+\frac{d^2}{r^2}\right)$$

и в результате потенциал

$$V=\frac{q}{r}\left(1-\frac{2d}{r}\cos\theta+\frac{d^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{q}{r}\left(1+\frac{2d}{r}\cos\theta+\frac{d^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Предположим, что величина r значительно больше d. Используя полиномы Лежандра, можно написать новое выражение потенциала

$$V=\frac{q}{r}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\left(\frac{d}{r}\right)^n-\frac{q}{r}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(-\cos\theta)\left(\frac{d}{r}\right)^n.$$

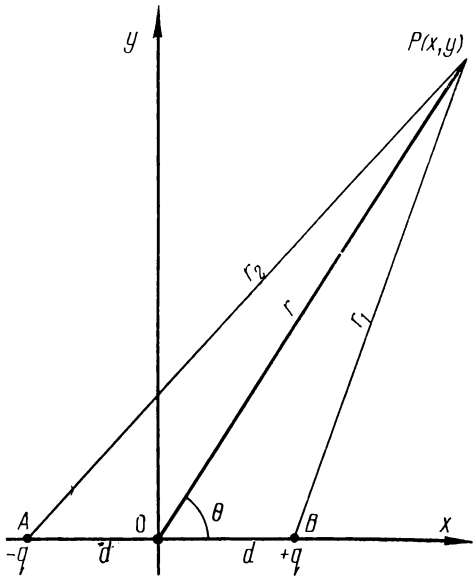

Рис. 119

Так как полином $P_n(x)$ является функцией своего показателя, то потенциал

$$V=\frac{2q}{r}\sum_{n=0}^{\infty}P_{2n+1}(\cos\theta)\left(\frac{d}{r}\right)^{2n+1}. \qquad (1)$$

Замечая, что величина r является очень большой по сравнению с d, можно ограничиться первым членом ряда (1), играющим важную роль в разложении. Поэтому потенциал

$$V=\frac{2q}{r}P_1(\cos\theta)\left(\frac{d}{r}\right)=\frac{2qd\cos\theta}{r^2}=\frac{M\cos\theta}{r^2},$$

где $M=2qd$ — электрический момент диполя $(-q, +q)$.

Очевидно, что если r меньше d, то тогда

$$r_1^2=d^2\left(1-\frac{2r}{d}\cos\theta+\frac{r^2}{d^2}\right),$$

$$r_2^2=d^2\left(1+\frac{2r}{d}\cos\theta+\frac{r^2}{d^2}\right)$$

и, проводя аналогичные выкладки,

$$V=\frac{2q}{d}\sum_{n=0}^{\infty}P_{2n+1}(\cos\theta)\left(\frac{r}{d}\right)^{2n+1}.$$

§ 9. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПОТЕНЦИАЛА

Закон всемирного тяготения гласит, что между двумя материальными точками с массами M и m, которые находятся на расстоянии r, действует сила

$$F=-k\frac{Mm}{r^2}, \tag{1}$$

где k — постоянная притяжения, а знак минус обозначает, что сила стремится уменьшить расстояние между точками (рис. 120).

Если точка M находится в начале прямоугольной системы координат, то в формулу (1) можно подставить $r^2=x^2+y^2+z^2$ и тогда

$$F=-k\frac{Mm}{x^2+y^2+z^2}.$$

Составляющие силы F по трем координатным осям соответственно равны:

$$F_x=-\frac{kMm}{x^2+y^2+z^2}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-\frac{kMmx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}};$$

$$F_y=-\frac{kMmy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}};\quad F_z=-\frac{kMmz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Существует такая функция $\Phi(x, y, z)$, что

$$F_x=\frac{\partial\Phi}{\partial x};\quad F_y=\frac{\partial\Phi}{\partial y};\quad F_z=\frac{\partial\Phi}{\partial z},$$

которая называется силовой функцией и имеет вид

$$\Phi=\frac{kMm}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}.$$

Отрицательное значение Φ обозначается $V=-\Phi$ и называется потенциалом точки M на точку m.

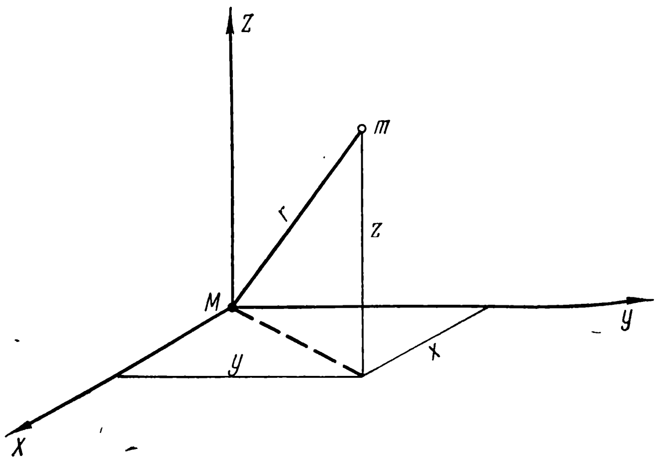

Рис. 120

Функция

$$V=-\frac{kMm}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0, \qquad (2)$$

что легко проверяется подстановкой в это уравнение соответствующих частных производных.

В сферических координатах r, ν, φ уравнение (2) представляется

$$r\frac{\partial^2(rV)}{\partial r^2}+\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial V}{\partial\mu}\right]+\frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}=0, \qquad (3)$$

где ради сокращения записи обозначили $\cos\nu$ через μ.

§ 10. ПОТЕНЦИАЛ ПРИТЯГИВАЮЩИХ МАСС

Задача 174. Найти потенциал северного полюса N шара единичного радиуса на точку P (рис. 121).

Решение. Предположим, что количество сосредоточенных в обеих точках притягивающих масс равно единице.

Если квадрат расстояния между двумя точками (северным полюсом N и точкой P) $(\overline{NP})^2=R$, то потенциал $V=\dfrac{1}{+\sqrt{R}}$.

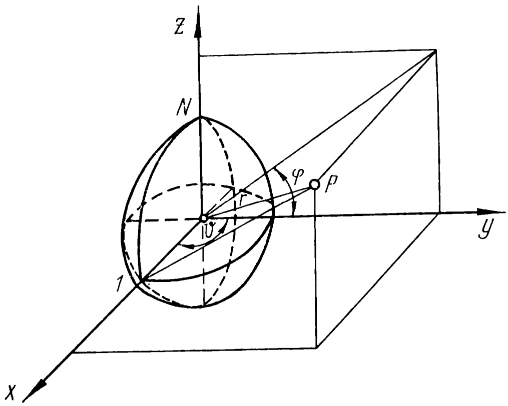

Рис. 121

Полярные координаты полюса N (1, 0, 0) и на основании равенства $+\sqrt{R}=+\sqrt{1^2+r^2-2r\cos\omega}$ получаем

$$\sqrt{R}=\sqrt{1-2r\cos\nu+r^2},$$

так как

$$\cos\omega=\cos\nu\cos\nu_1+\sin\nu\sin\nu_1\cos(\varphi-\varphi_1)=\cos\nu.$$

Тогда потенциал

$$V=\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\nu+r^2}}=f(r)=R^{-\frac{1}{2}}. \qquad (1)$$

Следовательно, потенциал V северного полюса N (1, 0, 0) на точку $P(r, \nu, \varphi)$ зависит лишь от радиус-вектора r и широты ν.

При $r<1$ выражение (1) разложимо по степеням r в ряд Маклорена

$$V=f(r)=f(0)+f'(0)r+\frac{f''(0)}{1\cdot 2}r^2+\frac{f'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3}r^3+\dots$$

Здесь:

$$f(0)=1;$$
$$f'(r)=R^{-3/2}(\cos\nu-r),\quad f'(0)=\cos\nu;$$
$$f''(r)=-R^{-3/2}+3R^{-5/2}(\cos\nu-r)^2,\quad f''(0)=3\cos^2\nu-1;$$
$$f'''(r)=-9R^{-5/2}(\cos\nu-r)+15R^{-7/2}(\cos\nu-r)^3,$$
$$f'''(0)=15\cos^3\nu-9\cos\nu.$$

Тогда

$$V=1+r\cos\nu+r^2\frac{3\cos^2\nu-1}{2}+r^3\frac{5\cos^3\nu-3\cos\nu}{2}+\ldots \tag{2}$$

Если коэффициенты при r^n обозначить через $P_n(\cos\nu)$, то разложение (2) примет вид

$$V=P_0(\cos\nu)+rP_1(\cos\nu)+r^2P_2(\cos\nu)+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty} r^nP_n(\cos\nu)$$

или

$$V=\sum_{n=0}^{\infty} r^nP_n(\mu), \tag{3}$$

где $\mu=\cos\nu$.

Здесь функции

$$P_n(\mu)=\frac{(2n)!}{2^n\,n!n!}\left[\mu^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4(2n-1)(2n-3)}\mu^{n-4}-\right.$$
$$\left.-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2\cdot4\cdot6(2n-1)(2n-3)(2n-5)}\mu^{n-6}+\ldots\right]. \tag{4}$$

Простые шаровые функции Лежандра (4) являются целыми и рациональными. Так:

$$\left.\begin{aligned}
P_0(\mu)&=\cos 0=1,\\
P_1(\mu)&=\cos\nu=\mu,\\
P_2(\mu)&=\frac{1}{2}(3\cos^2\nu-1)=\frac{1}{2}(3\mu^2-1),\\
P_3(\mu)&=\frac{1}{2}(5\cos^3\nu-3\cos\nu)=\frac{1}{2}(5\mu^3-3\mu),\\
P_4(\mu)&=\frac{1}{8}(35\cos^4\nu-30\cos^2\nu+3)=\frac{1}{8}(35\mu^4-30\mu^2+3).
\end{aligned}\right\}$$

Потенциал V должен удовлетворять уравнению (3, стр. 416). Так как он не зависит от φ, то это уравнение принимает упрощенный вид

$$r\frac{\partial^2(rV)}{\partial r^2}+\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial V}{\partial\mu}\right]=0.$$

Подставляем сюда выражение потенциала по формуле (3):

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n\left\{(n+1)nP_n(\mu)+\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial P_n(\mu)}{\partial\mu}\right]\right\}=0. \qquad (5)$$

Уравнение (5) может иметь место лишь в случае равенства нулю коэффициентов при отдельных степенях r:

$$(n+1)nP_n(\mu)+\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dP_n(\mu)}{d\mu}\right]=0. \qquad (6)$$

После выполнения дифференцирования в квадратных скобках уравнение (6) принимает вид

$$(1-\mu^2)\frac{d^2P_n(\mu)}{d\mu^2}-2\mu\frac{dP_n(\mu)}{d\mu}+n(n+1)P_n(\mu)=0.$$

Это дифференциальное уравнение Лежандра.

Общее решение любого линейного дифференциального уравнения второго порядка представляет линейную комбинацию двух частных решений этого уравнения, т. е.

$$y=C_1y_1+C_2y_2.$$

Одно частное решение может быть представлено в виде степенного ряда с неопределенными коэффициентами и показателями степеней:

$$y_1=\sum_{k=1}^{\infty} A_k\mu^{m_k}. \qquad (7)$$

Тогда производная этого частного решения

$$\frac{dy_1}{d\mu}=\sum_{k=1}^{\infty} A_k m_k\mu^{m_k-1},$$

а второй член уравнения (6)

$$\frac{d}{d\mu}\left[(\mu^2-1)\frac{dy_1}{d\mu}\right]=\frac{d}{d\mu}\left[\sum_{k=1}^{\infty}A_k m_k \mu^{m_k+1}-\sum_{k=1}^{\infty}A_k m_k \mu^{m_k-1}\right]=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}A_k m_k(m_k+1)\mu^{m_k}-\sum_{k=1}^{\infty}A_k m_k(m_k-1)\mu^{m_k-2}. \tag{8}$$

Подставляя выражения (7) и (8) в уравнение (6), имеем

$$n(n+1)\sum_{k=1}^{\infty}A_k\mu^{m_k}=\sum_{k=1}^{\infty}A_k m_k(m_k+1)\mu^{m_k}-$$
$$-\sum_{k=1}^{\infty}A_k m_k(m_k-1)\mu^{m_k-2}$$

или

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_k\{[n(n+1)-m_k(m_k+1)]\,\mu^{m_k}+m_k(m_k-1)\mu^{m_k-2}\}=0. \tag{9}$$

Ряд (9) будет тождественным с рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty}\{A_k m_k(m_k-1)\mu^{m_k-2}+A_{k+1}\,[n(n+1)-m_{k+1}(m_{k+1}+1)]\,\mu^{m_k+1}\}$$

при $A_0=0$.

Выполнение равенства (9) возможно, если $m_k-2=m_{k+1}$, т. е., если показатели степени членов ряда представляют убывающую арифметическую прогрессию, разность которой равна 2, т. е. зависимость между показателями степени двух рядом стоящих членов будет

$$\begin{gathered}
m_1-2=m_2,\\
m_2-2=m_3=m_1-4,\\
m_3-2=m_4=m_1-6,\\
\cdots\cdots\cdots\\
m_k-2=m_{k+1}=m_1-2k,\\
m_k=m_1-2k+2.
\end{gathered}$$

Тогда ряд приводится к виду

$$\sum_{k=0}^{\infty}\{A_k(m_1-2k+2)(m_1-2k+1)+A_{k+1}\,[n(n+1)-$$
$$-(m_1-2k)(m_1-2k+1)]\}\,\mu^{m_1-2k},\quad A_0=0.$$

Первый член степенного ряда

$$A_1[n(n+1)-m_1(m_1+1)]\,\mu^{m_1} \tag{10}$$

обращается в нуль, если m_1 равно n или $-(n+1)$.

Остальные члены обращаются в нуль при

$$A_{k+1}=-A_k\frac{(m_1-2k+2)(m_1-2k+1)}{n(n+1)-(m_1-2k)(m_1-2k+1)}=$$

$$=-A_k\frac{(m_1-2k+2)(m_1-2k+1)}{(n-m_1+2k)(n+m_1-2k+1)}. \tag{11}$$

Соотношение (11) представляет рекуррентную формулу для определения коэффициентов A_k при условии, что выбрано одно из возможных значений $m_1=n$ или $m_1=-(n+1)$.

Пусть в уравнении (10) $m_1=n$. Тогда получаем значения искомых коэффициентов

$$A_2=-A_1\frac{n(n-1)}{2(2n-1)};$$

$$A_3=-A_2\frac{(n-2)(n-3)}{2\cdot 2(2n-3)}=A_1\frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{2\cdot 4(2n-3)(2n-1)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_{k+1}=-A_k\frac{(n-2k+2)(n-2k+1)}{2k(2n-2k+1)}$$

или

$$A_{k+1}=(-1)^kA_1\frac{(n-2k+1)(n-2k+2)\ldots(n-1)n}{2^kk!(2n-2k+1)\ldots(2n-1)}.$$

Таким образом, искомое частное решение

$$y_1=A_1\left(\mu^n+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(n-2k+1)(n-2k+2)\ldots(n-1)n}{2^kk!(2n-2k+1)\ldots(2n-1)}\mu^{n-2k}\right). \tag{12}$$

Ряд (12) прекращается при $k=\frac{n}{2}$, если n — целое положительное четное число и при $k=\frac{n-1}{2}$, если n — нечетное число.

В уравнении (12), несмотря на неопределенный коэффициент A_1, y_1 после умножения на $\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!n!}$ представляет собой шаровые функции $P_n(\mu)$ первого рода.

Пусть теперь в уравнении (10) $m_1 = -(n+1)$.

Тогда вместо рекуррентной формулы (11) получим для определения коэффициентов A рекуррентную формулу

$$A_{k+1} = A_k \frac{(n+2k-1)(n+2k)}{2k(2n+2k+1)}.$$

Так как $m_k = -(n+1) - 2k + 2$, то получим ряд, представляющий второе искомое частное решение

$$y_2 = A_1 \left[\mu^{-(n+1)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+2k-1)(n+2k)}{2^k k!(2n+3)(2n+5)\ldots(2n+2k+1)} \mu^{-(n+1)-2k} \right]. \qquad (13)$$

Умножим ряд (13) на $\frac{2^n n! n!}{(2n+1)!}$ и тогда

$$Q_n(\mu) = \frac{2^n n! n!}{(2n+1)!} y_2 = \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)} y_2$$

представляет шаровые функции $Q_n(\mu)$ второго рода.

При $n=0$:

$$Q_0(\mu) = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\mu^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\mu^5} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{\mu^7} +$$

$$+ \ldots = \frac{1}{2} \ln \frac{\mu+1}{\mu-1}, \quad -1 \leqslant \mu \leqslant 1,$$

$$Q_1(\mu) = \frac{1}{3\mu^2} + \frac{1}{5\mu^4} + \frac{1}{7\mu^6} + \ldots = \frac{\mu}{2} \ln \frac{\mu+1}{\mu-1} - 1, \quad -1 \leqslant \mu \leqslant 1.$$

Между шаровыми функциями $Q_n(\mu)$ и $P_n(\mu)$ существует зависимость

$$Q_n(\mu) = \frac{1}{2} P_n(\mu) \ln \frac{\mu+1}{\mu-1} - \left\{ \frac{2n-1}{1 \cdot n} P_{n-1}(\mu) + \frac{2n-5}{3(n-1)} P_{n-3}(\mu) + \right.$$

$$\left. + \frac{2n-9}{5(n-2)} P_{n-5}(\mu) + \ldots \right\}, \quad -1 \leqslant \mu \leqslant 1,$$

которая дает возможность получения функции $Q_n(\mu)$ из шаровой функции $P_n(\mu)$ первого рода и логарифмической функции.

V. УРАВНЕНИЕ МАТЬЕ

Дифференциальное уравнение Матье имеет вид

$$y''+(\lambda-2h\cos 2x)y=0. \tag{1}$$

Если μ — характеристический показатель уравнения (1), то существует решение $y(x)$ такое, что

$$y(x+\pi)=e^{\mu\pi}y(x).$$

Если $y_1(x)$ — решение уравнения Матье, удовлетворяющее начальным условиям

$$y_1(0)=1,\quad y_1(\pi)=0,$$

то параметр μ вычисляется по формуле

$$\operatorname{ch}(\mu\pi)=y_1(\pi).$$

При малых значениях коэффициента h применяется приближенная формула

$$y_1(\pi)\approx\cos\pi\sqrt{\lambda}+h^2\frac{\pi\sqrt{\lambda}\sin\pi\sqrt{\lambda}}{4\lambda(\lambda-1)}+$$
$$+h^4\frac{(15\lambda^2-35\lambda+8)\pi\sqrt{\lambda}\sin\pi\sqrt{\lambda}-2\lambda(\lambda-1)(\lambda-4)\pi^2\cos\pi\sqrt{\lambda}}{64\lambda^2(\lambda-1)^3(\lambda-4)}.$$

В случае $y_1(\pi)\neq\pm1$, т. е. $\mu\neq in$ $(n=0, \pm1; \pm2\ldots)$, общее решение уравнения Матье

$$y=C_1e^{\mu x}p(x)+C_2e^{-\mu x}p(-x),$$

где $p(x)$ — периодическая функция периода π.

Ее коэффициенты Фурье могут быть определены из дифференциального уравнения. Если $y_1(\pi)=\pm1$, общее решение уравнения Матье

$$y=C_1p_1(x)+C_2[xp_1(x)+p_2(x)],$$

где $p_1(x)$ и $p_2(x)$ — периодические функции периода π [если $y_1(\pi)=+1$] или 2π [если $y_1(\pi)=-1$].

Решение $y(x)$ называется устойчивым, если $y(x)$ при $x\to\infty$ остается ограниченным; в противном случае решение неустойчивое.

При $|y_1(\pi)|<1$ общее решение устойчиво, при $|y_1(\pi)|\geqslant1$ существуют неустойчивые частные решения.

§ 11. ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРЕМЕННОЙ ПРОДОЛЬНОЙ СИЛЫ

Задача 175. Исследовать устойчивость шарнирно закрепленного на концах стержня длиной l под действием переменной продольной силы

$$P(t) = P_0 \cos \omega t,$$

где P_0 — наибольшее значение продольной силы, ω — круговая частота изменения продольных сил, t — время. При рассмотрении поперечных колебаний стержня под действием указанных сил выяснить, когда это движение неустойчиво. Площадь поперечного сечения стержня F, жесткость стержня EJ и плотность γ.

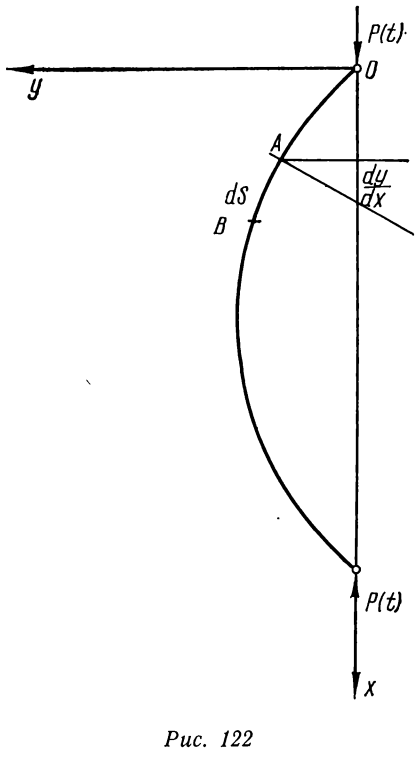

Рис. 122

Решение. Когда идеально прямой стержень находится в покое, то под действием периодических сил $P = P_0 \cos \omega t$ в нем возникают переменные напряжения сжатия и растяжения. Если какой-либо импульс искривит ось стержня, то начнутся поперечные колебания.

Составим дифференциальное уравнение движения стержня. Выделим элемент AB (рис. 122) изогнутого стержня длиною ds.

Так как деформации малы, то $ds \approx dx$. Тогда дифференциальное уравнение изогнутой оси

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2}=-M,$$

откуда после двукратного дифференцирования

$$EJ\frac{d^4y}{dx^4}=q,$$

где q — сплошная нагрузка на единицу длины, которая состоит из силы инерции $-\frac{\gamma F}{g}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}$ и разности поперечных сил по концам элемента, отнесенной к единице длины стержня.

Здесь g — ускорение силы тяжести.

В сечении A поперечная сила $(-Q_1)$ будет равной $Q_1=P\frac{dy}{dx}$, а в сечении B равна $Q_2=P\left(\frac{dy}{dx}-\frac{d^2y}{dx^2}dx\right)$.

Разность поперечных сил на элемент будет $-P\frac{d^2y}{dx^2}dx$ и на единицу длины стержня $-P\frac{d^2y}{dx^2}$.

Поэтому дифференциальное уравнение движения стержня будет

$$EJ\frac{d^4y}{dx^4}=-\frac{\gamma E}{g}\frac{d^2y}{dx^2}-P\frac{d^2y}{dx^2}$$

и после деления на EJ принимает вид

$$\frac{d^4y}{dx^4}=-\frac{\gamma F}{gEJ}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{P_0\cos\omega t}{EJ}\frac{d^2y}{dx^2}. \tag{1}$$

Пусть $\frac{\gamma F}{gEJ}=a^2$ и $\frac{P_0}{EJ}=k^2$. Тогда уравнение (1) запишется

$$\frac{d^4y}{dx^4}+a^2\frac{d^2y}{dt^2}+k^2\cos\omega t\frac{d^2y}{dx^2}=0. \tag{2}$$

Для интегрирования уравнения (2) полагаем

$$y=X(x)T(t). \tag{3}$$

Подставляем это значение y в уравнение (2)

$$T\frac{d^4X}{dx^4}+a^2X\frac{d^2T}{dt^2}+k^2\cos\omega t\cdot T\frac{d^2X}{dx^2}=0$$

и делим равенство на произведение XT:

$$\frac{1}{X}\left(\frac{d^4X}{dx^4}+k^2\cos\omega t\,\frac{d^2X}{dx^2}\right)+\frac{1}{T}\,a^2\frac{d^2T}{dt^2}=0. \tag{4}$$

Полученное уравнение распадается на два уравнения:

$$\frac{1}{X}\left(\frac{d^4X}{dx^4}+k^2\cos\omega t\,\frac{d^2X}{dx^2}\right)=\alpha+\beta k^2\cos\omega t, \tag{5}$$

$$\frac{a^2}{T}\,\frac{d^2T}{dt^2}=-\alpha-\beta k^2\cos\omega t, \tag{6}$$

где α и β — неизвестные постоянные расщепления уравнения (4).

Интегрируя уравнение (5), будем рассматривать t как постоянную величину и искать частное решение в виде

$$X=e^{qx}. \tag{7}$$

После подстановки выражения (7) в уравнение (5) имеем

$$q^4e^{qx}+k^2\cos\omega t\cdot q^2e^{qx}=e^{qx}(\alpha+\beta k^2\cos\omega t)$$

или, сокращая обе части последнего равенства на e^{qx}, получим

$$q^4+k^2\cos\omega t\cdot q^2=\alpha+\beta k^2\cos\omega t.$$

Отсюда

$$q^2=-\frac{k^2\cos\omega t}{2}\pm\sqrt{\frac{k^4\cos^2\omega t}{4}+(\alpha+\beta k^2\cos\omega t)}=-R_1\pm R_2.$$

Вводим обозначения:

$$-R_1+R_2=z_1^2,$$
$$-R_1-R_2=z_2^2.$$

Тогда общее решение уравнения (5) будет

$$X=C_1e^{z_1x}+C_2e^{-z_1x}+C_3\cos z_2x+C_4\sin z_2x.$$

Начальные (граничные) условия: при $x=0$ $X=0$ и $\frac{d^2X}{dx^2}=0$, при $x=l$ $X=0$ и $\frac{d^2X}{dx^2}=0$.

На основании этих четырех условий получаем систему для определения постоянных интегрирования:

$$\left.\begin{aligned} &C_1+C_2+C_3=0, \\ &C_1e^{z_1l}+C_2e^{-z_1l}+C_3\cos z_2l+C_4\sin z_2l=0, \\ &(C_1+C_2)z_1^2-C_3z_2^2=0, \\ &(C_1e^{z_1l}+C_2e^{-z_1l})z_1^2-(C_3\cos z_2l+C_4\sin z_2l)z_2^2=0, \end{aligned}\right\}$$

откуда

$$C_1=C_2=C_3=0,$$

а

$$C_4\sin z_2l=0.$$

Так как $\sin z_2l=0$, то

$$z_2l=n\pi, \quad n=1, 2, 3, \ldots$$

Таким образом,

$$\frac{k^4\cos^2\omega t}{4}+(\alpha+\beta k^2\cos\omega t)=\left(\frac{n^2\pi^2}{l^2}-\frac{k^2\cos\omega t}{2}\right)^2$$

или

$$\frac{k^4\cos^2\omega t}{4}+\alpha+\beta k^2\cos\omega t=\frac{n^4\pi^4}{l^4}-\frac{n^2\pi^2}{l^2}k^2\cos\omega t+\frac{k^4\cos^2\omega t}{4},$$

откуда после сокращения подобных членов

$$\alpha+\beta k^2\cos\omega t=\frac{n^4\pi^4}{l^4}-\frac{n^2\pi^2}{l^2}k^2\cos\omega t. \tag{8}$$

Равенство (8) будет справедливым при любом t, если соблюдаются условия

$$\alpha=\frac{n^4\pi^4}{l^4} \quad \text{и} \quad \beta=-\frac{n^2\pi^2}{l^2}. \tag{9}$$

Каждому решению уравнения (5)

$$X_n=C_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

будет соответствовать определенное решение T_n уравнения (6), и общее решение уравнения (3) выразится суммой

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}X_nT_n.$$

Значения (9) подставим в уравнение (6) и тогда

$$\frac{a^2}{T}\cdot\frac{d^2T}{dt^2}=-\frac{n^4\pi^4}{l^4}+\frac{n^2\pi^2}{l^2}k^2\cos\omega t$$

или, умножая обе стороны этого равенства на $\frac{T}{a^2}$ и перенося все члены в левую часть уравнения, получаем

$$\frac{d^2T}{dt^2}+\frac{n^4\pi^4}{l^4a^2}\left[1-\frac{l^2k^2}{n^2\pi^2}\cos\omega t\right]T=0. \qquad (10)$$

Пусть $p_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2a}$ — частота собственных (свободных) поперечных колебаний порядка n стержня; $b_n^2=\frac{l^2k^2}{n^2\pi^2}=\frac{l^2P_0}{n^2\pi^2EJ}=\frac{P_0}{P_n^{\text{эйл}}}$ — отношение наибольшего значения продольной силы к Эйлеровой нагрузке порядка n стержня.

Тогда уравнение (10) принимает окончательный вид

$$\frac{d^2T}{dt^2}+p_n^2(1-b_n^2\cos\omega t)T=0. \qquad (11)$$

Уравнение (11) является уравнением Матье.

Для решения этого уравнения введем новую независимую переменную t_1 подстановкой

$$2t_1=\omega t \quad \text{или} \quad t_1=\frac{\omega}{2}t.$$

Тогда

$$\frac{dT}{dt_1}=\frac{dT}{d\left(\frac{\omega}{2}t\right)}=\frac{2}{\omega}\,\frac{dT}{dt},$$

а

$$\frac{d}{dt_1}\left(\frac{dT}{dt_1}\right)=\frac{d^2T}{dt_1^2}=\frac{d}{dt_1}\left(\frac{2}{\omega}\,\frac{dT}{dt}\right)=\frac{d}{d\left(\frac{\omega}{2}t\right)}\left(\frac{2}{\omega}\,\frac{dT}{dt}\right)=$$

$$=\frac{2}{\omega}\cdot\frac{2}{\omega}\,\frac{d^2T}{dt^2}=\frac{4}{\omega^2}\,\frac{d^2T}{dt^2},$$

откуда

$$\frac{d^2T}{dt^2}=\frac{\omega^2d^2T}{4dt_1^2}.$$

Уравнение (11) принимает вид

$$\frac{\omega^2}{4}\,\frac{d^2T}{dt_1^2}+p_n^2(1-b_n^2\cos 2t_1)T=0$$

или

$$\frac{d^2T}{dt_1^2}+\frac{4p_n^2}{\omega^2}(1-b_n^2\cos 2t_1)T=0. \qquad (12)$$

Пусть

$$\varphi_0 = \frac{4p_n^2}{\omega^2}; \quad 2\varphi_1 = -\frac{4p_n^2}{\omega^2} b_n^2.$$

Тогда уравнение Матье (12) приводим к виду

$$\frac{d^2T}{dt_1^2} + (\varphi_0 + 2\varphi_1 \cos 2t_1) T = 0. \tag{13}$$

Здесь

$$\varphi_1 = -\frac{2p_n^2}{\omega^2} b_n^2 = -\varphi_0 \frac{b_n^2}{2}.$$

Уравнение (13) может быть представлено в виде

$$\frac{d^2T}{dt_1^2} + [\varphi_0 + \varphi_1 (e^{2it_1} + e^{-2it_1})] \; T = 0. \tag{14}$$

Будем искать общее решение этого уравнения методом Хилла в форме

$$T = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} b_m e^{ict+2imt}, \tag{15}$$

где b_m — постоянные коэффициенты; $i = \sqrt{-1}$; c — функция φ_0 и φ_1.

Подставляя выражение (15) в уравнение (14), получаем

$$-\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} b_m (c+2m)^2 \, e^{ict+2imt} + [\varphi_0 + \varphi_1 (e^{2it} + e^{-2it})] \left[\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} b_m e^{ict+2imt}\right] = 0.$$

Отсюда получаем бесконечную систему уравнений, общий вид которых

$$b_m [(c+2m)^2 - \varphi_0] - \varphi_1 [b_{m-1} + b_{m+1}] = 0. \tag{16}$$

Обозначая для краткости

$$[m'] = [(c+2m)^2 - \varphi_0],$$

запишем систему уравнений (16) в развернутом виде:

$$\left.\begin{array}{lr}
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
-\varphi_1 b_{-3} + b_{-2}[-2] - \varphi_1 b_{-1} & = 0, \\
-\varphi_1 b_{-2} + [-1] - \varphi_1 b_0 & = 0, \\
-\varphi_1 b_{-1} + b_0[0] - \varphi_1 b_1 & = 0, \\
-\varphi_1 b_0 + b_1[1] - \varphi_1 b_2 & = 0, \\
-\varphi_1 b_1 + b_2[2] - \varphi_1 b_3 & = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &
\end{array}\right\} \tag{17}$$

Исключая из системы (17) величины b_i, получаем определитель

$$D(c)=0.$$

Уравнения (16) не меняются при замене c на $c+2s$ или на $-c$, где s — целое число, т. е. все корни уравнения заключаются в интервале $\pm c_0+2r$, где r — положительное или отрицательное целое число. Отсюда можно сделать вывод, что определитель $D(c)$ имеет вид

$$D(c)=A\,[\cos(c\pi)-\cos(c_0\pi)], \tag{18}$$

где A — постоянная величина.

Подставляя в равенство (18) $c=0$ и заменяя c_0 на c, благодаря общему виду выражения для c имеем:

$$D(0)=A\,[1-\cos(c\pi)]. \tag{19}$$

Для определения величины A рассмотрим частный случай $-\varphi_1=0$, тогда $c=\sqrt{\varphi_0}$ и определитель $D(0)$ переходит в новый определитель со значимыми диагональными элементами

$$D'(0)=A\,[1-\cos(\sqrt{\varphi_0}\pi)],$$

где

$$D'(0)=[D(0)]_{\varphi_1=0}.$$

Тогда

$$\frac{1-\cos(c\pi)}{1-\cos\sqrt{\varphi_0}\pi}=\frac{\sin^2\left(\frac{c\pi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\varphi_0}\pi\right)}=\frac{D(0)}{D'(0)}=Д(0),$$

а

$$1-\cos(c\pi)=\sin^2\left(\sqrt{\varphi_0}\frac{\pi}{2}\right)\cdot Д(0)=\Delta(0).$$

Здесь

$$Д(0)=\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & -\frac{\varphi_1}{4^2-\varphi_0} & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & -\frac{\varphi_1}{2^2-\varphi_0} & 1 & -\frac{\varphi_1}{2^2-\varphi_0} & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & -\frac{\varphi_1}{0^2-\varphi_0} & 1 & -\frac{\varphi_1}{0^2-\varphi_0} & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & -\frac{\varphi_1}{2^2-\varphi_0} & 1 & -\frac{\varphi_1}{2^2-\varphi_0} & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & -\frac{\varphi_1}{4^2-\varphi_0} & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

Отсюда

$$\cos(c\pi) = 1 - \Delta(0).$$

Вопрос об устойчивости движения сводится в каждом отдельном случае к вычислению определителя $\Delta(0)$.

Если

$$-1 \leqslant 1 - \Delta(0) \leqslant 1,$$

величина c вещественная и движение устойчиво; в другом случае $|1-\Delta(0)| = |\cos(c\pi)| > 1$, величина c становится мнимой и движение неустойчиво. Величиной c, разграничивающей действительные значения c от мнимых, является $c = 1$.

Очень существенно установить зависимость между коэффициентами φ_0 и φ_1, соответствующую переходу от мнимых к вещественным значениям c.

Проанализируем вопрос о переходе c от мнимых значений к действительным.

Пусть величина c будет комплексной, т. е.

$$c = a + bi,$$

где a и b — действительные числа.

Тогда

$$\cos(c\pi) = \cos a\pi \cos ib\pi - \sin a\pi \sin ib\pi.$$

Так как величина $\cos(c\pi)$ по существу всегда действительная, то или $b = 0$ или $a = s$, где s — целое число.

Если $b = 0$, то c — действительная величина; если же $a = s$, то

$$\cos(c\pi) = \pm\cos ib\pi = 1 - \Delta(0),$$

причем это уравнение в каждом частном случае дает лишь одно действительное значение b.

В случае, когда $1 - \Delta(0) > 0$, величина

$$c = \pm ib + 2s; \tag{20}$$

во втором случае, когда $1 - \Delta(0) < 0$, то

$$\cos(c\pi) = -\cos ib\pi$$

и величина

$$c = \pm ib + 2s + 1, \tag{21}$$

а общее выражение для T будет

$$T = e^{bt} \sum_{s=0}^{\infty} b_s e^{it(1+2s)} + e^{-bt} \sum_{s=0}^{\infty} b_s' e^{it(1+2s)}. \tag{22}$$

Переходу величины c от действительных значений к мнимым соответствует обращение в нуль величины в формулах (20) и (21).

Таким образом, основными величинами c, разграничивающими действительные значения от мнимых, будут

$$c=1 \quad \text{и} \quad c=0.$$

В случае $c=1$ общее выражение $T=T_n$ при $b=0$, согласно соотношению (22), принимает вид

$$T_n=\sum_{s=0}^{\infty} b_s e^{it_1(1+2s)}+\sum_{s=0}^{\infty} b_s' e^{it_1(1+2s)}$$

и общее решение уравнения (2) при переходе от действительного значения c к мнимому запишется

$$y=\sum_{n=1}^{\infty} X_n T_n=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{l}\left[\sum_{s=0}^{\infty} b_s e^{\frac{i\omega t}{2}(1+2s)}+\sum_{s=0}^{\infty} b_s' e^{\frac{i\omega t}{2}(1+2s)}\right].$$

Общее решение для действительного c, равного $-c=a$, будет

$$y=\sum_{n=1}^{\infty} X_n T_n=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{l}\times$$

$$\times\left[e^{\frac{iat\omega}{2}}\sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{2ikt\frac{\omega}{2}}+e^{-\frac{iat\omega}{2}}\sum_{k=1}^{\infty} b_k' e^{2ikt\frac{\omega}{2}}\right].$$

Общее решение для мнимого $c=\pm ib+2s+1$ примет вид

$$y=\sum_{n=1}^{\infty} X_n T_n=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{l}\times$$

$$\times\left[e^{\frac{bt\omega}{2}}\sum_{s=1}^{\infty} b_s e^{\frac{i\omega t}{2}(1+2s)}+e^{-\frac{bt\omega}{2}}\sum_{s=1}^{\infty} b_s' e^{\frac{i\omega t}{2}(1+2s)}\right].$$

В случае $c=0$ из равенства (18) получаем

$$D(0)=0,$$

откуда в развернутом виде

$$D(0)=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 4^2-\varphi_0 & -\varphi_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\varphi_1 & 2^2-\varphi_0 & -\varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\varphi_1 & \varphi_0 & -\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1 & 2^2-\varphi_0 & -\varphi_1 \\ 0 & 0 & 0 & -\varphi_1 & 4^2-\varphi_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}=0.$$

Учитывая, что $\varphi_1=-\varphi_0\dfrac{b_n{}^2}{2}$, получаем

$$\varphi_0=\frac{4p_n{}^2}{\omega^2}=0,$$

отсюда следует $p_n=0$ или $\omega\to\infty$, что практического значения не имеет.

Следовательно, можно ограничиться исследованием случая $c=1$.

Из равенства (18) аналогично получаем

$$\frac{1+\cos(c\pi)}{1+\cos(\sqrt{\varphi}\pi)}=\frac{D(1)}{D'(1)}. \tag{23}$$

Как уже известно, величина c, разграничивающая мнимые и вещественные значения, равна 1. Подставив $c=1$ в уравнение (23), получаем искомое условие

$$D(1)=0. \tag{24}$$

В развернутом виде бесконечный определитель (24) записывается

$$D(1)=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}=0, \tag{25}$$

где $a_1=\dfrac{\varphi_0-1}{\varphi_1}$, $a_2=\dfrac{\varphi_0-9}{\varphi_1}$, $a_3=\dfrac{\varphi_0-25}{\varphi_1}$ и т. д.

Раскрывая определитель (25) и приравнивая его нулю, получаем уравнение для нахождения критического соотношения коэффициентов φ_0 и φ_1.

Решение находится методом последовательных приближений. Первое приближение, включающее только четыре центральных элемента определителя, будет

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & a_1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$a_1^2 - 1 = 0,$$

откуда

$$a_1 = \pm 1. \tag{26}$$

Второе приближение дает уравнение

$$a_2^2 \left[\left(a_1 - \frac{1}{a_2} \right)^2 - 1 \right] = 0$$

или

$$a_1 - \frac{1}{a_2} = \pm 1.$$

Третье приближение дает уравнение

$$a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{a_3}} = +1 \text{ и т. д.}$$

Критическое уравнение (25), устанавливающее связь между b_n^2 и $\varphi_0 = \frac{4p_n^2}{\omega^2}$, принимает вид

$$a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{a_3 - \cfrac{1}{a_4}}} = \pm 1. \tag{27}$$

Необходимые величины:

$$a_1 = \frac{\varphi_0 - 1}{\varphi_1} = -\frac{2(\varphi_0 - 1)}{b_n^2 \varphi_0}; \quad a_2 = -\frac{2(\varphi_0 - 9)}{b_n^2 \varphi_0};$$

$$a_3 = -\frac{2(\varphi_0 - 25)}{b_n^2 \varphi_0}, \ldots$$

Придавая величине b_n^2 определенные значения, можно для каждого из них вычислить приближенно отношение $\varphi_0 = \frac{4p_n}{\omega^2}$.

Правая часть уравнения (27) имеет два знака и поэтому для каждого значения b_n^2 распадается на два уравнения, дающих по два корня для каждого значения b_n^2.

При $b_n^2=0$ оба уравнения совпадают и первое приближение дает точное значение критического соотношения $\frac{p_n^2}{\omega^2}$.

Итак, первое приближение по формуле (26)

$$a_1=\pm 1$$

или

$$-\frac{2(\varphi_0-1)}{b_n^2\varphi_0}=\pm 1,$$

откуда

$$2(\varphi_0-1)=\mp b_n^2\varphi_0.$$

Когда величина $b_n^2\to 0$, то

$$\varphi_0=\frac{4p_n^2}{\omega^2}=1,$$

т. е. при очень малых значениях отношения $\frac{P_0}{P_n^{\text{эйл}}}$ будет резонанс, когда

$$\omega=2p_n,$$

т. е. когда частота изменения силы P вдвое превышает одну из частот собственных (свободных) поперечных колебаний стержня.

Глава XIV

ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К СИСТЕМАМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Непосредственный метод интегрирования систем дифференциальных уравнений сводится к образованию путем сложения, вычитания, деления данных уравнений *интегрируемых комбинаций*, т. е. дифференциальных уравнений вида

$$\varphi\left(t, U, \frac{dU}{dt}\right)=0,$$

где U — некоторая функция от искомых функций, не содержащая t. В случае линейной однородной системы с постоянными коэффициентами интегрируемая комбинация есть уравнение с разделенными переменными, в случае неоднородной линейной системы — линейное уравнение первого порядка. Каждая интегрируемая комбинация дает один первый интеграл; если число их равно числу уравнений системы, интегрирование закончено; в противном случае получается система с меньшим числом неизвестных функций.

Рассмотрим системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Существуют различные способы интегрирования таких систем. Проще всего пользоваться методом Даламбера, который вытекает из непосредственного интегрирования.

Пусть дана система двух уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=a_1x+b_1y+F_1(t), \\ \frac{dy}{dt}&=a_2x+b_2y+F_2(t). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Обозначим через λ множитель, на который надо умножить второе уравнение, чтобы получить интегрируемую комбинацию

$$\frac{d(x+\lambda y)}{dt}=(a_1+a_2\lambda)x+(b_1+b_2\lambda)y+F_1+\lambda F_2.$$

Цель достигнута, если

$$b_1+b_2\lambda=\lambda(a_1+a_2\lambda)$$

или

$$a_2\lambda^2+(a_1-b_2)\lambda-b_1=0. \qquad (2)$$

Тогда имеем интегрируемую комбинацию ($U=x+\lambda y$):

$$\frac{dU}{(a_1+a_2\lambda)U+F_1+\lambda F_2}=dt \tag{3}$$

(линейное уравнение).

Пусть общий интеграл уравнения (3) есть

$$U=x+\lambda y=\Phi(t, \lambda, C).$$

Различают три случая:

1) корни квадратного уравнения (2) действительные и различные. Тогда имеем два интеграла системы (1):

$$x+\lambda_1 y=\Phi(t, \lambda, C_1),$$
$$x+\lambda_2 y=\Phi(t, \lambda, C_2);$$

2) корни комплексные, $\lambda=\alpha\pm\beta i$. Приравнивая действительные, а также мнимые компоненты обеих частей уравнения

$$x+(\alpha+\beta i)y=\Phi(t, \alpha+\beta i, A+Bi),$$

получим также два интеграла (A, B — произвольные постоянные);

3) корни действительные и кратные, $\lambda_1=\lambda_2$.

В этом случае получаем только один интеграл, который позволяет свести вопрос к интегрированию одного линейного уравнения с одной неизвестной функцией.

Рассмотрим систему трех уравнений

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=a_1x+b_1y+c_1z+F_1(t),\\ \frac{dy}{dt}&=a_2x+b_2y+c_2z+F_2(t),\\ \frac{dz}{dt}&=a_3x+b_3y+c_3z+F_3(t).\end{aligned}\right\}$$

Умножаем второе уравнение на λ, третье на μ и затем складываем. Получаем

$$\frac{d(x+\lambda y+\mu z)}{dt}=(a_1+a_2\lambda+a_3\mu)x+(b_1+b_2\lambda+b_3\mu)y+$$
$$+(c_1+c_2\lambda+c_3\mu)z+F_1+\lambda F_2+\mu F_3.$$

Подберем теперь λ и μ так, чтобы имели место равенства:

$$\left.\begin{aligned}b_1+b_2\lambda+b_3\mu&=(a_1+a_2\lambda+a_3\mu)\lambda,\\ c_1+c_2\lambda+c_3\mu&=(a_1+a_2\lambda+a_3\mu)\mu.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Вводим подстановку $U=x+\lambda y+\mu z$. Находим линейное уравнение

$$\frac{dU}{(a_1+a_2\lambda+a_3\mu)U+(F_2+\lambda F_2+\mu F_3)}=dt.$$

Пусть его общее решение

$$U=\Phi(t, \lambda, \mu, C). \tag{5}$$

Определяем λ и μ. Запишем систему (4) в виде

$$\frac{a_1+a_2\lambda+a_3\mu}{1}=\frac{b_1+b_2\lambda+b_3\mu}{\lambda}=\frac{c_1+c_2\lambda+c_3\mu}{\mu}=s.$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} a_2\lambda+a_3\mu&=s-a_1,\\ (b_2-s)\lambda+b_3\mu&=-b_1,\\ c_2\lambda+(c_3-s)\mu&=-c_1. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Условие совместности системы (6):

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_1-s \\ b_2-s & b_3 & b_1 \\ c_2 & c_3-s & c_1 \end{vmatrix}=0. \tag{7}$$

Это кубическое уравнение относительно s.

Различают три случая:

1) среди корней уравнения (7) нет равных, $s_1\neq s_2\neq s_3$. Определив для каждого корня из системы (6) соответственные значения для λ и μ (т. е. λ_1, μ_1; λ_2, μ_2; λ_3, μ_3), из уравнения (5) получаем все три интеграла;

2) среди корней есть двукратный; тогда найдем лишь два интеграла системы. Для окончания потребуется еще интеграция одного уравнения;

3) корень трехкратный; тогда найдем лишь один интеграл, а поэтому интегрирование будет сведено к системе двух уравнений.

В случае комплексного корня поступают аналогично изложенному.

§ 1. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕЩЕСТВА

Задача 176. Некоторое вещество A разлагается на два вещества P и Q. Скорость образования каждого из них пропорциональна количеству неразложенного вещества. Пусть x и y — количества веществ P и Q, образовавшихся к моменту t. Определить закон их изменений, зная, что в начальный момент $x=0$, $y=0$, а через 1 *ч* $x=\frac{3}{8}c$, $y=\frac{1}{8}c$, где c — первоначальное количество вещества A.

Решение. В момент t скорости образования веществ P и Q будут:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=k_1(c-x-y),\\ \frac{dy}{dt}&=k_2(c-x-y),\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

так как к этому моменту количество неразложившегося еще вещества A равно $c-x-y$. Уравнения (1) представляют систему двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Дифференцируя первое уравнение, получим

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-k_1\left(\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}\right).\tag{2}$$

Подставляя в уравнение (2) значение $\frac{dy}{dt}$ из второго уравнения системы (1), имеем:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-k_1\left[\frac{dx}{dt}+k_2(c-x-y)\right].\tag{3}$$

Исключая y из уравнения (3) и первого уравнения системы (1), находим

$$\frac{d^2x}{dt^2}+(k_1+k_2)\frac{dx}{dt}=0.\tag{4}$$

Уравнение (4) является однородным линейным уравнением второго порядка. Его характеристическое уравнение:

$$r^2+(k_1+k_2)r=0.$$

Это неполное квадратное уравнение имеет два корня:

$$r_1=0 \quad \text{и} \quad r_2=-(k_1+k_2).$$

Таким образом, общее решение уравнения (4)

$$x=C_1+C_2e^{-(k_1+k_2)t}.$$

Для нахождения второго решения дифференцируем найденное выражение для x, подставляем x и $\frac{dx}{dt}$ в первое уравнение системы и решаем его относительно y.

Получим

$$\frac{dx}{dt}=-C_2(k_1+k_2)e^{-(k_1+k_2)t},$$

$$-C_2(k_1+k_2)e^{-(k_1+k_2)t}=k_1(c-C_1-C_2e^{-(k_1+k_2)t}-y)$$

и второе решение

$$y=c-\frac{k_2}{k_1}C_2e^{-(k_1+k_2)t}-C_1.$$

Таким образом, решения системы

$$\left.\begin{aligned}x&=C_1+C_2e^{-(k_1+k_2)t},\\ y&=c+\frac{k_2}{k_1}C_2e^{-(k_1+k_2)t}-C_1.\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

Определим C_1 и C_2, используя начальные условия: при $t=0$ $x=0$ и $y=0$. Таким образом,

$$\left.\begin{aligned}&C_1+C_2=0,\\ &C_1-\frac{k_2}{k_1}C_2=C,\end{aligned}\right\}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}C_1&=\frac{k_1c}{k_1+k_2},\\ C_2&=-\frac{k_1c}{k_1+k_2}.\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

Подставляя значения (6) в решения (5), получим законы изменения величин x и y в виде

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{k_1c}{k_1+k_2}\left[1-e^{-(k_1+k_2)t}\right],\\ y&=\frac{k_2c}{k_1+k_2}\left[1-e^{-(k_1+k_2)t}\right].\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

Неизвестные коэффициенты k_1 и k_2 найдем из дополнительных условий задачи: при $t=1$ $x=\frac{3}{8}c$, $y=\frac{1}{8}c$. Имеем:

$$\left.\begin{aligned}\frac{3c}{8}&=\frac{k_1c}{k_1+k_2}\left[1-e^{-(k_1+k_2)}\right],\\ \frac{c}{8}&=\frac{k_2c}{k_1+k_2}\left[1-e^{-(k_1+k_2)}\right].\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

Из системы (8) определяем k_1 и k_2:

$$\frac{k_1}{k_2}=3; \quad k_1=3k_2,$$

и тогда

$$\frac{c}{8}=\frac{c}{4}\left(1-e^{-4k_2}\right)$$

или

$$e^{-4k_2}=\frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$4k_2=\ln 2$$

или

$$k_2=\frac{1}{4}\ln 2. \tag{9}$$

Тогда

$$k_1=\frac{3}{4}\ln 2. \tag{10}$$

Суммируя уравнения (9) и (10), имеем

$$k_1+k_2=\ln 2$$

или, потенцируя,

$$e^{k_1+k_2}=2.$$

Далее

$$\frac{k_1}{k_1+k_2}=\frac{3}{4},$$

а

$$\frac{k_2}{k_1+k_2}=\frac{1}{4}.$$

Подставляя эти значения в систему (7), находим:

$$x=\frac{3c}{4}\left(1-2^{-t}\right)=\frac{3c}{4}\left(1-\frac{1}{2^t}\right),$$

$$y=\frac{c}{4}\left(1-2^{-t}\right)=\frac{c}{4}\left(1-\frac{1}{2^t}\right);$$

§ 2. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ КРИВАЯ ПОГОНИ

Задача 177. Бомбардировщик, летящий со скоростью $v_б$, преследуется истребителем, скорость полета которого $v_и$. Нос истребителя постоянно направлен к бомбардировщику, который летит в направлении, образующем с горизонталью угол β. Найти траекторию полета истребителя, наносимую на карту наблюдателем внутри бомбардировщика. Задачу рассмотреть в полярной системе координат.

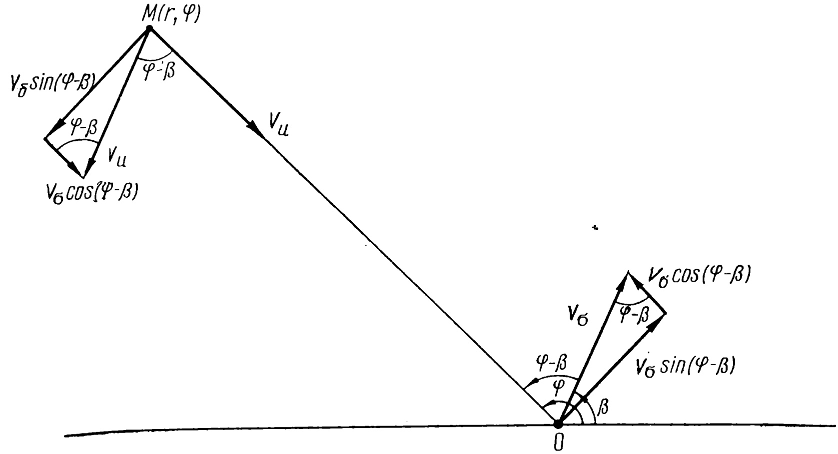

Рис. 123

Решение. Наблюдателю в бомбардировщике, который движется вправо, кажется, будто он стоит неподвижно, а истребитель движется влево, и если бомбардировщик движется со скоростью $v_б$, то наблюдателю кажется, что истребитель движется со скоростью $v_б$ (рис. 123).

Радиальные и поперечные составляющие верхнего вектора $v_б$ образуют систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= -v_б \cos(\varphi-\beta), \\ r\frac{d\varphi}{dt} &= v_б \sin(\varphi-\beta). \end{aligned}\right\}$$

Поэтому, как видно наблюдателю из бомбардировщика, действительная скорость истребителя в радиальном направлении (это сумма двух скоростей в том же отрицательном направлении r) будет

$$\frac{dr}{dt} = -v_и - v_б \cos(\varphi-\beta), \tag{1}$$

а в поперечном направлении

$$r\frac{d\varphi}{dt}=v_б \sin(\varphi-\beta). \tag{2}$$

Делим равенство (1) на равенство (2) и в итоге получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dr}{rd\varphi}=-\frac{\cos(\varphi-\beta)}{\sin(\varphi-\beta)}-\frac{v_и}{v_б}\operatorname{cosec}(\varphi-\beta).$$

Решение этого уравнения

$$\ln r+\ln C=-\ln\sin(\varphi-\beta)-\frac{v_и}{v_б}\ln\left[\operatorname{cosec}(\varphi-\beta)-\operatorname{ctg}(\varphi-\beta)\right],$$

которое после потенцирования упрощается к виду

$$Cr=\frac{\left[\operatorname{cosec}(\varphi-\beta)-\operatorname{ctg}(\varphi-\beta)\right]^{-\frac{v_и}{v_б}}}{\sin(\varphi-\beta)}=$$

$$=\frac{1}{\sin(\varphi-\beta)}\left[\frac{1-\cos(\varphi-\beta)}{\sin(\varphi-\beta)}\right]^{-\frac{v_и}{v_б}}=$$

$$=\frac{1}{\left[\sin(\varphi-\beta)\right]^{1-\frac{v_и}{v_б}}\left[1-\cos(\varphi-\beta)\right]^{\frac{v_и}{v_б}}}. \tag{3}$$

Начальные условия: при $t=0$ $r=r_0$, $\varphi=\varphi_0$.

Изучим характер зависимости решения (3) от параметров.

Случай 1. Если скорость бомбардировщика $v_б$ равна скорости истребителя $v_и$, то уравнение (3) упрощается к виду

$$Cr=\frac{1}{1-\cos(\varphi-\beta)}. \tag{4}$$

Уравнение (4) представляет параболу.

Траектория полета истребителя, наблюдаемого из бомбардировщика, приводится на рис. 124, *а*.

Очевидно, что в этом случае истребитель никогда не достигнет бомбардировщика.

Случай 2. Если скорость истребителя $v_и$ превышает скорость бомбардировщика $v_б$, тогда $1-\frac{v_и}{v_б}<0$ и уравнение (3) записывается

$$Cr=\frac{[\sin(\varphi-\beta)]^{\frac{v_и}{v_б}-1}}{[1-\cos(\varphi-\beta)]^{\frac{v_и}{v_б}}}.$$

График траектории полета истребителя, наблюдаемого с борта бомбардировщика (при $v_и=2v_б$) приводится на рис. 124, *б*.

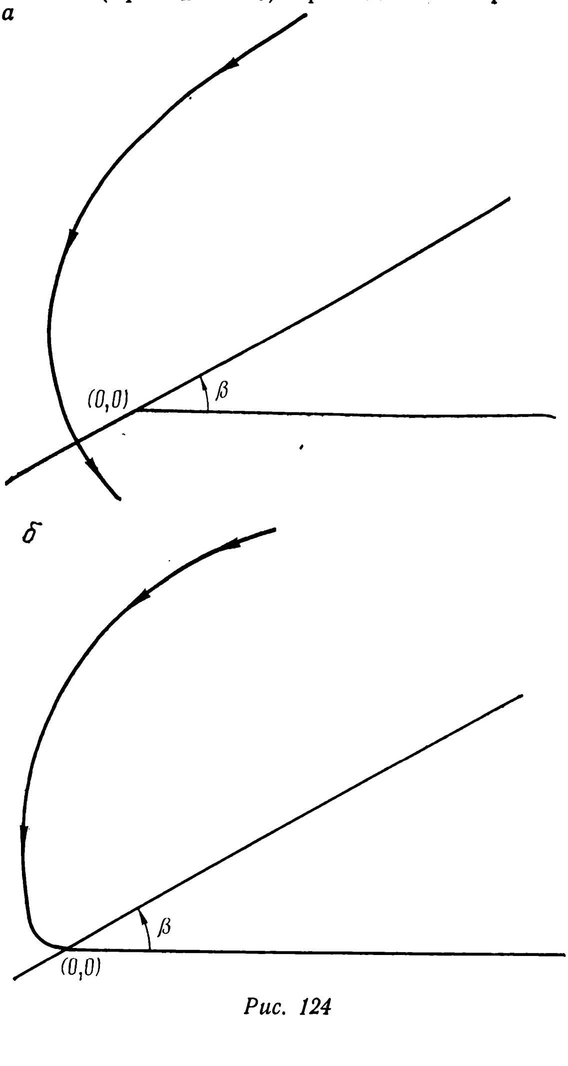

Рис. 124

§ 3. ДАВЛЕНИЕ В СИСТЕМЕ ДВУХ СОЕДИНЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ С ГАЗОМ

Задача 178. В двух цилиндрах, соединенных трубкой с краном, заключен газ под разными давлениями p_1 и p_2. Объемы цилиндров соответственно V_1 и V_2. Если открыть кран, то газ пойдет из цилиндра с большим давлением, например p_1, в цилиндр с меньшим давлением p_2. Скорость течения газа в каждый момент t пропорциональна разности квадратов давлений газа в обоих сосудах в момент t. Найти закон изменения давлений в цилиндрах.

Решение. Пусть p_1 и p_2 — давления газа в цилиндрах в момент t.

За время dt из первого цилиндра во второй перейдет масса газа dM. Скорость течения будет $\frac{dM}{dt}$. По условию задачи эта скорость пропорциональна $p_1^2 - p_2^2$. Следовательно,

$$\frac{dM}{dt} = a(p_1^2 - p_2^2), \tag{1}$$

где a — коэффициент пропорциональности.

Соотношение (1) можно представить

$$dM = a(p_1^2 - p_2^2)\,dt. \tag{2}$$

С другой стороны, масса dM равна убыли массы M_1 в цилиндре с давлением p_1, а также прибыли массы M_2 в цилиндре с давлением p_2 за время dt. Но:

$$M_1 = \delta_1 V_1, \quad M_2 = \delta_2 V_2,$$

где δ — плотность газа, которая изменяется пропорционально давлению p при постоянной температуре.

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= bp_1, \\ \delta_2 &= bp_2, \end{aligned}\right\}$$

где b — коэффициент пропорциональности.

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= bp_1V_1, \\ M_2 &= bp_2V_2. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Дифференцируя систему (3), получим

$$dM = -bV_1dp_1 \quad \text{(убыль массы } M_1\text{)} \tag{4}$$

и

$$dM = bV_2dp_2 \quad \text{(прибыль массы } M_2\text{)}. \tag{5}$$

Сравнивая уравнения (4) и (5) с равенством (2), получим систему двух дифференциальных уравнений процесса

$$\left.\begin{aligned}-bV_1dp_1&=a(p_1^2-p_2^2)\,dt,\\ bV_2dp_2&=a(p_1^2-p_2^2)\,dt\end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned}\frac{dp_1}{dt}&=-\frac{a}{bV_1}(p_1^2-p_2^2),\\ \frac{dp_2}{dt}&=\frac{a}{bV_2}(p_1^2-p_2^2).\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Проведем преобразования системы.

Первое уравнение системы (6) умножим на V_1, второе на V_2, складываем и умножаем на dt.

Получим

$$V_1dp_1+V_2dp_2=0. \tag{7}$$

Далее первое уравнение системы (6) умножаем на $p_2V_1V_2$, а второе на $p_1V_1V_2$ и вычитаем. Отсюда

$$V_1V_2\left(p_2\frac{dp_1}{dt}-p_1\frac{dp_2}{dt}\right)=-\frac{a}{b}(p_1^2-p_2^2)(p_2V_2+p_1V_1). \tag{8}$$

Система (7), (8) легко интегрируется, так как левая часть уравнения (7) есть полный дифференциал

$$d(V_1p_1+V_2p_2)=0,$$

откуда первое решение системы

$$V_1p_1+V_2p_2=C_1. \tag{9}$$

На основании решения (9) уравнение (8) примет вид

$$V_1V_2\left(p_2\frac{dp_1}{dt}-p_1\frac{dp_2}{dt}\right)=-\frac{a}{b}C_1(p_1^2-p_2^2) \tag{10}$$

или, полагая $\frac{p_1}{p_2}=x$, имеем

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)=\frac{p_2\frac{dp_1}{dt}-p_1\frac{dp_2}{dt}}{p_2^2},$$

откуда

$$p_2\frac{dp_1}{dt}-p_1\frac{dp_2}{dt}=p_2^2\frac{dx}{dt}. \tag{11}$$

Подставляем соотношение (11) в уравнение (7) и получаем

$$V_1V_2p_2^2\frac{dx}{dt}=-\frac{a}{b}C_1p_2^2(x^2-1)$$

или

$$V_1V_2\frac{dx}{dt}=-\frac{a}{b}C_1(x^2-1). \qquad (12)$$

Уравнение (12) является уравнением с разделяющимися переменными, общий интеграл которого

$$\frac{V_1V_2}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}=\frac{a}{b}C_1t+C_2. \qquad (13)$$

Итак, уравнения (9) и (13) представляют общие интегралы системы (7), (8).

Начальные условия: при $t=0$ $p_1=P_1$, $p_2=P_2$. Отсюда

$$\left.\begin{aligned}&V_1P_1+V_2P_2=C_1,\\ &\frac{V_1V_2}{2}\ln\frac{P_1+P_2}{P_1-P_2}=\frac{a}{b}C_1\cdot 0+C_2\end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned}&C_1=V_1P_1+V_2P_2,\\ &C_2=\frac{V_1V_2}{2}\ln\frac{P_1+P_2}{P_1-P_2}.\end{aligned}\right\}$$

Подставляем постоянные интегрирования в общие решения (9) и (13) и получаем систему уравнений, определяющую p_1 и p_2 как функции t:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{P_1-p_1}{p_2-P_2}=\frac{V_2}{V_1},\\ &\ln\frac{(p_1+p_2)(P_1-P_2)}{(P_1+P_2)(p_1-p_2)}=\frac{2a}{bV_1V_2}(P_1V_1+P_2V_2)t.\end{aligned}\right\}$$

§ 4. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ДИСКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ

Задача 179. Диск радиуса R и постоянной толщины s с концентрическим отверстием радиуса r вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси. Найти кольцевые и касательные напряжения, возникающие в диске под действием центробежных сил.

Решение. Условия равновесия вырезанного элемента диска (рис. 125) показывают, что между тангенциальными силами T в кольцевых сечениях ввиду симметрии сохраняется равновесие, а в кольцевом направлении действуют наружу две силы: центробежная

$$dZ = \left(x + \frac{dx}{2}\right)\omega^2 dm = \left(x + \frac{dx}{2}\right)\omega^2 \rho s x d\varphi dx,$$

где ρ — плотность, m — масса, и в сечении $x+dx$ сила

$$F_{x+dx} = (\sigma_x + d\sigma_x)(x+dx) s d\varphi,$$

где σ_x— кольцевое напряжение.

Внутрь направлены сила $F_x = \sigma_x x s d\varphi$ и вертикальные составляющие равнодействующих сил касательных напряжений

$$2\sigma_\varphi \sin\frac{d\varphi}{2} s dx \approx \sigma_\varphi s d\varphi dx,$$

где σ_φ — касательное напряжение.

Проектируя эти силы на вертикаль, получаем

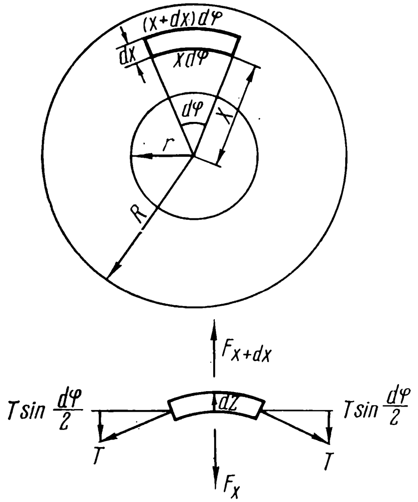

Рис. 125

$$\left(x + \frac{dx}{2}\right)\omega^2 \rho s x dx d\varphi + (\sigma_x + d\sigma_x)(x+dx) s d\varphi =$$
$$= \sigma_x x s d\varphi + \sigma_\varphi s dx d\varphi. \qquad (1)$$

Равенство (1) делим на общий множитель $s d\varphi$, откуда

$$\left(x + \frac{dx}{2}\right)\omega^2 \rho x dx + (\sigma_x + d\sigma_x)(x+dx) = \sigma_x x + \sigma_\varphi dx.$$

Выполняя умножение, сокращая подобные члены и пренебрегая выражениями $(dx)^2$ и $dx d\sigma_x$ как бесконечно малыми высшего порядка, получаем

$$x^2\omega^2 \rho dx + \sigma_x dx + x d\sigma_x = \sigma_\varphi dx. \qquad (2)$$

Равенство (2) делим на dx, вводим ради краткости подстановку $\frac{d\sigma_x}{dx} = \sigma_x'$ и получаем в итоге первое дифференциальное уравнение для искомых функций

$$x\sigma_x' + \sigma_x - \sigma_\varphi = -\rho\omega^2 x^2. \qquad (3)$$

Второе дифференциальное уравнение получится из зависимости, связывающей кольцевые и тангенциальные удлинения.

Если u — направленное наружу кольцевое перемещение, то du представляет его изменение между внутренним и наружным краем вырезанного элемента, а величина $\frac{du}{dx}=\varepsilon_x$ — кольцевое удлинение.

При равномерном перемещении от внутреннего до наружного края $du=0$. При перемещении u удлиняется периметр узкого кольца на расстоянии x от срединной оси от $2\pi x$ до $2\pi(x+u)$.

Разделив приращение на первоначальный периметр, получаем тангенциальное удлинение

$$\varepsilon_\varphi=\frac{2\pi(x+u)-2\pi x}{2\pi x}=\frac{u}{x}.$$

Разрешая это уравнение относительно u, имеем $u=x\varepsilon_\varphi$, откуда после дифференцирования

$$du=d(x\varepsilon_\varphi)=\varepsilon_\varphi+x\varepsilon_\varphi.$$

Тогда искомая зависимость между удлинениями

$$\varepsilon_x=\frac{du}{dx}=\frac{d(x\varepsilon_\varphi)}{dx}=\varepsilon_\varphi+x\frac{d\varepsilon_\varphi}{dx}. \tag{4}$$

В это уравнение подставляем вместо удлинений ε_x и ε_φ их выражения через напряжения, полученные по закону Гука,

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}(\sigma_x-\nu\sigma_\varphi) \text{ и } \varepsilon_\varphi=\frac{1}{E}(\sigma_\varphi-\nu\sigma_x),$$

где $\nu=0{,}3$ — коэффициент Пуассона (для металлов), E — модуль упругости.

Тогда, подставляя эти выражения в уравнение (4) и умножая затем его на E, имеем

$$\sigma_x-\nu\sigma_\varphi=\sigma_\varphi-\nu\sigma_x+x\frac{d}{dx}(\sigma_\varphi-\nu\sigma_x)=\sigma_\varphi-\nu\sigma_x+x(\sigma_\varphi'-\nu\sigma_x'),$$

откуда после приведения подобных членов получаем второе дифференциальное уравнение, связывающее напряжения σ_x и σ_φ:

$$x(\sigma_\varphi'-\nu\sigma_x')+(1+\nu)(\sigma_\varphi-\sigma_x)=0. \tag{5}$$

Итак, задача описывается системой дифференциальных уравнений (3) и (5).

В уравнении (5) имеются неизвестные функции σ_x и σ_φ, а также их производные, в то время как в уравнении (3) отсутствует производная функции σ_φ. Поэтому целесообразно уравнение (3) разрешить относительно σ_φ, продифференцировать по x и функцию σ_φ и ее производную σ_φ' подставить в уравнение (5). Тогда

$$\sigma_\varphi = x\sigma_x' + \sigma_x + \rho\omega^2 x^2,$$

$$\sigma_\varphi' = \sigma_x' + x\sigma_x'' + \sigma_x' + 2\rho\omega^2 x, \tag{6}$$

откуда

$$x(x\sigma_x'' + 2\sigma_x' + 2\rho\omega^2 x - \nu\sigma_x') + (1+\nu)(x\sigma_x' + \sigma_x + \rho\omega^2 x^2 - \sigma_x) = 0. \tag{7}$$

Группируя члены уравнения (7) по порядку производных, получаем линейное дифференциальное уравнение второго порядка для одной лишь функции σ_x:

$$x^2\sigma_x'' + 3x\sigma_x' = -\rho\omega^2(3+\nu)x^2. \tag{8}$$

Так как в это уравнение искомая функция σ_x не входит в явном виде, то ее производную $\sigma_x' = y$ введем в качестве новой переменной.

Таким образом, соответствующее однородное дифференциальное уравнение сводится к линейному дифференциальному уравнению первого порядка

$$x^2 y' + 3xy = 0.$$

Разделяя переменные, получим уравнение

$$\frac{dy}{y} = -\frac{3dx}{x},$$

которое почленно интегрируется, и общий интеграл этого уравнения

$$C = x^3 y.$$

Начальное условие: при $x = x_0$ $y = y_0$, откуда

$$C = x_0^3 y_0.$$

Тогда

$$x^3 y = x_0^3 y_0$$

и

$$y = \left(\frac{x_0}{x}\right)^3 y_0. \tag{9}$$

Так как, согласно принятой подстановке,

$$y = \sigma_x' = \frac{d\sigma_x}{dx}, \tag{10}$$

то, приравнивая правые стороны равенств (9) и (10), имеем:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = \left(\frac{x_0}{x}\right)^3 y_0 = \frac{C}{x^3}. \tag{11}$$

Повторное интегрирование приводит уравнение (11) к виду

$$\sigma_x^{\text{одн}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{C}{x^2} + C_1.$$

Пусть $-\frac{C}{2} = C_2$; тогда общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\sigma_x^{\text{одн}} = C_1 + \frac{C_2}{x^2}. \tag{12}$$

Частное решение дифференциального уравнения (8) будем искать в виде

$$\sigma_x^r = Bx^2, \tag{13}$$

откуда

$$\sigma_x'^r = 2Bx \quad \text{и} \quad \sigma_x''^r = 2B.$$

Постоянную B определяем путем приравнивания соответствующих коэффициентов при x^2 в обеих частях уравнения, т. е.

$$2Bx^2 + 3x\cdot 2Bx = -\rho\omega^2(3+\nu)x^2,$$

$$8Bx^2 = -\rho\omega^2(3+\nu)x^2$$

и

$$B = -\frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2.$$

Частное решение (13) принимает теперь вид

$$\sigma_x^r = -\frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 x^2. \tag{14}$$

Общее решение дифференциального уравнения (8) получается путем суммирования уравнений (12) и (14):

$$\sigma_x = C_1 + \frac{C_2}{x^2} - \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 x^2. \tag{15}$$

Тангенциальное напряжение σ_φ получается подстановкой кольцевого напряжения σ_x, согласно уравнению (15), и его производной в уравнение (6), откуда

$$\sigma_\varphi = C_1 - \frac{C_2}{x^2} - \frac{1+3\nu}{8}\rho\omega^2 x^2. \tag{16}$$

Постоянные интегрирования определяются начальными условиями.

Незагруженные края диска имеют кольцевые напряжения (на внутреннем и внешнем краях), равные нулю: при $x=r$ $\sigma_x=0$ и $x=R$ $\sigma_x=0$. Тогда для определения постоянных C_1 и C_2 получаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} C_1 + \frac{1}{r^2}C_2 &= \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 r^2, \\ C_1 + \frac{1}{R^2}C_2 &= \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 R^2, \end{aligned}\right\}$$

откуда

$$C_1 = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2(R^2+r^2); \quad C_2 = -\frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 R^2 r^2. \tag{17}$$

Окончательно искомые напряжения σ_x и σ_φ получаются подстановкой значений постоянных интегрирования (17) в уравнения (15) и (16):

$$\sigma_x = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2\left(R^2+r^2-\frac{R^2r^2}{x^2}-x^2\right), \tag{18}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2\left(R^2+r^2+\frac{R^2r^2}{x^2}-\frac{1+3\nu}{3+\nu}x^2\right); \tag{19}$$

Кольцевые удлинения получаются непосредственной подстановкой полученных соотношений (18) и (19) в равенство

$$u = x\varepsilon_\varphi = \frac{x}{E}(\sigma_\varphi - \nu\sigma_x),$$

откуда окончательно

$$u = \rho\omega^2\frac{1-\nu^2}{8E}\left[\frac{3+\nu}{1+\nu}(R^2+r^2)x + \frac{3+\nu}{1-\nu}\cdot\frac{R^2r^2}{x} - x^3\right]. \tag{20}$$

Удлинения на внутреннем крае ($x=r$) и соответственно на наружном крае ($x=R$) получаются из уравнения (20) в виде частных случаев:

$$u_r = \rho\omega^2\frac{r^3}{4E}\left[(1-\nu)+(3+\nu)\frac{R^2}{r^2}\right];$$

$$u_R = \rho\omega^2\frac{R^3}{4E}\left[(1-\nu)+(3+\nu)\frac{r^2}{R^2}\right].$$

§ 5. ПРЕВРАЩЕНИЕ ОДНОГО ВЕЩЕСТВА В ДРУГОЕ

Задача 180. Одна грамм-молекула вещества A превращается постепенно в промежуточное вещество M, которое далее превращается в вещество B. Найти количество вещества B в любой момент времени t.

Примечание. Скорость превращения вещества A в любой момент пропорциональна наличному его количеству. Скорость образования вещества B в любой момент пропорциональна наличному к этому времени количеству вещества M. Скорость накопления промежуточного вещества M равна разности скоростей превращения вещества A и образования вещества B.

Решение. Пусть x — количество вещества A в момент t, y — количество вещества M в момент t, z — количество вещества B в момент t, k_1 и k_2 — коэффициенты пропорциональности.

Так как первоначально была взята одна грамм-молекула вещества A, а веществ M и B не было, то

$$x+y+z=1.$$

Скорость превращения вещества A:

$$-\frac{dx}{dt}=k_1x.$$

Скорость образования вещества B:

$$\frac{dz}{dt}=k_2y.$$

Скорость накопления вещества M:

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{dx}{dt}-\frac{dz}{dt}=k_1x-k_2y.$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений процесса

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-k_1x,\\ \frac{dy}{dt}&=k_1x-k_2y,\\ \frac{dz}{dt}&=k_2y.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Из системы (1) необходимо определить величину z как функцию t.

Дифференцируя последнее уравнение системы (1), находим

$$\frac{d^2z}{dt^2}=k_2\frac{dy}{dt}$$

или с учетом второго уравнения системы (1)

$$\frac{d^2z}{dt^2}=k_1k_2x-k_2^2y. \tag{2}$$

Правую часть уравнения (2) преобразуем следующим образом:

$$\frac{d^2z}{dt^2}=k_1k_2x-k_2^2y+k_1k_2y-k_1k_2y$$

или

$$\frac{d^2z}{dt^2}=k_1k_2(x+y)-(k_1+k_2)k_2y.$$

Так как $k_2y=\frac{dz}{dt}$, а $x+y=1-z$, то

$$\frac{d^2z}{dt^2}=k_1k_2(1-z)-(k_1+k_2)\frac{dz}{dt}$$

или

$$\frac{d^2z}{dt^2}+(k_1+k_2)\frac{dz}{dt}+k_1k_2(z-1)=0.$$

Введем новую переменную

$$u=z-1.$$

Тогда получим

$$\frac{d^2u}{dt^2}+(k_1+k_2)\frac{du}{dt}+k_1k_2u=0. \tag{3}$$

Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения (3)

$$u=C_1e^{-k_1t}+C_2e^{-k_2t},$$

откуда

$$z-1=C_1e^{-k_1t}+C_2e^{-k_2t}$$

или

$$z=1+C_1e^{-k_1t}+C_2e^{-k_2t}.$$

Начальные условия: а) при $t=0$ $z=0$; б) так как при $t=0$ $y=0$, то из третьего уравнения системы (1) получим, что при $t=0$ и $\frac{dz}{dt}=0$.

Дифференцируя последнее равенство, находим, что

$$\frac{dz}{dt} = -k_1 C_1 e^{-k_1 t} - k_2 C_2 e^{-k_2 t}.$$

Начальные условия дают тогда систему

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 1 + C_1 e^{-k_1 \cdot 0} + C_2 e^{-k_2 \cdot 0}, \\ 0 &= -k_1 C_1 e^{-k_1 \cdot 0} - k_2 C_2 e^{-k_2 \cdot 0}, \end{aligned}\right\}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} C_1 + C_2 &= -1, \\ k_1 C_1 + k_2 C_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Решаем систему (4) и получаем постоянные интегрирования

$$C_1 = \frac{k_2}{k_1 - k_2}, \quad C_2 = -\frac{k_1}{k_1 - k_2}. \qquad (5)$$

Значения (5) подставляем в общее решение и в результате получаем закон изменения количества вещества B от времени:

$$z = 1 - \frac{k_1 e^{-k_2 t} - k_2 e^{-k_1 t}}{k_1 - k_2}.$$

Глава XV

ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К НЕПОЛНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Дифференциальные уравнения вида

$$\frac{d^n y}{dx^n}=f(x)$$

Общий интеграл уравнения находится n последовательными интегрированиями:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} &= \int f(x)\,dx+C_1,\\
\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} &= \int\int f(x)\,dx^2+C_1x+C_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y &= \underbrace{\int\int\ldots\int}_{n} f(x)\,dx^n+\frac{C_1x^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots+C_{n-1}x+C_n.
\end{aligned}\right\}$$

Дифференциальные уравнения вида

$$f\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},\ \frac{d^n y}{dx^n}\right)$$

Вводя новую функцию

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=z,$$

получаем уравнение первого порядка

$$f\left(z,\ \frac{dz}{dx}\right)=0.$$

Если, интегрируя это уравнение, получим общее решение в виде

$$z=\varphi(x,\ C_1),$$

то, заменяя z через

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},$$

приведем уравнение к виду, рассмотренному выше.

Дифференциальные уравнения вида

$$f\left(\frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)=0$$

Решая это уравнение относительно $\frac{d^n y}{dx^n}$, находим

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\varphi\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right).$$

Применяя подстановку $z=\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}$, получаем

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\varphi(z).$$

Полагая

$$\frac{dz}{dx}=p,$$

получим

$$\frac{dp}{dx}=\varphi(z),$$

откуда

$$dp=\varphi(z)\,dx=\frac{\varphi(z)\,dz}{p}.$$

Тогда

$$2p\,dp=2\varphi(z)\,dz,$$

и, следовательно,

$$p^2=2\int\varphi(z)\,dz+C_1,$$

откуда

$$p=\frac{dz}{dx}=\sqrt{2\int\varphi(z)\,dz+C_1},$$

$$x=\int\frac{dz}{\sqrt{2\int\varphi(z)\,dz+C_1}}+C_2.$$

Дифференциальные уравнения вида

$$f\left(x, \frac{d^k y}{dx^k}, \frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right)=0$$

Эти уравнения допускают понижение порядка на k единиц, если ввести новую функцию z, положив $\frac{d^k y}{dx^k}=z$.

В частном случае уравнение $f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)=0$ при помощи подстановки $\frac{dy}{dx}=p$ приводится к уравнению первого порядка $f\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right)=0$.

Дифференциальные уравнения вида

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dy^n}\right)=0$$

Порядок таких уравнений может быть понижен на единицу, если принять за новую независимую переменную y, а за новую функцию $p=\frac{dy}{dx}$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2y}{dx^2}=p\frac{dp}{dy}, \\ &\frac{d^3y}{dx^3}=p^2\frac{d^2p}{dy^2}+p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \end{aligned}\right\}$$

Преобразованное уравнение будет иметь вид

$$\varphi\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \ldots, \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right)=0.$$

В частном случае уравнение

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)=0$$

приводится к уравнению первого порядка

$$\varphi\left(y, p, \frac{dp}{dy}\right)=0.$$

§ 1. ЛИНИЯ ПРОГИБА НЕРАЗРЕЗНОЙ БАЛКИ ОТ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ

Задача 181. Найти линию прогиба неразрезной балки постоянного сечения на жестких шарнирных опорах, в каждом из пролетов нагруженной распределенной нагрузкой $w(x)$.

Решение. Рассмотрим участок балки между сечениями x и $x+\Delta x$ (рис. 126).

Пусть M и $M+\Delta M$ — соответственно изгибающие моменты в этих сечениях. Распределенная нагрузка $w(x)$ представляет нагрузку на единицу длины в точке x, поэтому $w(x)\Delta x$ представляет нагрузку участка между сечениями x и $x+\Delta x$ без учета бесконечно малых высшего порядка, чем Δx.

Пусть Q — поперечная сила в точке x, т. е. алгебраическая сумма вертикальных сил по одну сторону от сечения x, например вправо, а $Q+\Delta Q$ — соответствующая поперечная сила в сечении $x+\Delta x$.

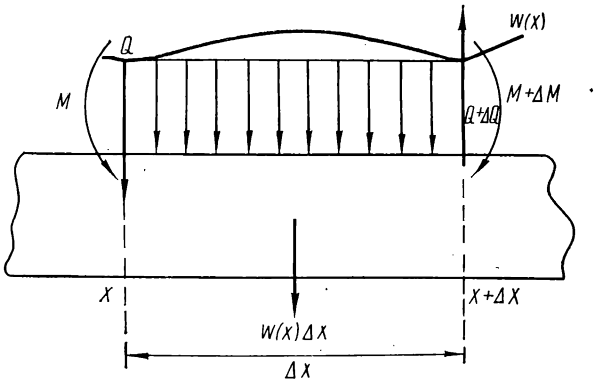

Рис. 126

Из условий равновесия рассматриваемого участка балки заключаем, что

$$\Delta Q+w(x)\Delta x+\alpha(\Delta x)^2=0$$

(проекция сил на вертикальную ось равна нулю) и

$$\Delta M+(Q+\Delta Q)\Delta x+w(x)\Delta x\theta\Delta x=0,$$

где $0\leqslant\theta\leqslant 1$ (сумма моментов относительно любой точки равна нулю). Здесь α — коэффициент при бесконечно малой высшего (второго) порядка.

Полученные равенства делим на Δx, и тогда

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\Delta Q}{\Delta x}+w(x)+\alpha\Delta x=0,\\&\frac{\Delta M}{\Delta x}+Q+\Delta Q+w(x)\theta\Delta x=0.\end{aligned}\right\}$$

Пусть теперь длина элементарного участка $\Delta x\to 0$, тогда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta Q}{\Delta x}+w(x)+\alpha\Delta x\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta x}+w(x)=\frac{dQ}{dx}+w(x)=0$$

и

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta M}{\Delta x}+Q+\Delta Q+w(x)\theta\Delta x\right)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta M}{\Delta Q}+Q=\frac{dM}{dx}+Q=0.$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned}\frac{dQ}{dx}&=-w(x),\\ \frac{dM}{dx}&=-Q.\end{aligned}\right\}$$

Используя уравнение $EJy''=M(x)$, после двукратного дифференцирования получаем

$$EJy^{\mathrm{IV}}=w(x), \tag{1}$$

где EJ — постоянная жесткость балки.

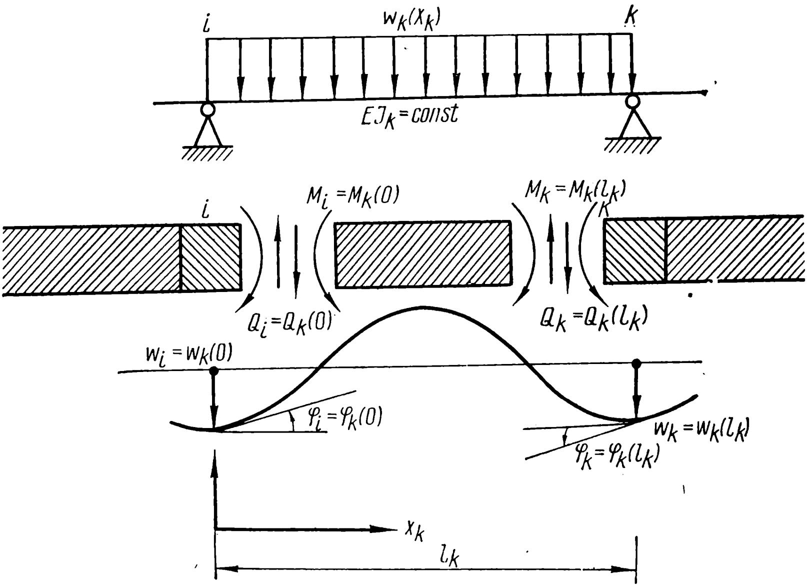

Рис. 127

Промежуточный пролет l_k неразрезной многопролетной балки показан на рис. 127. Балка разрезается в непосредственной близости вправо от опоры i и соответственно влево от опоры k. Положительные направления действующих усилий и деформаций показаны стрелками.

В дальнейшем будем рассматривать усилия и деформации только на правом крае сечения.

Общее решение дифференциального уравнения (1) и его последующие производные с учетом правила знаков, указанного на рис. 127, получаются последовательным интегрированием:

$$\left.\begin{aligned}
EJ_k y_k^{\mathrm{IV}}(x_k) &= w_k(x_k) = w_k(x_k),\\
EJ_k y_k'''(x_k) &= Q_k(x_k) = \int_0^{x_k} w_k(\xi)\,d\xi + C_1 =\\
&= Q_{k0}(x_k) + C_1,\\
EJ_k y_k''(x_k) &= M_k(x_k) = \int_0^{x_k} Q_{k0}(\xi)\,d\xi + C_1 x_k + C_2 =\\
&= M_{k0}(x_k) + C_1 x_k + C_2,\\
EJ_k y_k'(x_k) &= -EJ_k\varphi_k(x_k) = EJ_k\int_0^{x_k}\frac{M_{k0}(\xi)}{EJ_k}\,d\xi + C_1\frac{x_k^2}{2} + C_2 x_k + C_3 =\\
&= -EJ_k\varphi_{k0}(x_k) + C_1\frac{x_k^2}{2} + C_2 x_k + C_3,\\
EJ_k y_k(x_k) &= -EJ_k\int_0^{x_k}\varphi_{k0}(\xi)\,d\xi + C_1\frac{x_k^3}{6} + C_2\frac{x_k^2}{2} + C_3 x_k + C_4 =\\
&= EJ_k w_{k0}(x_k) + C_1\frac{x_k^3}{6} + C_2\frac{x_k^2}{2} + C_3 x_k + C_4.
\end{aligned}\right\}\quad (2)$$

Здесь: поперечная сила

$$Q_{k0}(x_k) = \int_0^{x_k} w_k(\xi)\,d\xi,$$

изгибающий момент

$$M_{k0}(x_k) = \int_0^{x_k} Q_{k0}(\xi)\,d\xi;$$

угол наклона

$$-\varphi_{k0}(x_k) = \int_0^{x_k}\frac{M_{k0}(\xi)}{EJ_k}\,d\xi,$$

прогиб

$$+w_{k0}(x_k) = -\int_0^{x_k} \varphi_{k0}(\xi)\,d\xi$$

при $0<\xi<x_k$ и $0\leqslant x_k\leqslant l_k$.

Начальные условия: на левом конце k-го пролета $x_k=0$, откуда

$$\begin{aligned}
Q_k(0) &= Q_i, &\quad C_1 &= Q_i = Q_k(0), \text{ так как } Q_{k0}(0)=0,\\
M_k(0) &= M_i, &\quad C_2 &= M_i = M_k(0),\\
\varphi_k(0) &= \varphi_i, &\quad C_3 &= -EJ_k\varphi_i = -EJ_k\varphi_k(0),\\
y_k(0) &= y_i, &\quad C_4 &= EJ_k y_i = EJ_k y_k(0).
\end{aligned}$$

Таким образом, четыре произвольные постоянные интегрирования представляют усилия и деформации на левом краю балки.

Подставляя значения C_i $(i=1, 2, 3, 4)$ в уравнения (2), упорядочив члены и разделив $\varphi_k(x_k)$ и $y_k(x_k)$ на EJ_k, получаем общее решение совместно с первыми четырьмя производными

$$\begin{aligned}
y_k(x_k) &= y_k(0) - x_k\varphi_k(0) + \frac{x_k^2}{2EJ_k}M_k(0) + \frac{x_k^3}{6EJ_k}Q_k(0) + y_{k0}(x_k),\\
\varphi_k(x_k) &= \varphi_k(0) - \frac{x_k}{EJ_k}M_k(0) - \frac{x_k^2}{2EJ_k}Q_k(0) + \varphi_{k0}(x_k),\\
M_k(x_k) &= M_k(0) + x_kQ_k(0) + M_{k0}(x_k),\\
Q_k(x_k) &= Q_k(0) + Q_{k0}(x_k),\\
w_k(x_k) &= w_k(x_k).
\end{aligned}$$

Таким образом, уже известна линейная зависимость усилий и деформаций между левым краем и любым сечением x_k k-го пролета. Первое уравнение представляет искомую линию прогиба в пределах k-го пролета.

Глава XVI

ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ЛИНЕЙНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ 1. ПАРОВАЯ МАШИНА С РЕГУЛЯТОРОМ

Задача 182. Найти дифференциальное уравнение движения паровой машины с регулятором, если радиус кривошипа $r=0{,}3$ *м*, а длина шатуна $l=1{,}5$ *м*.

Решение. Известно, что вращательное движение паровой машины неравномерно. Угловая скорость вала переменна и период равен продолжительности одного оборота машины.

Поэтому при изучении движения машины вопрос сводится:

1) к исследованию изменения угловой скорости вала в течение одного оборота в зависимости от угла кривошипа;

2) к определению зависимости угла кривошипа от времени.

Определим кинетическую энергию L системы тел, состоящей из паровой машины и регулятора.

I. Кинетическая энергия паровой машины $L_{\text{п.м}}$ определяется следующим образом. На рис. 128 изображена передача одноцилиндровой паровой машины. Прямая AB представляет шатун машины. В шарнире A можно сосредоточить общую массу M всех частей машины, двигающихся только по горизонтали (поршень, поршневой шток и ползун), между тем как вращающиеся части (маховик, вал, кривошип) можно объединить вместе и приписать им момент инерции θ.

Шатун совершает как горизонтальное, так и вращательное движение и поэтому должен рассматриваться отдельно.

Как известно, кинетическая энергия материальной точки массы m, вращающейся со скоростью v, равна

$$L=\frac{mv^2}{2}. \tag{1}$$

Кинетическая энергия системы тел равна сумме кинетических энергий отдельных масс. В связи с этим определим величину L для отдельных частей паровой машины.

Кинетическая энергия ползуна и связанных с ним масс

$$L_{\text{п}}=\frac{1}{2}M\left(\frac{dx}{dt}\right)^2,$$

где $\frac{dx}{dt}$ — мгновенная скорость ползуна.

Кинетическая энергия частей, совершающих только одно вращение:

$$L_{\text{вращ}} = \frac{1}{2}\,\theta\omega^2 = \frac{1}{2}\,\theta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2,$$

где $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$ — угловая скорость паровой машины.

Определим кинетическую энергию шатуна. Все его точки имеют различные скорости v.

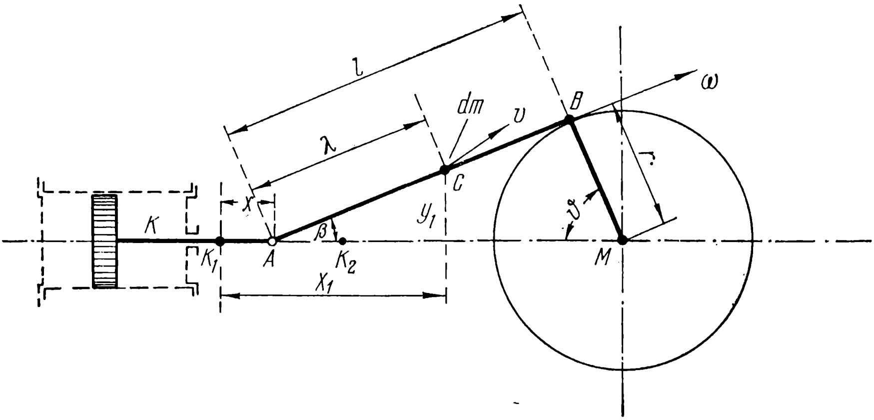

Рис. 128

Представим стержень разделенным на элементы массы dm бесконечно близкими сечениями, перпендикулярными длине. Кинетическая энергия одного такого элемента

$$dL_{\text{ш}} = \frac{1}{2}\,dm\cdot v^2. \tag{2}$$

Пусть λ — расстояние рассматриваемого элемента от конца шатуна. Тогда его координаты по отношению к левой мертвой точке K_1 будут

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + \lambda\cos\beta, \\ y_1 &= \lambda\sin\beta. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда вытекает:

$$v^2 = \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 +$$

$$+\lambda^2\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 - 2\lambda\sin\beta\,\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d\beta}{dt}. \tag{3}$$

После подстановки уравнения (3) в равенство (2) и интегрирования находим кинетическую энергию шатуна:

$$L_{\text{ш}} = \frac{1}{2}\int v^2 dm = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \int dm - \sin\beta \frac{dx}{dt}\,\frac{d\beta}{dt}\int \lambda dm + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 \int \lambda^2 dm.$$

Введем обозначения и названия соответствующих величин: $\int dm = M_{\text{ш}}$ — масса шатуна, $\int \lambda dm = S_{\text{ш}}$ — статический момент шатуна относительно ползуна, $\int \lambda^2 dm = \theta_{\text{ш}}$ — момент инерции шатуна относительно ползуна.

Таким образом, кинетическая энергия всего механизма паровой машины

$$L_{\text{п.м}} = L_{\text{п}} + L_{\text{вращ}} + L_{\text{ш}} = \frac{1}{2}(M + M_{\text{ш}})\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \\ - S_{\text{ш}} \sin\beta \frac{dx}{dt}\cdot\frac{d\beta}{dt} + \frac{1}{2}\theta_{\text{ш}}\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\theta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2. \tag{4}$$

Если воспользоваться соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} & x = r(1-\cos\vartheta) + l(1-\cos\beta), \\ & \frac{dx}{dt} = r\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} + l\sin\beta\frac{d\beta}{dt}, \\ & l\sin\beta = r\sin\vartheta \quad \left(\text{или } \sin\beta = \frac{r}{l}\sin\vartheta\right), \\ & l\cos\beta\frac{d\beta}{dt} = r\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}, \end{aligned}\right\}$$

то уравнение (4) после подстановки этих соотношений принимает вид

$$L_{\text{п.м}} = \frac{1}{2}\Big[\theta + (M + M_{\text{ш}})r^2\sin^2\vartheta\left(1 + \frac{r}{l}\cdot\frac{\cos\vartheta}{\cos\beta}\right)^2 - \\ - 2S_{\text{ш}}\frac{r^3}{l^2}\sin^2\vartheta\left(1 + \frac{r}{l}\cdot\frac{\cos\vartheta}{\cos\beta}\right)\frac{\cos\vartheta}{\cos\beta} + \\ + \theta_{\text{ш}}\frac{r^2}{l^2}\cdot\frac{\cos^2\vartheta}{\cos^2\beta}\Big]\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}E(\vartheta)\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2. \tag{5}$$

В последнем выражении угол β можно выразить еще через ϑ с помощью равенства

$$\sin\beta = \frac{r}{l}\sin\vartheta.$$

Величина $E(\vartheta)$ зависит только от аргумента (переменного угла) ϑ и содержит в качестве коэффициентов массы и моменты инерции частей системы.

II. Энергия регулятора $L_р$ (обыкновенный регулятор изображен на рис. 129) равна общей кинетической энергии вращающихся шаров и муфты. Влияние масс соединительных стержней можно учесть

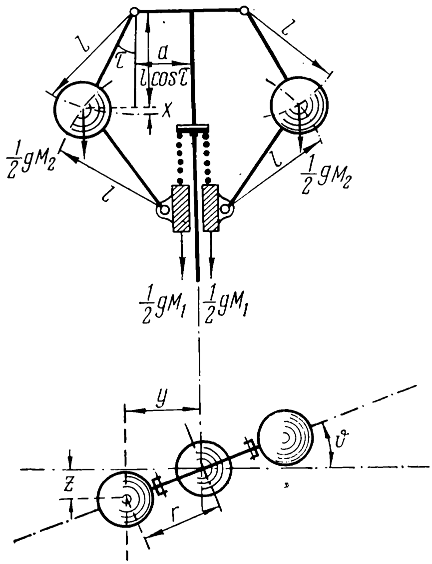

Рис. 129

путем соответствующей прибавки к массе шаров или муфты. Кроме того, часть энергии муфты, происходящую от величины $\frac{d\vartheta}{dt}$, отнесем к энергии паровой машины.

Центр системы вращающихся шаров находится в точке с координатами

$$\left.\begin{aligned} x &= l(1-\cos\tau), \\ y &= (a+l\sin\tau)\cos\vartheta, \\ z &= (a+l\sin\tau)\sin\vartheta. \end{aligned}\right\}$$

Середина муфты имеет координату

$$x = 2l(1-\cos\tau),$$

причем x отсчитывается от положения середины при $\tau=0$.

Дифференцируя уравнения системы по времени, возводя в квадрат и складывая, находим

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 =$$

$$= l^2 \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 + (a + l \sin\tau)^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2.$$

Для муфты

$$v^2_{\text{муфт}} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 4l^2 \sin^2\tau \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2.$$

Следовательно,

$$L_{\text{р}} = \frac{M_2}{2}\left[l^2 \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 + (a + l \sin\tau)^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right] +$$

$$+ 2M_1 l^2 \sin^2\tau \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2.$$

Энергия системы паровой машины и регулятора L определяется

$$L = L_{\text{п.м}} + L_{\text{р}}.$$

III. Для составления дифференциального уравнения движения машины применим формулу (1), согласно которой величина L связывается с силами, действующими на отдельные части машины. Эти силы представляет равнодействующая $r(T-W)$ тангенциального момента rT силы поршня и тангенциального момента rW сопротивления, преодолеваемого машиной. При этом последнее считается постоянным, а T является известной функцией ϑ.

Величина $r(T-W)$ легко находится, если дана индикаторная диаграмма машины (кривая режима работы). Тогда эту величину можно считать известной функцией ϑ:

$$r(T-W) = F(\vartheta).$$

Для дальнейшего необходимо знать зависимость силы $F(\vartheta)$ от величины отклонения регулятора τ. Регулятор действует на момент парового давления rT, среднюю величину которого rT_m он меняет. С подъемом регулятора уменьшается величина rT_m и наоборот. Эта зависимость выражается уравнением

$$rT_m = r(T_0 - k\tau).$$

Величина момента давления пара колеблется около величины rT_m согласно зависимости

$$rT = r(T_0 - k\tau) + rT(\vartheta).$$

Для простоты дальнейших вычислений отбросим влияние колебаний и тогда

$$r(T-W)=r(T_0-k\tau-W).$$

Для τ необходимо вычислить силы, действующие на вращающуюся шаровую систему вместе с муфтой.

При расчете сил учитываем влияние:

а) моментов масс M_1 и M_2 — $(M_2+M_1)gl\sin\tau$;

б) пружины — $fl(1-\cos\tau)\sin\tau$;

в) масляного тормоза, пропорциональное скорости движения муфты $v_{\text{муфт}}=2l\sin\tau\dfrac{d\tau}{dt}$.

Так как тормозящая сила муфты $K_{\text{торм}}=R\ \ v_{\text{муфт}}=2lR\sin\tau\dfrac{d\tau}{dt}$, где R — коэффициент пропорциональности, то приведенный к вращающимся шарам момент равен

$$K_{\text{торм}}l\sin\tau=2l^2R\sin^2\tau\frac{d\tau}{dt}.$$

Силы, действующие на систему регулятора, считаются отрицательными на правой стороне, потому что они противодействуют возрастанию величины τ. Они образуют функцию $G(\tau)$, которая, учитывая вышеизложенную систему влияющих усилий, равна

$$G(\tau)=-(M_1+M_2)gl\sin\tau-fl(1-\cos\tau)\sin\tau-2l^2R\sin^2\tau\frac{d\tau}{dt}.$$

Связь между кинетической энергией L системы тел и силами, под действием которых происходит движение системы, устанавливается дифференциальным уравнением Лагранжа.

Последнее является выражением следующей теоремы.

Если L — кинетическая энергия системы масс, которая зависит только от величины ϑ, и если при этом движение системы происходит под действием силы $r(T-W)$, которая также является функцией $F(\vartheta)$ той же переменной, то существует дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial L}{\partial\dfrac{d\vartheta}{dt}}-\frac{\partial L}{\partial\vartheta}=F(\vartheta). \tag{6}$$

В данном случае имеем равенство (5). Поэтому

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial \dfrac{d\vartheta}{dt}}=E(\vartheta)\frac{d\vartheta}{dt},\quad \frac{\partial L}{\partial\vartheta}=\frac{1}{2}E'(\vartheta)\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2,\\ &\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dfrac{d\vartheta}{dt}}=E'(\vartheta)\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2+E(\vartheta)\frac{d^2\vartheta}{dt^2}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Если соотношения (7) подставить в уравнение (6), находим уравнения движения машины

$$E(\vartheta)\frac{d^2\vartheta}{dt^2}+\frac{1}{2}E'(\vartheta)\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2=F(\vartheta)=r(T_0-k\tau-W) \tag{8}$$

и

$$\left.\begin{aligned} &l^2(M_2+4M_1\sin^2\tau)\frac{d^2\tau}{dt^2}-4l^2M_1\sin\tau\cos\tau\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2-\\ &-lM_2(a+l\sin\tau)\cos\tau\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2=-(M_2+M_1)gl\sin\tau-\\ &\qquad-fl(1-\cos\tau)\sin\tau-2l^2R\sin^2\tau\frac{d\tau}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Это система дифференциальных уравнений с двумя зависимыми и одной независимой переменными.

IV. Допускаем некоторые упрощения, вытекающие из смысла задачи.

Прежде всего в функции $E(\vartheta)$ можно исключить все слагаемые, которые не учитывают в своих множителях влияния вращающегося колеса машины, после чего уравнение (8) принимает вид

$$\theta\frac{d^2\vartheta}{dt^2}=r(T_0-k\tau-W). \tag{10}$$

Пусть

$$\tau=\tau_0+\eta,$$

$$\frac{d\vartheta}{dt}=\omega_0+\omega$$

и, ограничиваясь изучением малых колебаний, отбросим все слагаемые, содержащие произведения η и ω или их производных. Таким образом, будем изучать только малые отклонения регулятора τ от начального положения τ_0 и малые колебания угловой скорости машины ω относительно их начальных значений ω_0. Кроме того, в уравнении (9) примем для установившегося режима

$$\tau_0 = \text{const}, \quad \frac{d\tau}{dt} = 0, \quad \frac{d^2\tau}{dt^2} = 0$$

соотношение

$$lM_2(a + l\sin\tau_0)\cos\tau_0\omega_0^2 = (M_2 + M_1)gl\sin\tau_0 + fl(1 - \cos\tau_0)\sin\tau_0.$$

После изложенных замечаний и введения сокращенных обозначений

$$m = l^2(M_2 + 4M_1\sin^2\tau_0),$$

$$b = 2Rl^2\sin^2\tau_0,$$

$$c = fl[(1 - \cos\tau_0)\cos\tau_0 + \sin^2\tau_0] + (M_2 + M_1)gl\cos\tau_0 +$$
$$+ lM_2[(a + l\sin\tau_0)\sin\tau_0 - l\cos^2\tau_0]\,\omega_0^2,$$

$$\varkappa = 2lM_2(a + l\sin\tau_0)\omega_0$$

вместо уравнений (9) и (10) получаем

$$m\frac{d^2\eta}{dt^2} + b\frac{d\eta}{dt} + c\eta = \varkappa\omega, \tag{11}$$

$$\frac{\theta}{r}\cdot\frac{d\omega}{dt} = -k\eta + T_0 - k\tau_0 - W. \tag{12}$$

Исключим ω из этих уравнений, для чего дифференцируем равенство (11)

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{\varkappa}\left(m\frac{d^3\eta}{dt^3} + b\frac{d^2\eta}{dt^2} + c\frac{d\eta}{dt}\right)$$

и, подставляя полученное выражение в уравнение (12), имеем

$$m\frac{d^3\eta}{dt^3} + b\frac{d^2\eta}{dt^2} + c\frac{d\eta}{dt} + \frac{kr\varkappa}{\theta}\eta = r\varkappa\frac{(T_0 - k\tau_0 - W)}{\theta}.$$

Таким образом, вместо системы уравнений получено искомое уравнение движения, которое является линейным дифференциальным уравнением третьего порядка с постоянными коэффициентами, числовые значения которых находим, подставляя данные задачи.

Глава XVII

ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ЛИНЕЙНЫМ ОДНОРОДНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Однородными линейными дифференциальными уравнениями n-го порядка с постоянными коэффициентами называются уравнения вида

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — постоянные величины.

Для нахождения общего решения этого уравнения следует предварительно решить характеристическое уравнение

$$r^n+a_1r^{n-1}+a_2r^{n-2}+\ldots+a_{n-1}r+a_n=0.$$

1. Если все корни этого уравнения $r_1, r_2, \ldots, r_n$ различны и действительны, то общее решение

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}+\ldots+C_ne^{r_nx},$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные.

2. Если среди корней характеристического уравнения содержится k равных действительных корней $r_1=r_2=\ldots=r_k=r$, а остальные корни $r_{k+1}, r_{k+2}, \ldots, r_n$ — действительные, различные и r не равные, то общее решение

$$y=(C_1+C_2x+C_3x^2+\ldots+C_kx^{k-1})e^{rx}+C_{k+1}e^{r_{k+1}x}+\ldots+C_ne^{r_nx}.$$

3. Если среди корней характеристического уравнения содержатся комплексные попарно сопряженные $r_1=\alpha_1+\beta_1i$ и $r_2=\alpha_1-\beta_1i$, а остальные корни $r_3, r_4, \ldots, r_n$ — действительные и разные, то общее решение

$$y=e^{\alpha_1x}[(C_1+C_2)\cos\beta_1x+i(C_1-C_2)\sin\beta_1x]+C_3e^{r_3x}+C_4e^{r_4x}+$$
$$+\ldots+C_ne^{r_nx}=e^{\alpha_1x}[C_1^*\cos\beta_1x+C_2^*\sin\beta_1x]+C_3e^{r_3x}+$$
$$+C_4e^{r_4x}+\ldots+C_ne^{r_nx}.$$

Здесь $C_1^*=C_1+C_2,\quad C_2^*=i(C_1-C_2)$.

4. Если среди корней характеристического уравнения содержатся комплексные, попарно сопряженные и k раз кратные, то часть общего решения, соответствующая этим корням, будет

$$y^*=e^{\alpha_1x}[(C_1+C_2x+\ldots+C_kx^{k-1})\cos\beta_1x+$$
$$+(C_{k+1}+C_{k+2}x+\ldots+C_{2k}x^{k-1})\sin\beta_1x].$$

§ 1. КОЛЕБАНИЯ ВАЛА ОТ ДЕЙСТВИЯ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ

Задача 183. Найти критические скорости тонкого вращающегося вала длиной l. Радиус поперечного сечения вала a, сила тяжести P и модуль упругости материала E.

Решение. При увеличении угловой скорости вращающегося вала от значения $\omega=0$ до некоторого предельного значения $\omega=\omega_1$, называемого критической угловой скоростью, вал сохраняет свою

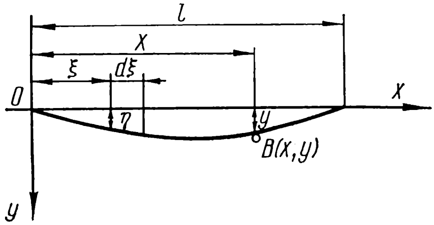

Рис. 130

прямолинейную ось. В момент достижения критической скорости ω_1 вал искривляется и начинает колебаться. При дальнейшем увеличении ω колебание прекращается, а затем вновь возникает при второй критической скорости ω_2, и так периодически.

При вращении изогнутого вала на каждый его элемент действует центробежная сила, которую можно считать непрерывно распределенной нагрузкой.

На элемент $d\xi$ вала (рис. 130) действует центробежная сила

$$F=m\omega^2\eta,$$

где m — масса элемента $d\xi$, ω — угловая скорость вращения, η — прогиб, равный радиусу вращения элемента $d\xi$.

Сила тяжести элемента $d\xi$ равна $\frac{P}{l}d\xi$, а масса $m=\frac{P}{gl}d\xi$.

Элементарная центробежная сила $dF=\frac{P}{gl}\omega^2\eta d\xi$. Прогиб η является функцией ξ, определяемой уравнением упругой линии. Таким образом, выражение $\frac{P}{gl}\omega^2\eta=f(\xi)$ и элементарная центробежная сила

$$dF=f(\xi)\,d\xi=\frac{P}{gl}\omega^2\eta d\xi. \tag{1}$$

Момент этой силы относительно произвольного сечения B будет

$$dF(x-\xi)=(x-\xi)f(\xi)\,d\xi.$$

Аналогично предыдущим рассуждениям изгибающий момент

$$M=\int_0^x (x-\xi)f(\xi)d\xi.$$

Дифференцируя под знаком интеграла дважды это выражение по параметру x, получим

$$\frac{dM}{dx}=\int_0^x f(\xi)d\xi+(x-x)f(x)\frac{dx}{dx}-(x-0)f(0)\frac{d}{dx}(0)=\int_0^x f(\xi)d\xi;$$

$$\frac{d^2M}{dx^2}=\int_0^x 0\cdot d\xi+f(x)\frac{dx}{dx}-f(0)\frac{d}{dx}(0)=f(x). \qquad (2)$$

Так как на основании равенства (1)

$$f(x)=\frac{P}{gl}\omega^2 y,$$

то выражение (2) примет вид

$$\frac{d^2M}{dx^2}=\frac{d^2}{dx^2}\left(EJ\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{P\omega^2}{gl}y.$$

Дифференциальное уравнение упругой линии

$$\frac{d^4y}{dx^4}-\frac{P\omega^2}{EJgl}y=0. \qquad (3)$$

Вводим обозначение $\frac{P\omega^2}{EJgl}=q^4$. Тогда уравнение (3) представляется так:

$$\frac{d^4y}{dx^4}-q^4y=0.$$

Для того чтобы решить это неполное линейное уравнение четвертого порядка, записываем характеристическое уравнение

$$r^4-q^4=0$$

или

$$(r-q)(r+q)(r^2+q^2)=0.$$

Корни характеристического уравнения:

$$\left.\begin{aligned} r_1&=q,\\ r_2&=-q,\\ r_3&=qi,\\ r_4&=-qi. \end{aligned}\right\}$$

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения упругой линии вала

$$y=C_1e^{qx}+C_2e^{-qx}+C_3\sin qx+C_4\cos qx. \tag{4}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1, C_2, C_3 и C_4 используем граничные условия задачи. На опорах вала прогиб и кривизна оси вала равны нулю. Математически это выражается четырьмя граничными условиями:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{при } x=0 & y=0,\\ \text{при } x=0 & \dfrac{d^2y}{dx^2}=0,\\ \text{при } x=l & y=0,\\ \text{при } x=l & \dfrac{d^2y}{dx^2}=0. \end{array}\right\}$$

Дифференцируя дважды общее решение (4), получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx}&=C_1qe^{qx}-C_2qe^{-qx}+C_3q\cos qx-C_4q\sin qx,\\ \frac{d^2y}{dx^2}&=C_1q^2e^{qx}+C_2q^2e^{-qx}-C_3q^2\sin qx-C_4q^2\cos qx. \end{aligned}\right\}$$

Граничные условия дают систему четырех уравнений для определения постоянных интегрирования:

$$\left.\begin{aligned} &C_1e^{q\cdot 0}+C_2e^{-q\cdot 0}+C_3\sin(q\cdot 0)+C_4\cos(q\cdot 0)=0,\\ &C_1q^2e^{q\cdot 0}+C_2q^2e^{-q\cdot 0}-C_3q^2\sin(q\cdot 0)-C_4q^2\cos(q\cdot 0)=0,\\ &C_1e^{ql}+C_2e^{-ql}+C_3\sin ql+C_4\cos ql=0,\\ &C_1q^2e^{ql}+C_2q^2e^{-ql}-C_3q^2\sin ql-C_4q^2\cos ql=0 \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} C_1+C_2+C_4&=0,\\ C_1+C_2-C_4&=0,\\ C_1e^{ql}+C_2e^{-ql}+C_3\sin ql+C_4\cos ql&=0,\\ C_1e^{ql}+C_2e^{-ql}-C_3\sin ql-C_4\cos ql&=0. \end{aligned}\right\}$$

Складывая и вычитая два первых уравнения системы, получаем

$$\left.\begin{aligned} C_4&=0,\\ C_1+C_2&=0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

или

$$\left.\begin{aligned} C_2&=-C_1,\\ C_4&=0. \end{aligned}\right\}$$

Поступая аналогично с двумя последующими уравнениями той же системы, имеем:

$$\left.\begin{aligned} C_3\sin ql+C_4\cos ql&=0,\\ C_1e^{ql}+C_2e^{-ql}\qquad&=0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Подставляя выражение (5) в систему (6), получим

$$\left.\begin{aligned} C_3\sin ql&=0,\\ C_1(e^{ql}-e^{-ql})&=0. \end{aligned}\right\}$$

Так как при $l\neq 0$ и $q\neq 0$ последнее выражение в скобках не может равняться нулю, то

$$\left.\begin{aligned} C_1&=0,\\ C_2&=0,\\ C_4&=0,\\ C_3\sin ql&=0. \end{aligned}\right\}$$

Если $C_3=0$, уравнение упругой линии вала $y=0$, т. е. упругая линия совпадает с осью x и вал не искривлен. При искривлении вала необходимо, чтобы $C_3\neq 0$. Но тогда необходимо, чтобы

$$\sin ql=0.$$

Отсюда

$$ql=k\pi$$

и

$$q=\frac{k\pi}{l},$$

где $k=0, 1, 2, \ldots$

При $k=0$ получим $q=0$, и уравнение упругой линии вала

$$y=C_1+C_2+C_4=0,$$

т. е. вал прямой.

При остальных значениях q вал искривляется. В таких случаях уравнение упругой линии

$$y=C_3\sin ql$$

при

$$q=q_1=\frac{\pi}{l},\quad q=q_2=\frac{2\pi}{l},\quad q=q_3\frac{3\pi}{l}.$$

Упругая линия будет синусоидой:

$$\left.\begin{aligned} y&=C_3\sin\frac{\pi}{l}x,\\ y&=C_3\sin\frac{2\pi}{l}x,\\ y&=C_3\sin\frac{3\pi}{l}x,\\ &\;.\quad .\quad . \end{aligned}\right\}$$

содержащей по длине вала одну, две, три и больше полуволн.

Таким образом, при критическом значении

$$q_{\text{кр}}=\frac{k\pi}{l}$$

упругая линия — синусоида с k полуволнами по длине.

Вернемся к введенному обозначению

$$q^4=\frac{P\omega^2}{EJgl}.$$

Подставляя в последнее равенство критические значения $q_{\text{кр}}$ и $\omega_{\text{кр}}$, получим

$$q_{\text{кр}}^4=\frac{P\omega_{\text{кр}}}{EJgl},$$

$$\frac{k^4\pi^4}{l^4}=\frac{P\omega_{\text{кр}}^2}{EJgl}$$

или

$$\omega_{\text{кр}}=\frac{k^2\pi^2}{l}\sqrt{\frac{EJg}{Pl}}.$$

Вычислим момент инерции площади сечения вала.

Момент инерции J материальной точки относительно оси представляет собой, как известно, произведение ее массы на квадрат расстояния точки от оси. Момент инерции площади поперечного сечения вала

$$J=\lim_{\Delta m\to 0}\sum R^2\Delta m=\int R^2 dm,$$

где Δm — масса элементарной частицы, R — расстояние любой точки элементарной частицы от оси, dm — дифференциал однородной массы, имеющей форму круга (для вала) при плотности $\rho=1$.

В общем случае $dm=\rho dv$ и $J=\rho\int R^2 dv$.

Момент инерции J площади поперечного сечения вала относительно диаметра:

$$J=\frac{\rho\pi a^4}{4}.$$

Эту величину можно получить из справочных таблиц или вычислить при помощи определенного интеграла, решив задачу определения момента инерции круга относительно его диаметра.

Масса вала

$$m=\rho\pi a^2 l=\frac{P}{g}.$$

Таким образом, момент инерции сечения вала

$$J=\frac{Pa^2}{4gl}$$

и для определения критической скорости получим выражение

$$\omega_{кр}=\frac{k^2\pi^2 a}{2l^2}\sqrt{E}.$$

Минимальная критическая скорость

$$\omega_1=\frac{\pi^2 a}{2l^2}\sqrt{E}.$$

§ 2. БАЛКА (ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫЙ РЕЛЬС) НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Задача 184. Рельс бесстыкового пути лежит на упругом основании и прогибается сосредоточенной силой P. Составить уравнение упругой линии рельса и определить стрелу прогиба в точке O (рис. 131).

Решение. Реакция p упругого основания, рассчитанная на единицу длины рельса, пропорциональна прогибу — y, так что

$$p=-ny,$$

где n — коэффициент пропорциональности (коэффициент упругости основания).

Исходя из симметрии упругой линии относительно оси ординат, можно рассматривать правую часть рельса, нагруженную силой $\frac{P}{2}$.

Определим изгибающий момент M для любого сечения $A(x, y)$ правой части рельса. Прогиб рельса $-y$ представляет собой неко-

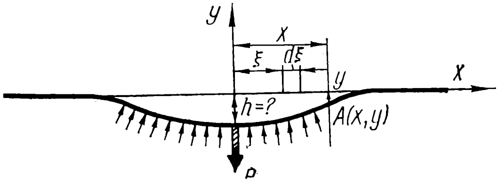

Рис. 131

торую функцию x, определяемую уравнением упругой линии. Таким образом, реакция упругого основания

$$p = -ny = f(x),$$

т. е. является функцией x.

На элемент $d\xi$ рельса (рис. 131) действует реакция основания $pd\xi = f(\xi)\,d\xi$. Момент силы реакции относительно сечения A равен $f(\xi)\,d\xi\,(x-\xi)$. Сумма моментов всех элементарных реакций, действующих слева от сечения A на правую часть рельса, равна

$$\int_0^x (x-\xi) f(\xi)\, d(\xi).$$

Момент сосредоточенной силы $\frac{P}{2}$ равен $-\frac{P}{2}x$.

Изгибающий момент в сечении равен алгебраической сумме моментов относительно нейтральной оси всех внешних сил, приложенных к балке с одной стороны (справа или слева) от данного сечения. Отсюда изгибающий момент

$$M = \int_0^x (x-\xi) f(\xi)\, d(\xi) - \frac{P}{2}x. \qquad (1)$$

К равенству (1) применим формулу дифференцирования по параметру под знаком интеграла:

$$\frac{d}{dx}\int_u^v F(\xi, x)\, d\xi = \int_u^v \frac{\partial F}{\partial x}\, d\xi + F(v, x)\,\frac{dv}{dx} - F(u, x)\,\frac{du}{dx}.$$

В данном случае $u=0$, $v=x$.
Кроме того,

$$F(\xi, x)=(x-\xi)f(\xi), \quad \frac{\partial F}{\partial x}=f(\xi).$$

Дифференцируя равенство (1), получаем

$$\frac{dM}{dx}=\frac{d}{dx}\int_0^x (x-\xi)f(\xi)d\xi-\frac{d}{dx}\left(\frac{P}{2}x\right)=$$

$$=\int_0^x f(\xi)d\xi+(x-x)f(x)\frac{dx}{dx}-(x-0)f(0)\frac{d}{dx}(0)-\frac{P}{2}=$$

$$=\int_0^x f(\xi)d(\xi)-\frac{P}{2}. \tag{2}$$

Дифференцируя повторно уравнение (2) и учитывая, что $F(\xi, x)=f(\xi)$ и $\frac{\partial F}{\partial x}=0$, имеем:

$$\frac{d^2M}{dx^2}=\frac{d}{dx}\int_0^x f(\xi)d\xi-\frac{d}{dx}\left(\frac{P}{2}\right)=$$

$$=\int_0^x 0\cdot d\xi+f(x)\frac{dx}{dx}-f(0)\frac{d}{dx}(0)-0=f(x)=p=-ny. \tag{3}$$

Дифференциальное уравнение упругой линии

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M}{EJ}. \tag{4}$$

Уравнение (4) преобразуем к виду

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2}=M. \tag{5}$$

Дифференцируя дважды уравнение (5), получим

$$EJ\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d^2M}{dx^2}$$

или на основании равенства (3)

$$EJ\frac{d^4y}{dx^4}=-ny,$$

откуда

$$\frac{d^4y}{dx^4}+\frac{n}{EJ}y=0.$$

Вводя обозначение $\frac{n}{EJ}=4k^4$, получим неполное линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\frac{d^4y}{dx^4}+4k^4y=0.$$

Соответствующее характеристическое уравнение

$$r^4+4k^4=0.$$

Это уравнение решаем разложением левой части на квадратные множители:

$$r^4+4k^4+4r^2k^2-4r^2k^2=0,$$

$$(r^2+2k^2)^2-4r^2k^2=0,$$

$$(r^2+2k^2-2rk)(r^2+2k^2+2rk)=0.$$

Последнее уравнение равносильно

$$\left.\begin{array}{l} r^2-2kr+2k^2=0, \\ r^2+2kr+2k^2=0. \end{array}\right\}$$

Определяем корни

$$\left.\begin{array}{l} r_1=k+ik, \\ r_2=k-ik, \\ r_3=-k+ik, \\ r_4=-k-ik. \end{array}\right\}$$

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения упругой линии

$$y=e^{kx}(C_1\sin kx+C_2\cos kx)+e^{-kx}(C_3\sin kx+C_4\cos kx).$$

Для определения неизвестных постоянных используем начальные условия.

1. В бесконечно удаленных от силы P точках практически прогиб и кривизна рельса равны нулю. Так как множитель e^{kx} возрастает при возрастании x, то в уравнении не должно быть первого слагаемого $e^{kx}(C_1\sin kx+C_2\cos kx)$, что возможно при условии $C_1=C_2=0$.

Уравнение упругой линии примет вид

$$y = e^{-kx}(C_3 \sin kx + C_4 \cos kx).$$

2. В начальной точке ($x=0$) касательная к упругой линии параллельна оси x, а поэтому $\frac{dy}{dx}=0$. Так как

$$\frac{dy}{dx} = -ke^{-kx}(C_3 \sin kx + C_4 \cos kx) + e^{-kx}(C_3 k \cos kx - C_4 k \sin kx),$$

то

$$-ke^{-k\cdot 0}[C_3 \sin(k\cdot 0) + C_4 \cos(k\cdot 0)] + e^{-k\cdot 0}[C_3 k \cos(k\cdot 0) - \\ - C_4 k \sin(k\cdot 0)] = 0$$

и

$$C_3 - C_4 = 0,$$

откуда

$$C_3 = C_4.$$

Уравнение упругой линии принимает вид

$$y = C_3 e^{-kx}(\sin kx + \cos kx). \tag{6}$$

3. Для определения постоянной C_3 используем уравнение (2) при $x=0$:

$$\left.\frac{dM}{dx}\right|_{x=0} = \int_0^0 f(\xi)\,d\xi - \frac{P}{2} = -\frac{P}{2}. \tag{7}$$

Дифференцируя уравнение упругой линии (5), получим

$$\frac{dM}{dx} = EJ\frac{d^3y}{dx^3}. \tag{8}$$

Величину третьей производной для равенства (8) определяем из уравнения (6). Трижды дифференцируя уравнение (6), имеем:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 4C_3 k^3 e^{-kx} \cos kx. \tag{9}$$

Зависимость (9) подставляем в уравнение (8). Отсюда

$$\frac{dM}{dx} = 4C_3 EJk^3 e^{-kx} \cos kx.$$

При $x=0$

$$\left.\frac{dM}{dx}\right|_{x=0} = 4C_3 EJk^3. \tag{10}$$

Приравниваем выражения (7) и (10):

$$4C_3EJk^3 = -\frac{P}{2},$$

откуда

$$C_3 = -\frac{P}{8EJk^3}.$$

Таким образом, уравнение упругой линии

$$y = -\frac{P}{8EJk^3}e^{-kx}(\sin kx + \cos kx).$$

Стрела прогиба в середине рельсовой плети (при $x=0$)

$$h = -\frac{P}{8EJk^3},$$

где коэффициент

$$k = \sqrt[4]{\frac{n}{4EJ}}.$$

§ 3. КОЛЕБАНИЯ ОДНОРОДНОЙ БАЛКИ (ПРИВЕДЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ К ОБЫКНОВЕННОМУ)

Задача 185. Однородная балка длиною l, жесткостью EJ и массой m на единицу длины свободно опирается на колонны (рис. 132). Найти основную гармонику колебаний.

Решение. Пусть один конец однородной горизонтальной балки расположен в начале системы координат xOy. Предположим, что малые колебания балки происходят в плоскости координатных осей. Если элемент mdx на расстоянии x от начала O системы координат в момент t имел отклонение y, то действующая на элемент сила равна

$$\frac{mdx}{g}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

т. е. следствием колебаний является такое нагружение w, где

$$w = -\frac{m}{g}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Уравнение прогиба

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = w.$$

Приравнивая эти два уравнения, запишем дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее колебания:

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{m}{g}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0. \tag{1}$$

Гармонические колебания периода $\frac{2\pi}{\omega}$ задаются зависимостью

$$y=X\cos\omega t,$$

где $X=X(x)$. Подставляя это значение y в уравнение (1), получаем

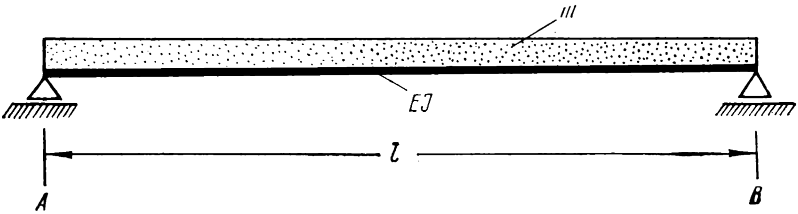

Рис. 132

обыкновенное дифференциальное уравнение относительно X:

$$EJ\frac{d^4X}{dx^4}-\frac{m\omega^2}{g}X=0. \tag{2}$$

Пусть

$$\alpha=\sqrt[4]{\frac{m\omega^2}{gEJ}}. \tag{3}$$

Тогда уравнение (2) принимает вид

$$\frac{d^4X}{dx^4}-\alpha^4X=0.$$

Общее решение этого уравнения

$$X=C_1\operatorname{ch}\alpha x+C_2\operatorname{sh}\alpha x+C_3\cos\alpha x+C_4\sin\alpha x, \tag{4}$$

где C_1, C_2, C_3 и C_4 — постоянные интегрирования.

Периоды колебаний зависят от способа закрепления концов балки.

По условию задачи балка свободно опирается, т. е. прогибы и изгибающий момент на каждой опоре равны нулю.

Итак,

$$\text{при } x=0 \quad X=0 \text{ и при } x=l \quad \frac{d^2X}{dx^2}=0. \tag{5}$$

Подставляя условия $X=0$, $X''=0$ при $x=0$ в уравнение (4), имеем

$$C_1+C_3=0=\alpha^2(C_1-C_3),$$

так что

$$C_1=C_3=0,$$

и уравнение (4) принимает вид

$$X=C_2 \operatorname{sh} \alpha x+C_4 \sin \alpha x.$$

Оставшиеся два условия в уравнении (5) $X=0$, $X''=0$ при $x=l$ после подстановки в уравнение (4) дают систему

$$\left.\begin{aligned} C_2 \operatorname{sh} \alpha l+C_4 \sin \alpha l=0, \\ \alpha^2 C_2 \operatorname{sh} \alpha l-\alpha^2 C_4 \sin \alpha l=0. \end{aligned}\right\}$$

Следовательно, $C_2=0$ и если $C_4 \neq 0$, то

$$\sin \alpha l=0.$$

Тогда

$$\alpha l=\lambda\pi,$$

где λ — целое число.

Из соотношения (3) получаем

$$\omega=\sqrt{\frac{gEJ}{m}}\,\frac{\lambda^2\pi^2}{l^2}.$$

Основная гармоника соответствует низшей частоте при $\lambda=1$. Гармоники высших частот получаются при $\lambda=2, 3, 4, \ldots$

Глава XVIII

ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ЛИНЕЙНЫМ НЕОДНОРОДНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Неоднородными линейными дифференциальными уравнениями n-го порядка с постоянными коэффициентами называются уравнения вида

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_n=f(x), \qquad (1)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — постоянные, а $f(x)$ — непрерывная функция x.

Для получения общего решения уравнения (1) применяют два метода.

1. Метод Лагранжа (вариации произвольных постоянных)

Общее решение уравнения будет иметь вид

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n,$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — частные решения соответствующего однородного уравнения, а $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — функции x, определяемые системой уравнений:

$$\left.\begin{array}{c}
\dfrac{dC_1}{dx}y_1+\dfrac{dC_2}{dx}y_2+\ldots+\dfrac{dC_n}{dx}y_n=0,\\
\dfrac{dC_1}{dx}\cdot\dfrac{dy_1}{dx}+\dfrac{dC_2}{dx}\cdot\dfrac{dy_2}{dx}+\ldots+\dfrac{dC_n}{dx}\cdot\dfrac{dy_n}{dx}=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\dfrac{dC_1}{dx}\cdot\dfrac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}+\dfrac{dC_2}{dx}\cdot\dfrac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}+\ldots+\dfrac{dC_n}{dx}\cdot\dfrac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}=f(x).
\end{array}\right\} \qquad (2)$$

Решая систему (2) относительно $\dfrac{dC_i}{dx}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, получим

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{dC_1}{dx}=f_1(x),\\
\dfrac{dC_2}{dx}=f_2(x),\\
\cdots\cdots\cdots\\
\dfrac{dC_n}{dx}=f_n(x),
\end{array}\right\}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \int f_1(x)\,dx + A_1, \\ C_2 &= \int f_2(x)\,dx + A_2, \\ &\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\;\;\cdot\;\;\cdot \\ C_n &= \int f_n(x)\,dx + A_n. \end{aligned}\right\}$$

2. Метод неопределенных коэффициентов

Для получения общего решения неоднородного уравнения достаточно к его частному решению прибавить общее решение соответствующего однородного уравнения. Нахождение частного решения может быть упрощено методом неопределенных коэффициентов в следующих случаях:

а) когда правая часть

$$f(x) = e^{\alpha x}\varphi(x),$$

где α — постоянное число, $\varphi(x)$ — целая функция m-й степени.

Частное решение y_0 ищется в виде

$$y_0 = e^{\alpha x}x^k(A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m),$$

где $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}, A_m$ — неопределенные коэффициенты, k — порядок кратности корня α для характеристического уравнения.

Если α не является корнем характеристического уравнения, то $k=0$;

б) когда правая часть

$$f(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x\varphi(x)$$

или

$$f(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x\varphi(x),$$

где α и β — постоянные числа, $\varphi(x)$ — целая функция m-й степени.

Частное решение y_0 такого уравнения имеет вид

$$y_0 = e^{\alpha x}x^k\,[(A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m)\cos\beta x + \\ + (B_0x^m + B_1x^{m-1} + \ldots + B_m)\sin\beta x],$$

где $A_0, A_1, \ldots, A_m$ и $B_0, B_1, \ldots, B_m$ — неопределенные коэффициенты, а k — порядок кратности корня $\alpha \pm \beta i$ для характеристического уравнения.

Если $\alpha \pm \beta i$ не является корнем характеристического уравнения, то $k=0$.

§ 1. ДЕФОРМАЦИЯ СТЕНОК ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РЕЗЕРВУАРА

Задача 186. Цилиндрический резервуар для хранения жидкости, толщина D стенок которого мала по сравнению со средним радиусом R (рис. 133), а меридиональное сечение стенки — прямоугольник, подвергается силовому воздействию давления жидкости. Найти дифференциальное уравнение деформации стенок резервуара.

Решение. На элемент стенки с основанием $abcd$ и высотой dx, взятый на глубине x, действуют: сила давления жидкости, равная $\gamma x R d\varphi dx$ и приложенная к грани ab (γ — вес единицы массы жидкости); силы упругости T_1 и T_2, приложенные к граням bc и ad и вследствие симметрии равные между собой.

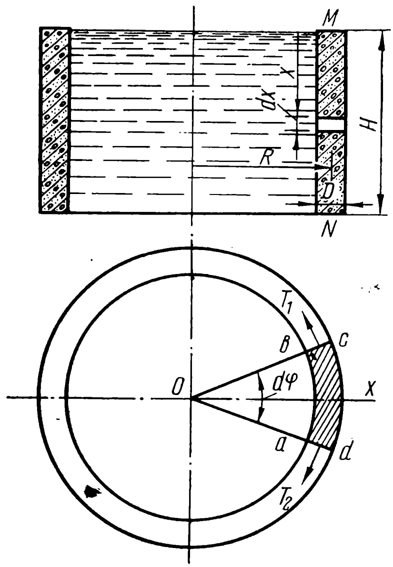

Рис. 133

Обозначая прогибы точек элемента через y, получим, что относительное удлинение их первоначального расстояния от оси цилиндра равно $\frac{y}{R}$. Ввиду малости толщины стенок величины y для всех точек элемента можно считать равными и положить, что эти точки равноудалены от оси цилиндра.

Относительное увеличение длины окружности цилиндра на уровне взятого элемента будет также $\frac{y}{R}$. Поэтому напряжения, вызванные в стенках силами упругости, равны $E\frac{y}{R}$, где E — модуль упругости материала стенки.

Силы упругости

$$T_1 = T_2 = \frac{Ey}{R} D dx.$$

Равнодействующая сил, приложенных к элементу, будет

$$dQ = \gamma x R d\varphi dx - T_1 \sin\frac{d\varphi}{2} - T_2 \sin\frac{d\varphi}{2}$$

или, считая

$$\sin\frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2},$$

получаем

$$dQ = \gamma x R d\varphi dx - \frac{yE}{R} D d\varphi dx.$$

Эта сила dQ представляет приращение поперечной силы, соответствующее приращению dx глубины элемента.

Известно, что изгибающий момент M и поперечная сила Q связаны соотношениями

$$\frac{dM}{dx} = Q,$$

$$M = EJ \frac{d^2y}{dx^2},$$

где J — момент инерции площади $abcd$ относительно нейтральной оси.

Учитывая вышеизложенное, получим

$$E \frac{d^2}{dx^2} \left(J \frac{d^2y}{dx^2} \right) = \gamma x R d\varphi - \frac{yE}{R} D d\varphi. \tag{1}$$

Так как

$$J = \frac{D^3 R d\varphi}{12},$$

то после подстановки этого выражения в уравнение (1) и сокращения на $Rd\varphi$ найдем

$$\frac{ED^3}{12} \cdot \frac{d^4y}{dx^4} = \gamma x - \frac{yED}{R^2}$$

или

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 4\alpha^4 y = m^4 x, \tag{2}$$

где

$$\alpha^4 = \frac{3}{R^2 D^2},$$

$$m^4 = \frac{12\gamma}{ED^3}.$$

Общее решение полученного уравнения

$$y = z + y_0,$$

где z — общее решение соответствующего однородного уравнения, y_0 — частное решение уравнения (2).

Соответствующее однородное дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{d^4y}{dx^4}+4\alpha^4y=0. \qquad (3)$$

Характеристическое уравнение

$$r^4+4\alpha^4=0,$$

корни которого

$$r_1=(1+i)\alpha, \quad r_2=(1-i)\alpha, \quad r_3=(-1+i)\alpha \quad \text{и} \quad r_4=(-1-i)\alpha.$$

Составляем общее решение однородного уравнения (3):

$$z=C_1e^{\alpha x}\cos\alpha x+C_2e^{\alpha x}\sin\alpha x+C_3e^{-\alpha x}\cos\alpha x+C_4e^{-\alpha x}\sin\alpha x.$$

Частное решение уравнения (2) находим методом неопределенных коэффициентов. Так как правая часть уравнения представляет двучлен первой степени относительно x, то частное решение ищем в виде

$$y_0=Ax+B.$$

Здесь A и B — постоянные, подлежащие определению. Находим их в предположении, что частное решение y_0 есть решение уравнения (2). Дифференцируем y_0 по x:

$$y'_0=A, \quad y''_0=y'''_0=y_0^{(\mathrm{IV})}=0.$$

Подставляем эти значения в уравнение (2)

$$4\alpha^4(Ax+B)=m^4x$$

или

$$4\alpha^4Ax+4\alpha^4B=m^4x.$$

Приравнивая коэффициенты соответствующих степеней x, получим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}4\alpha^4A&=m^4,\\ 4\alpha^4B&=0,\end{aligned}\right\}$$

откуда

$$A=\frac{m^4}{4\alpha^4}, \quad B=0.$$

Тогда частное решение неоднородного уравнения (2)

$$y_0=\frac{m^4x}{4\alpha^4}.$$

Таким образом, общее решение неоднородного линейного уравнения (2) имеет вид

$$y=C_1e^{\alpha x}\cos\alpha x+C_2e^{\alpha x}\sin\alpha x+C_3e^{-\alpha x}\cos\alpha x+C_4e^{-\alpha x}\sin\alpha x+\frac{m^4x}{4\alpha^4}.$$

Произвольные постоянные C_1, C_2, C_3 и C_4 определяются из условий на концах вертикальной полоски MN, имеющей фигуру $abcd$ поперечным сечением.

В случае, например, когда резервуар имеет недеформирующееся днище, эти условия будут таковы: при $x=0$ $y=0$ и $y'=0$ и при $x=H$ $y=0$ и $y'=0$, где H — высота цилиндрического резервуара.

§ 2. ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНАЯ ШПАЛА

Задача 187. Определить изгиб железнодорожной шпалы постоянного сечения под действием нагрузки и распределение давления под нею. Зависимость прогиба шпалы от возникающего при этом давления балласта на нее принимается прямо пропорциональной.

Р е ш е н и е. Нижний край шпалы AB под влиянием нагрузки PP деформируется, принимая форму кривой A_1B_1, и погружается в балласт. Пусть величина прогиба шпалы на расстоянии x от левого конца равна y (рис. 134).

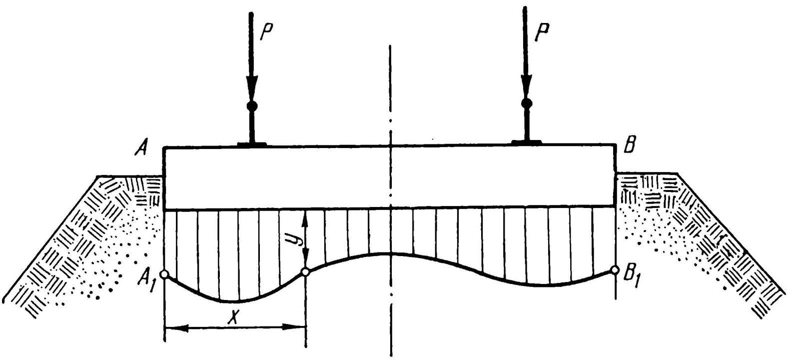

Рис. 134

Предположение относительно зависимости между прогибом (упругой осадкой) y и давлением p, передаваемым на балласт единицей длины шпалы, может быть выражено уравнением

$$p=ky,$$

где k — коэффициент упругости балласта (коэффициент постели шпалы).

Рассмотрим более общий случай, к которому может быть всегда сведена силовая схема, изображенная на рис. 134,— шпалу, нагруженную непрерывно распределенной нагрузкой $q=f(x)$ (рис. 135).

Под влиянием этой нагрузки различные точки шпалы погрузятся в балласт на глубину y, зависимость которой от x подлежит опре-

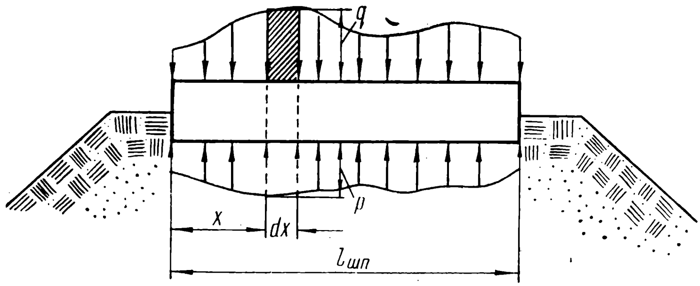

Рис. 135

делению. При этом давление нагрузки уравновешивается реакцией упругих сил балласта, т. е. должно соблюдаться равенство

$$\int_0^{l_{шп}} f(x)\,dx=-k\int_0^{l_{шп}} y\,dx.$$

Пользуясь дифференциальным уравнением упругой балки

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2}=-M$$

(знак минус ставится в силу того, что положительный момент вызывает отрицательную кривизну), после двукратного дифференцирования получаем

$$EJ\frac{d^4y}{dx^4}=-\frac{d^2M}{dx^2}=q-ky=f(x)-ky$$

или

$$EJ\frac{d^4y}{dx^4}+ky=f(x). \qquad (1)$$

Для решения этого уравнения рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$EJ\frac{d^4y}{dx^4}+ky=0$$

или

$$\frac{d^4y}{dx^4}+\frac{k}{EJ}y=0. \tag{2}$$

Характеристическое уравнение

$$r^4+\frac{k}{EJ}=0$$

имеет четыре корня:

$$r_1=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\sqrt[4]{\frac{k}{EJ}}, \quad r_2=\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\sqrt[4]{\frac{k}{EJ}},$$

$$r_3=\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)\sqrt[4]{\frac{k}{EJ}}, \quad r_4=\left(\cos\frac{3\pi}{4}-i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\sqrt[4]{\frac{k}{EJ}}.$$

После упрощений эти корни принимают вид

$$r_1=(1+i)\sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}, \quad r_2=(1-i)\sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}},$$

$$r_3=(-1+i)\sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}, \quad r_4=(-1-i)\sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}.$$

Полагая

$$\sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}=\alpha,$$

получаем общее решение однородного уравнения (2)

$$y=(C_1\cos\alpha x+C_2\sin\alpha x)e^{\alpha x}+(C_3\cos\alpha x+C_4\sin\alpha x)e^{-\alpha x}. \tag{3}$$

Для получения общего решения неоднородного дифференциального уравнения (2) применяем метод вариации постоянных интегрирования.

Уравнение (2) типа $y^{(IV)}+ay=bf(x)$, где $a=\frac{k}{EJ}$, $b=\frac{1}{EJ}$.

Изложим схему решения этой громоздкой своими выкладками задачи.

Постоянные C_i $(i=1, 2, 3, 4)$ в уравнении (3) будем полагать переменными. Попробуем выбрать эти переменные так, чтобы функция y удовлетворяла уравнению (2).

Продифференцируем уравнение (3) три (т. е. $n-1$) раза. Тогда

$$y'=\sum_{i=1}^{i=4} C_i y_i' + \sum_{i=1}^{i=4} C_i' y_i.$$

Вторую сумму, содержащую производные C_i, при каждом дифференцировании полагаем равной нулю, что возможно, так как имеем право наложить на неизвестные C_i такое требование. Таким образом,

$$y'=\sum_{i=1}^{i=4} C_i y_i'$$

и

$$\sum_{i=1}^{i=4} C_i' y_i = 0. \tag{4}$$

Продолжая дифференцирование, имеем

$$y''=\sum_{i=1}^{i=4} C_i y_i''$$

и

$$\sum_{i=1}^{i=4} C_i' y_i' = 0; \tag{5}$$

$$y'''=\sum_{i=1}^{i=4} C_i y_i'''$$

и

$$\sum_{i=1}^{i=4} C_i' y_i'' = 0. \tag{6}$$

Наконец, представим в виде ряда производную четвертого порядка

$$y^{(IV)}=\sum_{i=1}^{i=4} C_i y_i^{(IV)} + \sum_{i=1}^{i=4} C_i' y_i''', \tag{7}$$

не налагая на вторую сумму требования равенства ее нулю.

Подставляя соотношения (7) и (3) в дифференциальное уравнение (1), получаем новое уравнение

$$\sum_{i=1}^{i=4} C_i \sum_{k=0}^{k=4} a_k y_i^{(4-k)} + a_0 \sum_{i=1}^{i=4} C_i' y_i''' = f(x), \tag{8}$$

где a_k — символическое обозначение постоянных коэффициентов.

Так как каждая функция y_i удовлетворяет уравнению

$$\sum_{k=0}^{k=4} a_k y_i^{(4-k)} = 0,$$

то из уравнения (8) остается только

$$a_0 \sum_{i=1}^{i=4} C_i' y_i''' = f(x),$$

которое совместно с уравнениями (4)—(6) дает возможность определить величины C_i' $(i=1, 2, 3, 4)$, т. е. первые производные неизвестных функций C_i.

Итак, имеем систему уравнений относительно C_i':

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{i=4} C_i' y_i^{(k)} = 0, \quad k=0, 1, 2; \\ &a_0 \sum_{i=1}^{i=4} C_i' y_i''' = f(x). \end{aligned}\right\}$$

Пусть

$$C_i' = \psi_i(x), \quad i=1, 2, 3, 4.$$

Интегрируя эти равенства, получаем

$$C_i = A_i + \int_{x_0}^{x} \psi_i(x)\, dx.$$

Подставляя эти значения в уравнение (3), находим общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения (2):

$$y = \sum_{i=1}^{i=4} A_i y_i + \sum_{i=1}^{i=4} y_i \int_{x_0}^{x} \psi_i(x)\, dx.$$

Первая сумма в правой части полученного равенства представляет общее решение однородного уравнения, а вторая сумма — частное решение соответствующего неоднородного уравнения.

Для определения четырех постоянных A_i используем начальные условия. На концах шпалы изгибающие моменты и поперечные силы равны нулю, т. е.

$$M_A = M_B = -EJ \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

и

$$Q_A = Q_B = \frac{dM_A}{dx} = \frac{dM_B}{dx} = -EJ \frac{d^3y}{dx^3} = 0.$$

Таким образом, получаем четыре уравнения для определения постоянных интегрирования:

$$y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0, \quad y''(l) = 0 \quad \text{и} \quad y'''(l) = 0.$$

Глава XIX

ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К СИСТЕМАМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Решение системы дифференциальных уравнений, содержащей производные второго порядка, можно свести к решению системы дифференциальных уравнений первого порядка, введя новые неизвестные функции.

Пусть

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= f_1\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right),\\
\frac{d^2y}{dt^2} &= f_2\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right),\\
\frac{d^2z}{dt^2} &= f_3\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Вводя новые неизвестные функции

$$x' = \frac{dx}{dt},\quad y' = \frac{dy}{dt},\quad z' = \frac{dz}{dt},$$

систему (1) заменяем следующей:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= x',\\
\frac{dy}{dt} &= y',\\
\frac{dz}{dt} &= z',\\
\frac{dx'}{dt} &= f_1(t, x, y, z, x', y', z'),\\
\frac{dy'}{dt} &= f_2(t, x, y, z, x', y', z'),\\
\frac{dz'}{dt} &= f_3(t, x, y, z, x', y', z'),
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где t — аргумент, x, y, z, x', y', z' — искомые функции.

Система (2) состоит из шести уравнений первого порядка с шестью неизвестными функциями: x, y, z, x', y', z'.

Система (2), разрешенная относительно всех входящих в нее производных, называется нормальной. Решить систему (2) — значит найти систему уравнений вида

$$\left.\begin{array}{l} F_1(t, x, y, z, x', y', z', C_1, C_2, C_3, \ldots, C_6)=0, \\ F_2(t, x, y, z, x', y', z', C_1, C_2, C_3, \ldots, C_6)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_6(t, x, y, z, x', y', z', C_1, C_2, C_3, \ldots, C_6)=0, \end{array}\right\} \tag{3}$$

обладающую следующими двумя свойствами:

1) функции x, y, z, x', y', z', определяемые системой (3), должны удовлетворять системе (2);

2) систему (3) можно разрешить относительно произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_6$, т. е. все эти постоянные не могут быть исключены из системы.

Разрешая систему (3) относительно произвольных постоянных, получим

$$\left.\begin{array}{l} C_1=\varphi_1(t, x, y, z, x', y', z'), \\ C_2=\varphi_2(t, x, y, z, x', y', z'), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_6=\varphi_6(t, x, y, z, x', y', z'). \end{array}\right\} \tag{4}$$

Функции

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1= \varphi_1(t, x, y, z, x', y', z'), \\ \varphi_2= \varphi_2(t, x, y, z, x', y', z'), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_6= \varphi_6(t, x, y, z, x', y', z') \end{array}\right\} \tag{5}$$

называются интегралами системы.

Если $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_6$ — интегралы системы (2), то и произвольная функция $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_6)$ от этих интегралов будет интегралом системы, так как

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_6)=F(C_1, C_2, \ldots, C_6)=C.$$

Таким образом, система имеет бесчисленное множество интегралов. Среди них можно выбрать не более шести независимых интегралов, где $n=6$ — число уравнений первого порядка, составляющих систему.

Независимыми интегралами называются такие интегралы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_6$, между которыми не может существовать никакого тождественного соотношения вида $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_6)=0$, т. е. ни один из них не является функцией остальных.

Разрешая систему общих интегральных уравнений (3) или систему независимых интегралов (4) относительно искомых функций, получим общее решение системы:

$$\left.\begin{aligned}
x &= \psi_1(t, C_1, C_2, \ldots, C_6),\\
y &= \psi_2(t, C_1, C_2, \ldots, C_6),\\
z &= \psi_3(t, C_1, C_2, \ldots, C_6),\\
x' &= \psi_4(t, C_1, C_2, \ldots, C_6),\\
y' &= \psi_5(t, C_1, C_2, \ldots, C_6),\\
z' &= \psi_6(t, C_1, C_2, \ldots, C_6).
\end{aligned}\right\}$$

Таким образом, решение системы уравнений (2) сводится к определению одной из систем уравнений (3), (4) или (5).

В прикладных вопросах особое значение приобретают системы дифференциальных уравнений второго порядка, к которым, в частности, сводятся задачи, связанные с движением системы материальных точек и твердых тел в пространстве.

§ 1. ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОТТАЛКИВАЮЩЕЙ СИЛЫ, ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЙ РАССТОЯНИЮ

Задача 188. Материальная точка массы m, в начальный момент ($t=0$) находящаяся на расстоянии a от центра O, имеет скорость v_0, перпендикулярную к прямой, соединяющей начальное положение

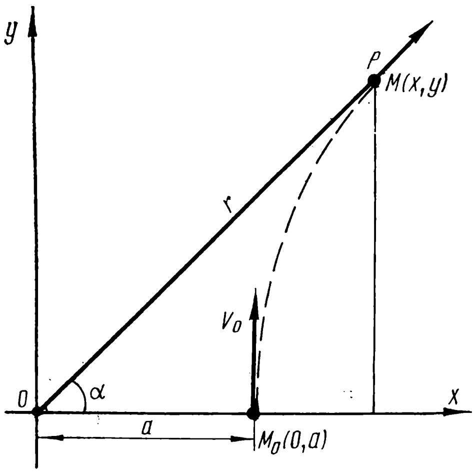

Рис. 136

материальной точки с центром O, от которого точка отталкивается силой, прямо пропорциональной расстоянию от центра (рис. 136). Найти траекторию движения материальной точки.

Решение. В любом положении $M(x, y)$ на точку действует сила P, направленная по радиус-вектору точки и пропорциональная ему по величине $P=\varkappa r$.

Составляющие этой силы на оси абсцисс и ординат

$$\left.\begin{aligned} X&=\varkappa r\cos\alpha=\varkappa x,\\ Y&=\varkappa r\sin\alpha=\varkappa y.\end{aligned}\right\}$$

На основании второго закона динамики получим дифференциальное уравнение движения

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2}&=\varkappa x,\\ m\frac{d^2y}{dt^2}&=\varkappa y\end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}-\frac{\varkappa}{m}x=0,\\ \frac{d^2y}{dt^2}-\frac{\varkappa}{m}y=0.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Вводим обозначение $k^2=\frac{\varkappa}{m}$. Тогда неполные линейные уравнения (1) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}-k^2x=0,\\ \frac{d^2y}{dt^2}-k^2y=0.\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Общие решения уравнений (2)

$$\left.\begin{aligned} x&=C_1e^{kt}+C_2e^{-kt},\\ y&=C_3e^{kt}+C_4e^{-kt}.\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

Начальные условия: при $t=0$ $x=a, y=0, \frac{dx}{dt}=v_0\cos\frac{\pi}{2}=0$, $\frac{dy}{dt}=v_0\cos 0°=v_0$. Подставляя эти значения в систему (3), имеем:

$$\left.\begin{aligned} a&=C_1e^{k\cdot 0}+C_2e^{-k\cdot 0},\\ 0&=C_3e^{k\cdot 0}+C_4e^{-k\cdot 0}.\end{aligned}\right\}$$

Так как

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=C_1ke^{kt}-C_2ke^{-kt},\\ \frac{dy}{dt}&=C_3ke^{kt}-C_4ke^{-kt},\end{aligned}\right\}$$

то

$$\left.\begin{aligned} 0 &= C_1 k e^{k\cdot 0} - C_2 k e^{-k\cdot 0}, \\ v_0 &= C_3 k e^{k\cdot 0} - C_4 k e^{-k\cdot 0}. \end{aligned}\right\}$$

Для определения четырех постоянных интегрирования имеем систему алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned} C_1+C_2&=a, \\ C_1-C_2&=0, \\ C_3+C_4&=0, \\ C_3-C_4&=\frac{v_0}{k}. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Решая систему (4), находим:

$$C_1=\frac{a}{2},\quad C_2=\frac{a}{2},\quad C_3=\frac{v_0}{2k},\quad C_4=-\frac{v_0}{2k}.$$

Подставляя найденные значения постоянных интегрирования в общие решения (3), имеем уравнения движения:

$$x=\frac{a}{2}\left(e^{kt}+e^{-kt}\right),\qquad y=\frac{v_0}{2k}\left(e^{kt}-e^{-kt}\right). \qquad (5)$$

Для получения уравнения траектории движения исключим t из уравнений (5), которые преобразуем следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} e^{kt}+e^{-kt}&=\frac{2x}{a}, \\ e^{kt}-e^{-kt}&=\frac{2ky}{v_0}. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Суммируя левые и правые части системы (6), получим

$$2e^{kt}=\frac{2(v_0x+aky)}{av_0},$$

откуда

$$e^{kt}=\frac{v_0x+aky}{av_0},\qquad e^{-kt}=\frac{1}{e^{kt}}=\frac{av_0}{v_0x+aky}. \qquad (7)$$

Подставляя выражения (7) во второе уравнение (5), получим

$$y=\frac{v_0}{2k}\left(\frac{v_0x+aky}{av_0}-\frac{av_0}{v_0x+aky}\right)=\frac{(v_0x+aky)^2-a^2v_0^2}{2ak(v_0x+aky)}. \qquad (8)$$

Уравнение (8) преобразуем к виду

$$2aky(v_0x+aky)=(v_0x+aky)^2-a^2v_0^2. \qquad (9)$$

После умножения, возведения в степень и сокращения подобных членов уравнение (9) примет вид

$$a^2k^2y^2=v_0^2x^2-a^2v_0^2$$

или

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{k^2y^2}{v_0^2}=1,$$

откуда окончательно получаем траекторию движения данной точки в виде гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{v_0}{k}\right)^2}=1.$$

§ 2. ВЫБРОС ТЕЛА ПОД УГЛОМ

Задача 189. Камень брошен под углом α к горизонту и движется в среде, сопротивление которой пропорционально скорости v. Найти траекторию движения камня.

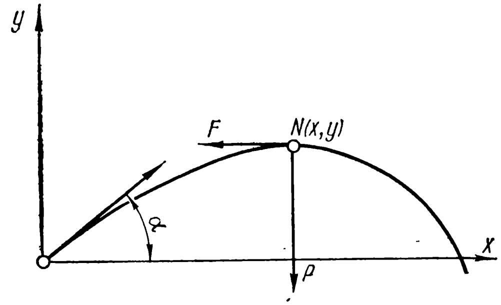

Рис. 137

Решение. В любой точке траектории $N(x, y)$ на камень действуют две силы: тяжести $P=mg$ и сопротивления среды $F=kv$. Составляющие их равнодействующей по осям координат (рис. 137) будут

$$\left.\begin{aligned} X&=P\cos(P, X)+F\cos(F, X), \\ Y&=P\cos(P, Y)+F\cos(F, Y). \end{aligned}\right\}$$

Но

$$\cos(P, X)=0, \quad \cos(P, Y)=1,$$

$$\cos(F, X) = -\frac{dx}{ds}, \quad \cos(F, Y) = -\frac{dy}{ds}.$$

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} X &= -kv\frac{dx}{ds}, \\ Y &= -mg - kv\frac{dy}{ds}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Как известно, $v = \frac{ds}{dt}$. Тогда система (2) примет вид

$$\left.\begin{aligned} X &= -k\frac{dx}{dt}, \\ Y &= -k\frac{dy}{dt} - mg. \end{aligned}\right\}$$

На основании второго закона динамики дифференциальные уравнения движения

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= -k\frac{dx}{dt}; \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= -k\frac{dy}{dt} - mg \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}\cdot\frac{dx}{dt} &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}\cdot\frac{dy}{dt} &= -g. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Решая первое уравнение системы (2) как неполное линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка, а второе как линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка, получим общие решения

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1 + C_2 e^{-\frac{k}{m}t}, \\ y &= C_3 + C_4 e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{gm}{k}t. \end{aligned}\right\}$$

Для частного решения используем начальные условия: при $t=0$ $x=0$, $y=0$, $\frac{dx}{dt} = v_0\cos\alpha$, $\frac{dy}{dt} = v_0\sin\alpha$.

Получаем:

$$\left.\begin{aligned} 0&=C_1+C_2e^{-\frac{k}{m}\cdot 0},\\ 0&=C_3+C_4e^{-\frac{k}{m}\cdot 0}-\frac{gm}{k}\cdot 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Так как

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{k}{m}C_2e^{-\frac{k}{m}t},$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{k}{m}C_4e^{-\frac{k}{m}t}-\frac{gm}{k},$$

то

$$\left.\begin{aligned} v_0\cos\alpha&=-\frac{k}{m}C_2e^{-\frac{k}{m}\cdot 0},\\ v_0\sin\alpha&=-\frac{k}{m}C_4e^{-\frac{k}{m}\cdot 0}-\frac{gm}{k}. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Из уравнений (3) и (4) определяем произвольные постоянные:

$$C_1=\frac{m}{k}v_0\cos\alpha,$$

$$C_2=-\frac{m}{k}v_0\cos\alpha,$$

$$C_3=\frac{m}{k^2}(gm+kv_0\sin\alpha),$$

$$C_4=-\frac{m}{k^2}(gm+kv_0\sin\alpha).$$

Подставляя найденные значения в общие решения, получим частные решения:

$$\left.\begin{aligned} x&=\underbrace{\frac{m}{k}v_0\cos\alpha}_{a}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)=a\left(1-e^{-\frac{g}{c}t}\right);\\ y&=\underbrace{\frac{m}{k^2}(gm+kv_0\sin\alpha)}_{b}\left(1-e^{-\frac{g}{c}t}\right)-\frac{gm}{k}t=b\left(1-e^{-\frac{g}{c}t}\right)-ct. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Здесь $c=\frac{gm}{k}$, следовательно, $-\frac{k}{m}=-\frac{g}{c}$.

Значения a и b очевидны из уравнений (5). Для получения траектории движения камня исключаем время t.

Из первого уравнения (5) находим, что

$$1-e^{-\frac{g}{c}t}=\frac{x}{a}.$$

Подставляя полученное выражение во второе уравнение (5), получим

$$y=b\frac{x}{a}-ct,$$

откуда

$$t=\frac{bx-ay}{ac}.$$

Полученную величину времени подставляем в первое уравнение (5), и тогда

$$x=a\left[1-e^{-\frac{g}{ac^2}(bx-ay)}\right]$$

или траектория движения камня

$$ay-bx=\frac{ac^2}{g}\ln\frac{a-x}{a}.$$

§ 3. СБРОС ГРУЗА С САМОЛЕТА В ЗАДАННУЮ ТОЧКУ

Задача 190. Самолет летит на высоте h *м* над землей со скоростью v *км/ч*. На каком расстоянии x от данной точки A необходимо сбросить груз с самолета без начальной относительной скорости и пренебрегая сопротивлением воздуха, чтобы он попал в точку A?

Решение. Начало координат помещаем в начальном положении груза (рис. 138).

Дифференциальные уравнения движения по координатным осям принимают вид

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2}&=0,\\ m\frac{d^2y}{dt^2}&=mg.\end{aligned}\right\}$$

Интегрируя каждое из них дважды, получаем

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1 t + C_2, \\ y &= \frac{1}{2} g t^2 + C_3 t + C_4. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Начальные условия — при $t=0$: $x=0$, $\frac{dx}{dt}=v$; $y=0$, $y'=0$, откуда, так как $\frac{dx}{dt}=C_1$ и $\frac{dy}{dt}=gt+C_3$, имеем

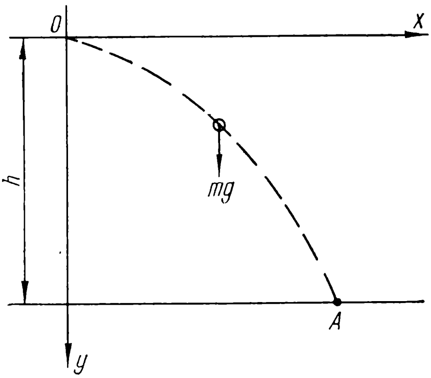

Рис. 138

$$\left.\begin{aligned} 0 &= C_1 \cdot 0 + C_2, \\ v &= C_1, \\ 0 &= 0 + C_3 \cdot 0 + C_4, \\ 0 &= 0 + C_3 \end{aligned}\right\}$$

или

$$C_1 = v, \qquad C_2 = C_3 = C_4 = 0.$$

Тогда система (1) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} x &= vt, \\ y &= \frac{1}{2} g t^2, \end{aligned}\right\}$$

откуда общее решение

$$y = \frac{gx^2}{2v^2}.$$

При $y=h$ находим

$$x = v\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

§ 4. ДВИЖЕНИЕ ПЛАНЕТ

Задача 191. Найти закон движения планет Солнечной системы, в частности, движения Земли вокруг Солнца, основываясь на законе всемирного тяготения, не учитывая при этом влияния других планет.

Решение. Пусть Солнце находится в начале системы координат xOy, а Земля в момент t движения по солнечной орбите имеет текущие координаты (x, y).

В качестве положительных направлений векторов примем направления $+x$ и $+y$.

Из рис. 139 очевидно, что действующая на Землю сила F раскладывается на горизонтальную и вертикальную составляющие соответственно $F \cos\theta$ и $F \sin\theta$.

Пусть M — масса Солнца, m — масса Земли.
Тогда на основании закона всемирного тяготения

$$F=\frac{kM_1M_2}{d^2} \qquad (1)$$

и второго закона динамики $F=ma$ получаем

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-F\cos\theta=-\frac{kMm}{r^2}\cos\theta, \qquad (2)$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-F\sin\theta=-\frac{kMm}{r^2}\sin\theta. \qquad (3)$$

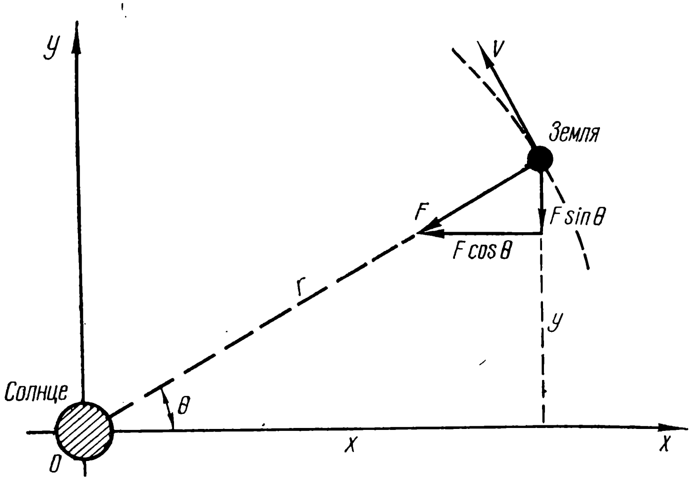

Рис. 139

Так как $\sin\theta=\frac{y}{r}$ и $\cos\theta=\frac{x}{r}$, то уравнения (2) и (3) примут вид

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{\nu x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{\nu y}{r^3}, \qquad (4)$$

где $\nu=kM$.

Принимая во внимание, что $r=\sqrt{x^2+y^2}$, систему уравнений (4) запишем в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{\nu x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{\nu y}{(x^2+y^2)^{3/2}}. \qquad (5)$$

При $t=0$ Земля находится на оси абсцисс на расстоянии a от Солнца и движется в положительном направлении оси ординат со скоростью v_0.

Начальные условия: $t=0$, $x=a$, $y=0$, $\frac{dx}{dt}=0$, $\frac{dy}{dt}=v_0$.

Остается решить систему дифференциальных уравнений (5), удовлетворяющую этим начальным условиям.

Предварительно запишем систему уравнений (5) в полярных координатах (r, θ).

Так как $x=r\cos\theta$ и $y=r\sin\theta$, то дифференцируя эти выражения по t и обозначая соответствующие производные сверху точкой, имеем:

$$\dot{x}=\dot{r}\cos\theta-(r\sin\theta)\dot{\theta},$$

$$\ddot{x}=\ddot{r}\cos\theta-2(\dot{r}\sin\theta)\dot{\theta}-(r\sin\theta)\ddot{\theta}-(r\cos\theta)\dot{\theta}^2,$$

$$\dot{y}=\dot{r}\sin\theta+(r\cos\theta)\dot{\theta},$$

$$\ddot{y}=\ddot{r}\sin\theta+2(\dot{r}\cos\theta)\dot{\theta}+(r\cos\theta)\ddot{\theta}-(r\sin\theta)\dot{\theta}^2.$$

Таким образом,

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}&=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\cos\theta-(2\dot{r}\,\dot{\theta}+r\,\ddot{\theta})\sin\theta,\\ \ddot{y}&=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\sin\theta+(2\dot{r}\,\dot{\theta}+r\,\ddot{\theta})\cos\theta.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

С учетом соотношений (6) система дифференциальных уравнений (5) принимает вид

$$\left.\begin{aligned}(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\cos\theta-(2\dot{r}\,\dot{\theta}+r\,\ddot{\theta})\sin\theta&=-\frac{\nu\cos\theta}{r^2},\\ (\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\sin\theta+(2\dot{r}\,\dot{\theta}+r\,\ddot{\theta})\cos\theta&=-\frac{\nu\sin\theta}{r^2}.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Умножая первое уравнение системы на $\cos\theta$, второе на $\sin\theta$ и складывая, получаем

$$\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-\frac{\nu}{r^2}. \tag{8}$$

Аналогично, умножая первое уравнение на $\sin\theta$, второе на $\cos\theta$ и вычитая, получаем

$$2\dot{r}\,\dot{\theta}+r\,\ddot{\theta}=0. \tag{9}$$

Соответственно необходимо представить начальные условия в полярных координатах:

$$\text{при } t=0 \quad r=a,\ \theta=0,\ \dot{r}=0,\ \dot{\theta}=\frac{v_0}{a}. \tag{10}$$

Теперь необходимо решить систему дифференциальных уравнений (8) и (9), удовлетворяющую начальным условиям (10).

Замечая, что левая часть уравнения (9) представляет выражение $\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$, можем его заменить уравнением

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})=0 \tag{11}$$

или

$$r^2\dot{\theta}=C_1. \tag{12}$$

Из условий (10) видим, что при $t=0$ $r=a$ и $\dot{\theta}=\frac{v_0}{a}$. Следовательно, из уравнения (12)

$$C_1=av_0. \tag{13}$$

Таким образом, уравнение (12) принимает вид

$$r^2\dot{\theta}=av_0, \tag{14}$$

откуда

$$\dot{\theta}=\frac{av_0}{r^2}; \tag{15}$$

и уравнение (8) будет

$$\ddot{r}=\frac{a^2v_0^2}{r^3}-\frac{\nu}{r^2}. \tag{16}$$

Уравнение (16) не содержит θ и непосредственно не включает t. Поэтому, полагая $\dot{r}=p$, это уравнение запишем в виде

$$\frac{dp}{dt}=\frac{dp}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}=p\frac{dp}{dr}=\frac{a^2v_0^2}{r^3}-\frac{\nu}{r^2}$$

или

$$p\frac{dp}{dr}=\frac{a^2v_0^2}{r^3}-\frac{\nu}{r^2}. \tag{17}$$

Разделяя переменные и интегрируя уравнение (17), получаем

$$\frac{p^2}{2}=\frac{\nu}{r}-\frac{a^2v_0^2}{2r^2}+C_2. \tag{18}$$

Из уравнения (18), так как $p=\dot{r}=0$, где $r=a$, имеем:

$$C_2=\frac{v_0^2}{2}-\frac{\nu}{a}. \tag{19}$$

Таким образом, уравнение (18) принимает вид

$$\frac{\dot{r}^2}{2}=\frac{\nu}{r}-\frac{a^2v_0^2}{2r^2}+\frac{v_0^2}{2}-\frac{\nu}{a}$$

или, рассматривая только положительный квадратный корень,

$$\frac{dr}{dt}=\sqrt{\left(v_0^2-\frac{2\nu}{a}\right)+\frac{2\nu}{r}-\frac{av_0^2}{r^2}}. \tag{20}$$

Отсюда можно получить r в виде функции времени t и найти местоположение Земли (или другой планеты) относительно Солнца в любое время. Однако значительно больший интерес представляет описание траектории Земли при ее движении. Для этого необходимо уравнение, содержащее r и θ.

Задача описывается теперь системой уравнений (20) и (15). Дифференциальное уравнение, содержащее r и θ, но не включающее t, может быть получено делением уравнения (20) на уравнение (15), откуда

$$\frac{dr}{d\theta}=r\sqrt{Ar^2+2Br-1}, \tag{21}$$

где

$$A=\frac{1}{a^2}-\frac{2k}{a^3v_0^2},\quad B=\frac{\nu}{a^2v_0^2}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\int\frac{dr}{r\sqrt{Ar^2+2Br-1}}=\int d\theta=\theta+C_3. \tag{22}$$

Применяя подстановку $r=\frac{1}{u}$, $dr=-\frac{du}{u^2}$, имеем:

$$-\int\frac{du}{\sqrt{A+2Bu-u^2}}=\theta+C_3,$$

$$-\int\frac{d(u-B)}{\sqrt{A+B^2-(u-B)^2}}=\theta+C_3,$$

т. е.

$$\arccos\frac{u-B}{\sqrt{A+B^2}}=\theta+C_3. \tag{23}$$

Общее решение

$$u=B+\sqrt{A+B^2}\cos(\theta+C_3)=B\left[1+e\cos(\theta+C_3)\right], \tag{24}$$

где

$$e=\frac{\sqrt{A+B^2}}{B}=\frac{av_0^2}{\nu}-1. \tag{25}$$

Так как $u=\frac{1}{r}$, то

$$r=\frac{\frac{a^2v_0^2}{\nu}}{1+e\cos(\theta+C_3)}. \tag{26}$$

Начальное условие: при $\theta=0$ $r=a$. Отсюда

$$a(1+e\cos C_3)=\frac{a^2v_0^2}{\nu}.$$

Сокращаем на a и переносим единицу в правую часть уравнения:

$$e\cos C_3=\frac{av_0^2}{\nu}-1=e.$$

Сокращая опять обе части равенства на e, получаем $\cos C_3=1$, т. е. $C_3=0$.

Таким образом, искомая зависимость $r=f(\theta)$ будет

$$r=\frac{a^2v_0^2}{\nu(1+e\cos\theta)}.$$

§ 5. СИСТЕМА ДВУХ СВЯЗАННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОНТУРОВ

Задача 192. Две цепи A и B (рис. 140) находятся в магнитной связи при заданном коэффициенте M взаимной индукции. Дано: L_1, R_1 и C_1 — коэффициент самоиндукции, сопротивление и емкость цепи A; L_2, R_2 и C_2 — аналогичные величины для цепи B. Найти закон изменения силы тока i в цепи A, предполагая, что:

а) сопротивления цепей R_1 и R_2 весьма малы;

б) цепи настроены в унисон, т. е. $C_1L_1=C_2L_2$.

Решение. В цепи A возникают силы: электродвижущая сила индукции $-M\frac{di_2}{dt}$, электродвижущая сила самоиндукции $-L\frac{di_1}{dt}$, напряжение конденсатора

$$-\frac{Q}{C_1}=\frac{1}{C_1}\int i_1dt.$$

Отсюда по закону равновесия электродвижущих сил

$$R_1 i_1 = -M\frac{di_2}{dt} - L_1\frac{di_1}{dt} - \frac{1}{C_1}\int i_1 dt. \tag{1}$$

Аналогично для цепи B

$$R_2 i_2 = -M\frac{di_1}{dt} - L_2\frac{di_2}{dt} - \frac{1}{C_2}\int i_2 dt. \tag{2}$$

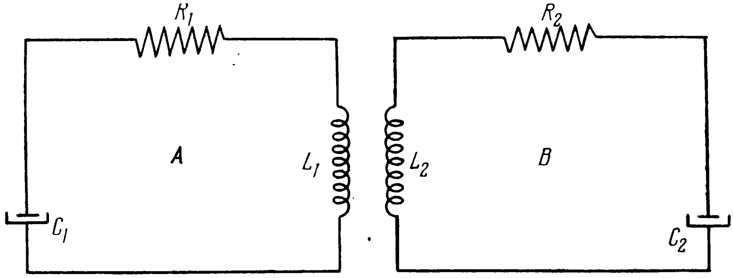

Рис. 140

Из уравнений (1) и (2) получаем систему дифференциальных уравнений процесса

$$\left.\begin{aligned} M\frac{di_2}{dt} + L_1\frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + \frac{1}{C_1}\int i_1 dt = 0,\\ M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + \frac{1}{C_2}\int i_2 dt = 0 \end{aligned}\right\}$$

или, дифференцируя,

$$\left.\begin{aligned} M\frac{d^2 i_2}{dt^2} + L_1\frac{d^2 i_1}{dt^2} + R_1\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1} i_1 = 0,\\ M\frac{d^2 i_1}{dt^2} + L_2\frac{d^2 i_2}{dt^2} + R_2\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2} i_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Это система двух дифференциальных уравнений второго порядка. Исключим из системы (3) величину $\frac{d^2 i_2}{dt^2}$. Тогда

$$(L_1 L_2 - M^2)\frac{d^2 i_1}{dt^2} + L_2 R_1\frac{di_1}{dt} - MR_2\frac{di_2}{dt} + \frac{L_2}{C_1} i_1 - \frac{M}{C_2} i_2 = 0. \tag{4}$$

Дифференцируя уравнение (4), находим

$$(L_1L_2-M^2)\frac{d^3i_1}{dt^3}+L_2R_1\frac{d^2i_1}{dt^2}-MR_2\frac{d^2i_2}{dt^2}+$$

$$+\frac{L_2}{C_1}\cdot\frac{di_1}{dt}-\frac{M}{C_2}\cdot\frac{di_2}{dt}=0. \tag{5}$$

В уравнении (5) заменяем величину $M\frac{d^2i_2}{dt^2}$ выражением из первого уравнения системы (3)

$$M\frac{d^2i_2}{dt^2}=-L_1\frac{d^2i_1}{dt^2}-R_1\frac{di_1}{dt}-\frac{1}{C_1}i_1$$

и получаем

$$(L_1L_2-M^2)\frac{d^3i_1}{dt^3}+(L_2R_1+L_1R_2)\frac{d^2i_1}{dt^2}+$$

$$+\left(\frac{L_2}{C_1}+R_1R_2\right)\frac{di_1}{dt}+\frac{R_2}{C_1}i_1-\frac{M}{C_2}\frac{di_2}{dt}=0. \tag{6}$$

Дифференцируя уравнение (6), находим

$$(L_1L_2-M^2)\frac{d^4i_2}{dt^4}+(L_2R_1+L_1R_2)\frac{d^3i_1}{dt^3}+$$

$$+\left(\frac{L_2}{C_1}+R_1R_2\right)\frac{d^2i_1}{dt^2}+\frac{R_2}{C_1}\cdot\frac{di_1}{dt}-\frac{M}{C_2}\cdot\frac{d^2i_2}{dt^2}=0.$$

Вторично заменяя величину $M\frac{d^2i_2}{dt^2}$ выражением из первого уравнения системы (3), получим

$$(L_1L_2-M^2)\frac{d^4i_1}{dt^4}+(L_2R_1+L_1R_2)\frac{d^3i_1}{dt^3}+$$

$$+\left(\frac{L_1}{C_2}+\frac{L_2}{C_1}+R_1R_2\right)\frac{d^2i_1}{dt^2}+\left(\frac{R_1}{C_2}+\frac{R_2}{C_1}\right)\frac{di_1}{dt}+$$

$$+\frac{1}{C_1C_2}i_1=0. \tag{7}$$

Сокращаем уравнение (7) на L_1L_2:

$$\left(1-\frac{M^2}{L_1L_2}\right)\frac{d^4i_1}{dt^4}+\left(\frac{R_1}{L_1}+\frac{R_2}{L_2}\right)\frac{d^3i_1}{dt^3}+$$

$$+\left(\frac{1}{C_2L_2}+\frac{1}{C_1L_1}+\frac{R_1}{L_1}\cdot\frac{R_2}{L_2}\right)\frac{d^2i_1}{dt^2}+$$

$$+\left(\frac{R_1}{L_1}\cdot\frac{1}{C_2L_2}+\frac{R_2}{L_2}\cdot\frac{1}{C_1L_1}\right)\frac{di_1}{dt}+\frac{1}{C_1L_1}\cdot\frac{1}{C_2L_2}i_1=0. \quad (8)$$

Уравнение (8) представляет неполное линейное однородное дифференциальное уравнение четвертого порядка, решение которого определит силу тока i_1 в цепи A.

Так как цепи настроены в унисон, т. е. $C_1L_1=C_2L_2$, и сопротивлениями R_1 и R_2 можно пренебречь, то уравнение (8) примет вид

$$\left(1-\frac{M^2}{L_1L_2}\right)\frac{d^4i_1}{dt^4}+\frac{2}{C_1L_1}\cdot\frac{d^2i_1}{dt^2}+\frac{1}{C_1^2L_1^2}i_1=0. \quad (9)$$

Соответствующее характеристическое уравнение

$$\left(1-\frac{M^2}{L_1L_2}\right)r^4+\frac{2}{C_1L_1}r^2+\frac{1}{C_1^2L_1^2}=0. \quad (10)$$

Обозначим для краткости:

$$\frac{M^2}{L_1L_2}=k^2; \quad \frac{1}{C_1L_1}=n^2.$$

Тогда уравнение (10) примет вид

$$(1-k^2)r^4+2n^2r^2+n^4=0. \quad (11)$$

Корни уравнения (11):

$$r_1=\frac{ni}{\sqrt{1+k}}, \quad r_2=-\frac{ni}{\sqrt{1+k}},$$

$$r_3=\frac{ni}{\sqrt{1-k}}, \quad r_4=-\frac{ni}{\sqrt{1-k}}.$$

Искомое общее решение

$$i=C_1\sin\frac{n}{\sqrt{1+k}}t+C_2\cos\frac{n}{\sqrt{1+k}}t+$$

$$+C_3\sin\frac{n}{\sqrt{1-k}}t+C_4\cos\frac{n}{\sqrt{1-k}}t.$$

§ 6. ИЗМЕНЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЛИНИИ ПО ВРЕМЕНИ (ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ К СИСТЕМЕ ОБЫКНОВЕННЫХ УРАВНЕНИЙ)

Задача 193. Линия длиной l с сопротивлением R и утечкой G на единицу длины свободна от искажений (т. е. $\frac{R}{L}=\frac{G}{C}$, где L — самоиндукция и C — емкость на единицу длины) и заряжена до потенциала U_0. Конец линии ($x=l$) изолирован. В момент времени $t=0$ начало линии ($x=0$) заземляется. Найти закон изменения потенциала в любой точке линии в зависимости от времени t.

Решение. Прохождение электрического тока по проводу с равномерно распределенными на единицу длины сопротивлением R, самоиндукцией L, емкостью C и утечкой G характеризуется силой тока $i(x, t)$ и напряжением $U(x, t)$, которые являются функциями положения точки x и времени t.

Величина потерь пропорциональна напряжению в рассматриваемой точке провода.

Величины $i(x, t)$ и $U(x, t)$ связаны следующей системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial i}{\partial x}+C\frac{\partial U}{\partial t}+GU=0,\\ &\frac{\partial U_x}{\partial x}+L\frac{\partial i}{\partial t}+Ri=0, \end{aligned}\right\} \tag{A}$$

называемой системой телеграфных уравнений.

Из системы (A) легко получается уравнение силы тока

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}=CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}+(CR+GL)\frac{\partial i}{\partial t}+GRi \tag{B$_1$}$$

и уравнение напряжения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=CL\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+(CR+GL)\frac{\partial U}{\partial t}+GRU. \tag{B$_2$}$$

Каждое из них называется телеграфным уравнением.

Если можно пренебречь потерями через изоляцию и сопротивление очень мало, т. е. $G\approx 0$, $R\approx 0$, то приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} \tag{D$_1$}$$

и к уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \tag{D$_2$}$$

где $a^2 = \frac{1}{CL}$. Каждое из этих уравнений называется волновым уравнением.

Потенциал $U(x, t)$ и сила тока $i(x, t)$ в кабеле удовлетворяют системе телеграфных уравнений (A) при $0 < x < l$ и $0 < t < +\infty$.

Из данных задачи вытекают начальные условия

$$U(x, 0) = U_0, \quad i(x, 0) = 0 \tag{1}$$

и граничные условия

$$U(0, t) = 0 \text{ при } t > 0, \quad i(l, t) = 0. \tag{2}$$

Кроме того, из первого уравнения системы (A), которое должно оставаться справедливым из физических соображений при $t = 0$, следует еще одно начальное условие для потенциала

$$\left.\frac{\partial i}{\partial x}\right|_{t=0} + C \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0} + GU(x, 0) = 0$$

или с учетом соотношения (1) имеем:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0} = -\frac{G}{C} U_0. \tag{3}$$

Из второго уравнения системы (A), которое должно быть справедливым и при $x = l$, следует еще одно граничное условие для потенциала

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=l} + L \left.\frac{\partial i}{\partial t}\right|_{x=l} + Ri(l, t) = 0$$

или с учетом соотношения (2) имеем:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=l} = 0. \tag{4}$$

Итак, задача сводится к интегрированию телеграфного уравнения для потенциала $U(x, t)$:

$$a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right) \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{RG}{LC} U \tag{5}$$

при начальных условиях

$$U(x, 0) = U_0, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0} = -\frac{G}{C} U_0 \qquad (0 < x < l)$$

и граничных условиях

$$U(0, t)=0 \text{ при } t>0, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=l}=0.$$

Пусть

$$U(x, t)=e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)t} V(x, t), \tag{6}$$

где $V(x, t)$ — новая искомая функция.

Так как кабель — линия без искажений, то $\frac{R}{L}=\frac{G}{C}$ и получим для функции $V(x, t)$ волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}. \tag{7}$$

Из начальных и граничных условий для функции $U(x, t)$ вытекают соответствующие условия для функции $V(x, t)$, а именно:

$$V(x, 0)=U_0, \quad \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{t=0}=0 \qquad (0<x<l); \tag{8}$$

$$V(0, t)=0, \quad \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=l}=0. \tag{9}$$

Решение дифференциального уравнения в частных производных (7) сведем к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для этой цели воспользуемся методом разделения переменных, т. е. решение будем искать в виде

$$V(x, t)=X(x)T(t). \tag{10}$$

Требуем, чтобы функция $X(x)$ удовлетворяла граничным условиям (9), а также, чтобы $X(x)T(t)\not\equiv 0$.

Подставляем равенство (10) в уравнение (7), откуда

$$XT''=a^2TX''$$

и после разделения переменных получаем уравнение

$$\frac{T''}{T}=a^2\frac{X''}{X}. \tag{11}$$

Равенство (11) возможно лишь в случае, если каждое из этих отношений равно постоянной. Очевидно, что если эта постоянная не отрицательна, то граничным условиям (9) удовлетворяла бы только функция, тождественно равная нулю.

Пусть λ^2 — общая постоянная. Тогда

$$\left.\begin{aligned} &X'' + \frac{\lambda^2}{a^2} X = 0, \\ &T'' + \lambda^2 T = 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Таким образом, уравнение задачи в частных производных (3) приведено к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (12).

Общие решения этих уравнений

$$\left.\begin{aligned} &X = A\cos\frac{\lambda}{a}x + B\sin\frac{\lambda}{a}x, \\ &T = A^*\cos\lambda t + B^*\sin\lambda t. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Из условий (9) следует:

$$A = 0, \quad \lambda = \frac{2n+1}{2l}a\pi.$$

Из начального условия $\left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$ вытекает, что $B^* = 0$.

Итак,

$$V(x, t) = BA^*\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l} =$$

$$= C\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x\cos\frac{2n+1}{2l}\pi at, \tag{14}$$

где $C = BA_0^*$.

Функция (14) удовлетворяет всем условиям задачи, кроме

$$V(x, 0) = C\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x \neq \bar{U}_0. \tag{15}$$

Чтобы удовлетворить и это условие, будем искать решение задачи в виде ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\cos\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t, \tag{16}$$

в котором коэффициенты C_n выбраны так, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x = U_0. \tag{17}$$

Для нахождения этих коэффициентов рассмотрим нечетную функцию

$$f(x)=\begin{cases} U_0 \text{ при } 0<x<2l, \\ -U_0 \text{ при } -2l<x<0, \end{cases} \tag{18}$$

а вне интервала $(-2l, 2l)$ продолженную периодически с периодом $4l$.

Коэффициенты Фурье этой функции

$$b_n=\frac{2U_0}{2l}\int_0^{2l}\sin\frac{n\pi}{2l}x\,dx=2U_0\frac{1-(-1)^n}{n\pi}.$$

Поэтому

$$f(x)=\frac{2U_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi}{2l}x=$$

$$=\frac{4U_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x. \tag{19}$$

Отсюда следует, что коэффициенты C_n должны быть коэффициентами Фурье функции $f(x)$.

Если функцию $f(x)$ найти трудно, то можно было бы тогда функцию $V(x, 0)$ разложить в интервале $(0, l)$ в ряд по функциям $\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$.

Если функция $V(x, 0)$ удовлетворяет некоторым ограничениям, то такое разложение возможно и C_n будут его коэффициентами.

Пусть теперь далее

$$C_n=\frac{4U_0}{\pi(2n+1)}. \tag{20}$$

Тогда

$$\frac{4U_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x=U_0, \qquad 0<x<2l.$$

Следовательно,

$$V(x, t)=\frac{4U_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\cos\frac{(2n+1)a\pi}{2l}t. \tag{21}$$

Остается проверить, удовлетворяет ли полученное решение уравнения (21) всем условиям задачи.

Представим функцию $V(x, t)$ в виде

$$V(x, t)=\varphi(x+at)+\varphi(x-at), \tag{22}$$

где

$$\varphi(x+at)=\frac{2U_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\frac{(2n+1)\pi(x+at)}{2l},$$

$$\varphi(x-at)=\frac{2U_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\frac{(2n+1)\pi(x-at)}{2l}.$$

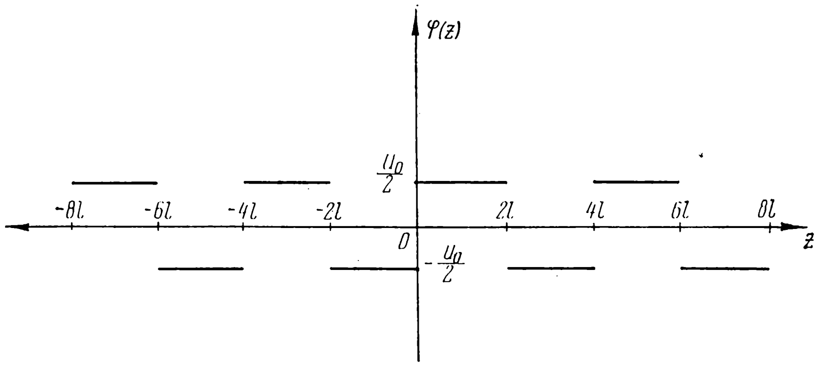

Рис. 141

Из соотношений (18) и (19) следует, что $\varphi(z)=\frac{1}{2}f(z)$, т. е.

$$f(z)=\begin{cases}-\dfrac{U_0}{2} & \text{при } -2l<z<0,\\ \dfrac{U_0}{2} & \text{при } 0<z<2l,\end{cases} \tag{23}$$

а вне интервала $(-2l, 2l)$ продолжается периодически с периодом $4l$ (рис. 141).

Значения функции $V(x, t)$ представлены на рис. 142.

Во всех точках плоскости (x, t), кроме лежащих на прямых $x\pm at=2nl$, где $n=0, \pm1, \pm2, \dots$, называемых характеристиками данного уравнения, функция $V(x, t)$ (21) удовлетворяет уравнению (7), начальным условиям (8) и граничным условиям (9).

Учитывая соотношение (6), искомая функция

$$U(x, t) = e^{-\frac{R}{L}t}\, V(x, t) =$$

$$= \frac{4U_0}{\pi} e^{-\frac{R}{L}t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x \cos \frac{(2n+1)a\pi}{2l} t.$$

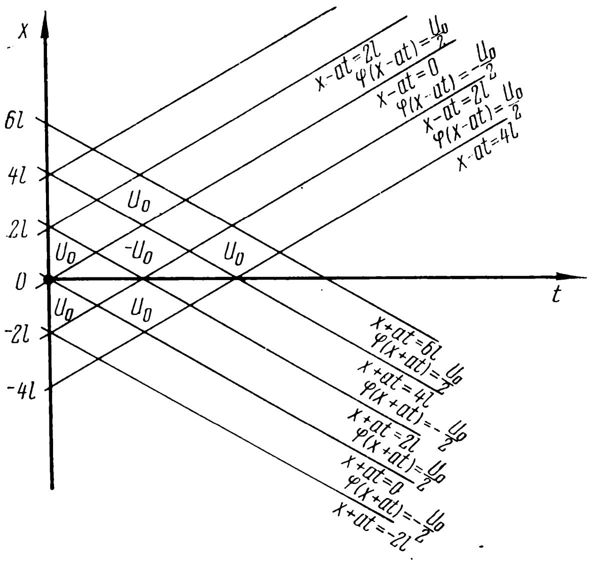

Рис. 142

§ 7. СТАЦИОНАРНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ТЕОРИИ СИСТЕМ СОВРЕМЕННОЙ ТЕХНИКИ И ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

Системы автоматического регулирования

Под термином *система* подразумевается взаимосвязь самых различных элементов.

Физическая система, характеристики которой не изменяются по времени, называется *стационарной*. Если же они изменяются очень медленно, то система называется *квазистационарной*, и соотношения между различными свойствами системы приблизительно такие, как в стационарном состоянии.

Линейными стационарными системами называются такие системы, свойства которых (упругость, масса и коэффициент трения в механической системе, емкость, индуктивность и активное сопротивление в электрической системе) не зависят от величин, характеризующих состояние системы (от смещений и скоростей в случае механической системы, напряжений и токов в случае электрической системы).

Нелинейной системой называется система, которая содержит хотя бы одно звено, описываемое нелинейными уравнениями.

Процессы в линейных системах описываются линейными дифференциальными уравнениями (откуда и произошло их название, так как параметры системы, которые входят в коэффициенты уравнений, не зависят от переменных и их производных, определяющих состояние системы).

В теории систем современной техники и естествознания стационарные линейные дифференциальные уравнения находят широкое применение. Особо велико их значение в автоматическом регулировании. В частности, эти уравнения описывают действие электромеханических *следящих систем*, служащих для управления положением тела в пространстве, так, чтобы оно с требуемой точностью копировало (отслеживало) положение другого тела и имело возможность изменить положение некоторого элемента в зависимости от характера сигнала управления (задающего сигнала).

Примерами следящих систем являются: автоматический потенциометр для измерения температуры электропечи, системы управления антеннами радиолокационных станций, автопилоты (на самолетах), гирорулевые системы (на кораблях) и т. д. Во всех этих системах регулируемой величиной является положение механического объекта.

В более широком смысле следящими системами называют любую систему автоматического регулирования, предназначенную для того, чтобы какая-либо выходная величина с заданной точностью повторяла изменения входной величины часто другой физической природы.

Поэтому следящие системы находят самое широкое применение: в копировальных станках, у которых фреза или резец станка «следит» за перемещением щупа по копиру; в артиллерии, где орудие или орудийная башня «следит» за рукояткой управления, перемещаемой наводчиком, и т. д.

Составление дифференциальных уравнений систем автоматического регулирования

Системы автоматического регулирования в большинстве случаев являются сложными устройствами, динамика которых описывается совокупностью дифференциальных уравнений.

Для получения такой совокупности необходимо составить дифференциальное уравнение для каждого элемента автоматической системы так, чтобы общее число уравнений было не меньше числа независимых обобщенных координат,* определяющих состояние системы.

При составлении дифференциального уравнения каждого элемента необходимо выявить физический закон, определяющий его поведение. Например, закон сохранения вещества (для объектов регулирования уровня давления), закон сохранения энергии (для объектов регулирования температуры), закон равновесия моментов (для объектов регулирования скорости или угла поворота), закон равновесия электродвижущих сил (для электрических цепей) и т. д.

Математическая формулировка соответствующего физического закона является исходным дифференциальным уравнением данного элемента автоматической системы.

Так, для электродвигателя закон равновесия моментов, приведенных к исполнительной оси, т. е. на его валу, представляется уравнением

$$J\frac{d\omega}{dt}=M_{\text{вращ}}-M_{\text{торм}}, \qquad (1)$$

где J — приведенный момент инерции двигателя, ω — угловая скорость двигателя, $M_{\text{вращ}}$ — вращающий момент двигателя, $M_{\text{торм}}$ — тормозной момент внешних сил (момент нагрузки).

Далее необходимо определить факторы, от которых зависят переменные, входящие в это дифференциальное уравнение. В условиях уравнения (1) надо выяснить, от каких величин зависят и какими соотношениями определяются вращающий момент двигателя $M_{\text{вращ}}$ и тормозной момент $M_{\text{торм}}$ на его валу.

Следующим этапом является линеаризация полученных уравнений, допустимая при отсутствии разрывных, многозначных или резко изгибающихся характеристик, и если уравнения являются стационарными, т. е. справедливы в течение всего времени регулирования.

В итоге линеаризации получается совокупность дифференциальных уравнений, описывающих движение рассматриваемой системы:

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11}(p)x_1+a_{12}(p)x_2+\ldots+a_{1k}(p)x_k=f_1(t),\\
a_{21}(p)x_1+a_{22}(p)x_2+\ldots+a_{2k}(p)x_k=f_2(t),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{k1}(p)x_1+a_{k2}(p)x_2+\ldots+a_{kk}(p)x_k=f_k(t),
\end{array}\right\} \qquad (2)$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — обобщенные координаты системы, в том числе регулируемая величина $y(t)$ и ошибка $x(t)$; $p=\frac{d}{dt}$ — алгебраизи-

* *Обобщенными координатами* называются величины, характеризующие изменение положения системы. Обобщенными координатами могут быть прогибы отдельных точек, углы поворота узлов, взаимные углы поворота стержня и т. п.

рованный оператор дифференцирования; $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_k(t)$ — функции времени, представляющие управляющие и возмущающие воздействия (будем считать, что к системе приложены только два воздействия — управляющее $h(t)$ и возмущающее $f(t)$); $a_{ij}(p)$ — некоторые многочлены оператора p.

Совокупность дифференциальных уравнений (2) может быть разрешена относительно любой обобщенной координаты.

Обычно это производится относительно отклонения регулируемой величины от заданного значения, т. е. ошибки (рассогласования) $x(t)$, или относительно регулируемой величины $y(t)$.

В первом случае получается дифференциальное уравнение

$$D(p)x(t)=Q(p)h(t)+R(p)f(t). \tag{3}$$

Здесь характеристический многочлен n-й степени

$$D(p)=a_0p^n+a_1p^{n-1}+a_2p^{n-2}+\ldots+a_{n-1}p+a_n, \tag{4}$$

где a_0, a_1, a_2, ..., a_n — постоянные коэффициенты линеаризованной системы, характеризует свободное движение регулируемого объекта с регулятором; многочлен n-й степени

$$Q(p)=c_0p^n+c_1p^{n-1}+c_2p^{n-2}+\ldots+c_{n-1}p+c_n, \tag{5}$$

где c_0, c_1, c_2, ..., c_n — постоянные коэффициенты, определяет влияние управляющего воздействия $h(t)$ (т. е. требуемого закона изменения регулируемой величины $y(t)$) на характер изменения ошибки $x(t)$; $R(p)$ — многочлен, определяющий влияние возмущающего воздействия $f(t)$ на характер изменения ошибки $x(t)$.

Во втором случае при решении системы дифференциальных уравнений (2) относительно регулируемой величины $y(t)$ подстановка выражения для ошибки $x(t)=h(t)-y(t)$ в равенство (3) дает уравнение движения регулируемого объекта:

$$D(p)y(t)=S(p)h(t)-R(t)f(t), \tag{6}$$

где $S(p)=D(p)-Q(p)$ — многочлен степени $m\leqslant n$:

$$S(p)=b_0p^m+b_1p^{m-1}+b_2p^{m-2}+\ldots+b_{m-1}p+b_m.$$

Если функции времени, стоящие в правой части дифференциальных уравнений (3) и (6), заданы, то эти уравнения интегрируются относительно искомых функций времени, т. е. можно определить изменение ошибки регулирования во времени $x(t)$ из уравнения (3) и движение регулируемого объекта с регулятором $y(t)$ из уравнения (6).

Следящая система

Следящая система работает на принципе обратной связи — путем сравнения заданного положения объекта с действительным его положением и использования фиксированных отклонений для автоматического регулирования объекта. Желательное положение объекта задается значением напряжения или силы тока, плотности излучения, перемещения и других физических величин.

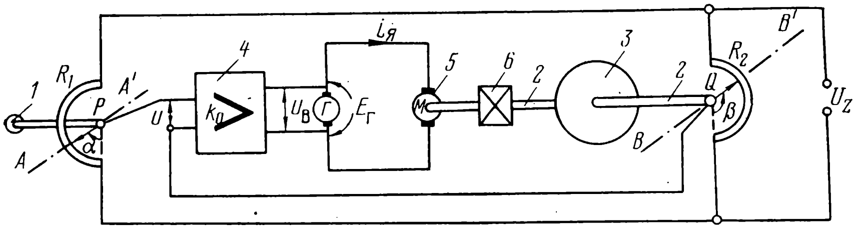

Рис. 143

Обозначим элементы схемы электрической следящей системы следующим образом: *1* — маховичок датчика; *2* — ведомый вал; *3* — регулируемый объект; *4* — усилитель; *5* — электродвигатель постоянного тока; *6* — шестеренная передача; R_1 — движковый реостат датчика; R_2 — движковый реостат ведомого вала; U — напряжение задания (т. е. напряжение неуравновешения моста сопротивления, регулирующего усилитель); U_z — напряжение питания моста.

Пусть имеется некоторая ось AA' (рис. 143), которую назовем *задающей*. Угол поворота α этой оси задается извне и является установленной величиной.

Задача следящей системы состоит в том, чтобы угол поворота β другой оси BB', которую назовем *приемной*, равнялся α. Величина угла α может быть представлена в общем случае любой функцией времени. Ось BB' должна автоматически следовать за осью AA'.

В качестве измерительного органа системы автоматического регулирования применена цепь, состоящая из двух потенциометров (или реостатов) R_1 и R_2, движки которых укреплены на осях AA' и BB'.

Если $\alpha \neq \beta$, то потенциалы движков U и U_z равны и их разность ΔU (т. е. напряжение между движками P и Q) равна нулю. Если $\alpha = \beta$, то напряжение $\Delta U = U - U_z \neq 0$ приложено к входным зажимам усилителя с коэффициентом усиления k_0. На выходе усилителя образуется напряжение $U_в = k_0 \Delta U$, вызывающее ток $i_в$ в обмотке возбудителя генератора $Г$.

Появление электродвижущей силы генератора $E_г$ вызывает ток $i_я$ в цепи якоря двигателя M независимого возбуждения. Последний через шестеренную передачу с передаточным числом q вращает приемную ось до тех пор, пока ΔU не обратится в нуль. Тогда напряжение $U_в$ станет равным нулю и система придет к состоянию равновесия.

В структурной схеме системы регулирования (рис. 143) датчик *1* в виде круглого движкового реостата R_1 предназначен для установки желательного углового положения α, которое должен принять ведомый вал *2*, передвигающий регулируемый объект *3*. Каждому углу α соответствует определенное положение движка реостата R_1. На ведомом валу *2*, имеющем действительное угловое положение β, находится второй движковый реостат R_2, который совместно с реостатом R_1 образует мостовую схему. Если положения α и β движков двух реостатов R_1, R_2 не совпадают, то мост не находится в равновесии и на его диагонали появляется напряжение U, управляющее усилителем *4*.

Усилитель за счет питающей энергии производит ток $i_я$, необходимый для приведения в движение двигателя *5*.

Двигатель постоянного тока приводит в движение при помощи передачи *6* ведомый вал и работает до тех пор, пока движки двух реостатов R_1, R_2 не займут тождественного положения $\alpha=\beta$.

Напряжение U и ток $i_я$ становятся равными нулю, и двигатель останавливается.

Такого рода структурная схема позволяет точно регулировать положение больших и инертных масс часто на большие расстояния при небольшой затрате энергии (перевод движка реостата R_1).

В следящей системе замеряются физические величины, подлежащие контролю (выход информации), и этот замер сопоставляется с другими физическими величинами (входная информация). Разница между выводом и вводом информации называется *погрешностью по регулирующему воздействию* и используется, чтобы вызвать изменение физической системы с целью минимизации этой погрешности или сведения ее к нулю.

В частности, рассогласование (ошибка) системы

$$\Delta U = U - U_z$$

представляет разность между напряжением задания U и напряжением питания моста U_z.

Задача 194. Для следящей системы (рис. 144) определить угол поворота командной оси как функцию времени при следующих параметрах: напряжение аккумуляторной батареи $E_{п.т}=4$ *в*, коэффициент усиления линейного усилителя $k_0=10$ *в/в* (вольтов/вольт), коэффициент пропорциональности вращения $k_{вр}=1$ *кГ·м/а*, самоиндукция якоря $L_я=0{,}02$ *гн*, сопротивление якоря $R_я=0{,}74$ *ом*, осевой момент инерции вала $J=0{,}5$ *кГ·м·сек*^{2}, коэффициент отношения угловой скорости к напряжению якоря $K_я=6{,}43$ *в/рад/сек*, коэффициент вязкого затухания $C=0{,}5$ *кГ·м/рад*.

Решение. В структурной схеме следящей системы (рис. 144) показаны усилитель, двигатель постоянного тока и два потенциометра. При такой схеме соединения потенциометр выхода можно расположить перед входным потенциометром.

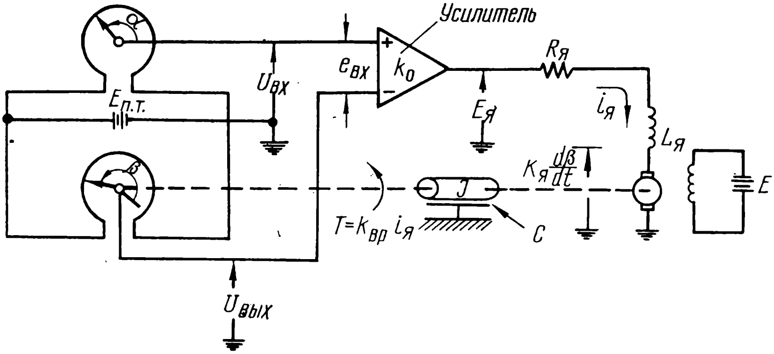

Рис. 144

Угол поворота β командной оси, замеренный вторым потенциометром,

$$\nu_{вых} = \beta \cdot E_{п.т}, \tag{1}$$

а угол поворота α исполнительной оси можно вручную установить равным заданному углу при помощи вращающего вала входного потенциометра

$$\nu_{вх} = \alpha E_{п.т}. \tag{2}$$

Рассогласование представляет разность между выражениями (1) и (2), т. е.

$$e = \nu_{вх} - \nu_{вых}. \tag{3}$$

Напряжение якоря мотора получается путем усиления рассогласования

$$E_я = k_0 e \tag{4}$$

и связано с угловой скоростью мотора зависимостью

$$E_я = R_я i_я + L_я \frac{di_я}{dt} + K_я \frac{d\beta}{dt},$$

где $R_я$ — сопротивление якоря; $L_я$ — самоиндукция якоря; $i_я$ — ток якоря двигателя; $K_я$ — коэффициент соотношения угловой скорости и напряжения якоря.

Пусковой (вращающий) момент, приложенный к валу двигателя, является функцией силы тока якоря

$$T=k_{\text{вр}}i_{\text{я}}$$

и, когда этот момент действует на вал двигателя, вращение вала описывается дифференциальным уравнением

$$T=k_{\text{вр}}i_{\text{я}}=J\frac{d^2\beta}{dt^2}+C\frac{d\beta}{dt},$$

где J — момент инерции всех вращающихся частей, приведенных к валу двигателя; C — коэффициент вязкого затухания.

Очевидно, что уравнения, описывающие работу следящей системы, будут

$$J\frac{d^2\beta}{dt^2}+C\frac{d\beta}{dt}-k_{\text{вр}}i_{\text{я}}=0;$$

$$L_{\text{я}}\frac{di_{\text{я}}}{dt}+R_{\text{я}}i_{\text{я}}+K_{\text{я}}\frac{d\beta}{dt}=E_{\text{я}}.$$

Кроме того, согласно уравнениям (1)—(4), напряжение якоря $E_{\text{я}}$ может быть представлено в виде

$$E_{\text{я}}=k_0(\nu_{\text{вх}}-\nu_{\text{вых}})=E_{\text{п.т}}k_0(\alpha-\beta)$$

и поэтому система дифференциальных уравнений, описывающая работу следящей системы, будет представлена явными функциями углов поворота осей и силы тока якоря

$$\left.\begin{aligned} J\frac{d^2\beta}{dt^2}+C\frac{d\beta}{dt}-k_{\text{вр}}i_{\text{я}}&=0,\\ L_{\text{я}}\frac{di_{\text{я}}}{dt}+R_{\text{я}}i_{\text{я}}+K_{\text{я}}\frac{d\beta}{dt}+E_{\text{п.т}}k_0\beta&=E_{\text{п.т}}k_0\alpha.\end{aligned}\right\}$$

Дифференциальные уравнения движения с учетом условий задачи примут вид

$$\left.\begin{aligned} 0{,}5\frac{d^2\beta}{dt^2}+0{,}5\frac{d\beta}{dt}-i_{\text{я}}&=0,\\ 0{,}02\frac{di_{\text{я}}}{dt}+0{,}74i_{\text{я}}+6{,}43\frac{d\beta}{dt}+40\beta&=40\alpha.\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Пусть оператор $\frac{d}{dt}=D$. Тогда в операторной форме система (5) запишется

$$\left.\begin{aligned}&(D^2+D)\beta-2i_я=0;\\&(321{,}5D+2000)\beta+(D+37)i_я=2000\alpha.\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

Характеристический определитель системы

$$f(D)=\begin{vmatrix}D^2+D & -2\\ 321{,}5D+2000 & D+37\end{vmatrix}=D^3+38D^2+680D+4000=0$$

представляет уравнение третьей степени с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение

$$r^3+38r^2+680r+4000=0$$

имеет корни

$$r_1=-10;\quad r_{2,\,3}=-14\pm14{,}28i.$$

Общие решения соответствующих однородных дифференциальных уравнений (6) будут

$$\left.\begin{aligned}&\beta_{одн}=C_{11}e^{-10t}+e^{-14t}(C_{12}\sin 14{,}28t+C_{13}\cos 14{,}28t),\\&i_я^{одн}=C_{21}e^{-10t}+e^{-14t}(C_{22}\sin 14{,}28t+C_{23}\cos 14{,}28t).\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

Число произвольных постоянных можно уменьшить, если использовать первое уравнение системы (6). С помощью решений (7) и их соответствующих производных получаем

$$0=(90C_{11}-2C_{21})e^{-10t}+(385{,}72C_{13}-22C_{12}-2C_{22})e^{-14t}\sin 14{,}28t-$$
$$-(385{,}72C_{12}+22C_{13}+2C_{23})e^{-14t}\cos 14{,}28t,$$

откуда, приравнивая соответствующие коэффициенты и сокращая полученные равенства на 2, имеем

$$\left.\begin{aligned}45C_{11}-C_{21}=0;\\192{,}86C_{13}-11C_{12}-C_{22}=0;\\-192{,}86C_{12}-11C_{13}-C_{23}=0\end{aligned}\right\}$$

или

$$\begin{aligned}&C_{21}=45C_{11},\\&C_{22}=192{,}86C_{13}-11C_{12},\\&C_{23}=-192{,}86C_{12}-11C_{13}.\end{aligned}$$

Тогда общие решения соответствующих однородных уравнений (6) принимают вид

$$\left.\begin{aligned}&\beta_{одн}=C_{11}e^{-10t}+e^{-14t}(C_{12}\sin 14{,}28t+C_{13}\cos 14{,}28t),\\&i_я^{одн}=45C_{11}e^{-10t}+(192{,}86C_{12}-11C_{13})e^{-14t}\sin 14{,}28t-\\&\quad-(192{,}86C_{12}+11C_{13})e^{-14t}\cos 14{,}28t.\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

Пусть частные решения системы неоднородных дифференциальных уравнений (7)

$$\beta_{\text{частн}}=A, \quad i_{\text{я частн}}=B.$$

Подставляя их в исходную систему дифференциальных уравнений (6), получаем

$$\left.\begin{aligned}-2B&=0;\\ 2000A+37B&=2000\alpha,\end{aligned}\right\}$$

откуда

$$A=\alpha, \quad B=0. \tag{9}$$

Таким образом, общее решение для угла поворота командной оси получается путем суммирования соответствующих уравнений (8) и (9):

$$\beta=C_{11}e^{-10t}+e^{-14t}(C_{12}\sin 14{,}28t+C_{13}\cos 14{,}28t)+\alpha.$$

Начальные условия: при $t=0$ $\beta=0$, $\frac{d\beta}{dt}=0$, $\frac{d^2\beta}{dt^2}=0$.

Отсюда получаем систему алгебраических уравнений для определения постоянных интегрирования

$$\left.\begin{aligned}C_{11}+C_{13}&=-\alpha;\\ -10C_{11}+14{,}28C_{12}-14C_{13}&=0;\\ 100C_{11}-400C_{12}-8C_{13}&=0.\end{aligned}\right\}$$

Решение этой системы

$$C_{11}=-1{,}82\alpha; \quad C_{12}=-0{,}471\alpha; \quad C_{13}=0{,}82\alpha.$$

Частное решение для угла поворота β командной оси принимает вид

$$\beta=\alpha\,[1-1{,}82e^{-10t}+(0{,}82\cos 14{,}28t-0{,}471\sin 14{,}28t)e^{-14t}].$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

I. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1. Определить работу, которую нужно затратить, чтобы насыпать из песка конус, радиус основания которого $R=1{,}2$ *м*, а высота $h=1$ *м*. Удельный вес песка $\gamma=2$ *Г/см*³. Песок поднимают с поверхности Земли.

Ответ: $A \approx 754$ *кГм*.

2. Концы каната цепного моста находятся на высоте $H=5$ *м*, а середина на высоте $h=4$ *м* от проезжей части моста. Длина моста $2l=20$ *м*. Найти кривую свешивания каната.

Ответ: парабола $y-4=\dfrac{x^2}{100}$.

3. Пластинка, имеющая форму половины эллипса, погружена вертикально в жидкость так, что малая ось $2b$ лежит на поверхности жидкости. Найти давление на стороны этой фигуры, если длина погруженной полуоси эллипса равна a, а удельный вес жидкости γ.

Ответ: дифференциальное уравнение задачи

$$dp=\frac{2b\gamma}{a}x\sqrt{a^2-x^2}\,dx;$$

при $x=a$ $\quad p=\dfrac{2}{3}b\gamma a^2$

4. Ракета с начальной массой M_0 *г* взлетает с Земли в вертикальном направлении. Газ выбрасывается постоянными долями a *Г/сек* и с постоянной скоростью b *см/сек* относительно ракеты ($a>0$; $b>0$). На ракету действует постоянное гравитационное поле.

1) Показать, что уравнение движения

$$(M_0-at)\frac{dV}{dt}-ab=-g(M_0-at);$$

2) найти скорость ракеты в любое время $t<\dfrac{M_0}{a}$ после старта с Земли, принимая начальную скорость ракеты равной нулю;

3) определить высоту подъема ракеты в момент t.

Ответы: 2) $V=b\ln\left(\dfrac{M_0}{M_0-at}\right)-gt,\ 0\leqslant t<\dfrac{M_0}{a}$;

3) $x=bt-\dfrac{b}{a}(M_0-at)\ln\left(\dfrac{M_0}{M_0-at}\right)-\dfrac{1}{2}gt^2,\ 0\leqslant t<\dfrac{M_0}{a}$.

5. Легкое тело массы m падает с высоты 250 *м* под действием силы тяжести, встречая противодействие силы трения воздуха. Предполагая, что сила трения пропорциональна скорости (коэффициент пропорциональности k), установить:

1) через сколько секунд после начала падения тело достигнет Земли;

2) закон движения $h=f(t)$.

Ответ: 1) $t=\frac{m}{k}\ln\frac{g}{g-\frac{k}{m}v}$,

2) $h=\frac{mg}{k}t-\frac{m^2g}{k^2}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$.

6. Шар массы m падает свободно без начальной скорости под действием силы тяжести из точки O, которую примем за начало координат. Сопротивление воздуха F пропорционально скорости падения, т. е. $F=-kv$ (k — коэффициент пропорциональности). Найти закон движения шара.

Ответ: $y=\frac{g}{n}t-\frac{g}{n^2}(1-e^{-nt})$.

7. Материальная точка массы m брошена вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости движения.

Найти: 1) время t_1 подъема точки до наибольшей высоты;

2) наибольшую высоту h подъема точки;

3) скорость v_2 точки в момент ее падения на Землю;

4) время t_2 падения материальной точки на Землю.

Ответы: 1) $m\frac{dv}{dt}=-mg-kv^2$;

$$t=\frac{1}{\sqrt{ag}}\left(\operatorname{arctg} v_0\sqrt{\frac{a}{g}}-\operatorname{arctg} v\sqrt{\frac{a}{g}}\right),\quad a=\frac{k}{m};$$

$$\text{при } v=0 \quad t_1=\frac{1}{\sqrt{ag}}\operatorname{arctg} v_0\sqrt{\frac{a}{g}};$$

2) $s=\frac{1}{2}a\ln\frac{g+av_0^2}{g+av^2}$; при $v=0$ $h=\frac{1}{2}a\ln\frac{g+av_0^2}{g}$;

3) при падении $\frac{dv}{dt}=g-av^2$, $s=\frac{1}{2}a\ln\frac{g}{g-av^2}$;

$$\text{при } s=h \quad v_2=v_0\sqrt{\frac{g}{g+av_0^2}};$$

4) $t=\frac{1}{2\sqrt{ag}}\ln\frac{\sqrt{g}+v\sqrt{a}}{\sqrt{g}-v\sqrt{a}}$;

при $v=v_2$ $t_2=\frac{1}{\sqrt{ag}}\ln\frac{v_0\sqrt{a}+\sqrt{g+av_0^2}}{\sqrt{g}}$; $v_2<v_0$, $t_2>t_1$.

8. Период распада радия 1600 лет. В настоящее время имеется 500 *мг*. Какое количество останется через 250 лет?

Ответ: 449 *мг*.

9. За 30 дней распалось 50% первоначального количества радиоактивного вещества. Через сколько времени останется 1% первоначального количества вещества?

Ответ: $t=200$ дней.

10. В куске горной породы содержится 100 *мг* урана и 14 *мг* уранового свинца. Определить возраст горной породы, если известно, что уран распадается наполовину за $4{,}5\cdot10^9$ лет и при полном распаде 238 *г* урана образуется 206 *г* уранового свинца. Принять, что в начальный момент образования горная порода не содержала свинца, и пренебречь наличием промежуточных радиоактивных продуктов между ураном и свинцом ввиду их значительно более быстрого распада, чем урана.

Ответ: $975\cdot10^6$ лет.

11. Футбольный мяч, сила тяжести которого 0,4 *кГ*, брошен вверх со скоростью 20 *м/сек*. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости и составляет 0,48 *Г* при скорости 1 *м/сек*. Найти время и наибольшую высоту подъема мяча. Исследовать изменение результатов, пренебрегая сопротивлением воздуха.

Ответ: $t=1{,}75$ *сек*, $h_{\max}=16{,}3$ *м*. Без учета сопротивления воздуха $t=2$ *сек* и $h_{\max}=20$ *м*.

12. Масса ракеты с полным запасом топлива равна M, без топлива — m, скорость истечения продуктов горения из ракеты — c, начальная скорость ракеты равна нулю. Найти скорость ракеты после сгорания топлива, пренебрегая силой тяжести и сопротивлением воздуха.

Ответ: $v=c\ln\frac{M}{m}$ (формула Циолковского).

13. Замедляющее действие трения на диск, вращающийся в жидкости, пропорционально угловой скорости движения.

1. Диск, начавший вращаться с угловой скоростью 3 *об/сек*, через 1 *мин* вращается с угловой скоростью 2 *об/сек*. Какова будет угловая скорость диска через 3 *мин* после начала вращения?

2. Диск, начавший вращаться с угловой скоростью 5 *об/сек*, через 2 *мин* вращается с угловой скоростью 3 *об/сек*. Через сколько

времени после начала вращения диск будет обладать угловой скоростью, равной 1 *об/сек*?

Ответ: 1. $\frac{8}{9}$ *об/сек*. 2. Через 6 *мин* 18 *сек*.

14. Найти расстояние, которое пройдет за t *сек* тело, брошенное вертикально вниз с начальной скоростью 30 *см/сек*.

Ответ: $s=\frac{1}{2}gt^2+30t.$

15. Из точки, находящейся на высоте 18 *м* над уровнем Земли, брошено вертикально вверх тело со скоростью 30 *м/сек*. Найти высоту, на которой тело находится в момент t, как функцию времени. Найти также наибольшую высоту подъема тела.

Ответ: $s=h=-\frac{1}{2}gt^2+30t+18$; $h_{\max}\approx 63{,}9$ *м*.

16. Пуля проходит через доску в 7,5 *см* толщины, которая задерживает ее движение, сообщая ей постоянное отрицательное ускорение. Скорость пули в момент, когда она достигает доски, составляет 300 *м/сек*, а в момент, когда она вылетает из доски,—150 *м/сек*. Сколько времени заняло движение пули сквозь доску?

Ответ: $t=\frac{1}{3000}$ *сек*.

Примечание. По условию ускорение $a=-w$ (где w — постоянное положительное число).

17. Катер, сила тяжести которого 300 *кГ*, движется прямолинейно. Его начальная скорость 16 *м/сек*. Сопротивление воды пропорционально скорости катера и равно 10 *кГ* при скорости 1 *м/сек*. Какое расстояние пройдет катер, прежде чем его скорость станет 8 *м/сек*, и за какое время он пройдет это расстояние?

Ответ: $s=25$ *м*; $t=2{,}1$ *сек*.

18. При движении катера в спокойной воде сопротивление среды вызывает замедление, пропорциональное скорости движения. В момент остановки мотора катер двигался со скоростью 200 *м/мин*, а через 1/2 *мин* — со скоростью 100 *м/мин*. Найти скорость катера через 2 *мин* после остановки мотора.

Ответ: $v=12{,}5$ *м/мин*.

19. Самолет A летит со скоростью 200 *км/ч* в направлении, наклон которого к горизонтальной линии равен 3/4. Самолет B из точки 50 *км* севернее вылетает на перехват его со скоростью 300 *км/ч*. Нос самолета B непрерывно направлен к A. Найти уравнение траектории полета самолета B, наблюдаемой с борта самолета A. Задачу решить:

1) в прямоугольной системе координат;

2) в полярной системе координат.

Ответы: 1) дифференциальное уравнение в прямоугольной системе

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}=\frac{300\bar{y}+120\sqrt{\bar{x}^2+\bar{y}^2}}{300\bar{x}+160\sqrt{\bar{x}^2+\bar{y}^2}};$$

при $t=0$ $\bar{x}=0$, $\bar{y}=50$. Здесь координаты $(\bar{x}, \bar{y})$ определяют положение самолета B в любой момент t относительно подвижной системы координат (положения самолета A в момент t);

2) решение в полярных координатах

$$r=\frac{50\sqrt{2}\,(4\sin\varphi-3\cos\varphi)^{1/2}}{(5-4\cos\varphi-3\sin\varphi)^{3/2}}.$$

20. Кислород поступает через трубку в бутылку емкостью в 1 *л*, а смесь кислорода с воздухом вытекает через другую трубку. Процесс проходит настолько медленно, что в каждый момент можно считать газ в бутылке однородным. Вычислить, сколько процентов кислорода будет содержать бутылка, после того как через нее пройдет 10 *л* газа (принимается, что воздух содержит 21% кислорода).

Ответ: $p=99{,}9964\%$.

21. Если тело медленно погружается в воду, то его скорость v и ускорение a приближенно связаны уравнением $a=-g-kv$, где g и k — постоянные. Выразить пройденное телом расстояние как функцию времени, если в момент $t=0$ тело находилось в покое.

Ответ: $s=\frac{g}{k}t-\frac{g}{k^2}(1-e^{-kt})$.

22. Паропровод диаметром 20 *см* защищен изоляцией толщиной 10 *см* ($k=0{,}00017$). Допуская, что труба имеет температуру 160° С, а внешняя поверхность изоляции 30° С, найти распределение температуры внутри слоя, а также количество теплоты, отдаваемое паропроводом наружу в течение суток на протяжении 1 *м*.

Ответ: $T=592-187{,}6\ln r$; около 1 731 000 *кал*.

23. Влага, содержащаяся в свежеиспеченном хлебе, испаряется в окружающую среду со скоростью, пропорциональной количеству влаги в хлебе, а также разности влажности окружающего и насыщенного воздуха. Некоторое количество свежеиспеченного хлеба, содержащее 3 *кг* влаги, положено в помещение объемом 100 *м*^{3}, воздух которого первоначально имел влажность 25%. Насыщенный воздух при той же температуре содержит 0,12 *кг* влаги на 1 *м*^{3}.

Если в течение первых суток хлеб потерял половину своей влаги, то сколько влаги в нем останется по истечении вторых суток?

Ответ: дифференциальное уравнение задачи

$$\frac{ds}{dt}=ks(s+6); \quad 0{,}82 \textit{ кг}.$$

24. В течение какого времени хлеб (в предыдущей задаче) потеряет 90% своей влаги, если начальную влажность 25% поддерживать постоянной при помощи вентиляции?

Ответ: 3 суток.

25. Дно резервуара вместимостью 300 *л* покрыто смесью соли и нерастворимого вещества. Допуская, что скорость растворения соли пропорциональна разности между концентрацией раствора в данный момент и концентрацией насыщенного раствора (1 *кг* соли на 3 *кг* воды) и что данное количество чистой воды растворяет 1/3 *кг* соли в 1 *мин*, найти, сколько соли будет содержать раствор по истечении 1 *ч*.

Ответ: 18,1 *кг*.

26. Человек в среднем дышит 18 раз в 1 *мин*, выдыхая каждый раз 2000 *см*³ воздуха, содержащего 4% CO_2. Какой процент углекислоты будет содержать по истечении 30 *мин* воздух аудитории вместимостью 400 *м*³, если в ней находятся 50 человек и если вентиляторы доставляют в 1 *мин* 40 *м*³ свежего воздуха? (Свежий воздух содержит 0,04% CO_2.)

Ответ: 0,17%.

27. В торговое помещение вместимостью 10 000 *м*³ втекает через вентиляторы в 1 *мин* 1000 *м*³ свежего воздуха, содержащего 0,04% CO_2. В 9 *ч* утра в помещение входят служащие и через 30 *мин* содержание CO_2 в воздухе повышается до 0,12%. Какой процент CO_2 можно ожидать в воздухе к 2 *ч* дня?

Ответ: 0,124%.

28. После лекции воздух в аудитории объемом 10 800 *м*³ содержит 0,12% CO_2. Сколько кубических метров воздуха, содержащего 0,04% CO_2, надо ежеминутно доставлять в зал, чтобы через 10 *мин* после перерыва содержание углекислоты в аудитории составило 0,06%?

Ответ: ≈ 1500 *м*³. Если c — искомая величина, а y — количество углекислоты в данный момент, то дифференциальное уравнение задачи

$$dy=c\left(0{,}0004-\frac{y}{10800}\right)dt.$$

29. Определить коэффициент скорости реакции второго порядка при равных концентрациях вещества A и B: $a=b$.

Ответ: $k=\frac{1}{at}\cdot\frac{x}{a-x}$; дифференциальное уравнение реакции

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x)^2.$$

30. Определить константу скорости реакции третьего порядка при двух равных концентрациях: $a=c\neq b$.

Ответ: $k=\frac{1}{t(b-a)^2}\left[\frac{(b-a)x}{a(a-x)}+\ln\frac{b(a-x)}{a(b-x)}\right]$, дифференциальное уравнение реакции

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x)^2(b-x).$$

31. Определить константу скорости реакции третьего порядка при равных концентрациях веществ A_1, A_2, A_3: $a_1=a_2=a_3=a$.

Ответ: $k=\frac{1}{2t}\left[\frac{1}{(a-x)^2}-\frac{1}{a^2}\right]$; дифференциальное уравнение реакции

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x)^3.$$

32. Реакция омыления уксусно-этилового эфира едким натром

$$CH_3COOC_2H_3+NaOH\rightarrow CH_3COONa+C_2H_5OH$$

происходит при равных концентрациях $a=0{,}01$ уксусно-этилового эфира и едкого натра. Найти концентрацию реагентов спустя 2 *ч* после начала реакции. При измерении времени в минутах константа скорости реакции $k=3{,}19$.

Ответ: концентрация $a-x=\frac{a}{akt+1}\approx 0{,}002$, что составляет 20% первоначальной концентрации.

33. В воде растворяется бензойная кислота (C_6H_5COOH). Спустя 10 *мин* после начала растворения крепость раствора составляет 6%. Найти крепость раствора спустя 30 *мин*, считая скорость растворения пропорциональной разности крепостей насыщенного и существующего в данный момент растворов.

Крепость насыщенного раствора бензойной кислоты равна 28%.

Ответ: $x=28(1-e^{-kt})\approx 14{,}4\%$.

34. Вертикальный цилиндрический резервуар имеет высоту $h=11{,}5$ *м*, а его диаметр $D=23$ *м*. Найти время, в течение которого нефть, заполняющая резервуар, вытечет из него через круглое отверстие радиуса 15 *см*, сделанное в дне?

35. Два вертикальных резервуара, каждый из которых имеет 4 *м* высоты и 4 *м* в диаметре, поставлены рядом и соединены у дна коротким круглым шлангом диаметра 1/6 *м*. Если вначале один резервуар наполнен водой, а другой пуст, то по истечении какого времени вода будет находиться в них на одном уровне? Принимается, что скорость протекания воды через шланг определяется как скорость воды, вытекающей из отверстия под тем же давлением.

Ответ: $t=7{,}27$ *мин*.

36. В резервуар глубиной 4 *м*, имеющий в поперечном сечении квадрат со стороной 6 *м*, втекает нефть со скоростью 10 $м^3$ в 1 *мин*. В какое время резервуар будет наполнен, если в то же время нефть вытекает из него через квадратное отверстие со стороной в 1/12 *м*, имеющееся в дне?

Ответ: $t=14{,}7$ *мин*.

Дифференциальное уравнение задачи

$$\left\{\frac{1}{6}-0{,}6\sqrt{2gh}\left(\frac{1}{12}\right)^2\right\}dt=36dh.$$

37. На дне котла, имеющего форму полушара радиуса $R=1$ *м*, образовалась щель площадью $\sigma=0{,}25$ $см^2$. Найти время истечения всей воды из котла.

Ответ: $T=\frac{14\pi R^2}{15\sigma}\sqrt{\frac{R}{2g}}=7$ *ч* 19 *мин* 36 *сек*.

38. За какое время вытечет вода через отверстие 0,5 $см^2$ на дне конической воронки высотой $h=10$ *см* с углом при вершине $\alpha=60°$?

Ответ: $t=9{,}9$ *сек*.

39. Найти зависимость давления воздуха p от высоты h, если известно, что это давление на уровне моря ($h=0$) равно 1 $кГ/см^2$ и на высоте 500 *м* равно 0,92 $кГ/см^2$.

Ответ: $p=e^{-0{,}00017h}$.

40. Некоторое количество нерастворимого вещества содержит в своих порах 10 *кг* соли. Подвергая вещество действию 90 *л* воды, нашли, что в течение 1 *ч* растворилась половина содержавшейся в нем соли. Сколько соли растворилось бы в течение того же времени, если количество воды удвоить? Скорость растворения пропорциональна количеству нерастворенной соли и разности между концентрацией раствора в данный момент и концентрацией насыщенного раствора (1 *кг* на 3 *л*).

Ответ: дифференциальное уравнение задачи

$$\frac{dx}{dt}=kx\left(\frac{10-x}{90}-\frac{1}{3}\right);\quad 5{,}2\ кг.$$

41. Металлический шар, температура которого 12° С, погружен в воду с температурой 0° С. В течение 8 *мин* шар охлаждается до 9° С. Найти время охлаждения шара до 6° С.

Ответ: $t \approx 19$ *мин*.

42. По закону Ньютона скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности температур тела и воздуха. Известно, что температура тела в течение 20 *мин* падает от 100 до 60° С. Температура воздуха равна 20° С. Через сколько времени (от момента начала охлаждения) температура тела понизится до 25°?

Ответ: $t = 1$ *ч* 20 *мин*.

43. Стена (коэффициент теплопроводности $k = 0{,}0015$) имеет 30 *см* толщины. Найти зависимость температуры от расстояния точки до наружного края стены, если температура равна 20° С на внутренней и 0° С на внешней поверхности стены. Найти также количество тепла, которое стена (на 1 $м^2$) отдает наружу в течение суток.

Ответ: $T = \frac{2}{3}x$; 864 000 *кал*.

44. Цилиндрический сосуд высотой $H = 20$ *см* и с площадью дна $S = 120$ $см^2$ имеет на дне отверстие площадью $\sigma = 0{,}4$ $см^2$. Найти время истечения через отверстие воды, заполняющей сосуд.

Указание. Скорость истечения $v = \sqrt{2gh}$, где h — глубина погружения отверстия в данный момент.

Ответ: $T = \frac{S}{\sigma}\sqrt{\frac{2H}{g}} \approx 1$ *мин*.

45. Коническая воронка с радиусом верхнего отверстия $R = 20$ *см*, радиусом нижнего отверстия $r = 0{,}3$ *см* и высотой $h = 20$ *см* наполнена водой. За какое время вода вытечет из воронки?

Ответ: $T = \frac{2R^2}{5r^2}\sqrt{\frac{h}{2g}} \approx 65$ *сек*.

46. Допустим, что в вертикальном воздушном столбе давление на каждом уровне обусловлено давлением вышележащих слоев. Найти зависимость давления от высоты, если на уровне моря это давление равно 1 $кГ/см^2$, а на высоте 500 *м* — 0,92 $кГ/см^2$.

Указание. Использовать закон Бойля — Мариотта, в силу которого плотность газа пропорциональна давлению.

Ответ: дифференциальное уравнение задачи

$$dp = -kp\,dh,$$

откуда

$$p = e^{-0{,}00016h}.$$

47. Если движение воздуха от одного уровня к другому совершается адиабатически (т. е. теплота не приобретается и не теряется), то давление $p=k\rho^n$, где ρ — плотность и k — постоянная. Допуская адиабатический характер распространения воздуха, найти высоту атмосферы, если на уровне моря плотность воздуха составляет 0,0013 *Г/см*³, а давление 1 *кГ/см*².

Ответ: дифференциальное уравнение задачи

$$dp=-\frac{p^{\frac{1}{n}}}{k^{\frac{1}{n}}}dh.$$

Высота атмосферы 26,923 *км*.

48. Найти форму зеркала, отражающего пучок лучей, стремящихся сойтись в одной точке так, что после отражения все лучи пересекаются в некоторой другой точке.

Ответ: гиперболоид вращения. Дифференциальное уравнение задачи $dr-dr'=0$.

49. Металлическое ядро (удельный вес $\gamma=7{,}25$ *Г/см*³) радиусом 2 *см* падает с высоты 1200 *м*. Через какое время и с какой скоростью ядро достигнет Земли? Задачу решить, предполагая отсутствие сопротивления воздуха и при сопротивлении воздуха, пропорциональном квадрату скорости падения.

Указание. На тело, падающее в пустоте, действует сила притяжения Земли, которая сообщает ему ускорение $g=9{,}81$ *м/сек*².

При сопротивлении воздуха возникает усилие, пропорциональное квадрату скорости падения.

При расчете принять коэффициент пропорциональности

$$k=\frac{\psi\delta F}{2G},$$

где G — сила тяжести тела, *кГ*; δ — 1,293 — сила тяжести 1 *м*³ воздуха, *кГ*; F — перпендикулярное к направлению движения наибольшее поперечное сечение тела, *м*²; ψ — постоянное число, зависящее от формы тела; для шара $\psi=0{,}5$.

Ответы: 1) $t=15{,}64$ *сек*, $v=gt=153{,}4$ *м/сек*;

2) $t=21{,}04$ *сек*, $v=75{,}92$ *м/сек*.

50. Деревянный шар (удельный вес $\gamma=0{,}9$ *Г/см*³) радиусом $r=3$ *см* падает с высоты: 1) $h=100$ *м*, 2) $h=20$ *м*. Найти время падения и конечную скорость.

Ответы: 1) $t=5{,}21$ *сек*; $v=30{,}19$ *м/сек*;

2) $t=2{,}08$ *сек*; $v=18{,}16$ *м/сек*.

51. Найти суточную потерю теплоты (в *кал*) паропроводом, транспортирующим пар температурой 100° С. Длина паропровода 20 *м*, диаметр 30 *см*. Паропровод защищен слоем бетона толщиной 10 *см*. Температура внешней поверхности бетона 35° С. Найти также температуру в середине бетонного слоя (принять коэффициент пропорциональности $k=225\cdot10^{-5}$ *кал/см·град·сек*).

Указание. Количество (*кал/сек*) выделяемой источником площадью A *см*^{2} теплоты

$$q=-kA\frac{du}{dx},$$

где x — радиус цилиндрического источника теплоты, u — температура источника по Цельсию, k — коэффициент пропорциональности. Величина $\frac{du}{dx}$ представляет собой температурный градиент.

Ответ: $3{,}11\cdot10^8$ *кал/сутки*; 63,4° С.

52. Сферический резервуар диаметром $D=2{,}75$ *м* наполнен водой. Найти время, необходимое для истечения всей воды через круглое отверстие в днище диаметром $d=3{,}7$ *см*. Коэффициент пропорциональности $k=4{,}8$.

Ответ: 57,6 *мин* $\approx$ 58 *мин*.

53. Горизонтальный цилиндрический резервуар имеет длину 6 *м* и диаметр 4 *м*. Найти время истечения воды из резервуара через круглое отверстие радиуса 1/12 *м*, сделанное в дне.

Ответ: 18,5 *мин*.

54. Количество света, поглощающегося при прохождении через тонкий слой воды, пропорционально толщине слоя и количеству света, падающего на его поверхность. Если при прохождении через слой толщиной 3 *м* поглощается половина первоначального количества света, то какая часть света дойдет до глубины 30 *м*?

Ответ: $\frac{1}{1024}$.

55. По шероховатой наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha=30°$, спускается тяжелое тело без начальной скорости. Определить, в течение какого времени T тело пройдет путь длиной $L=39{,}2$ *м*, если коэффициент трения $\mu=0{,}2$.

Ответ: уравнение движения

$$m\frac{dx}{dt}-mg(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)=0;$$

$$T=\sqrt{\frac{2L}{g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}}=4{,}94\approx5\ \textit{сек}.$$

56. Определить предполагаемое количество населения Украинской ССР и Белорусской ССР на 15 января 2000 г., если известно, что 15 января 1970 г. в Украинской ССР проживало 47 136 000 человек и прирост за 1969 г. составил 0,82%, а в Белорусской ССР проживало 9 003 000 человек и прирост за 1969 г. составил 0,97%.

Ответ: $\approx 60{,}45$ млн. чел.; ≈ 12 млн. чел.

57. Вычислить предполагаемое на 15 января 2003 г. количество населения городов, если известно число их жителей на 15 января 1970 г. и темпы прироста за последние 11 лет (см. таблицу), которые по условию будут сохраняться в дальнейшем.

Город	Население на 15/I 1970 г. (в тыс. чел.)	Прирост за 11 лет (в %)
Ленинград	3513	18
Киев	1632	47
Ташкент	1385	49
Баку (с пригородами)	1261	30
Харьков	1223	28
Горький	1170	24
Новосибирск	1161	31
Куйбышев	1047	30
Свердловск	1026	32
Одесса	892	34
Тбилиси	889	27
Донецк	879	24
Челябинск	874	27
Казань	869	30
Днепропетровск	863	31
Пермь	850	35
Омск	821	41
Волгоград	818	38
Ростов-на-Дону	789	32
Уфа	773	41
Ереван	767	55
Саратов	758	31
Рига	733	26
Алма-Ата	730	60
Фрунзе	431	96
Душанбе	374	65
Вильнюс	372	57
Таллин	363	29
Кишинев	357	65
Ашхабад	253	49

Примечание. 11-летний период принять за расчетную единицу времени T, т. е. период в 33 года составит $3\,T$.

58. Естественный прирост населения большого города пропорционален наличному количеству жителей и промежутку времени. Кроме того, население города увеличивается благодаря миграции: скорость прироста населения этим путем пропорциональна времени, отсчитываемому от момента, когда население города равнялось A_0. Найти зависимость числа жителей города от времени (считая процесс непрерывным).

Ответ: $A = \left(A_0 + \frac{k_2}{k_1^2}\right) e^{k_1 t} - \frac{k_2}{k_1} t - \frac{k_2}{k_1^2}$.

59. Население колонии животных удваивается в течение 50 дней. Через сколько дней ее население утроится?

Ответ: 79 дней.

60. Население страны удвоилось в течение 50 лет и составляет теперь 20 млн. чел. Когда население достигнет 30 млн. чел. и каким оно будет через 10 лет?

Ответ: через 29 лет; 22 970 000 чел.

61. Население города в течение 50 лет удвоилось за счет естественного прироста и составляет 40 000 чел. Определить население города через 10 лет. Решить также задачу в условиях механического уменьшения населения на 400 чел. в год.

Примечание. Сначала найти коэффициент пропорциональности естественного прироста.

Ответ: 50 240 чел.; 41 660 чел.

62. Служащий 30-летнего возраста планирует в течение 20 лет откладывать по 50 руб. в месяц, с тем чтобы иметь к моменту выхода на пенсию (через 30 лет) 12 000 руб. Какую сумму необходимо ему ежемесячно откладывать в сберегательную кассу на 3-процентный счет, чтобы выполнить намеченное?

63. Как долго необходимо держать 1 руб. на 3-процентном счету в сберегательной кассе, чтобы эта сумма удвоилась?

Ответ: $t \approx 23$ года.

64. Отец новорожденного ребенка планирует накопить до момента достижения ребенком 20-летнего возраста 3000 руб. путем ежемесячных взносов в сберегательную кассу на 3-процентный вклад. Какую ежемесячную сумму он должен вносить, чтобы по истечении срока накопить желаемые деньги?

65. Некто для поступления в жилищно-строительный кооператив одалживает 3500 руб. с условием, что погашение долга будет производиться постепенно путем открытия на имя одалживающего 3-процентного вклада в сберегательной кассе и ежемесячного вклада должником определенной суммы до накопления полного размера долга. Каков ежемесячный размер вклада, когда будет погашен долг и сколько в действительности денег отдаст должник из собственных средств?

66. Какой формы должен быть хирургический нож, чтобы боль, причиненная во время операции, была минимальной, т. е. чтобы было повреждено минимальное количество тканей и кровеносных сосудов?

Ответ: $\rho = Ce^{k\varphi}$.

67. Радиус Луны $R_л = 1740$ *км*. Ускорение силы тяжести на ее поверхности около $0{,}165g$, где g — ускорение силы тяжести на поверхности Земли. Определить начальную скорость запуска ракеты с Луны.

Ответ: 2,41 *км/сек*.

68. Определить с точностью до двух значащих цифр скорости запусков ракет для каждого небесного тела (исходные данные указываются ниже).

Небесное тело	Ускорение силы тяжести на поверхности	Радиус, *км*
Венера	$0{,}85g$	6 100
Марс	$0{,}38g$	3 400
Юпитер	$2{,}6g$	69 200
Солнце	$28g$	625 000

Ответы: 10,1 *км/сек*; 5 *км/сек*; 60 *км/сек*, 612 *км/сек*.

69. Найти кривую, проходящую через точку (4, 6), для которой длина подкасательной равна среднему арифметическому координат точки касания.

Ответ: длина подкасательной равна $y\dfrac{dx}{dy}$.

Кривая $3(x-y)^2-2y=0$.

70. Кривая имеет в точке с абсциссой 2 наклон 45°. Отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат, равен квадрату абсциссы точки касания. Найти уравнение этой кривой.

Ответ: $x^2-5x+y=0$.

71. Касательная к кривой на оси ординат отсекает отрезок, равный радиус-вектору точки касания. Найти уравнение кривой, если она проходит через точку $(-\sqrt{10}, 3/2)$.

Ответ: 1) $x^2=-10y+25$; 2) $x^2=4y+4$.

72. На оси x касательная отсекает отрезок, равный длине касательной. Найти уравнение кривой, если она проходит через точку $(-2, 4)$.

Ответ: $x^2+y^2-5y=0$.

73. Поднормаль равна отрезку, отсекаемому касательной на оси y. Найти уравнение кривой, если она проходит через точку (1, 1).

Ответ: $x=y(1+\ln y)$.

74. Отрезок касательной от точки касания до оси ординат равен отрезку, отсекаемому этой касательной на оси ординат. Найти уравнение кривой, если она проходит через точку (2, 4).

Ответ: $x^2+y^2-10x=0$.

75. Радиус-вектор любой точки кривой равен отрезку, отсекаемому на оси ординат нормалью, проведенной через эту точку. Найти уравнение кривой, если она проходит через точку (4, 3).

Ответ: 1) $x^2-4y-4=0$; 2) $x^2+16y-64=0$.

76. Отношение квадрата радиус-вектора любой точки кривой к отрезку, отсекаемому на оси x нормалью, проходящей через эту точку, равно половине абсциссы точки. Найти уравнение кривой, если она проходит через точку (3, 4).

Ответ: $25x^4-81(x^2+y^2)=0$.

77. Квадрат радиус-вектора любой точки кривой равен отрезку, отсекаемому на оси ординат нормалью, проведенной через эту точку. Найти уравнение кривой, если она проходит через точку (3, 0).

Ответ: $x^2+4y^2=9e^{2y}$.

78. Кривая в точке с абсциссой $\sqrt{2}$ наклонена к оси абсцисс под углом 45°. Отрезок, отсекаемый касательной на оси абсцисс, равен длине касательной. Найти уравнение кривой.

Ответ: $x^2+y^2+4y=0$; $x^2+y^2-4y=0$.

79. Найти ортогональные траектории семейства кругов:

$$x^2+y^2+2ny=0,$$

где n — произвольный параметр.

Ответ: $x^2+y^2-Cx=0$.

80. Найти ортогональные траектории семейства кривых $y=ax^n$, где a — произвольный параметр.

Ответ: $x^2+ny^2=C$.

81. Найти ортогональные траектории семейства кривых $x^3-3xy^2+b=0$, где b — произвольный параметр.

Ответ: $y^3-3x^2y-C=0$.

82. Аквалангист переплывает реку шириной 100 *м*, все время направляясь на дерево, которое стоит на другом берегу напротив места старта. Он плывет со скоростью 3 *м/сек*. Найти уравнение траектории аквалангиста, если течение будет сносить его вниз по реке со скоростью 1 *м/сек*; 3 *м/сек*; 4 *м/сек*.

Ответ: $y=50\left[\left(\frac{x}{100}\right)^{2/3}-\left(\frac{x}{100}\right)^{4/3}\right]$; $x^2=-200(y-50)$;

$$y=50\left[\left(\frac{x}{100}\right)^{-1/3}-\left(\frac{x}{100}\right)^{7/3}\right].$$

83. Летчик ведет самолет в направлении к городу, находящемуся в 400 *км* западнее взлетной площадки. Ветер дует с юга со со скоростью 20 *км/ч*, скорость самолета 300 *км/ч*. Найти уравнение траектории полета.

Ответ: $y=200\left[\left(\frac{x}{400}\right)^{\frac{14}{15}}-\left(\frac{x}{400}\right)^{\frac{16}{15}}\right].$

84. В любой момент t скорость v точки превышает среднюю скорость за время t с начала движения на постоянную величину k. Найти закон движения, если при $t=0$ $s=s_0=0$, а при $t=1$ $s=k$.

Ответ: $s=kt(\ln t+1)$.

85. В любой момент t скорость v точки превышает среднюю скорость за время t с начала движения на величину квадрата пройденного за это время пути. Найти закон движения, если при $t=0$ $s=s_0=0$ и $v=v_0=1$.

Ответ: $s=\frac{2t}{2-t^2}$.

86. Скорость v, путь s и время t связаны уравнением

$$v+s\cos t=\sin t\cos t.$$

Найти закон движения, если при $t=0$ $v=0$.

87. Капля сферической формы с начальной массой M *г*, свободно падая в воздухе, равномерно испаряется и теряет ежесекундно m *г*. Сила сопротивления воздуха пропорциональна произведению скорости капли на площадь ее поверхности. Плотность жидкости γ. Найти зависимость скорости движения капли от времени, прошедшего с начала падения, если в начальный момент времени ее скорость равна нулю. Принять, что коэффициент пропорциональности $k\neq m$.

Ответ: $v=ge^{\frac{3k}{2m}\sqrt[3]{\frac{36\pi}{\gamma^2}(M-mt)^2}}\int\limits_0^t e^{-\frac{3k}{2m}\sqrt[3]{\frac{36\pi}{\gamma^2}(M-mt)^2}}\,dt.$

88. Разность потенциалов на зажимах катушки равномерно падает от величины внешней электродвижущей силы $E_0=2$ *в* до величины $E_1=1$ *в* в течение 10 *сек.* Сопротивление катушки 0,12 *ом*, коэффициент самоиндукции 0,1 *гн*. Найти силу тока в конце десятой секунды, если в начале опыта она составляла $16\frac{2}{3}$ *а*.

Ответ: дифференциальное уравнение задачи

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E,$$

$$i(10)=9{,}03a.$$

89. Найти кривую, касательная в любой точке которой образует с осями координат треугольник постоянной площади $\frac{a}{2}$.

Ответ: $xy=\frac{a}{4}$.

90. Найти кривую, если отрезок касательной, заключенный между осями координат, равен a.

Ответ: астроида $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

91. Найти кривую, если перпендикуляры, опущенные из двух данных точек на касательную, имеют постоянную сумму $2s$.

Ответ: $x^2+y^2=s^2$.

92. Найти кривую, если геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки P на касательные к кривой, есть окружность радиуса r, а расстояние точки P от центра круга равно c.

Примечание. Начало координат надо поместить в центре O данной окружности, за ось абсцисс принять OP. Координаты основания перпендикуляра будут

$$\xi=\frac{p(px-y)+c}{1+p^2};\quad \eta=\frac{px-y-cp}{1+p^2}.$$

Подставляя эти значения в уравнение окружности $x^2+y^2=a^2$, получим уравнение Клеро.

Ответ: $\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2-c^2}=1$; дифференциальное уравнение

$$y=px-\sqrt{r^2(1+p^2)-c^2},\quad p=y'.$$

II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

93. Материальная точка массой m движется по прямой линии к центру, притягивающему ее с силой $\frac{mk^2}{r^3}$, где r — расстояние точки от центра. Движение начинается с состояния покоя при $r=a$. Найти время достижения точкой центра.

Ответ: $t=\frac{a^2}{\sqrt{k}}$.

94. Тяжелое тело скользит по шероховатой наклонной плоскости, причем угол наклона равен α, а коэффициент трения μ. Найти закон движения, если начальная скорость равна нулю.

Ответ: $s=\frac{1}{2}g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)t^2$.

95. Найти время достижения Земли метеором, падающим с высоты 400 000 *км*.

Ответ: дифференциальное уравнение задачи

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-\frac{k}{r^2},\ \text{причем}\ k=g(6400)^2;\ t\approx 122\ ч.$$

96. Цепь переброшена через гладкий гвоздь. С одной стороны свисает часть цепи длиной 8 *м*, а с другой стороны — длиной 10 *м*. При скольжении ускорение пропорционально разности длин частей цепи, свисающих с обеих сторон. Через какое время соскользнет цепь?

Ответ: $t=\frac{3}{\sqrt{g}}\ln(9+\sqrt{80})\approx 2{,}76$ *сек.*

97. Материальная точка движется по прямой линии к точке A таким образом, что ускорение ее равно $kr^{-5/3}$. В начальный момент $t=0$ движущаяся точка находилась в покое на расстоянии l от точки A. Когда она достигнет точки A?

98. Сопротивление, оказываемое воздухом падающему телу, вызывает отрицательное ускорение $-kv^2$, где v — скорость тела, а k — постоянная. Показать, что снаряд, выпущенный вертикально вверх со скоростью v_1, возвратится к исходной точке со скоростью

$$v_2=\sqrt{\frac{gv_1^2}{g+kv_1^2}},$$

где g — ускорение силы тяжести.

Указание. Дифференциальное уравнение движения тела вверх

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=mv\frac{dv}{ds}=-mg-kv^2.$$

Падение происходит по закону

$$mv\frac{dv}{ds}=-mg+kv^2.$$

99. Катер движется в спокойной воде со скоростью $v=10$ *км/ч*. На полном ходу его мотор выключается и через 20 *сек* скорость катера уменьшается до $v_1=6$ *км/ч*. Сопротивление воды движению катера пропорционально его скорости. Найти скорость катера через 2 *мин* после остановки мотора.

Ответ: $v_2=0{,}467$ *км/ч*.

100. Цепь длиной l лежит на гладком столе так, что ее конец длиной b свисает над краем стола. Из этого положения цепь начинает скользить вниз. Через какое время цепь соскользнет со стола?

Ответ: $t=\sqrt{\frac{l}{g}}\ln\frac{l+\sqrt{l^2-b^2}}{b}$.

101. Вес 1000 *м* телеграфной проволоки 40 *кГ*. Укрепленные концы проволоки находятся на расстоянии 120 *м*, а середина провисла на 3 *м*. Определить горизонтальное натяжение в нижней точке проволоки.

Ответ: $H=24$ *кГ*.

102. Найти закон движения тела, свободно падающего без начальной скорости, допуская, что сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости и предельная скорость равна 75 *м/сек*.

Ответ: $s=\frac{(75)^2}{g}\ln\left\{\frac{e^{\frac{gt}{75}}+e^{-\frac{gt}{75}}}{2}\right\}$.

103. Тело медленно погружается в жидкость. Сопротивление пропорционально скорости. Найти закон движения тела, погружающегося в жидкость без начальной скорости.

Ответ: $s=\frac{m^2g}{k^2}\left(e^{-\frac{k}{mt}}-1\right)+\frac{mg}{k}t$.

104. Частица массой в 1 *г* движется по прямой к точке A под действием некоторой силы притяжения, пропорциональной расстоянию ее от точки A. На расстоянии 1 *см* действует сила 0,1 *дн*. Сопротивление среды пропорционально скорости движения и равно 0,4 *дн* при скорости 1 *м/сек*. В момент $t=0$ частица расположена на 10 *см* правее точки A и скорость ее равна нулю. Найти зависимость расстояния от времени и вычислить это расстояние для $t=3$ *сек* (с точностью до 0,01 *см*).

Ответ: $s=e^{-0{,}2t}\,[10\cos(0{,}245t)+8{,}16\sin(0{,}245t)]$;

$$s|_{t=3}\approx 7{,}07 \text{ см}.$$

105. Вагон на прямолинейном горизонтальном участке железнодорожного пути приходит в движение вследствие силы давления ветра, пропорциональной квадрату скорости ветра относительно вагона. Найти уравнения движения вагона при постоянной скорости ветра и силе трения, пропорциональной его весу. Исследовать изменение скорости движения вагона с увеличением времени.

Ответы: 1) $m\frac{d^2s}{dt^2}=k^2\left(a-\frac{ds}{dt}\right)^2-\lambda^2mg;$

$$v=a-\frac{B}{k}\cdot\frac{A-B+(A+B)e^{2Dt}}{B-A+(A+B)e^{2Dt}};$$

$$s=at-\frac{m}{k^2}\ln\frac{(A+B)e^{Dt}-(A-B)e^{-Dt}}{2B},$$

где $A=ak,\ B=\lambda\sqrt{mg},\ D=k\lambda\sqrt{\frac{g}{m}};$

2) $\lim\limits_{t\to+\infty} v=a-\frac{B}{k}.$

106. Материальная частица массой m движется по прямой линии к центру O, которым она отталкивается с силой, пропорциональной расстоянию ее от центра. В начальный момент ($t=0$) частица находится от центра на расстоянии b и имеет скорость v_0, направленную к центру O. Найти закон движения частицы.

Ответ: $x=\frac{1}{2}\left[\left(b+\frac{v_0}{k}\right)e^{kt}+\left(b-\frac{v_0}{k}\right)e^{-kt}\right].$

107. Найти закон падения тела в воздухе, считая сопротивление воздуха пропорциональным квадрату скорости движения, если в начальный момент тело находилось в состоянии покоя.

Ответ: $s=\frac{m}{k}\ln\frac{e^{t\sqrt{\frac{gk}{m}}}+e^{-t\sqrt{\frac{gk}{m}}}}{2}.$

108. На двухопорную балку OA длиной l действует сосредоточенная сила P, приложенная в середине балки. Найти стрелу прогиба балки.

Ответ: $h=\frac{Pl^3}{48EJ}.$

109. На консольную балку длиной l *м* с закрепленным концом O действуют равномерно распределенная нагрузка q *кГ/м* и сосредоточенная сила P *кГ*, приложенная к концу балки A. Составить уравнение упругой линии и определить прогиб балки в точке A (рис. 145). Жесткость балки EJ.

Ответ: 1) $y=\frac{P}{2EJ}\left(lx^2-\frac{x^3}{3}\right)+\frac{ql}{2EJ}\left(\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{l^3}{12}\right);$

2) прогиб конца балки $h_A=\frac{l^3}{3EJ}\left(P+\frac{3ql}{8}\right).$

110. Консольная балка длиной l (рис. 146) нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q на погонную единицу длины. Составить уравнение упругой линии и определить величину прогиба h конца балки B. Жесткость балки EJ.

Ответ: 1) $y=\frac{q}{24EJ}(6l^2x^2-4lx^3+x^4)$;

2) прогиб конца балки $h_B=\frac{ql^4}{8EJ}$.

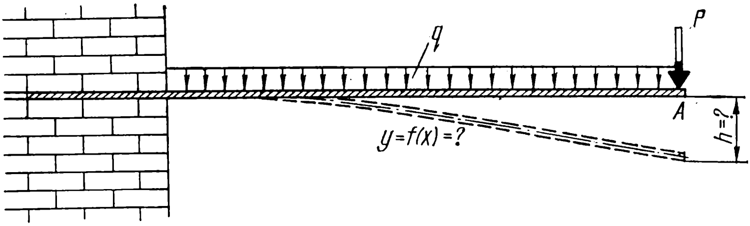

Рис. 145

111. Плотина высотой $H=2$ *м* состоит из ряда вертикальных деревянных столбов (рис. 147) с дощатой обшивкой, закрепленных в нижних концах. Расстояние между осями двух смежных столбов $c=1$ *м*. Момент инерции площади поперечного сечения столба от-

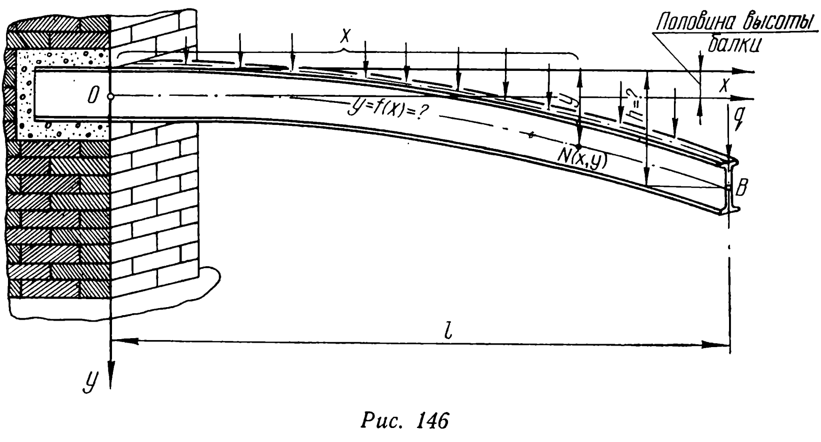

Рис. 146

носительно нейтральной оси $J=9000$ *см*^{4}. Составить уравнение упругой линии деформированного под напором воды столба и определить прогиб h верхнего конца столба, если вода доходит до верхнего края плотины. Модуль упругости дерева $E=10^5$ *кГ/см*^{2}.

Указание. Давление, передаваемое элементарной полоской высотой $d\xi$ на каждый столб, будет $q=c(H-\xi)\,d\xi$.

Ответ:

$$y=\frac{Q}{60EJH^2}\left[(H-x)^5+5H^4x-H^5\right],$$

$$h=\frac{QH^2}{15EJ}\approx 1{,}2\ см,$$

где Q — общая нагрузка столба.

112. Материальная точка массы m притягивается каждым из двух центров с силой, пропорциональной расстоянию x. Коэффи-

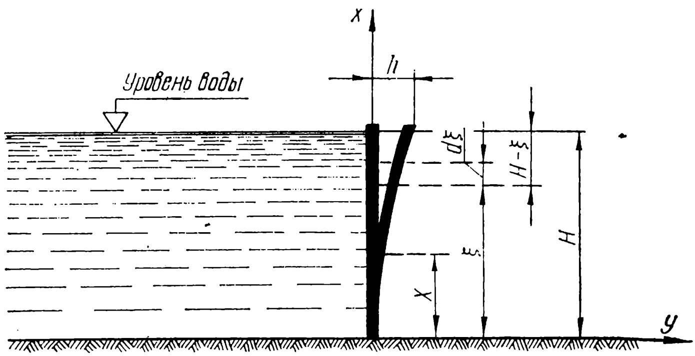

Рис. 147

циент пропорциональности равен k, расстояние между двумя центрами $2b$. В начальный момент ($t=0$) точка находится на линии соединения центров на расстоянии $x=c$ от ее середины. Начальная скорость $\frac{dx}{dt}$ равна нулю. Найти закон движения.

Ответ: дифференциальное уравнение движения (начало координат в середине расстояния между центрами)

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=k(b-x)-k(b+x)=-2kx.$$

Закон движения

$$x=c\cos\left\{\sqrt{\frac{2k}{m}}\cdot t\right\}.$$

113. Тело совершает 90 колебаний в минуту. В течение 15 *сек* амплитуда колебаний уменьшается вдвое. Найти дифференциальное уравнение движения.

Указание. Движение характеризуется законом

$$x=Ae^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta).$$

Согласно условию, $T=\dfrac{2\pi}{\beta}$ или $\beta=3\pi$; далее

$$e^{-15\alpha}=\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \alpha=\frac{\ln 2}{15}.$$

Ответ: $\dfrac{d^2x}{dt^2}+0{,}092\dfrac{dx}{dt}+88{,}8x=0.$

114. На тело, сила тяжести которого 10 *кГ*, действует упругая сила, стремящаяся вернуть его к положению устойчивого равновесия. Сила пропорциональна смещению и равна 2 *кГ* при смещении в 1 *м*. Сопротивление среды пропорционально скорости. Амплитуда после трех колебаний уменьшается в 10 раз. Найти период колебаний.

Указание. Предполагаем закон движения в форме, как в предыдущей задаче. Дифференцируя, находим

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\alpha\frac{dx}{dt}+(\alpha^2+\beta^2)x=0.$$

С другой стороны, по условию

$$\frac{10}{g}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+k\frac{dx}{dt}+2x=0.$$

Сравнивая, получаем

$$\alpha^2+\beta^2=\frac{g}{5};$$

кроме того,

$$e^{-\alpha\cdot 3T}=e^{-\alpha\cdot\frac{6\pi}{\beta}}=\frac{1}{10},$$

откуда

$$6\pi\frac{\alpha}{\beta}=\ln 10.$$

Ответ: период колебаний

$$T=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{g}}\sqrt{(6\pi)^2+\ln^2 10}.$$

115. Круглый диск радиуса a, погруженный в жидкость, вращается вокруг оси, проходящей через центр диска перпендикулярно к его плоскости. Сопротивление трения равно kv на единицу площади в каждой точке диска, где v — скорость точки, k — постоянная.

Найти закон движения при начальной угловой скорости ω_0, допуская, что момент силы трения, обусловленный осью, равен постоянной величине K.

Указание. Момент инерции диска равен $\frac{mr^2}{2}$, где m — его масса.

Элементарный момент силы трения есть $-kr\cdot\frac{d\theta}{dt}r\cdot rdrd\varphi$, где $rdrd\varphi$ — элемент площади диска в полярной системе координат. Полный момент равен

$$-k\frac{d\theta}{dt}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r^3dr=-\frac{k\pi}{2}a^4\frac{d\theta}{dt}.$$

Ответ: дифференциальное уравнение движения с учетом трения

$$\frac{ma^2}{2}\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{k\pi}{2}a^4\frac{d\theta}{dt}-K;$$

$$\theta=\frac{m}{\pi ka^2}\left(\omega_0+\frac{2K}{\pi k\cdot a^4}\right)\left(1-e^{-\frac{\pi ka^2}{m}\cdot t}\right)-\frac{2K}{\pi ka^4}t.$$

116. Если ось вала турбины расположена горизонтально, а центр тяжести диска, насаженного на вал, не лежит на оси, то прогиб y (рис. 148) оси вала при вращении удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\left(\frac{1}{m\alpha}-\omega^2\right)y=g\cos\omega t+\omega^2e,$$

где m — масса диска, α — постоянное число, зависящее от рода закрепления концов A и B, ω — угловая скорость вращения, e — эксцентриситет центра тяжести диска. Найти общий интеграл этого уравнения.

Ответ: если $\frac{1}{m\alpha}>\omega^2$, то

$$y=C_1\cos kt+C_2\sin kt+\frac{g}{k^2-\omega^2}\cos\omega t+\frac{e\omega^2}{k^2},$$

где

$$k^2=\frac{1}{m\alpha}-\omega_2;$$

если $\frac{1}{m\alpha}<\omega^2$, то

$$y=C_1e^{kt}+C_2e^{-kt}-\frac{g}{k^2+\omega^2}\cos\omega t-\frac{e\omega^2}{k^2},$$

где

$$k^2 = \omega^2 - \frac{1}{m\alpha}.$$

117. Колонна длиной l неподвижно закреплена в нижнем конце. Под действием силы P верхний конец отклонился на расстояние a от своего первоначального положения. Найти изгибающий момент и форму изогнутой колонны.

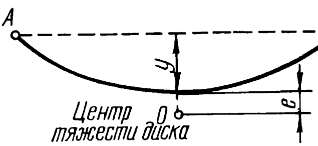

Рис. 148

Проверить, что критическая нагрузка

$$P_{\text{крит}} = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 EJ.$$

Указание. Нижний конец колонны принимаем за начало координат, колонну — за ось x.

Полагая $p = \frac{dy}{dx}$, получаем дифференциальное уравнение изгиба

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = EJp \cdot \frac{dp}{dy} = M = P(a-y).$$

Ответы: 1) $y = a\left(1 - \cos\sqrt{\frac{P}{EJ}}\,x\right)$;

2) так как колонна выдерживает груз при $x = l$, $y = a$, то

$$P_{\text{крит}} = EJ\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2.$$

118. Горизонтальная трубка вращается около вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. Шар, помещенный внутри трубки, скользит по ней без трения. Найти закон движения шара, если в начальный момент он находится на оси вращения и имеет скорость v_0 (вдоль трубки).

Указание. Дифференциальное уравнение движения

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \omega^2 r.$$

Начальные условия: $r=0$, $\frac{dr}{dt}=v_0$ при $t=0$.

Ответ: $r=\frac{v_0}{2\omega}[e^{\omega t}+e^{-\omega t}]$.

119. Материальная точка массы m притягивается каждым из двух центров, лежащих на прямой, с силой, пропорциональной расстоянию. Множитель пропорциональности равен k. Расстояние между центрами равно $2b$. В начальный момент точка находится на линии соединения центров на расстоянии c от ее середины. Начальная скорость равна нулю. Найти закон движения.

Ответ: дифференциальное уравнение движения (начало координат в середине между центрами)

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=k(b-x)-k(b+x)=-2kx.$$

Начальные условия $x=c$, $\frac{dx}{dt}=0$ при $t=0$; $x=a\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t$.

120. Тело, сила тяжести которого 2 *кГ*, брошенное вертикально вверх со скоростью 20 *м/сек*, испытывает сопротивление воздуха, которое при скорости v *м/сек* равно $0{,}04v$ *кГ*; $g=9{,}81$ *м/сек*^{2}. Найти, через сколько секунд тело достигнет наивысшего положения.

Ответ: дифференциальное уравнение задачи

$$m\frac{d^2s}{dt^2}+k\frac{ds}{dt}+mg=0; \quad t=1{,}7 \text{ сек}.$$

121. Тело, брошенное с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту, движется под влиянием силы тяжести P и сопротивления воздуха R. Определить наибольшую высоту h тела над уровнем начального положения, считая сопротивление пропорциональным первой степени скорости: $R=kPv$.

Ответ: дифференциальное уравнение задачи

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+mg+\frac{dy}{dt}kP=0;$$

$$h=\frac{v_0\sin\alpha}{gk}-\frac{1}{gk^2}\ln(1+kv_0\sin\alpha).$$

122. Тело, сила тяжести которого 1,96 *кГ*, подвешено на пружине, которая силой 1 *кГ* растягивается на 20 *см*, при движении встречает сопротивление, пропорциональное первой степени скорости и при скорости 1 *см/сек* равное 0,02 *кГ*. В начальный момент пружина растянута из положения равновесия на 5 *см*, и тело приходит в движение без начальной скорости. Найти закон движения тела.

Ответ: дифференциальное уравнение задачи

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+k\frac{dx}{dt}+cx=0;$$

$$x=5e^{-5t}(5t+1)\ см.$$

123. Температура на поверхности сферы радиуса a задана функцией $f(\varphi)$. Ввиду симметрии результирующее распределение температуры $u(r, \varphi)$ является функцией лишь r и φ, т. е. не зависит от сферической координаты θ. Используя метод разделения переменных, определить распределение температуры по всей этой сфере.

Ответ:

$$u(r, \varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n P_n(\cos\varphi),$$

где

$$C_n=\frac{2n+1}{2a^n}\int_0^{\pi} f(\varphi)\sin\varphi P_n(\cos\varphi)\,d\varphi.$$

124. Найти числовые значения радиусов линий узлов u_2 и u_3 колеблющейся круговой мембраны при $R=1$.

Ответ:

$$u_2:\quad r=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=0{,}43565,$$

$$u_3:\quad r=\frac{\alpha_1}{\alpha_3}=0{,}27789,$$

$$r=\frac{\alpha_2}{\alpha_3}=0{,}63788.$$

III. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

125. В химической реакции вещество c разлагается на два вещества: x и y. Скорость образования каждого из продуктов разложения пропорциональна наличному количеству вещества c. Найти зависимость x и y от времени, если в начале процесса $c=1$, $x=0$, $y=0$, а по истечении 1 *ч* $c=\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{8}$, $y=\frac{3}{8}$.

Ответ: $x=\frac{1}{4}(1-2^{-t})$; $y=\frac{3}{4}(1-2^{-t})$.

126. В химической реакции вещество x преобразуется в вещество y со скоростью, пропорциональной наличному количеству x. В то же время образовавшееся вещество y обратной реакцией переходит в вещество x со скоростью, пропорциональной наличному количеству y. Химический анализ дал такие результаты:

t	0	3	∞
x	10	6	5,5
y	0	4	4,5

Найти зависимость x и y от времени t.

Ответ: $y=4{,}5(1-e^{-0{,}7324t})$; $x=10-y$.

127. Преобразование радиоактивных веществ происходит со скоростью, пропорциональной их наличному количеству. RaB преобразуется в RaC с такой скоростью, что половина количества RaB оказывается преобразованной по истечении 27 *мин*. В свою очередь половина данного количества RaC преобразуется в другое вещество в течение 19,5 *мин*. Принимая первоначальное количество RaB за единицу, найти количество RaB и RaC по истечении 1 *ч*.

Ответ: RaB=0,124; RaC=0,249.

128. Скорость роста культуры микроорганизмов пропорциональна их количеству и количеству питательных веществ (коэффициент пропорциональности равен k). Скорость убывания питательных веществ пропорциональна наличному количеству микроорганизмов и времени (коэффициент пропорциональности равен k_1). В начале опыта в сосуде имелось A_0 *г* микроорганизмов и B_0 *г* питательных веществ. Найти зависимость количества A микроорганизмов и количества B питательных веществ от времени.

Ответ:

$$A=\frac{k\alpha^2}{2k_1}\left[1-\left(\frac{1-\beta e^{\alpha kt}}{1+\beta e^{\alpha kt}}\right)^2\right],$$

$$B=\alpha\cdot\frac{1-\beta e^{\alpha kt}}{1+\beta e^{\alpha kt}},$$

где

$$\alpha=\sqrt{B_0^2+\frac{2k_1}{k}A_0},\quad \beta=\frac{\alpha+B_0}{\alpha-B_0}.$$

IV. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

129. Снаряд вылетает из орудия со скоростью v_0, направленной под углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти закон движения снаряда.

Ответ: $x = v_0 t\cos\alpha$; $y = v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$.

130. Снаряд вылетает из орудия со скоростью 800 *м/сек* под углом 45° к горизонту. Найти, пренебрегая сопротивлением воздуха, наибольшую высоту, на которую поднимается снаряд, и место его падения.

Ответ: $h_{\max} = 16{,}3$ *км*; $s \approx 65$ *км*.

131. Материальная точка M массы m в начальный момент ($t=0$) имеет скорость v_0, перпендикулярную к прямой, соединяющей начальное положение M с центром O, который притягивает точку M с силой, прямо пропорциональной расстоянию от центра. Найти траекторию движения точки M.

Ответ: эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{v_0}{k}\right)^2} = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горт В. Дифференциальные уравнения. Л.—М., 1933.
2. Еругин Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск, 1972.
3. Еругин Н. П. О продолжимости решений дифференциальных уравнений. «Прикладная математика и механика», 1951, т. 15, № 1, стр. 55—58.
4. Камкэ Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1965.
5. Камкэ Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М., 1966.
6. Колобов А. М., Черенкова Л. П. Избранные главы высшей математики. Минск, 1967.
7. Креер Л. И. Сборник упражнений по дифференциальным уравнениям. М., 1940.
8. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1963.
9. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Минск, 1970.
10. Пономарев К. К. Составление и решение дифференциальных уравнений инженерно-технических задач. М., 1962.
11. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. III. Л.—М., 1958.
12. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М., 1959.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1 р. 01 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»