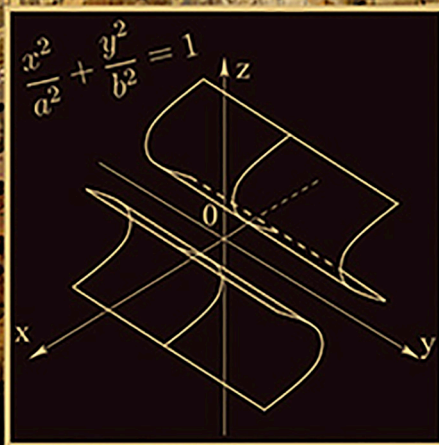


Под ред. В. Б. Миносцева, Е. А. Пушкаря

# КУРС МАТЕМАТИКИ для технических высших учебных заведений

- Функции нескольких переменных
- Интегральное исчисление
- Теория поля



**В. А. ЛЯХОВСКИЙ, А. И. МАРТЫНЕНКО, В. Б. МИНОСЦЕВ**

# КУРС МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ТЕХНИЧЕСКИХ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Часть 2

Функции нескольких переменных.  
Интегральное исчисление.  
Теория поля

Под редакцией  
В. Б. Миносцева, Е. А. Пушкаря  
Издание второе, исправленное

*ДОПУЩЕНО*

*НМС по математике Министерства образования и науки РФ  
в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся  
по инженерно-техническим специальностям*



• САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР •  
• 2013 •

ББК 22.1я73

К 93

**Ляховский В. А., Мартыненко А. И., Миносцев В. Б.**

**К 93** Курс математики для технических высших учебных заведений. Часть 2. Функции нескольких переменных. Интегральное исчисление. Теория поля: Учебное пособие / Под ред. В. Б. Миносцева, Е. А. Пушкаря. — 2-е изд., испр. — СПб.: Издательство «Лань», 2013. — 432 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

**ISBN 978-5-8114-1559-5**

Учебное пособие соответствует Государственному образовательному стандарту. Пособие включает в себя лекции и практические занятия.

Вторая часть пособия содержит 25 лекций и 25 практических занятий по следующим разделам: «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных», «Интегральное исчисление функций одной переменной», «Кратные интегралы», «Криволинейные интегралы и теория поля».

Пособие предназначено для студентов технических, физико-математических и экономических направлений.

ББК 22.1я73

#### **Рецензенты:**

**А. В. СЕТУХА** — доктор физико-математических наук, профессор, член НМС по математике Министерства образования и науки РФ; **А. А. ПУНТУС** — профессор факультета прикладной математики и физики МАИ, член НМС по математике Министерства образования и науки РФ; **А. В. НАУМОВ** — доктор физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей МАИ; **А. Б. БУДАК** — доцент, зам. председателя отделения учебников и учебных пособий НМС по математике Министерства образования и науки РФ; **У. Г. ПИРУМОВ** — профессор, зав. кафедрой вычислительной математики и программирования МАИ (Технический университет), член-корреспондент РАН, заслуженный деятель науки РФ.

#### **Обложка**

**Е. А. ВЛАСОВА**

*Охраняется законом РФ об авторском праве.*

*Воспроизведение всей книги или любой ее части запрещается без письменного разрешения издателя.*

*Любые попытки нарушения закона  
будут преследоваться в судебном порядке.*

© Издательство «Лань», 2013

© Коллектив авторов, 2013

© Издательство «Лань»,

художественное оформление, 2013

## Оглавление

ГЛАВА VII. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	6
Лекция 35. Функции нескольких переменных	6
Практическое занятие 35. Функции нескольких переменных	21
Лекция 36. Поверхности второго порядка	24
Практическое занятие 36. Поверхности второго порядка	34
Лекция 37. Преобразование декартовых координат	37
Практическое занятие 37. Преобразование декартовых координат	46
Лекция 38. Предел, непрерывность и частные производные	50
Практическое занятие 38. Частные производные	60
Лекция 39. Полный дифференциал функции	63
Практическое занятие 39. Полный дифференциал функции	77
Лекция 40. Производная по направлению и градиент	81
Практическое занятие 40. Производная по направлению и градиент	90
Лекция 41. Экстремум функции нескольких переменных	94
Практическое занятие 41. Экстремум функции нескольких переменных	111
Лекция 42. Понятия о функциях комплексной переменной	117

Практическое занятие 42. Контрольная работа по материалам лекций 35–41	127
ГЛАВА VIII. Интегральное исчисление функций одной переменной	132
Лекция 43. Первообразная и неопределённый интеграл	132
Практическое занятие 43. Первообразная и неопределённый интеграл	146
Лекция 44. Интегрирование рациональных дробей	153
Практическое занятие 44. Интегрирование рациональных дробей	162
Лекция 45. Интегрирование тригонометрических функций	167
Практическое занятие 45. Интегрирование тригонометрических функций	174
Лекция 46. Интегрирование иррациональных функций	180
Практическое занятие 46. Интегрирование иррациональных функций	190
Лекция 47. Определённый интеграл	195
Практическое занятие 47. Определённый интеграл	210
Лекция 48. Приложения определённого интеграла	216
Практическое занятие 48. Приложения определённого интеграла	232
Лекция 49. Несобственные интегралы	238
Практическое занятие 49. Несобственные интегралы	246
Лекция 50. Приближённое вычисление определённых интегралов	252
Практическое занятие 50. Контрольная работа по материалам лекций 43–49	261

ГЛАВА IX. Кратные и криволинейные интегралы.	
Элементы теории векторного поля	268
Лекция 51. Двойной интеграл	268
Практическое занятие 51. Вычисление двойных интегралов	277
Лекция 52. Изменение порядка интегрирования	281
Практическое занятие 52. Изменение порядка интегрирования	289
Лекция 53. Двойной интеграл в криволинейных координатах	294
Практическое занятие 53. Двойной интеграл в криволинейных координатах	304
Лекция 54. Приложения двойных интегралов	308
Практическое занятие 54. Приложения двойных интегралов	317
Лекция 55. Тройной интеграл	323
Практическое занятие 55. Вычисление тройных интегралов	334
Лекция 56. Приложения тройного интеграла	340
Практическое занятие 56. Приложения тройных интегралов	351
Лекция 57. Криволинейные интегралы на плоскости	358
Практическое занятие 57. Криволинейные интегралы на плоскости	369
Лекция 58. Элементы теории векторного поля	375
Практическое занятие 58. Решение примеров на применение элементов теории векторного поля	386
Лекция 59. Интегралы в комплексной области	392
Практическое занятие 59. Контрольная работа по материалам лекций 52–58	409
Ответы	419
Предметный указатель	427

# ГЛАВА VII

## Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

### Лекция 35. Функции нескольких переменных

Системы координат в пространстве. Понятие области. Функция двух переменных: способы задания, геометрическое представление. Функции более двух независимых переменных. Поверхности и линии в пространстве. Цилиндрические и конические поверхности. Поверхности вращения.

#### 35.1. Системы координат в пространстве

Как отмечалось в лекции 2, положение точки  $M$  в пространстве можно определить в декартовой системе координат тремя числами – её координатами по трем взаимно перпендикулярным осям  $Ox$  (ось абсцисс),  $Oy$  (ось ординат),  $Oz$  (ось аппликат) т.е. проекциями точки  $M$  на соответствующие оси (рис. 1).

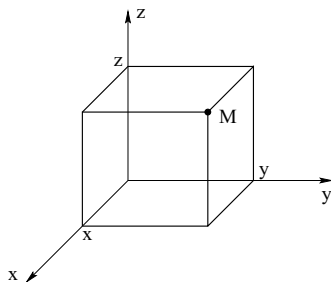


Рис. 1. Декартова система координат

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 35.1.** Поверхность, для которой одна из координат является постоянной, называется координатной поверхностью.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 35.2.** Линия, для которой все координаты, кроме одной, являются постоянными, называется координатной линией.

Для декартовой системы координат координатными поверхностями являются плоскости, параллельные координатным плоскостям. Действительно, в соответствии с определением (35.1) их уравнения имеют вид:  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  или  $z = z_0$ , а в соответствии с изложенным в лекции 33 это есть уравнения плоскостей, параллельных плоскостям  $Oyz$ ,  $Oxz$ ,  $Oxy$  соответственно.

Координатными линиями для декартовой системы координат являются прямые, параллельные координатным осям, получающиеся как пересечение координатных плоскостей.

Вообще можно заметить, что координатные линии являются пересечением координатных поверхностей.

Наряду с декартовыми координатами часто применяются цилиндрические координаты. В этих координатах положение точки  $M$  в пространстве определяется заданием полярных координат  $r$  и  $\varphi$  её проекции  $M'$  на плоскость  $Oxy$  и аппликаты  $z$  точки  $M$ . Эти три числа  $r$ ,  $\varphi$  и  $z$  называются цилиндрическими координатами точки  $M$ . Они связаны с её декартовыми координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  следующими соотношениями:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z. \quad (35.1)$$

Для цилиндрических координат координатными поверхностями являются плоскости, перпендикулярные координатной оси  $Oz$  ( $z = z_0$ ), полуплоскости, ограниченные осью  $Oz$  ( $\varphi = \varphi_0$ ), и цилиндрические поверхности, осью которых является ось  $Oz$  ( $r = r_0$ ). Последний факт объясняет название системы координат. Координатными линиями будут линии пересечения этих поверхностей.

Кроме декартовых и цилиндрических координат в пространстве также применяются сферические координаты. В этих координатах положение точки  $M$  в пространстве определяется длиной  $\rho$  радиус-вектора этой точки (полярный радиус), её долготой  $\varphi$  и широтой  $\theta$  (рис. 2).

Долготой  $\varphi$  точки  $M$  называется полярный угол  $\varphi$  её проекции  $M'$  на плоскость  $Oxy$ ; широтой  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) называется угол радиус-вектора точки  $M$  с положительным направлением оси  $Oz$ .

Сферические координаты связаны с декартовыми следующими соотношениями:

$$x = \rho \cos \varphi \sin \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \theta. \quad (35.2)$$

Для сферических координат координатными поверхностями являются сферы с центром в начале координат ( $\rho = \rho_0$ ), полуплоскости,



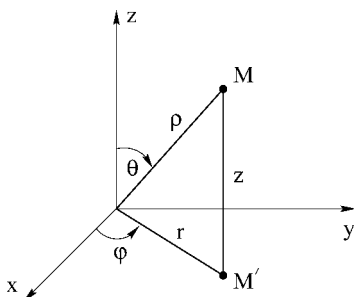


Рис. 2. Цилиндрическая и сферическая системы координат

ограниченные осью  $Oz$  ( $\varphi = \varphi_0$ ), и конусы с вершиной в начале координат и осью  $Oz$  в качестве оси симметрии ( $\theta = \theta_0$ ). Координатными линиями будут линии пересечения этих поверхностей. Название системы координат объясняется наличием сфер среди координатных поверхностей.

### 35.2. Понятие области

Введем некоторые определения, которые понадобятся в дальнейшем.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 35.3.** Областью (открытой областью) называется множество точек плоскости, обладающее следующими двумя свойствами:

- (1) каждая точка области принадлежит ей вместе с некоторой окрестностью этой точки (свойство открытости);
- (2) всякие две точки области можно соединить непрерывной линией, целиком лежащей в этой области (свойство связности).

Часть плоскости, лежащей внутри замкнутого контура  $L$  (см. рис. 3), является областью, так как: 1) для любой точки  $P$ , лежащей внутри  $L$ , существует окрестность, также лежащая внутри  $L$ ; 2) две любые точки  $P$  и  $Q$ , лежащие внутри  $L$ , можно соединить непрерывной линией, лежащей внутри  $L$ .

Точка  $P_0$  называется граничной точкой области  $G$ , если любая окрестность этой точки содержит как точки области  $G$ , так и точки, ей не принадлежащие.

Множество всех граничных точек области называется её границей.

На рис. 3 любая точка  $P_0$  контура  $L$ , очевидно, является граничной.

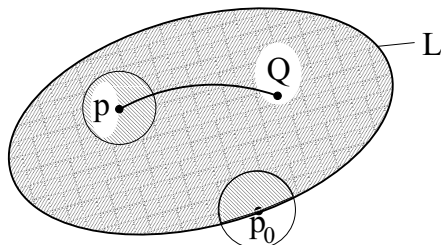


Рис. 3. Область

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 35.4.** Если к открытой области присоединить её границу, то полученное множество точек называется замкнутой областью.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 35.5.** Если для данной области можно подобрать круг, полностью её покрывающий, т.е. такой, внутри которого лежат все точки области, то такая область называется ограниченной.

Если же круга, полностью покрывающего область, подобрать нельзя, то область называется неограниченной.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 35.6.** Область  $G$  (открытая или замкнутая) называется односвязной, если для любого замкнутого контура, лежащего в этой области, ограниченная им часть плоскости целиком принадлежит области  $G$ .

Например, область, заключенная между окружностями  $x^2 + y^2 = 2$  и  $x^2 + y^2 = 4$  не является односвязной, так как, например, окружность  $x^2 + y^2 = 3$ , лежащая в этой области, содержит внутри себя точки, не принадлежащие области (скажем, начало координат).

**ЗАМЕЧАНИЕ 35.1.** Все введенные в этом пункте понятия переносятся на пространство трёх и большего числа измерений.

### 35.3. Основные понятия функций двух переменных

Определение функции одной переменной было дано в лекции 3 части 1 Курса. По аналогии с этим определением введем понятие функции двух переменных.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 35.7.** *Функцией двух переменных называется правило, которое каждой паре действительных чисел  $(x; y) \in D$  ставит в соответствие единственное число  $z \in E$ .*

Переменные  $x$  и  $y$  называются независимыми переменными или аргументами, переменная  $z$  – зависимой переменной или функцией, множество  $D$  называется областью определения  $D(f)$ , множество  $E$  называется областью изменения или множеством значений функции  $E(f)$ .

Обозначать функцию двух переменных будем аналогично тому, как это делали для функции одной переменной:  $z = f(x; y)$ ,  $z = z(x; y)$ . Значение функции для фиксированного значения аргументов  $x_0$ ,  $y_0$ , будем обозначать  $z_0 = f(x_0; y_0)$ ,  $z_0 = z(x_0; y_0)$  или:  $z_0 = z \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$ . Так как каждой паре чисел  $(x; y)$  соответствует единственная точка  $P(x; y)$  плоскости  $Oxy$  в декартовых координатах и наоборот, то функцию двух переменных можно рассматривать как функцию точки  $P(x; y)$  и писать:  $z = f(P)$  или  $z = z(P)$ . Областью определения функции в этом случае будет некоторое множество  $D$  точек плоскости  $Oxy$ .

**ПРИМЕР 35.1.** *Периметр параллелограмма со сторонами  $x$  и  $y$  определяется по формуле  $z = 2x + 2y$  и является функцией двух переменных. Областью определения  $D$  этой функции является множество всех пар неотрицательных чисел  $(x; y)$ , т.е. первый квадрант плоскости  $Oxy$ . Множеством значений  $E$  этой функции является множество всех неотрицательных чисел.*

Основными способами задания функции двух переменных являются аналитический и табличный.

При аналитическом способе функция задаётся посредством формул. При этом она может быть задана в декартовой, цилиндрической или сферической системе координат в явном и неявном виде.

Если в уравнении, определяющем функцию, значение функции  $z$  выражено в явном виде (изолировано в левой части уравнения), то говорят, что функция задана в явном виде:  $z = f(x; y)$ .

ПРИМЕР 35.2. Функция  $z = \frac{1}{x-y}$  задана в явном виде.

Область определения данной функции есть множество точек плоскости  $Oxy$ , для которых  $y \neq x$ , область изменения есть  $(-\infty; +\infty)$ .

Если в уравнении, определяющем функцию, значение функции  $z$  не изолированно, то говорят, что функция задана в неявном виде уравнением вида:  $F(x; y; z) = 0$ .

При этом остается требование, чтобы каждой паре чисел  $(x; y)$  из области определения соответствовало единственное значение  $z$ .

ПРИМЕР 35.3.  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .

Функция  $z$  задана в неявном виде. Это уравнение определяет две функции:  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  и  $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ . Как известно из курса средней школы, это есть уравнение сферы радиуса  $R$  с центром в начале координат. Первая функция определяет верхнюю полусферу, вторая – нижнюю.

Область определения каждой из этих функций:  $R^2 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq R^2$ , т.е. круг на плоскости  $Oxy$  радиуса  $R$  с центром в начале координат.

Для табличного задания функции двух переменных  $z = f(x; y)$  составляется таблица «с двойным входом» вида:

$y \backslash x$	0	1	2	3	4	5
0,2	10	9	8	7	6	5
0,3	9	8	7	6	5	4
0,4	8	7	6	5	4	3

Табличное задание функции

В первой строке таблицы перечисляются значения аргумента  $x$ , в левом столбце – значения аргумента  $y$ , в остальных клетках – соответствующие значения функции  $z$ . Значение функции соответствующее данному значению аргумента  $x$  (например  $x = 2$ ) и  $y$  (например  $y = 0,3$ ) расположено на пересечении соответствующего столбца и строки:  $z|_{\substack{x=2 \\ y=0,3}} = 7$ .

Графиком функции двух переменных является множество точек пространства, удовлетворяющих уравнению функции. Для функции двух переменных это будет в общем случае некоторая поверхность (см. пример 35.3). Следует отметить, что поскольку эта поверхность изображается в проекции на плоскость (лист бумаги), изображение

графиков функции двух переменных вызывает определённые трудности. Однако в настоящее время в связи с широким распространением персональных компьютеров с большим набором графических пакетов прикладных программ эти трудности отступают на второй план по сравнению с наглядностью графического метода представления функции.

### 35.4. Функции более двух независимых переменных

На практике встречаются функции трёх и более независимых переменных. Так, например, объём  $V$  прямоугольного параллелепипеда зависит от трёх аргументов – длины  $x$ , ширины  $y$  и высоты  $z$ :  $V = xyz$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 35.8.** *Функцией трёх переменных называется правило, которое каждой тройке действительных чисел  $(x; y; z) \in D$  ставит в соответствие единственное число  $u \in E$ .*

Переменные  $x, y, z$  называют независимыми переменными или аргументами, переменную  $u$  – зависимой переменной или функцией, множество  $D$  называют областью определения функции  $D(f)$ , множество  $E$  – областью изменения или множеством значений функции  $E(f)$ .

Обозначаются функции трёх переменных так же, как и функции двух переменных:  $u = f(x; y; z)$ ,  $u = u(x; y; z)$ ,  $\omega = \omega(x; y; z)$ . Функцию трёх переменных можно рассматривать как функцию точки  $P(x; y; z)$  в пространстве  $Oxyz$ :  $u = f(P)$ . Область определения в такой интерпретации будет множеством точек в этом пространстве.

Способами задания функции трёх переменных являются также аналитический и табличный. Следует, однако отметить, что пользоваться таблицей с тремя входами менее удобно.

Аналогично можно ввести понятие функции четырех переменных, пяти, вообще –  $n$  переменных. Область определения функции  $n$  переменных является множество  $D$  системы действительных чисел  $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ . Функцию  $n$  переменных  $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$  также часто рассматривают как функцию точки  $P(x_1; x_2; \dots; x_n)$   $n$ -мерного пространства и пишут:  $u = f(P)$ .

Заметим, что функцию трёх или более переменных изобразить с помощью графика в пространстве невозможно.

### 35.5. Поверхности и линии в пространстве

Как отмечалось в начале лекции, поверхность в 3-х мерном пространстве описывается уравнением вида  $F(x; y; z) = 0$  или  $z = f(x; y)$ .

Пересечение двух поверхностей задаёт линию в пространстве; таким образом, линия в пространстве определяется системой двух уравнений вида

$$\begin{cases} F_1(x; y; z) = 0 \\ F_2(x; y; z) = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} z = f_1(x; y) \\ z = f_2(x; y) \end{cases}.$$

Изучать характер изменения поверхности можно методом параллельных сечений, который заключается в следующем. Рассматривают линии, получающиеся в сечении поверхности семейством параллельных плоскостей, и на основании изменения этих сечений судят о характере изменения (рельефе) поверхности. Чаще всего это будут плоскости, параллельные координатным плоскостям. Например, для представления о рельефе земной поверхности на географических картах изображают линии одинаковой высоты (изогипсы или горизонтали), получающиеся в сечении земной поверхности семейством параллельных плоскостей.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 35.9.** *Линиями уровня функции  $z = f(x; y)$  называются линии, образующиеся в пересечении графика этой функции (поверхности) с плоскостями, параллельными координатной плоскости  $Oxy$ , т.е. линии вида:  $\begin{cases} z = f(x; y) \\ z = C \end{cases}$ , где  $C$  – произвольная константа. Другими словами, линии уровня задаются уравнениями вида*

$$f(x; y) = C. \quad (35.3)$$

Если функция задана в неявном виде  $F(x; y; z) = 0$ , то уравнения линий уровня будут иметь вид:

$$F(x; y; C) = 0. \quad (35.4)$$

**ПРИМЕР 35.4.** *Уравнение поверхности, разобранной в примере (35.3) (сферы радиуса  $R$  с центром в точке  $O$ ), имеет вид  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .*

Линии уровня будут иметь уравнения  $x^2 + y^2 + C^2 = R^2$ , где  $C$  – произвольная константа. Преобразуя это уравнение получим:  $x^2 + y^2 = R^2 - C^2$ . Если  $R^2 - C^2 > 0$ , это уравнение задаёт окружности на плоскости  $Oxy$  с центром в точке  $O$ , радиуса  $\sqrt{R^2 - C^2}$  тем большего, чем меньше  $|C|$ ; при  $C = 0$ , радиус равен  $R$ . При  $|C| = R$  ( $R^2 - C^2 = 0$ ) линией уровня этой поверхности будет точка  $O$ , при  $|C| > R$  ( $R^2 - C^2 < 0$ ) линий уровня нет. Поверхность и её линии уровня изображены на (рис. 4) для  $R \leq 4$ .

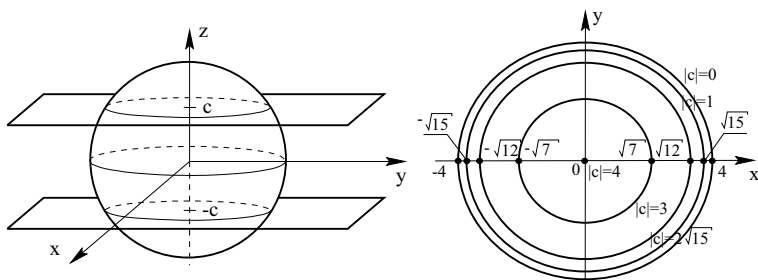


Рис. 4. Линии уровня сферы

Для функции трёх переменных аналогичным понятием будут поверхности уровня.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 35.10.** Поверхностями уровня функции  $u = f(x; y; z)$  называются поверхности вида

$$f(x; y; z) = C, \quad (35.5)$$

где  $C$  — произвольная константа

Это будет однопараметрическое семейство поверхностей в 3-х мерном пространстве  $Oxyz$ .

### 35.5.1. Цилиндрические поверхности.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 35.11.** Поверхность, составленная из всех прямых, пересекающих данную линию  $L$  и параллельных данной прямой  $l$ , называется цилиндрической поверхностью. Линия  $L$  называется направляющей, а каждая из прямых, параллельных  $l$  — образующей цилиндрической поверхности.

В дальнейшем мы будем рассматривать только цилиндрические поверхности с плоскими направляющими, лежащими в одной из координатных плоскостей, и образующими, перпендикулярными этой плоскости (рис. 5).

Можно показать, что не содержащее переменной  $z$  уравнение  $F(x; y) = 0$  в пространстве  $Oxyz$  является уравнением цилиндрической поверхности с образующими параллельными осям  $Oz$  и направляющей  $L$ , которая в плоскости  $Oxy$  задаётся тем же уравнением  $F(x; y) = 0$ .

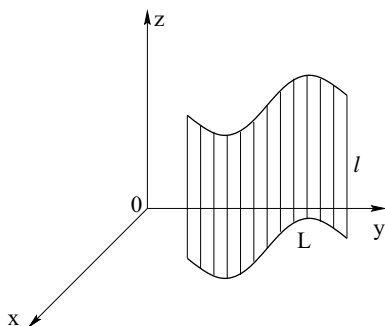


Рис. 5. Цилиндрическая поверхность

ЗАМЕЧАНИЕ 35.2. В пространстве  $Oxyz$  направляющая  $L$  определяется системой уравнений: 
$$\begin{cases} F(x; y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Аналогично можно показать, что уравнение  $F(x; z) = 0$ , не содержащее  $y$ , и уравнение  $F(y; z) = 0$ , не содержащее  $x$ , определяют в пространстве  $Oxyz$  цилиндрические поверхности с образующими, параллельными соответственно осям  $Oy$  и  $Ox$ .

Рассмотрим примеры цилиндрических поверхностей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 35.12.

Поверхность определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (35.6)$$

является цилиндрической и называется эллиптическим цилиндром (рис. 6).

Ее образующие параллельны оси  $Oz$ , а направляющей является эллипс с полуосями  $a$  и  $b$ , лежащий в плоскости  $Oxy$ . В частности, если  $a = b$ , то направляющей является окружность, а поверхность является прямым круговым цилиндром. Его уравнение  $x^2 + y^2 = a^2$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 35.13. Цилиндрическая поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (35.7)$$

называется гиперболическим цилиндром (рис. 7).



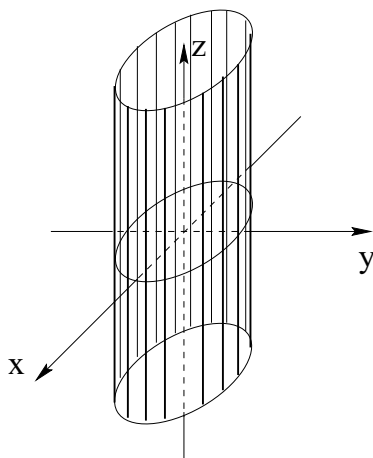


Рис. 6. Эллиптический цилиндр

Образующие этой поверхности параллельны оси  $Oy$ , а направляющей служит расположенная в плоскости  $Oxz$  гипербола с действительной полуосью  $a$  и мнимой полуосью  $b$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 35.14.** Цилиндрическая поверхность, определяемая уравнением

$$y^2 = 2pz, \quad (35.8)$$

называется параболическим цилиндром (рис. 8).

Ее направляющей является парабола, лежащая в плоскости  $Oyz$ , а образующие параллельны оси  $Ox$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 35.3.** Как известно, прямая в пространстве может быть задана уравнениями различных пар плоскостей, пересекающихся по этой прямой. Подобно этому кривая в пространстве может быть задана с помощью уравнений различных поверхностей, пересекающихся по этой кривой. Например, окружность  $C$ , получающаяся в сечении плоскостью  $z = 3$  сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$  может быть задана системой уравнений

$$\begin{cases} z = 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 25. \end{cases} \quad (35.9)$$

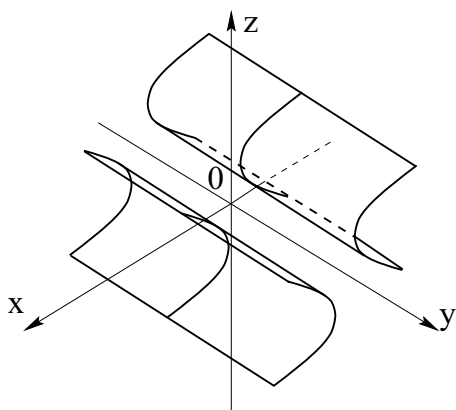


Рис. 7. Гиперболический цилиндр

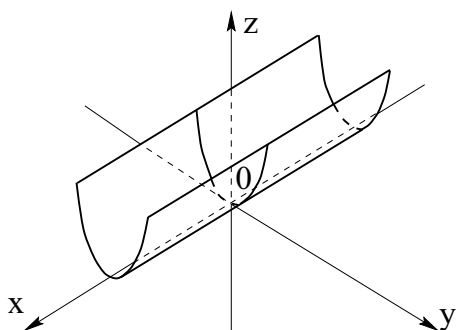


Рис. 8. Параболический цилиндр

С другой стороны, эта окружность может быть получена как линия пересечения плоскости  $z = 3$  и прямого кругового цилиндра  $x^2 + y^2 = 16$ , т.е. может быть задана системой уравнений

$$\begin{cases} z = 3, \\ x^2 + y^2 = 16, \end{cases} \quad (35.10)$$

равносильной системе (35.9)

В дальнейшем, исследуя форму той или иной поверхности с помощью сечений, параллельных координатным плоскостям, мы не будем пользоваться цилиндрическими поверхностями, проецирующими эти сечения на координатные плоскости. Это позволит так же, как в рассмотренном примере, судить о размерах и форме указанных сечений, а тем самым и о форме исследуемых поверхностей.

**35.5.2. Конические поверхности.** Поверхность, составленная из всех прямых, пересекающих линию  $L$  и проходящих через данную точку  $P$ , называется конической поверхностью. При этом линия  $L$  называется направляющей конической поверхности, точка  $P$  – её вершиной, а каждая из прямых, составляющих коническую поверхность – образующей.

В качестве примера рассмотрим коническую поверхность с вершиной в начале координат, для которой направляющей является эллипс

$$\begin{cases} Z = c, \\ \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1, \end{cases} \quad (35.11)$$

с полуосями  $a$  и  $b$ , лежащей в плоскости  $Z = c$ . Эта поверхность называется эллиптическим конусом (рис. 9). Выведем её уравнение.

Рассмотрим произвольно выбранную точку  $M(x; y; z)$  конической поверхности и проведем через нее образующую  $OM$ , пересекающуюся с направляющей в точке  $N(X; Y; c)$ . Составим уравнение прямой  $OM$ , проходящей через точки  $O(0; 0; 0)$  и  $N(X; Y; c)$ :

$$\frac{x-0}{X-0} = \frac{y-0}{Y-0} = \frac{z-0}{c-0} \quad \text{или} \quad \frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{c}.$$

Отсюда  $X = cx/z$ ;  $Y = cy/z$ . Подставив эти выражения во второе из уравнений эллипса (35.11), получим  $\frac{c^2 x^2}{a^2 z^2} + \frac{c^2 y^2}{b^2 z^2} = 1$ , или, после преобразований

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (35.12)$$

Мы получили каноническое уравнение эллиптического конуса. В частности, если  $a = b$ , то направляющей является окружность

$$\begin{cases} z = c, \\ x^2 + y^2 = a^2, \end{cases}$$

а поверхность является прямым круговым конусом. Его уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

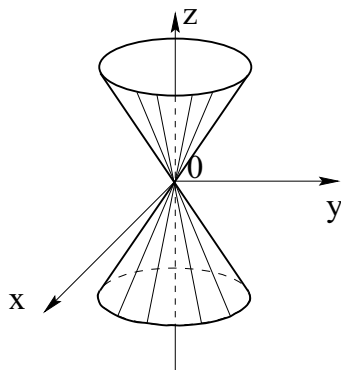


Рис. 9. Коническая поверхность

35.5.3. *Поверхность вращения.* Пусть линия  $L$ , лежащая в плоскости  $Oyz$  задана уравнениями

$$\begin{cases} X = 0, \\ F(Y, Z) = 0. \end{cases} \quad (35.13)$$

Рассмотрим поверхность, образованную вращением этой линии относительно оси  $Oz$  (рис. 10).

Эта поверхность называется поверхностью вращения. Найдём её уравнение. Пусть  $M(x; y; z)$  — произвольно выбранная точка поверхности вращения. Проведём через точку  $M$  плоскость, перпендикулярную оси  $Oz$ , и обозначим точки пересечения этой плоскости с осью  $Oz$  и кривой  $L$  соответственно через  $K$  и  $N$  (рис. 10). Отрезки  $KM$  и  $KN$  являются радиусами одной и той же окружности. Потому  $KM = KN$ . Но длина отрезка  $KN$  равна абсолютной величине ординаты  $Y$  точки  $N$ , т.е.  $KN = |Y|$ , а  $KM = OP = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Следовательно,  $|Y| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , или  $Y = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ . Кроме того, аппликата  $Z$  точки  $N$ , очевидно, равна аппликате  $z$  точки  $M$ .

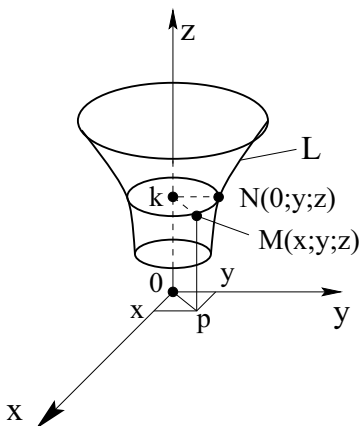


Рис. 10. Поверхность вращения

Так как точка  $N$  лежит на линии  $L$ , заданной уравнениями (35.13), то координаты  $Y$  и  $Z$  точки  $N$  удовлетворяют второму из этих уравнений. Подставляя в него вместо  $Y$  и  $Z$  соответственно равные им величины  $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$  и  $z$ , получим уравнение

$$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0, \quad (35.14)$$

которому удовлетворяют координаты любой точки  $M(x; y; z)$  поверхности вращения. Можно показать, что координаты точек, не лежащих на этой поверхности, уравнению (35.14) не удовлетворяют. Таким образом, уравнение (35.14) является уравнением поверхности вращения относительно оси  $Oz$  линии  $L$ , определяемой уравнениями (35.13). Уравнение (35.14) получается из второго уравнения системы (35.13) заменой в нем координат  $Y$  и  $Z$  координатами  $x$ ,  $y$  и  $z$  по формулам

$$\begin{cases} Y = \pm\sqrt{x^2 + y^2} \\ Z = z \end{cases}. \quad (35.15)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 35.4.** Мы считали, что кривая  $L$  задана в плоскости  $Oyz$  и вращается относительно  $Oz$ . Однако кривая  $L$  может быть задана и в другой координатной плоскости и может вращаться относительно другой координатной оси. Формулы, подобные формулам (35.13), (35.14) и (35.15), читатель легко составит сам.

## Практическое занятие 35. Функции нескольких переменных

**ПРИМЕР 35.1.** Найти и изобразить на плоскости область определения функции двух переменных  $z = \frac{xy}{2x - 3y + 10}$ .

**Решение:** Поскольку знаменатель не должен обращаться в нуль, область определения данной функции будет:

$$D(f) = \{(x; y) | 2x - 3y + 10 \neq 0\}.$$

Это будет множество всех точек плоскости  $Oxy$  за исключением точек, лежащих на прямой  $2x - 3y + 10 = 0$  (рис. 11)

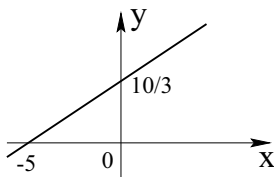


Рис. 11. Решение примера 35.1

Ответ:  $D(f) = \{(x; y) | 2x - 3y + 10 \neq 0\}$ .

**ПРИМЕР 35.2.** Найдите область определения функции трёх переменных  $u = \sqrt{2x - y + 3z - 1}$ .

**Решение:** Поскольку выражение под корнем квадратным должно быть неотрицательным, область определения данной функции будет:  $D(f) = \{(x; y; z) | 2x - y + 3z - 1 \geq 0\}$ .

Это будет множество всех точек полупространства, отделенного плоскостью  $2x - y + 3z - 1 = 0$ , включая саму плоскость.

Ответ:  $D(f) = \{(x; y; z) | 2x - y + 3z - 1 \geq 0\}$ .

**ПРИМЕР 35.3.** Найдите и изобразите на плоскости линии уровня функции двух переменных  $z = \frac{x^2}{4} + y^2$ .

**Решение:** Уравнение линий уровня имеет вид  $\frac{x^2}{4} + y^2 = c$ , где  $c$  – произвольная константа. Очевидно, что данному уравнению будет соответствовать линия только при  $c \geq 0$ . При  $c = 0$  это будет начало координат – точка  $O(0; 0)$ . При  $c > 0$  – эллипс с полуосями  $2\sqrt{c}$  и  $\sqrt{c}$

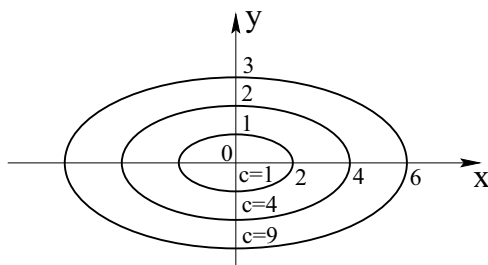


Рис. 12. Решение примера 35.3

ПРИМЕР 35.4. Определите вид поверхности, задаваемой уравнением  $y^2 - 2y + x^2 + 4x + 4 = 0$ .

Р е ш е н и е: Выделив полный квадрат по  $y$  и по  $x$ , получим уравнение поверхности в виде:  $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$ . Это круговой цилиндр с осью параллельной оси  $Oz$ , проходящей через точку  $P(-2; 1; 0)$ , радиуса 1.

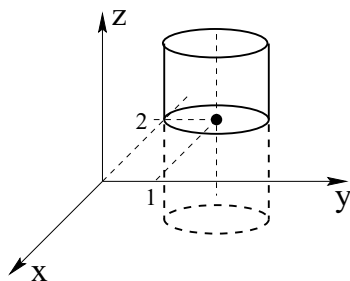


Рис. 13. Решение примера 35.4

## Самостоятельная работа

В примерах 35.5–35.9 найдите и изобразите на плоскости область определения функции двух переменных.

ПРИМЕР 35.5.  $z = \frac{y - x}{x^2 + y^2 - 4}$ .

ПРИМЕР 35.6.  $z = \frac{5}{3 - x^2 - y^2}$ .

ПРИМЕР 35.7.  $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + y^2 - 2y - 2}}$ .

ПРИМЕР 35.8.  $z = \lg(x^2 + 6x + y^2 + 8)$ .

ПРИМЕР 35.9.  $z = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$ .

В примерах 35.10–35.12 найдите область определения данной функции трёх переменных.

ПРИМЕР 35.10.  $u = \sqrt{x^2 + 9y^2 + 18y + 9 - z}$ .

ПРИМЕР 35.11.  $u = \lg(4x^2 + 8x + y^2 - 2y + 5 - 4z)$ .

ПРИМЕР 35.12.  $u = \frac{1}{\sqrt{2x - z - 1}} - \frac{1}{\sqrt{y + 2x + 1}}$ .

В примерах 35.13, 35.14 найдите и изобразите на плоскости линии уровня данной функции.

ПРИМЕР 35.13.  $z = x^2 + 6x + y^2 + 9$ .

ПРИМЕР 35.14.  $z = x^2 + 9y^2 + 18$ .

В примерах 35.15–35.19 определите вид поверхности, задаваемой уравнением.

ПРИМЕР 35.15.  $x^2 - 2x + y^2 - 2y - 2 = 0$ .

ПРИМЕР 35.16.  $4x^2 + y^2 - 4 = 0$ .

ПРИМЕР 35.17.  $x - y^2 - 2y - 2 = 0$ .

ПРИМЕР 35.18.  $x^2 - y + 1 = 0$ .

ПРИМЕР 35.19.  $x^2 + 4z^2 - y^2 = 0$ .



## Лекция 36. Поверхности второго порядка

Построение поверхностей методом параллельных сечений. Поверхности 2-го порядка: эллиптические, гиперболические, параболические. Линейчатые поверхности.

### 36.1. Поверхности второго порядка

В части I данного курса мы изучили кривые второго порядка. Аналогично этому, общее уравнение поверхности второго порядка имеет вид:

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + \\ + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \end{aligned} \quad (36.1)$$

Рассмотренные в лекции уравнения поверхности являются частным случаем общего уравнения (36.1).

Форму поверхностей, рассматриваемых в этой лекции, будем изучать методом параллельных сечений.

#### 36.1.1. Эллипсоид.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 36.1.** Поверхность определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (36.2)$$

называется *трёхосным эллипсоидом*. Числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  называются *полуосями эллипсоида*, а уравнение (36.2) *каноническим уравнением эллипсоида*.

Так как в уравнении (36.2) текущие координаты входят в четных степенях, то эллипсоид симметричен относительно координатных плоскостей. Чтобы установить форму эллипсоида, будем пересекать его плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Покажем, что если пересечь эллипсоид плоскостью  $z = h$  ( $|h| < c$ ), то в сечении получится эллипс  $L$ . В самом деле, исключая из уравнений

$$\begin{cases} z = h, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \end{cases}$$

аппликату  $z$ , получим уравнение цилиндрической поверхности, проектирующее сечение  $L$  на плоскость  $Oxy$ :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}$ , или

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1.$$

Из этого уравнения видно, что кривая  $L$  есть эллипс с полуосями

$$\bar{a} = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}, \quad \bar{b} = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}. \quad (36.3)$$

Из формулы (36.3) видно, что с возрастанием  $|h|$  полуоси эллипса  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  уменьшаются. При  $|h| = c$  имеем  $\bar{a} = \bar{b} = 0$ , и сечение вырождается в точку. Аналогично можно показать, что при пересечении эллипсоида плоскостями  $x = h$  ( $|h| < a$ ) и  $y = h$  ( $|h| < b$ ) также получаются эллипсы. Эллипсоид имеет вид, изображенный на рис. 14. В частном случае при  $a = b$  получаем эллипсоид вращения (двухосный эллипсоид).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 36.2.** Если все три полуоси эллипсоида равны между собой:  $c = b = a$ , то получившаяся поверхность называется сферой:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2. \quad (36.4)$$

**ПРИМЕР 36.1.** Какую поверхность задаёт уравнение  $3x^2 + 5y^2 + 7z^2 = 12$ ?

**Решение:** Поделив обе части уравнения на 12 и переписав его в виде:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{12/5} + \frac{z^2}{12/7} = 1,$$

заключаем, что это есть уравнение эллипсоида с полуосями  $a = 2$ ,

$$b = \sqrt{\frac{12}{5}}, \quad c = \sqrt{\frac{12}{7}}.$$

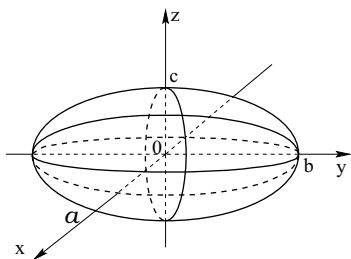


Рис. 14. Эллипсоид

## 36.1.2. Гиперboloиды.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 36.3. Поверхность определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (36.5)$$

называется *однополостным гиперboloидом*, а уравнение (36.5) – его каноническим уравнением.

Эта поверхность имеет три плоскости симметрии — координатные плоскости, так как текущие координаты  $x$ ,  $y$  и  $z$  входят в уравнение (36.5) в четных степенях. Пересекая однополостный гиперboloид плоскостью  $y = 0$ , получим в плоскости  $Oxz$  гиперболу  $ABCD$  (рис. 15)

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

Аналогично, в сечении однополостного гиперboloида плоскостью  $x = 0$  получится гипербола  $EFGH$

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0, \end{cases}$$

лежащая в плоскости  $Oyz$ .

При пересечении однополостного гиперboloида плоскостью  $z = h$  получится эллипс  $BFCG$ , уравнения которого имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

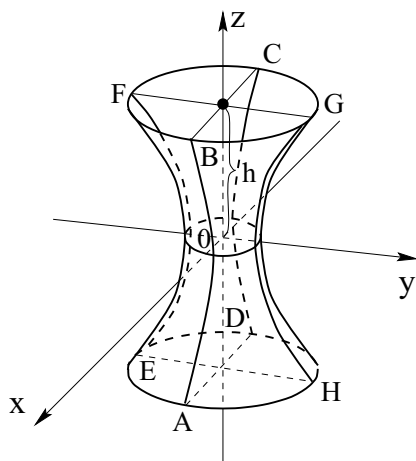


Рис. 15. Однополостный гиперболоид

Полуоси этого эллипса  $\bar{a} = a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$  и  $\bar{b} = b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$  возрастают с возрастанием абсолютной величины  $h$ . При  $h = 0$  получится эллипс, лежащий в плоскости  $Oxy$  и имеющий наименьшие полуоси  $a$  и  $b$ .

При  $a = b$  получим однополостный гиперболоид вращения

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (36.6)$$

При пересечении его плоскостями  $z = h$  получаются окружности

$$\begin{cases} z^2 + y^2 = a^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right), \\ z = h. \end{cases}$$

В п. (35.5.2) и (35.5.3) рассматривались цилиндрические и конические поверхности, каждая из которых составлена из прямых. Оказывается, однополостный гиперболоид можно также рассматривать как поверхность, составленную из прямых линий. Рассмотрим прямую, определяемую уравнениями

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = k \left(1 + \frac{y}{b}\right), \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{k} \left(1 - \frac{y}{b}\right), \end{cases} \quad (36.7)$$

в которых  $a$ ,  $b$  и  $c$  – полуоси однополостного гиперболоида, а  $k$  – произвольно выбранное число ( $k \neq 0$ ).

Перемножая почленно эти уравнения, получим

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}, \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

т.е. уравнение однополостного гиперболоида.

Таким образом, уравнение однополостного гиперболоида является следствием системы уравнений (36.7). Поэтому координаты любой точки  $M(x; y; z)$ , удовлетворяющие системе (36.7), удовлетворяют также и уравнению (36.5) однополостного гиперболоида. Иными словами, все точки прямой (36.7) принадлежат гиперболоиду (36.5). Меняя значения  $k$ , мы получим целое семейство прямых, лежащих на поверхности (36.5). Аналогично можно показать, что однополостному гиперболоиду принадлежат все прямые семейства

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = l \left(1 - \frac{y}{b}\right), \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{l} \left(1 + \frac{y}{b}\right), \end{cases} \quad (36.8)$$

где  $l$  – произвольный параметр.

Можно также показать, что через каждую точку однополостного гиперболоида проходит по одной прямой каждого из указанных семейств. Таким образом, однополостный гиперболоид можно рассматривать как поверхность, составленную из прямых линий (рис. 16).

Возможность составления поверхности однополостного гиперболоида из прямых линий используется в строительной технике. Так, например, по конструкции, предложенной инженером Шуховым, в Москве была сооружена радиомачта с помощью балок, расположенных по прямолинейным образующим однополостного гиперболоида.

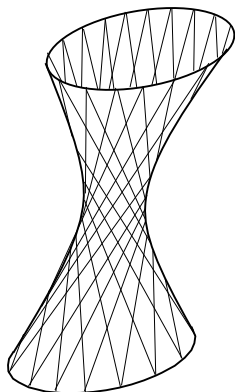


Рис. 16. Образующие однополостного гиперboloида

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 36.4. Поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad (36.9)$$

называется *двуполостным гиперboloидом*, а (36.9) его *каноническим уравнением*.

Координатные плоскости являются плоскостями симметрии для двуполостного гиперboloида. Пересекая эту поверхность координатными плоскостями  $Oxz$  и  $Oyz$ , получим соответственно гиперболы (рис. 17).

$$\begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \\ y = 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

Если двуполостной гиперboloид (36.9) пересечь плоскостью  $z = h$  (при  $|h| > c$ ), то в сечении получится эллипс

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h \end{cases}$$

с полуосями  $\bar{a} = a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$  и  $\bar{b} = b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$ , возрастающими с возрастанием  $|h|$ . При  $|h| < c$  поверхность (36.9) с плоскостью  $z = h$ , очевидно, не пересекается. Двуполостный гиперboloид состоит из двух

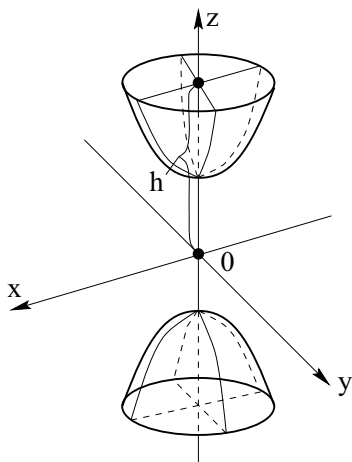


Рис. 17. Двуполостный гиперboloид

отдельных частей (полостей), чем и объясняется его название. При  $a = b$  уравнение (36.9) имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad \text{или} \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2 + y^2}{b^2} = 1$$

и является уравнением двуполостного гиперboloида вращения. В сечении последнего плоскостью  $z = h$  ( $|h| > c$ ) получится окружность

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = b^2 \left( \frac{h^2}{c^2} - 1 \right), \\ z = h \end{cases}$$

радиуса  $R = b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$ .

**ПРИМЕР 36.2.** Какую поверхность задаёт уравнение  $4x^2 - 2y^2 + 3z^2 = 5$ ?

**Р е ш е н и е:** Поделив обе части уравнения на 5 и переписав его в виде

$$\frac{x^2}{5/4} + \frac{z^2}{5/3} - \frac{y^2}{5/2} = 1,$$

заключаем, что это уравнение однополостного гиперболоида, расположенного «вдоль» оси  $Oy$

**ПРИМЕР 36.3.** *Какую поверхность задаёт уравнение  $9x^2 - y^2 - z^2 = 5$ ?*

**Решение:** Поделив обе части уравнения на  $-5$  и переписав его в виде

$$\frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{5} - \frac{x^2}{5/9} = -1,$$

заключаем, что это уравнение двуполостного гиперболоида вращения, расположенного «вдоль» оси  $Ox$ .

### 36.1.3. Параболоиды.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 36.5.** *Эллиптическим параболоидом называется поверхность, определяемая уравнением*

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad (36.10)$$

*а (36.10) – его каноническим уравнением.*

При пересечении эллиптического параболоида координатными плоскостями  $Oxz$  и  $Oyz$  получатся соответственно параболы

$$\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2}, \\ y = 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} z = \frac{y^2}{b^2}, \\ x = 0, \end{cases}$$

а при пересечении плоскостью  $z = h$  ( $h > 0$ ) – эллипс

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2 h} + \frac{y^2}{b^2 h} = 1, \\ z = h, \end{cases}$$

с полуосями  $a\sqrt{h}$  и  $b\sqrt{h}$  (рис. 18). В случае  $a^2 = b^2$  получим параболоид вращения  $a^2 z = x^2 + y^2$ .

Поскольку  $x$  и  $y$  входят в уравнение (36.10) в четных степенях, эллиптический параболоид имеет две плоскости симметрии:  $Oxz$  и  $Oyz$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 36.6.** *Гиперболическим параболоидом называется поверхность, определяемая уравнением*

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \quad (36.11)$$

*а (36.11) его каноническим уравнением.*



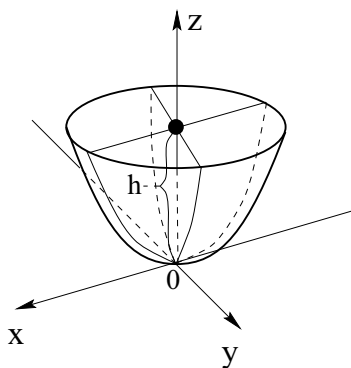


Рис. 18. Параболоид вращения

Пересекая эту поверхность плоскостью  $Oxz$ , получим параболу

$$\begin{cases} a^2 z = x^2, \\ y = 0. \end{cases} \quad (36.12)$$

При пересечении гиперболического параболоида плоскостью  $x = h$  получится парабола

$$\begin{cases} z = \frac{h^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \\ x = h, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} b^2 \left( z - \frac{h^2}{2a^2} \right) = -y^2, \\ x = h. \end{cases}$$

При различных значениях  $h$  получится целое семейство парабол, лежащих в плоскостях, параллельных плоскости  $Oyz$  и имеющих одинаковый параметр  $b^2$ .

Гиперболический параболоид можно рассматривать как поверхность, описываемую движением любой из этих парабол при условии, что плоскость движущейся параболы остается параллельной плоскости  $Oyz$ , ось симметрии параболы остается в плоскости  $Oxz$ , а вершина движется по параболе (36.12). Пересекая гиперболический параболоид плоскостью  $z = h$ , получим (при  $h \neq 0$ ) гиперболу

$$\begin{cases} h = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \\ z = h, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2 h} - \frac{y^2}{b^2 h} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

На рис. (19) показано расположение этой гиперболы для двух случаев:  $h > 0$  (верхний край) и  $h < 0$  (нижний край). При  $h = 0$ , т.е.

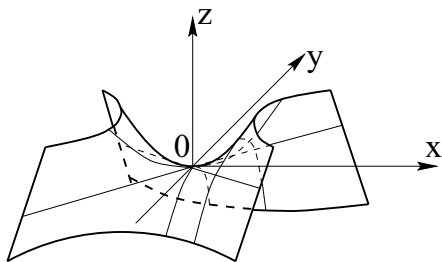


Рис. 19. Гиперболический параболоид

при пересечении гиперболического параболоида координатной плоскостью  $Oxy$ , получится линия, уравнение которой в плоскости  $Oxy$  имеет вид  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ . Последнее уравнение равносильно системе

двух уравнений 
$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0. \end{cases}$$

Это означает, что гиперболический параболоид пересекается с плоскостью  $Oxy$  по двум прямым

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \\ z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

лежащим в плоскости  $Oxy$  и проходящим через начало координат. Кроме этих двух прямых, существуют и другие прямые, полностью лежащие на гиперболическом параболоиде. Более того, как и в случае однополостного гиперboloида, можно показать, что через каждую точку гиперболического параболоида проходит по одной прямой каждого из двух семейств прямых

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = kz, \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{k}, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{l}, \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = lz, \end{cases}$$

где  $k$  и  $l$  – произвольные параметры.

Таким образом, гиперболический параболоид можно рассматривать как поверхность, составленную из прямых линий (рис. 20).

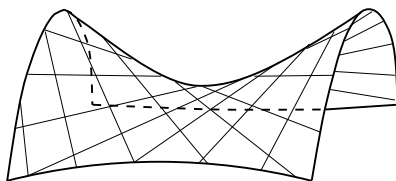


Рис. 20. Образующие гиперболического параболоида

**ЗАМЕЧАНИЕ 36.1.** Поверхности, составленные из прямых линий, называются *линейчатыми*. Таким образом, цилиндрические и конические поверхности, а также однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид являются линейчатыми поверхностями.

**ПРИМЕР 36.4.** Какую поверхность задаёт уравнение  $y = -3x^2 - 5z^2$ ?

**Решение:** Записав уравнение в виде:

$$y = -\left(\frac{x^2}{1/3} + \frac{z^2}{1/5}\right),$$

заключаем, что это уравнение эллиптического параболоида, расположенного «вдоль» оси  $Oy$  в отрицательную сторону. В сечении плоскостями, перпендикулярными оси  $Oy$ , при отрицательных значениях  $y$  получаются эллипсы с полуосями  $\sqrt{\frac{1}{3}}$  и  $\sqrt{\frac{1}{5}}$ .

**ПРИМЕР 36.5.** Какую поверхность задаёт уравнение  $x = 4z^2 - 16y^2$ ?

**Решение:** Записав уравнение в виде:

$$x = \frac{z^2}{1/4} - \frac{y^2}{1/16},$$

заключаем, что это уравнение гиперболического параболоида («седла») с осью  $Ox$  в качестве «всадника» и осью  $Oz$  в качестве «лошади».

## Практическое занятие 36. Поверхности второго порядка

**ПРИМЕР 36.1.** Определите вид поверхности, задаваемой уравнением

$$2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 5 = 0.$$

**Р е ш е н и е:** Перенеся свободный член в правую часть уравнения и поделив обе его части на 5, получим:

$$\frac{2x^2}{5} + \frac{3y^2}{5} + \frac{4z^2}{5} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{5/2} + \frac{y^2}{5/3} + \frac{z^2}{5/4} = 1.$$

Это каноническое уравнение эллипсоида с полуосями  $a = \sqrt{\frac{5}{2}}$ ,

$$b = \sqrt{\frac{5}{3}}, c = \sqrt{\frac{5}{4}}.$$

Ответ: эллипсоид.

**ПРИМЕР 36.2.** *Определите вид поверхности, задаваемой уравнением*

$$3x^2 - 4y^2 + 5z^2 - 6 = 0.$$

**Р е ш е н и е:** Перенеся свободный член в правую часть уравнения и поделив обе его части на 6, получим:

$$\frac{3x^2}{6} - \frac{2y^2}{3} + \frac{5z^2}{6} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{6/3} - \frac{y^2}{3/2} + \frac{z^2}{6/5} = 1.$$

Это каноническое уравнение однополостного гиперboloида, расположенного вдоль оси  $Oy$ , с полуосями  $\sqrt{\frac{6}{3}}$  и  $\sqrt{\frac{6}{5}}$  эллипса в плоскости  $y = 0$ .

Ответ: Однополостный гиперboloид вдоль  $Oy$ .

**ПРИМЕР 36.3.** *Определите вид поверхности, задаваемой уравнением*

$$4y^2 + 4z^2 - 5x^2 - 7 = 0.$$

**Р е ш е н и е:** Перенеся свободный член в правую часть уравнения и поделив обе его части на 7, получим:

$$\frac{4y^2}{7} + \frac{4z^2}{7} - \frac{5x^2}{7} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{7/4} + \frac{z^2}{7/4} - \frac{x^2}{7/5} = 1.$$

Это каноническое уравнение однополостного гиперboloида вращения, расположенного вдоль оси  $Ox$ , с радиусом  $\sqrt{\frac{7}{4}}$  окружности в плоскости  $Ox$ .

Ответ: Однополостный гиперboloид вращения вдоль  $Ox$ .

ПРИМЕР 36.4. *Определите вид поверхности, задаваемой уравнением*

$$4y^2 + 5z^2 = 6x^2 - 2.$$

Р е ш е н и е: Перенеся  $6x^2$  в левую часть уравнения и деля обе его части на 2, получаем:

$$2y^2 + \frac{5z^2}{2} - 3x^2 = -1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{1/2} + \frac{z^2}{2/5} - \frac{x^2}{1/3} = -1.$$

Это уравнение двуполостного гиперboloида, расположенного вдоль оси  $Ox$ .

Ответ: Двуполостный гиперboloид вдоль оси  $Ox$ .

ПРИМЕР 36.5. *Определите вид поверхности, задаваемой уравнением*

$$3x^2 + 3z^2 = 4y^2 - 4.$$

Р е ш е н и е: Перенеся  $4y^2$  в левую часть уравнения и деля обе его части на 4, получаем:

$$\frac{3x^2}{4} + \frac{3z^2}{4} - y^2 = -1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4/3} + \frac{z^2}{4/3} - y^2 = -1.$$

Это уравнение двуполостного гиперboloида вращения, расположенного вдоль оси  $Oy$ .

Ответ: Двуполостный гиперboloид вдоль оси  $Oy$ .

ПРИМЕР 36.6. *Определите вид поверхности, задаваемой уравнением*

$$3z^2 + 2y^2 - 5x = 0.$$

Р е ш е н и е: Перенеся  $5x$  в другую часть уравнения и поделив обе его части на 5, получим:

$$x = \frac{2y^2}{5} + \frac{3z^2}{5} \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{5/2} + \frac{z^2}{5/3}.$$

Это уравнение эллиптического параболоида, расположенного вдоль оси  $Ox$ .

Ответ: Эллиптический параболоид вдоль оси  $Ox$ .

ПРИМЕР 36.7. *Определите вид поверхности, задаваемой уравнением*

$$4y^2 - 3z^2 - 3x = 0.$$

**Решение:** Перенеся  $3x$  в другую часть уравнения и поделив обе его части на 3, получим:

$$x = \frac{4y^2}{3} - \frac{5z^2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{3/4} - \frac{z^2}{3/5}.$$

Это каноническое уравнение гиперболического параболоида, расположенного вдоль оси  $Oy$

Ответ: Гиперболический параболоид вдоль оси  $Oy$ .

### Самостоятельная работа

В следующих примерах определите вид поверхности, задаваемой уравнением

ПРИМЕР 36.8.  $6 - x^2 - 2y^2 - 3z^2 = 0$ .

ПРИМЕР 36.9.  $2z^2 + 5 = 3y^2 + 4x^2$ .

ПРИМЕР 36.10.  $6x^2 + 3z^2 + 4 = 5y^2$ .

ПРИМЕР 36.11.  $3y - 4x^2 - 5z^2 = 0$

ПРИМЕР 36.12.  $3x^2 + 3y^2 - 5z = 0$ .

ПРИМЕР 36.13.  $2y + 3z^2 - 5x^2 = 0$ .

### Лекция 37. Преобразование декартовых координат

Параллельный перенос осей. Поворот осей. Приведение поверхности 2-го порядка к каноническому виду.

Аналогично тому, как это было сделано в лекции 2 части I настоящего курса, выведем формулы, связывающие координаты точки в данной декартовой (прямоугольной) системе координат с ее координатами в другой такой же системе, отличающейся расположением начала и направлением осей. Сначала рассмотрим более простой случай, когда оси координат сонаправлены.

#### 37.1. Параллельный перенос осей декартовой системы координат

Будем предполагать, что обе системы прямоугольные, причём одноименные оси этих систем параллельны, одинаково направлены и на каждой из них выбрана одна и та же масштабная единица (рис. 21). Условимся называть координаты точки в системе  $Oxy$  старыми, а в

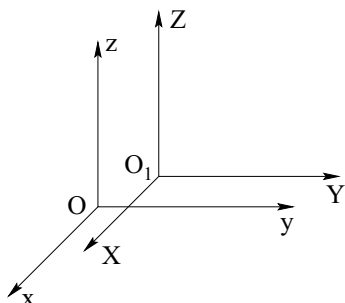


Рис. 21. Параллельный перенос декартовой системы координат

системе  $O_1XY$ , полученной параллельным переносом осей старой системы – новыми.

Пусть начало новой системы координат  $O_1$  имеет в старой системе координаты  $x_0, y_0, z_0$ :  $O_1(x_0; y_0; z_0)$ .

Также как для декартовой системы двух координат (см. лекцию 2 части 1 Курса), можно показать, что при параллельном переносе осей в пространстве получаются следующие формулы преобразования координат:

$$x = X + x_0; \quad y = Y + y_0; \quad z = Z + z_0, \quad (37.1)$$

или, что то же самое

$$X = x - x_0; \quad Y = y - y_0; \quad Z = z - z_0. \quad (37.2)$$

### 37.2. Поворот осей декартовой системы координат

Пусть в пространстве заданы две прямоугольные системы координат, имеющие общее начало  $O$ : система  $Oxyz$  (старая) и система  $OXYZ$  (новая), которая получена поворотом старой системы. Найдём формулы, выражающие старые координаты  $x, y, z$  произвольной точки  $M$  пространства через её новые координаты  $X, Y, Z$ .

Задавать положение новых осей относительно старых будем с помощью направляющих косинусов. Так, например, положение оси  $OX$  зададим тремя направляющими косинусами, обозначив их следующим образом:

$$\cos \angle XOx = \alpha_{11}, \quad \cos \angle XOy = \alpha_{21}, \quad \cos \angle XOz = \alpha_{31}.$$

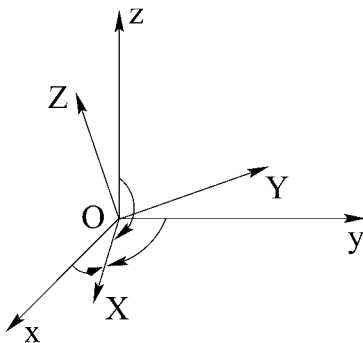


Рис. 22. Поворот осей декартовой системы координат

Заметим, что так же как для направляющих косинусов вектора, справедливо соотношение:

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2 = 1. \quad (37.3)$$

Обозначив аналогичным образом направляющие косинусы всех осей, сведем результаты в таблицу:

	X	Y	Z
x	$\alpha_{11}$	$\alpha_{12}$	$\alpha_{13}$
y	$\alpha_{21}$	$\alpha_{22}$	$\alpha_{23}$
z	$\alpha_{31}$	$\alpha_{32}$	$\alpha_{33}$

Направляющие косинусы новых осей по отношению к старым

Можно доказать (сделайте это самостоятельно), что старые координаты выражаются через новые по формулам:

$$\begin{cases} x = \alpha_{11}X + \alpha_{12}Y + \alpha_{13}Z, \\ y = \alpha_{21}X + \alpha_{22}Y + \alpha_{23}Z, \\ z = \alpha_{31}X + \alpha_{32}Y + \alpha_{33}Z. \end{cases} \quad (37.4)$$

Если обозначить матрицу направляющих косинусов  $L$ , вектор-столбец старых координат  $X$ , а новых  $X'$ :

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \quad (37.5)$$

то формулы (37.4) в матричной форме запишутся в виде:



$$X = L \cdot X'. \quad (37.6)$$

Матрица  $L$  обладает свойствами:

- сумма квадратов элементов строки или столбца равна 1;
- сумма произведений соответственных элементов двух строк или столбцов равна нулю;
- транспонированная матрица  $L_T$  совпадает с обратной  $L^{-1}$ :  
 $L_T = L^{-1}$ .

Такая матрица, как отмечалось в лекции 36, называется ортогональной. Формулы (37.4) соответствуют формулам (36.2) лекции 36, а преобразование координат в матричной форме (37.6) такое же как для случая двух координат.

Поскольку обратная матрица совпадает с транспонированной:  $L^{-1} = L_T$ , обратное к (37.6) преобразование в матричной форме имеет вид:

$$X' = L^{-1}X = L_TX,$$

а в координатах:

$$\begin{aligned} X &= \alpha_{11}x + \alpha_{21}y + \alpha_{31}z, \\ Y &= \alpha_{12}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z, \\ Z &= \alpha_{13}x + \alpha_{23}y + \alpha_{33}z. \end{aligned} \quad (37.7)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 37.1.** Декартова (прямоугольная) система координат в пространстве  $Oxyz$  называется правой, если смешанное произведение единичных векторов по осям координат равно  $+1$ :

$$(\vec{i}\vec{j}\vec{k}) = +1.$$

Если  $(\vec{i}\vec{j}\vec{k}) = -1$ , система координат называется левой.

На практике, если направление оси  $Oz$  совпадает с движением правого буравчика, у которого ручка вращается по кратчайшему пути от оси  $Ox$  к оси  $Oy$ , то система правая. Если же направление оси  $Oz$  противоположно, система левая (рис. 23).

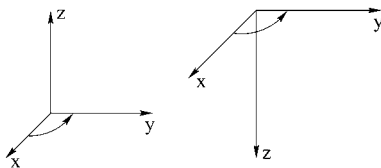


Рис. 23. Правая и левая системы координат в пространстве

**ЗАМЕЧАНИЕ 37.1.** Если считать оси системы координат в пространстве «жестко соединенными», то вращением невозможно совместить правую и левую системы координат с общим началом.

**ЗАМЕЧАНИЕ 37.2.** Определитель матрицы  $L$  преобразования координат равен  $+1$ , если при преобразовании ориентация системы не меняется (правая переходит в правую или левая в левую). В противном случае (правая переходит в левую или левая в правую) определитель матрицы  $L$  равен  $-1$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 37.3.** на плоскости также различают правую и левую системы координат (см. рис. 24). Система является правой, если ось  $Ox$  совмещается с осью  $Oy$  кратчайшим путем вращением против часовой стрелки.

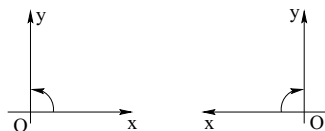


Рис. 24. Правая и левая системы координат на плоскости

Если считать оси системы координат на плоскости «жестко соединенными», то вращением без вывода из плоскости невозможно совместить правую и левую системы координат с общим началом.

### 37.3. Приведение уравнения поверхности 2-го порядка к каноническому виду

Если в общем уравнении (36.1) поверхности 2-го порядка отсутствуют члены  $xy$ ,  $xz$  и  $yz$  (т.е.  $a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0$ ), то привести уравнение к каноническому виду можно выделив полный квадрат. Покажем это на примерах.

**ПРИМЕР 37.1.** Какую поверхность задаёт уравнение:

$$3x^2 + 2y^2 + z^2 - 6x + 4y - 4z + 5 = 0?$$

**Решение:** Сгруппировав члены с одинаковыми переменными и выделив полный квадрат, получаем:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 6x + 4y - 4z + 5 = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3(x^2 - 2x + 1) + 2(y^2 + 2y + 1) + (z^2 - 4z + 4) = 4 &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 3(x-1)^2 + 2(y+1)^2 + (z-2)^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{4/3} + \frac{(y+1)^2}{4/2} + \frac{(z-2)^2}{4} = 1.$$

Сделаем замену переменных:

$$X = x - 1, \quad Y = y + 1, \quad Z = z - 2.$$

В новых координатах уравнение примет вид:

$$\frac{X^2}{4/3} + \frac{Y^2}{2} + \frac{Z^2}{4} = 1.$$

Это каноническое уравнение эллипсоида с полуосями

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad b = \sqrt{2}, \quad c = 2.$$

Поскольку новые координаты  $X, Y, Z$  выражаются через старые координаты  $x, y, z$  по формулам:  $X = x - x_0, Y = y - y_0, Z = z - z_0$ , на основании изложенного в п. (36.1.3) заключаем, что новая система координат получается из старой параллельным переносом начала координат в точку  $P_0(x_0; y_0; z_0)$ . Поскольку в новых координатах поверхность является эллипсоидом с центром в начале координат и осями координат в качестве осей симметрии, то в старых координатах поверхность является эллипсоидом с центром в точке  $P_0(1; -1; 2)$  и осями симметрии, параллельными осям координат.

**ПРИМЕР 37.2.** Какую поверхность задаёт уравнение

$$4x^2 + y^2 - 3z^2 + 16x + 2y + 6z + 6 = 0?$$

**Р е ш е н и е:**

Сгруппировав члены с одинаковыми переменными и выделив полный квадрат, получаем:

$$\begin{aligned} 4x^2 + y^2 - 3z^2 + 16x + 2y + 6z + 6 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4(x^2 + 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) - 3(z^2 - 2z + 1) &= 8 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{(x+2)^2}{2} + \frac{(y+1)^2}{8} - \frac{(z-1)^2}{8/3} &= 1. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных:

$$X = x + 2, \quad Y = y + 1, \quad Z = z - 1.$$

В новых координатах уравнение имеет вид:

$$\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{8} - \frac{Z^2}{8/3} = 1.$$

Это каноническое уравнение однополостного гиперboloида, расположенного «вдоль» оси  $OZ$ . В сечениях, перпендикулярных оси  $OZ$ , получаются эллипсы. Поскольку новая система координат получается из старой параллельным переносом начала в точку  $P_0(-2; -1; 1)$ , осью гиперboloида является прямая, параллельная оси  $Oz$  и проходящая через эту точку.

Если в общем уравнении (36.1) поверхности 2-го порядка не все коэффициенты  $a_{12}$ ,  $a_{13}$  и  $a_{23}$  равны нулю, то для приведения уравнения поверхности к каноническому виду необходимо найти собственные числа и собственные векторы матрицы квадратичной формы (36.1) как это изложено в лекции 32 части 1 данного Курса.

Направляющие косинусы осей новой системы координат, в которой уравнение поверхности станет каноническим, находятся из трёх систем уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_i)\alpha_{1i} + a_{12}\alpha_{2i} + a_{13}\alpha_{3i} = 0, \\ a_{12}\alpha_{1i} + (a_{22} - \lambda_i)\alpha_{2i} + a_{23}\alpha_{3i} = 0, \\ a_{13}\alpha_{1i} + a_{23}\alpha_{2i} + (a_{33} - \lambda_i)\alpha_{3i} = 0, \end{cases} \quad (37.8)$$

дополненных условием нормировки (37.3):

$$\alpha_{1i}^2 + \alpha_{2i}^2 + \alpha_{3i}^2 = 1,$$

где три действительные собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  находятся из характеристического уравнения (37.9):

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (37.9)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 37.4.** Направляющие косинусы каждой из трёх новых осей образуют собственный вектор матрицы квадратичной формы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad (37.10)$$

соответствующий собственному значению  $\lambda_i$  ( $i=1,2,3$ ). Если все корни уравнения (37.9) отличны от нуля, системы (37.8) определяют

направляющие косинусы осей новой системы координат  $(X, Y, Z)$ , в которой уравнение поверхности будет каноническим. Если два корня уравнения (37.9) равны нулю, поверхность является параболическим цилиндром или парой параллельных плоскостей. В этом случае систему (37.8) следует дополнить уравнением  $a_{14}\alpha_{11} + a_{24}\alpha_{21} + a_{34}\alpha_{31} = 0$  и полученная система определит направляющие косинусы образующих цилиндра.

**ЗАМЕЧАНИЕ 37.5.** Можно показать, что если матрица  $A$  квадратичной формы не вырождена ( $\det A \neq 0$ ), то каноническое уравнение поверхности второго порядка после приведения к каноническому виду имеет вид:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + \frac{\det D}{\det A} = 0,$$

где:  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  – собственные значения матрицы квадратичной формы.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$\det A$  – её определитель.

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix},$$

матрица уравнения поверхности,  $\det D$  – её определитель, называемый дискриминантом уравнения поверхности.

**ПРИМЕР 37.3.** Определить, какую поверхность задаёт уравнение

$$6x^2 - 2y^2 + 6z^2 + 4zx + 8x - 4y - 8z + 1 = 0$$

и найти направляющие косинусы осей новой системы координат, в которой уравнение поверхности станет каноническим.

**Р е ш е н и е:** Составим матрицу (37.10) квадратичной формы:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

и характеристическое уравнение (37.9):

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(6-\lambda)(2+\lambda)(6-\lambda) + 4(2+\lambda) = 0 \Leftrightarrow (2+\lambda)(4-(6-\lambda)^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2+\lambda)(4-36+12\lambda-\lambda^2) = 0 \Leftrightarrow (\lambda+2)(\lambda-8)(\lambda-4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 8, \quad \lambda_3 = 4.$$

Найдем направляющие косинусы из систем (37.8), дополненных условием нормировки (37.3).

$$\begin{cases} (6-4)\alpha_{11} + 2\alpha_{31} = 0, \\ (-2-4)\alpha_{21} = 0, \\ 2\alpha_{11} + (6-4)\alpha_{31} = 0, \\ \alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{11} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \alpha_{21} = 0, \\ \alpha_{31} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (6-8)\alpha_{12} + 2\alpha_{32} = 0, \\ (-2-8)\alpha_{22} = 0, \\ 2\alpha_{12} + (6-8)\alpha_{32} = 0, \\ \alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{32}^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \alpha_{22} = 0, \\ \alpha_{32} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (6+2)\alpha_{13} + 2\alpha_{33} = 0, \\ 0 = 0, \\ 2\alpha_{13} + (6+2)\alpha_{33} = 0, \\ \alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{33}^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{13} = 0, \\ \alpha_{23} = 1, \\ \alpha_{33} = 0. \end{cases}$$

Получим матрицу  $L$  линейного преобразования координат (поворот осей):

$$L = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Делая это преобразование  $X = LX'$ , т.е.

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}}X' + \frac{1}{\sqrt{2}}Y', \\ y = Z' \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}X' + \frac{1}{\sqrt{2}}Y', \end{cases}$$

получаем уравнение:

$$4(X' - \sqrt{2})^2 + 8Y'^2 - 2(Z' + 1)^2 - 5 = 0.$$

Делая ещё одно преобразование (параллельный перенос)

$$\begin{cases} X = X' - \sqrt{2}, \\ Y = Y', \\ Z = Z' + 1, \end{cases}$$

получаем каноническое уравнение однополостного гиперболоида

$$4X^2 + 8Y^2 - 2Z^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{X^2}{5/4} + \frac{Y^2}{5/8} - \frac{Z^2}{5/2} = 1.$$

## Практическое занятие 37. Преобразование декартовых координат

**ПРИМЕР 37.1.** *Определите вид поверхности задаваемой уравнением  $2x^2 + 3y^2 - 4x + 6y - 6z - 7 = 0$ .*

**Р е ш е н и е:** Сгруппировав члены с одинаковыми переменными и выделив полный квадрат, получаем:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4x + 3y^2 + 6y - 6z - 7 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2(x^2 - 2x + 1) + 3(y^2 + 2y + 1) - 6z - 12 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z + 2 &= \frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{2}. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных:

$$X = x - 1, \quad Y = y + 1, \quad Z = z + 2.$$

В новых координатах уравнение имеет вид:

$$Z = \frac{X^2}{3} + \frac{Y^2}{2}.$$

Это каноническое уравнение эллиптического параболоида.

**ПРИМЕР 37.2.** *Определить вид поверхности задаваемой уравнением*

$$2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4zx + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0,$$

*найти направляющие косинусы осей новой системы координат и каноническое уравнение поверхности.*

Р е ш е н и е: Составим матрицу (37.10) квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

и характеристическое уравнение (37.9):

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -2 \\ -1 & 5-\lambda & 1 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

выполним элементарные преобразования для упрощения определителя: прибавим к первому столбцу последний и к первой строке последнюю:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -2 \\ 0 & 5-\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -2\lambda & 0 & \lambda \\ 0 & 5-\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$-\lambda(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 6) = 0$$

$$\lambda_1 = 6, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 0.$$

Составим системы (37.8)

$$\begin{cases} (2-3)\alpha_{11} - 1\alpha_{21} - 2\alpha_{31} = 0, \\ -1\alpha_{11} + (5-3)\alpha_{21} + 1\alpha_{31} = 0, \\ -2\alpha_{11} + 1\alpha_{21} + (2-3)\alpha_{31} = 0, \\ \alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{11} = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \\ \alpha_{21} = \frac{2}{\sqrt{6}}, \\ \alpha_{31} = \frac{1}{\sqrt{6}}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2-6)\alpha_{12} - 1\alpha_{22} - 2\alpha_{32} = 0, \\ -1\alpha_{12} + (5-6)\alpha_{22} + 1\alpha_{32} = 0, \\ -2\alpha_{12} + 1\alpha_{22} + (2-6)\alpha_{32} = 0, \\ \alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{32}^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{12} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \alpha_{22} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \alpha_{32} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha_{13} - 1\alpha_{23} - 2\alpha_{33} = 0, \\ -1\alpha_{13} + 5\alpha_{23} + 1\alpha_{33} = 0, \\ -2\alpha_{13} + 1\alpha_{23} + 2\alpha_{33} = 0, \\ \alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{33}^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{13} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \alpha_{23} = 0, \\ \alpha_{33} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$



Решая эти системы, с учётом нормирующего условия (37.3) найдём направляющие косинусы и матрицу линейного преобразования  $L$  (поворота):

$$L = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Делая преобразование координат (поворот осей)  $X = LX'$ , т.е.

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{6}}X' - \frac{1}{\sqrt{3}}Y' + \frac{1}{\sqrt{2}}Z', \\ y = \frac{2}{\sqrt{6}}X' - \frac{1}{\sqrt{3}}Y', \\ z = \frac{1}{\sqrt{6}}X' + \frac{1}{\sqrt{3}}Y' + \frac{1}{\sqrt{2}}Z', \end{cases}$$

и затем – параллельный перенос, получаем каноническое уравнение эллиптического цилиндра:

$$2X^2 + Y^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow X^2 + \frac{Y^2}{2} = 1.$$

**ПРИМЕР 37.3.** *Определить вид поверхности, задаваемой уравнением*

$$x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8zx - 4yz - 14x - 4y + 14z + 16 = 0,$$

*найти направляющие косинусы осей новой системы координат и каноническое уравнение поверхности.*

**Решение:** Матрица (37.10) квадратичной формы имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решая характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

находим собственные значения:

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 6, \quad \lambda_3 = -3.$$

Решая системы (37.8) с учётом нормирующего условия (37.3), находим направляющие косинусы и матрицу линейного преобразования  $L$ :

$$L = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}.$$

Делая преобразование  $L$ :

$$\begin{cases} x = -\frac{X'}{\sqrt{5}} - \frac{2}{3}Y' + \frac{4}{3\sqrt{5}}Z', \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}X' + \frac{2}{3}Y' + \frac{2}{3\sqrt{5}}Z', \\ z = \frac{2}{3}Y' + \frac{\sqrt{5}}{3}Z', \end{cases}$$

получаем в координатах  $X', Y', Z'$  уравнение поверхности, не содержащее членов со смешанным произведением  $X'Y', X'Z', Y'Z'$ . Выделяя дальше полный квадрат, получаем каноническое уравнение конуса:

$$X^2 - 2Y^2 + Z^2 = 0 \Leftrightarrow X^2 - \frac{Y^2}{1/2} + Z^2 = 0.$$

Заметим, что здесь  $\det A = 54, \det D = 0$ .

### Самостоятельная работа

В следующих примерах определите вид поверхности и найдите её каноническое уравнение.

ПРИМЕР 37.4.  $x^2 + 2x + 2z^2 - 4z + 4y^2 + 2 = 0$ .

ПРИМЕР 37.5.  $x^2 - 2x + y^2 + 2y + z^2 - 1 = 0$ .

ПРИМЕР 37.6.  $x^2 + 4z^2 - 2y^2 - 4 = 0$ .

ПРИМЕР 37.7.  $3y^2 - 6y - x^2 + 3z^2 = 0$ .

ПРИМЕР 37.8.  $3y^2 - 6z^2 - 2x^2 - 6 = 0$ .

ПРИМЕР 37.9.  $z^2 + 2z - 3x^2 + 6x - 3y^2 - 5 = 0$ .

ПРИМЕР 37.10.  $3x^2 + 2z^2 - 6y = 0$ .

ПРИМЕР 37.11.  $y^2 + 2y + z^2 - 2z - 4x + 2 = 0$ .

ПРИМЕР 37.12.  $x^2 + 9y^2 + 18y + 9z + 9 = 0$ .

ПРИМЕР 37.13.  $3x^2 - 2z^2 - 6y = 0$ .

ПРИМЕР 37.14.  $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2zx - 2yz - 4x + 8y - 12z + 14 = 0$

ПРИМЕР 37.15.  $4x^2 + 5y^2 + 6z^2 - 4xy + 4yz + 4x + 6y + 4z - 27 = 0$ .

ПРИМЕР 37.16.  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2x - 4y - 12z + 9 = 0$ .

## Лекция 38. Предел, непрерывность и частные производные

Предел функции двух переменных. Точка и линии разрыва. Функции непрерывные в ограниченной замкнутой области. Частные производные 1-го порядка. Частные производные высших порядков.

### 38.1. Предел функции двух переменных

При рассмотрении предела функции одной переменной (часть I курса) было введено понятие  $\delta$ -окрестности точки  $x_0$  — интервал с центром в точке  $x_0$  вида  $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ . Введем аналогичное понятие для функции двух переменных.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 38.1.**  $\delta$ -окрестностью точки  $P_0(x_0; y_0)$  называется внутренняя часть круга с центром в этой точке радиуса  $\delta$ :

$$\delta(P_0) = \left\{ P(x; y) \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \right\}.$$

Любая точка  $P$  этой  $\delta$ -окрестности находится от точки  $P_0$  на расстоянии меньшем  $\delta$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 38.2.** Число  $b$  называется пределом функции двух переменных или двойным пределом функции  $z = f(x; y)$  при  $P \rightarrow P_0$ , если для любого числа  $\varepsilon$  найдется такая  $\delta$ -окрестность точки  $P_0(x_0; y_0)$ , что для любой точки  $P(x; y)$  этой окрестности, за исключением, быть может, точки  $P_0$ , будет выполнено неравенство:

$$|f(x; y) - b| < \varepsilon.$$

При этом записывают:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y) = b \quad \text{или} \quad \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = b.$$

Символическая запись определения 38.2  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = b$ :

$$\exists(\varepsilon > 0) \forall(\delta(P_0)) \exists(P \in \delta(P_0), \text{ м.б.кр. } P = P_0) \Rightarrow |f(P) - b| < \varepsilon.$$

Для двойного предела справедливы все свойства предела, перечисленные в части I курса для функции одного переменного: предел суммы, разности, произведения равен соответственно сумме, разности, произведению пределов, если каждый из них существует; предел частного равен частному пределов, если каждый из них существует и предел знаменателя не равен нулю; постоянный множитель можно выносить за знак предела и т.д. Из определений (38.1) и (38.2) следует, что  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y) = b \Leftrightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0} f(x; y) = b$ , где  $\delta = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$  — расстояние между точками  $P$  и  $P_0$ . Поэтому для вычисления пределов функции двух переменных мы будем пользоваться равносильным определением (38.3)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 38.3.** Число  $b$  называется пределом функции двух переменных или двойным пределом функции  $z = f(x; y)$  при  $P \rightarrow P_0$ , если функция определена в некоторой окрестности точки  $P_0$  за исключением, быть может, точки  $P_0$  и  $\lim_{\delta \rightarrow 0} f(x; y) = b$ , где

$$\delta = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

**ПРИМЕР 38.1.** Найти  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2}$ .

**Решение:** В данном примере  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $P_0(0; 0) \Rightarrow \Rightarrow \delta = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Таким образом:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta^2}{\sqrt{\delta^2 + 4} - 2} = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta^2 (\sqrt{\delta^2 + 4} + 2)}{\delta^2 + 4 - 4} = \lim_{\delta \rightarrow 0} (\sqrt{\delta^2 + 4} + 2) = 4. \end{aligned}$$

В данном примере функция  $\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2}$  не определена в точке  $P_0(0; 0)$ , но имеет предел при  $P \rightarrow P_0$ .

Заметим, что двойной предел  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y)$  при одновременном стремлении обоих аргументов не обязательно совпадает с повторными пределами

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{y \rightarrow y_0} f(x; y) \right) \quad \text{и} \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x; y) \right),$$

которые не являются новыми понятиями, а вычисляются последовательно как обычные пределы функции одной переменной.

Однако существует теорема, которая позволяет заменять двойной предел функции двух переменных повторным пределом при достаточно широких предположениях.

**ТЕОРЕМА 38.1.** Если существует  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y)$  и при  $\forall y \in \delta$  окрестности  $y_0$ ,  $y \neq y_0$ ,  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x; y)$ , а при  $\forall x \in \delta$  окрестности  $x_0$ ,  $x \neq x_0$ ,  $\exists \lim_{y \rightarrow y_0} f(x; y)$ , то  $\exists \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x; y)$ ,  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x; y)$  и  $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x; y) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x; y) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y)$ .

**ПРИМЕР 38.2.** В условиях примера (38.1) вычислить повторные пределы.

**Р е ш е н и е:**

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{\sqrt{y^2 + 4} - 2} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 (\sqrt{y^2 + 4} + 2)}{y^2 + 4 - 4} = \lim_{y \rightarrow 0} (\sqrt{y^2 + 4} + 2) = 4. \end{aligned}$$

Проверьте самостоятельно, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2} = 4$ .

В первой части нашего курса (п.6.5) для функций одной переменной  $y = f(x)$  были введены односторонние пределы  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0}$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0}$  и отмечалось, что для существования  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  они должны быть равны. Для функции  $2^x$  переменных  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x; y)$  существует, если он не зависит от способа стремления точки  $P(x; y)$  к точке  $P_0(x_0; y_0)$ .

**ПРИМЕР 38.3.** Найдите  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ .

**Решение:** Пусть  $y = \lambda x$ , т.е. подход к началу координат совершается вдоль прямых  $y = \lambda x$ , тогда  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \lambda^2 x^2}{x^2 + \lambda^2 x^2} = \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}$  зависит от  $\lambda$  и, следовательно, не существует.

Установите справедливость выполнения условий теоремы 38.1.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 38.4.** Функция  $f(x; y)$  называется бесконечно малой при  $P \rightarrow P_0$ , если её двойной предел равен нулю.

Можно доказать равносильность следующих трёх утверждений:  
 $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = b \Leftrightarrow \lim_{P \rightarrow P_0} (f(P) - b) = 0 \Leftrightarrow f(P) - b$  является бесконечно малой при  $P \rightarrow P_0$ .

Определение предела естественным образом распространяется на случай функции 3-х и более переменных.

### 38.2. Непрерывность функции нескольких переменных

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 38.5.** Функция  $n$  переменных  $u = f(P)$  называется непрерывной в точке  $P_0$ , если функция определена в этой точке и в некоторой её окрестности и  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 38.6.** Точка  $P_0$ , в которой функция  $u = f(P)$  непрерывна, называется точкой непрерывности этой функции.

Заметим, что определение точки разрыва более сложное, чем просто противоположное к данному утверждение, и будет сформулировано позже.

Свойства непрерывных функций сформулируем в виде теоремы, которую примем без доказательства, т.к. оно аналогично доказательству соответствующей теоремы о непрерывных функциях одной переменной из части I курса.

**ТЕОРЕМА 38.2.** Если функция  $n$  переменных  $f_1(P)$  и  $f_2(P)$  непрерывны в точке  $P_0$ , то в этой же точке непрерывны и их сумма  $f_1(P) + f_2(P)$ , разность  $f_1(P) - f_2(P)$ , произведение  $f_1(P) \cdot f_2(P)$  и частное  $f_1(P)/f_2(P)$ , если  $f_2(P_0) \neq 0$ .

На основании этой теоремы легко устанавливается непрерывность многочлена от двух переменных при любом их значении и непрерывность рациональной функции во всех точках плоскости, в которых знаменатель не равен нулю.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 38.7.** Точка  $P_0$  называется точкой разрыва функции  $f(P)$ , если она принадлежит области определения этой функции или её границе и не является точкой непрерывности.

**ПРИМЕР 38.4.** Найти точки разрыва функции  $z = \frac{1}{x - y + 1}$ .

**Решение:** Функция определена и непрерывна всюду, кроме точек с координатами, удовлетворяющими уравнению:  $x - y + 1 = 0$ . Это уравнение прямой  $y = x + 1$ , являющейся границей области определения функции. Каждая точка этой прямой есть точка разрыва.

Ответ: точки разрыва образуют прямую  $y = x + 1$ .

### 38.3. Функции непрерывные в ограниченной замкнутой области

В части I курса были рассмотрены свойства функции одной переменной, непрерывной на отрезке. Аналогичными свойствами обладают функции нескольких переменных, непрерывные в ограниченной замкнутой области.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 38.8.** Функция  $z = f(P)$  называется непрерывной в ограниченной замкнутой области  $D$ , если она непрерывна в каждой точке этой области. При этом для непрерывности  $f(P)$  в граничной точке  $P_0$  траекторию движения точки  $P$  при стремлении  $P \rightarrow P_0$  выбираем внутри  $D$ .

**ТЕОРЕМА 38.3.** Если функция  $z = f(P)$  непрерывна в ограниченной замкнутой области  $D$ , то она в этой области:

- (1) ограничена:  $\exists N > 0 : |f(P)| \leq N$  для  $\forall P \in D$ ;
- (2) достигает своего наименьшего  $m$  и наибольшего  $M$  значений:  $\exists P_1 \in D : f(P_1) = m$  и  $\exists P_2 \in D : f(P_2) = M$ ;
- (3) любое значение между  $m$  и  $M$  принимает хотя бы в одной точке области: для  $\forall c \in [m; M] \exists P_0 \in D : f(P_0) = c$ .

**ПРИМЕР 38.5.** Функция  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области  $D = \{(x; y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$  – круге с центром в точке  $O(0; 0)$  и радиуса 1.

Она ограничена:  $|\sqrt{1 - x^2 - y^2}| \leq 1$  при  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

Наименьшее значение  $m = 0$  достигается в точках окружности  $x^2 + y^2 = 1$  – на границе области, наибольшее значение  $M = 1$  достигается в начале координат – внутренней точке области.

Функция принимает любое значение  $0 \leq c \leq 1$  в точках окружности  $c = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 - c^2$ . Графиком функции является верхняя полусфера, изображенная на рис. 25.

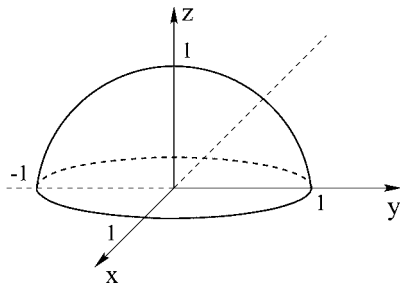


Рис. 25. График функции  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

### 38.4. Частные производные 1-го порядка

Рассмотрим функцию двух переменных  $z = f(x; y)$ . Зафиксируем значение одного из аргументов, например  $y$ , положив  $y = y_0$ . Тогда функция  $f(x; y_0)$  есть функция одной переменной  $x$ . Пусть она имеет производную в точке  $x_0$ :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)}{\Delta x}. \quad (38.1)$$

Эта производная называется *частной производной (или частной производной первого порядка)* функции  $z = f(x; y)$  по  $x$  в точке  $P_0(x_0; y_0)$  и обозначается символом  $f'_x(x_0; y_0)$ .

Разность  $f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)$  называется *частным приращением* по  $x$  функции  $z = f(x; y)$  в точке  $P_0(x_0; y_0)$  и обозначается символом  $\Delta_x z$ :

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0). \quad (38.2)$$

Учитывая эти обозначения, можно записать

$$f'_x(x_0; y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}. \quad (38.3)$$

Аналогично определяются и обозначаются частное приращение функции  $z = f(x; y)$  по  $y$  и частная производная по  $y$  в точке  $P_0(x_0; y_0)$ :

$$\Delta_y z = f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0),$$



$$f'_y(x_0; y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Таким образом, частная производная функции двух переменных по одному из её аргументов равна пределу отношения частного приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Значение частной производной зависит от точки  $P(x; y)$ , в которой она вычисляется. Поэтому частная производная функции двух переменных  $z = f(x; y)$ , вообще говоря, есть функция точки  $P(x; y)$ , т.е. также является функцией двух переменных  $x$  и  $y$ .

Частные производные, рассматриваемые как функции двух переменных, обозначаются следующим образом:

$$f'_x(x; y), f'_y(x; y) \quad \text{или} \quad z'_x, z'_y \quad \text{или} \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Частные приращения и частные производные функции  $n$  переменных при  $n > 2$  определяются и обозначаются аналогично. Например, для функции трёх переменных  $u = f(x; y; z)$  частное приращение по  $x$  в точке  $P_0(x_0; y_0; z_0)$  получится, если  $x$  получит приращение  $\Delta x$ , а остальные аргументы останутся неизменными:

$$\Delta_x u = f(x_0 + \Delta x; y_0; z_0) - f(x_0; y_0; z_0).$$

Частная производная функции  $u = f(x; y; z)$  по аргументу  $x$  в точке  $P_0(x_0; y_0; z_0)$  равна

$$u'_x(x_0; y_0; z_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x}.$$

Таким образом, частная производная функции нескольких переменных определяется как производная функции одной из этих переменных. Вследствие этого все правила и формулы дифференцирования, выведенные для производных функции одной переменной, сохраняются для частных производных функции нескольких переменных. Следует лишь помнить, что во всех этих правилах и формулах при нахождении частной производной по какому-либо аргументу все остальные аргументы считаются постоянными.

**ПРИМЕР 38.6.** Найти частные производные первого порядка функции  $z = \sqrt{x^2 - y^2}$  в точке  $P_0(5; 3)$ .

Решение:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial x}|_{P_0} = \frac{5}{\sqrt{5^2 - 3^2}} = \frac{5}{4};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y}{2\sqrt{x^2 - y^2}} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y}|_{P_0} = -\frac{3}{4}.$$

Ответ:  $\frac{\partial z}{\partial x}|_{P_0} = \frac{5}{4}; \quad \frac{\partial z}{\partial y}|_{P_0} = -\frac{3}{4}.$

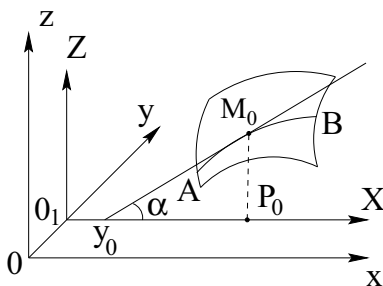
Выясним геометрический смысл частной производной  $\frac{\partial z}{\partial x}$  функции двух переменных  $z = f(x; y)$ . Как известно, графиком функции  $z = f(x; y)$  является некоторая поверхность. Рассмотрим точку  $P_0(x_0; y_0)$  в плоскости  $Oxy$  и соответствующую точку  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  на поверхности (рис. 26). Рассмотрим плоскую кривую  $AM_0B$ , которая получится при сечении поверхности плоскостью  $y = y_0$ . Эту кривую можно рассматривать как график функции одной переменной  $z = f(x; y_0)$  в плоскости  $y = y_0$ . Но тогда, согласно геометрическому смыслу производной функции одной переменной,  $\frac{df(x; y_0)}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$ , где  $\alpha$  – угол с осью  $O_1X$ , или, что то же, с осью  $Ox$  касательной, проведенной к кривой  $AM_0B$  в точке  $M_0$ . С другой стороны,

$$\left. \frac{df(x; y_0)}{dx} \right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)}{\Delta x} = \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_{P_0}.$$

Отсюда следует, что  $\left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_{P_0} = \operatorname{tg} \alpha$ . Итак, значение частной производной  $\frac{\partial z}{\partial x}$  в точке  $P_0(x_0; y_0)$  равно тангенсу угла, составленного с осью  $Ox$  касательной, проведенной в точке  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  к линии пересечения поверхности  $z = f(x; y)$  и плоскости  $y = y_0$ . В этом заключается геометрический смысл частной производной  $\frac{\partial z}{\partial x}$ . Аналогично выясняется геометрический смысл частной производной  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

### 38.5. Частные производные высших порядков

Частные производные функции нескольких переменных являются функциями тех же переменных. Эти функции, в свою очередь, могут иметь частные производные, которые называются вторыми частными

Рис. 26. Геометрический смысл  $\frac{\partial z}{\partial x}$ 

производными (или частными производными второго порядка) исходной функции.

Так, например, функция  $z = f(x; y)$  двух переменных имеет четыре частные производные второго порядка, которые определяются и обозначаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)}{\partial x} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{x^2}(x; y); & \frac{\partial \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)}{\partial y} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x; y); \\ \frac{\partial \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)}{\partial x} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x; y); & \frac{\partial \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)}{\partial y} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{y^2}(x; y). \end{aligned}$$

Функция  $u = f(x; y; z)$ , трёх переменных имеет девять частных производных второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)}{\partial x} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{x^2}(x; y; z); & \frac{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x; y; z); \\ & & \frac{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)}{\partial z} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = f''_{xz}(x; y; z) \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные третьего и более высокого порядка функции нескольких переменных: частной производной  $n$ -го порядка функции нескольких переменных называется частная производная первого порядка от частной производной  $(n - 1)$ -го порядка той же функции.

Например, частная производная третьего порядка  $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$  функции  $z = f(x; y)$  есть частная производная первого порядка по  $y$  от частной производной второго порядка  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ :

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)}{\partial y}.$$

Частная производная второго или более высокого порядка, взятая по нескольким различным переменным, называется смешанной частной производной.

Например, частные производные

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$$

являются смешанными частными производными функции двух переменных  $z = f(x; y)$ .

**ПРИМЕР 38.7.** Найдти смешанные частные производные второго порядка функции  $z = x^2 y^3$ .

**Р е ш е н и е:** Находим частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 y^2.$$

Затем находим смешанные частные производные второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)}{\partial y} = (2xy^3)'_y = 6xy^2, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)}{\partial x} = (3x^2 y^2)'_x = 6xy^2. \end{aligned}$$

Мы видим, что смешанные частные производные данной функции  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  и  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ , отличающиеся между собой лишь порядком дифференцирования, т.е. последовательностью, в которой производится дифференцирование по различным переменным, оказались тождественно

равными. Этот результат не случаен. Относительно смешанных частных производных имеет место следующая теорема, которую мы принимаем без доказательства.

**ТЕОРЕМА 38.4.** *Две смешанные частные производные одного порядка одной и той же функции, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой при условии их непрерывности.*

В частности, для функции двух переменных  $z = f(x; y)$  имеем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

## Практическое занятие 38. Частные производные

Поскольку основная задача данного практического занятия – приобретение навыков нахождения частных производных функции нескольких переменных; мы не всегда будем упрощать полученный результат.

**ПРИМЕР 38.1.** *Найдите все частные производные первого порядка функции  $z = \sqrt{x^2 - 3y^2}$ .*

**Решение:** При нахождении  $\frac{\partial z}{\partial x}$  будем считать  $y$  постоянным. Пользуясь обычными правилами нахождения производных получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 3y^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-6y}{2\sqrt{x^2 - 3y^2}}.$$

**ПРИМЕР 38.2.** *Найдите частные производные первого порядка функции  $z = \frac{4}{\sqrt{5 - xy}}$ .*

**Решение:** При нахождении  $\frac{\partial z}{\partial x}$  считаем  $y$  постоянным

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \left( 4(5 - xy)^{-\frac{1}{2}} \right)'_x = 4 \left( -\frac{1}{2} \right) (5 - xy)^{-\frac{3}{2}} (-y) = \\ &= \frac{2y}{(5 - xy)\sqrt{5 - xy}}. \end{aligned}$$

Аналогично находим  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , считая  $x$  постоянным.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x}{(5 - xy)\sqrt{5 - xy}}.$$

**ПРИМЕР 38.3.** Найдите частные производные первого порядка функции  $z = y^x$ .

**Решение:** При нахождении  $\frac{\partial z}{\partial x}$  считаем  $y$  постоянным и находим производную показательной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^x \ln y.$$

При нахождении  $\frac{\partial z}{\partial y}$  считаем  $x$  постоянным и находим производную показательной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xy^{x-1}.$$

**ПРИМЕР 38.4.** Найдите частные производные первого порядка функции  $z = \log_2(3\sqrt[3]{x} + 2y^2)$ .

**Решение:** При фиксированном  $y$  находим  $\frac{\partial z}{\partial x}$ :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3 \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{(3\sqrt[3]{x} + 2y^2) \ln 2} = \frac{1}{(3x + 2y^2\sqrt[3]{x^2}) \ln 2}.$$

Аналогично находим  $\frac{\partial z}{\partial y}$  при фиксированном  $x$ :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4y}{(3\sqrt[3]{x} + 2y^2) \ln 2}.$$

**ПРИМЕР 38.5.** Найдите частные производные первого порядка функции  $x = 2^{\cos \frac{t}{s}}$ .

Р е ш е н и е: При фиксированном  $s$  находим  $\frac{\partial x}{\partial t}$ :

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 2^{\cos \frac{t}{s}} \ln 2 \left( -\sin \frac{t}{s} \right) \cdot \frac{1}{s} = -2^{\cos \frac{t}{s}} \ln 2 \sin \frac{t}{s} \cdot \frac{1}{s}.$$

Аналогично, при фиксированном  $t$  находим  $\frac{\partial x}{\partial s}$ :

$$\frac{\partial x}{\partial s} = 2^{\cos \frac{t}{s}} \ln 2 \left( -\sin \frac{t}{s} \right) \left( -\frac{t}{s^2} \right) = 2^{\cos \frac{t}{s}} \ln 2 \sin \frac{t}{s} \cdot \frac{t}{s^2}.$$

### Самостоятельная работа

Для закрепления навыков дифференцирования в следующих примерах найдите все частные производные первого порядка:

ПРИМЕР 38.6.  $z = 2x^2 - 3y^2 - 2xy + 3x - 5y + 1.$

ПРИМЕР 38.7.  $z = \frac{2y - 3x}{2x - 5y}.$

ПРИМЕР 38.8.  $z = \frac{x}{\sqrt{y} - x}.$

ПРИМЕР 38.9.  $z = \sqrt[3]{x - y}.$

ПРИМЕР 38.10.  $z = \frac{3}{y - x}.$

ПРИМЕР 38.11.  $z = 2^{\frac{x}{y}}.$

ПРИМЕР 38.12.  $z = \sin \left( \frac{x}{2\sqrt{y}} \right)$

ПРИМЕР 38.13.  $z = \operatorname{tg} \left( \frac{\sqrt{y}}{3\sqrt[3]{x}} \right).$

ПРИМЕР 38.14.  $z = \arcsin(3y - 2x).$

ПРИМЕР 38.15.  $z = \operatorname{arctg} (3x - 2\sqrt{y}).$

ПРИМЕР 38.16.  $u = (y)^{xz}.$

ПРИМЕР 38.17.  $u = \frac{z}{xy}.$

ПРИМЕР 38.18.  $u = (yz)^x$ .

ПРИМЕР 38.19.  $y = \ln(\cos u - \sin v)$ .

В примерах 38.20, 38.21 найдите все частные производные второго порядка, предварительно найдя и упростив производные первого порядка.

ПРИМЕР 38.20.  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

ПРИМЕР 38.21.  $z = \log_3(x - y^2)$ .

## Лекция 39. Полный дифференциал функции

Полное приращение функции. Полный дифференциал. Приближенные вычисления с помощью полного дифференциала. Дифференцирование сложных и неявных функций.

### 39.1. Полное приращение функции

При нахождении частных производных рассматривались частные приращения функции нескольких переменных, когда лишь один из аргументов изменялся, остальные же оставались фиксированными (постоянными). Теперь мы рассмотрим полное приращение, которое получает функция при изменении всех её аргументов.

Пусть дана функция двух переменных  $z = f(x; y)$ . Предположим, что её аргументы  $x$  и  $y$  получают соответственно приращения  $\Delta x$  и  $\Delta y$ . Тогда функция  $z = f(x; y)$  получает полное приращение  $\Delta z$ , которое определяется следующей формулой:

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y). \quad (39.1)$$

Геометрически полное приращение функции  $\Delta z$  равно приращению аппликаты графика функции  $z = f(x; y)$  при переходе из точки  $P(x; y)$  в точку  $P_1(x + \Delta x; y + \Delta y)$  (рис. 27).

ПРИМЕР 39.1. Найти полное приращение функции  $z = xy^2$ .

Р е ш е н и е: Используя формулу (39.1), получим

$$\begin{aligned} \Delta z &= (x + \Delta x)(y + \Delta y)^2 - xy^2 = xy^2 + y^2\Delta x + 2xy\Delta y + \\ &+ 2y\Delta x\Delta y + x(\Delta y)^2 + \Delta x(\Delta y)^2 - xy^2 = (y^2\Delta x + 2xy\Delta y + \\ &+ (2y\Delta x\Delta y + x(\Delta y)^2 + \Delta x(\Delta y)^2)). \end{aligned}$$



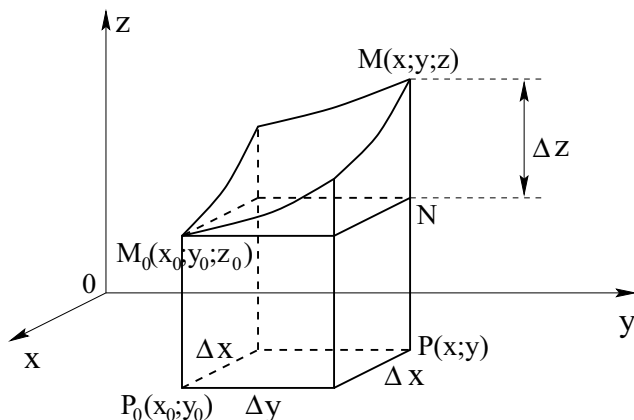


Рис. 27. Полное приращение функции двух переменных

Мы видим, что полное приращение  $\Delta z$  данной функции можно представить в виде суммы двух слагаемых: первого слагаемого  $y^2\Delta x + 2xy\Delta y$ , линейного относительно приращений аргументов  $\Delta x$  и  $\Delta y$ , и второго слагаемого  $2y\Delta x\Delta y + x(\Delta y)^2 + \Delta x(\Delta y)^2$ , нелинейного относительно  $\Delta x$  и  $\Delta y$ . Оба этих слагаемых, очевидно, стремятся к нулю при  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$ , однако второе слагаемое при этом стремится к нулю быстрее, чем первое.

### 39.2. Полный дифференциал функции

Напомним, что в части I курса для функции одной переменной  $y = f(x)$  было введено понятие дифференциала  $dy$  как главной части приращения функции, линейной относительно приращения аргумента. Дифференциал независимой переменной  $dx$  равнялся её приращению:  $dx = \Delta x$ , дифференциал функции  $dy$  связан с производной формулой:  $dy = f'(x)dx$ . Аналогичным образом можно ввести понятие частного дифференциала по  $x$  функции двух переменных  $z = f(x; y)$ , если считать значение  $y$  фиксированным:  $d_x z = f'_x(x; y)dx$  и частного дифференциала по  $y$  (считая  $x$  фиксированным):  $d_y z = f'_y(x; y)dy$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 39.1.** Полным дифференциалом функции двух переменных  $z = f(x; y)$  называется сумма её частных дифференциалов

по  $x$  и по  $y$ :

$$dz = f'_x(x; y)dx + f'_y(x; y)dy. \quad (39.2)$$

Полный дифференциал является главной частью приращения функции  $\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)$ , линейной относительно приращений аргументов  $\Delta x = dx$  и  $\Delta y = dy$ . Другими словами, приращение функции  $\Delta z$  представляется в виде суммы дифференциала  $dz$  и бесконечно малой  $\omega(\Delta x; \Delta y)$  более высокого порядка, чем расстояние  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$  между точками  $P(x; y)$  и  $P_1(x + \Delta x; y + \Delta y)$ :

$$\Delta z = dz + \omega(\Delta x; \Delta y), \quad \text{где} \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\omega(\Delta x; \Delta y)}{\rho} = 0. \quad (39.3)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 39.2.** Если у функции в точке  $P(x; y)$  существует дифференциал, то она называется дифференцируемой в этой точке.

Как следует из определения (39.1), если функция  $z = f(x; y)$  в точке  $P(x; y)$  дифференцируема, то она имеет в этой точке частные производные  $f'_x(x; y)$  и  $f'_y(x; y)$ .

Можно показать, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно, т.е. из существования частных производных не следует существование полного дифференциала. Однако, если предположить, что частные производные не только существуют, но и непрерывны, то функция будет дифференцируемой. Иными словами, имеет место следующая теорема, доказательства которой мы не приводим.

**ТЕОРЕМА 39.1.** Если частные производные  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$  функции  $z = f(x; y)$  непрерывны в некоторой окрестности точки  $P(x; y)$ , то эта функция в точке  $P(x; y)$  дифференцируема и справедлива формула (39.2)

Все сказанное легко распространяется на функции трёх и большего числа переменных. Так, например, для дифференцируемой функции трёх переменных  $u = f(x; y; z)$  полное приращение  $\Delta u$  выражается формулой

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + \omega(\Delta x; \Delta y; \Delta z) \quad (39.4)$$

при условии  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\omega}{\rho} = 0$  ( $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ ), а её полный дифференциал имеет вид

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz. \quad (39.5)$$

**ПРИМЕР 39.2.** Найти полный дифференциал функции  $z = xy^2$  в произвольной точке.

**Решение:** Полный дифференциал  $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$  существует при условии непрерывности частных производных  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ . Находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (xy^2)'_x = y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = (xy^2)'_y = 2xy.$$

Мы видим, что найденные частные производные являются непрерывными функциями во всей плоскости  $Oxy$ . Поэтому дифференциал этой функции всюду существует, причём  $dz = y^2 dx + 2xy dy$ . Сравните это выражение с линейной частью приращения функции в п. (36.1.3)

### 39.3. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных

Пусть функция  $z = f(x; y)$  имеет в точке  $P_0(x_0; y_0)$  дифференциал  $dz = f'_x(x_0; y_0)\Delta x + f'_y(x_0; y_0)\Delta y$ , или  $dz = f'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(y - y_0)$ .

В следующей лекции будет показано, что уравнение касательной плоскости ( $M_0 M_1 K M_2$  на рис. 28) имеет вид:

$$z - z_0 = f'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(y - y_0),$$

где  $z$  – аппликата точки  $K$  касательной плоскости. Поскольку правые части этих уравнений совпадают, будут совпадать и их левые части. Таким образом, дифференциал функции двух переменных равен приращению аппликаты касательной плоскости ( $KN$  на рис. 28). В этом заключается геометрический смысл дифференциала.

Заметим, что в соответствии с определением дифференциала приращение аппликаты касательной плоскости  $KN$  есть главная часть приращения функции  $MN$  (см. рис. 28).

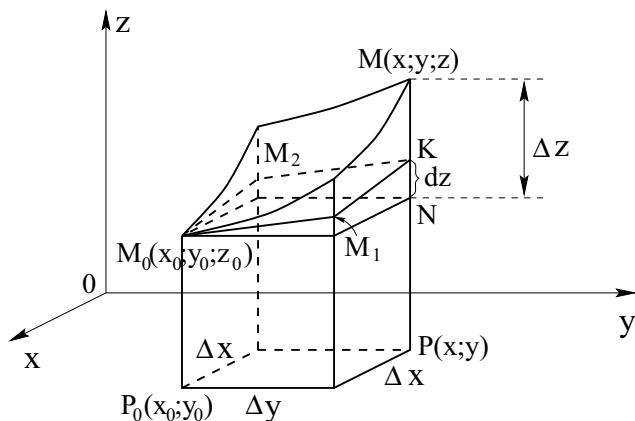


Рис. 28. Геометрический смысл дифференциала

### 39.4. Приближенные вычисления с помощью полного дифференциала

Полным дифференциалом функции нескольких переменных можно пользоваться для приближенных вычислений. Пусть дана дифференцируемая функция  $z = f(x; y)$ . Её полное приращение выражается формулой.

$$\Delta z = f'_x(x; y)\Delta x + f'_y(x; y)\Delta y + \omega(\Delta x; \Delta y).$$

Здесь  $\omega(\Delta x; \Delta y)$  стремится к нулю быстрее, чем  $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ . Поэтому при малых  $\rho$ , т.е. при малых  $\Delta x$  и  $\Delta y$ , слагаемым  $\omega(\Delta x; \Delta y)$  можно пренебречь и написать:

$$\Delta z \approx f'_x(x; y)\Delta x + f'_y(x; y)\Delta y, \quad (39.6)$$

т.е. приращение функции можно приближённо заменить её полным дифференциалом.

Так как  $z = f(x; y)$ , то

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Подставляя это выражение для  $\Delta z$  в формулу (39.6), получим

$$f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y) \approx f'_x(x; y)\Delta x + f'_y(x; y)\Delta y,$$

откуда

$$f(x + \Delta x; y + \Delta y) \approx f(x; y) + f'_x(x; y)\Delta x + f'_y(x; y)\Delta y. \quad (39.7)$$

Формулой (39.7) можно пользоваться при приближённых вычислениях значений функции двух переменных в точке  $P(x + \Delta x; y + \Delta y)$ , близкой к точке  $P(x; y)$ , если известны значения функции и её частных производных в самой точке  $P(x; y)$ .

Аналогичные формулы можно вывести для функции  $n$  переменных при  $n > 2$ . Например,  $n = 3$  получим

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x; y + \Delta y; \Delta z + \Delta z) &\approx \\ &\approx f(x; y; z) + f'_x(x; y; z)\Delta x + f'_y(x; y; z)\Delta y + f'_z(x; y; z)\Delta z. \end{aligned} \quad (39.8)$$

**ПРИМЕР 39.3.** Вычислить приближённо с помощью полного дифференциала  $\frac{1}{\sqrt{2,95^2 + 4,01^2}}$ .

**Решение:** Рассмотрим функцию  $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ . Применяя формулу (39.7) к этой функции получим:

$$\frac{1}{\sqrt{(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + z'_x \Delta x + z'_y \Delta y.$$

Найдем частные производные:

$$z'_x = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}; \quad z'_y = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Положим теперь  $x = 3$ ,  $\Delta x = -0,05$ ,  $y = 4$ ,  $\Delta y = 0,01$ . Получим:

$$\frac{1}{\sqrt{2,95^2 + 4,01^2}} \approx \frac{1}{5} + \frac{3}{5\sqrt{5}}0,05 - \frac{4}{5\sqrt{5}}0,01 \approx 0,21.$$

Заметим, что если вычислить это значение с большей точностью с помощью калькулятора, получится  $\frac{1}{\sqrt{2,95^2 + 4,01^2}} \approx 0,201$ . Этот пример иллюстрирует определение дифференциала как главной части приращения функции.

### 39.5. Дифференциалы высших порядков

Если  $z = f(x; y)$  – функция независимых переменных  $x$  и  $y$ , имеет непрерывные частные производные второго порядка, то можно найти дифференциал от полного дифференциала, называемый дифференциалом второго порядка:  $d(dz) = d^2z$ .

Поскольку  $dx$  и  $dy$  не зависят от переменных  $x$  и  $y$ , в соответствии с формулой (39.2) находим:

$$\begin{aligned} d^2z &= d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dx + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dy = \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2. \end{aligned}$$

Пользуясь теоремой (38.4) и приводя подобные члены, получаем:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2. \quad (39.9)$$

Аналогично можно найти дифференциал третьего порядка функции двух независимых переменных (сделайте это самостоятельно):

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$$

Легко догадаться, что общая формула для дифференциала  $n$ -го порядка функции двух независимых переменных имеет вид, похожий на бином Ньютона:

$$d^n z = \sum_{i=0}^n C_n^i \frac{\partial^n z}{\partial x^i \partial y^{n-i}} dx^i dy^{n-i}. \quad (39.10)$$

### 39.6. Дифференцирование сложных функций

Пусть дана функция двух переменных  $z = f(x; y)$ , причём аргументы этой функции являются функциями одной независимой переменной  $t$ :  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ . Тогда  $z$  есть сложная функция одной независимой переменной  $t$ . Поставим задачу найти производную этой сложной функции  $\frac{dz}{dt}$ , зная частные производные  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$  и производные  $\frac{dx}{dt}$  и  $\frac{dy}{dt}$ . При решении этой задачи будем предполагать, что функции  $x = x(t)$  и  $y = y(t)$  имеют производные в точке  $t$ , а функция двух переменных  $z = f(x; y)$  в соответствующей точке  $(x; y)$  дифференцируема.

Пусть независимая переменная  $t$  получает приращение  $\Delta t$ ; тогда переменные  $x$  и  $y$  получают соответственно приращения  $\Delta x$  и  $\Delta y$ , а функция  $z$  – приращение  $\Delta z$ . Так как функция  $z$  по предположению

дифференцируема, то её полное приращение  $\Delta z$  может быть представлено в следующем виде:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \omega(\Delta x; \Delta y), \quad (39.11)$$

причём  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\omega}{\rho} = 0$ , где  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ . Разделив обе части равенства (39.11) на  $\Delta t$  и переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega}{\Delta t}. \quad (39.12)$$

Если каждый из пределов, стоящих в правой части этого равенства, существует, то существует и предел, стоящий в левой части этого равенства, т.е. производная  $\frac{dz}{dt}$ . Но  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$  и  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}$  существуют по предположению.

Найдем

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\omega}{\rho} \cdot \frac{\rho}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega}{\rho} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho}{\Delta t}.$$

Рассмотрим сначала

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\left( \frac{\Delta x}{\Delta t} \right)^2 + \left( \frac{\Delta y}{\Delta t} \right)^2} = \sqrt{\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2}. \end{aligned}$$

Этот предел существует, так как существуют производные  $\frac{dx}{dt}$  и  $\frac{dy}{dt}$ . Прежде чем доказать, что  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega}{\rho} = 0$ , отметим, что при  $\Delta t \rightarrow 0$  также и  $\rho \rightarrow 0$ . Но тогда  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\omega}{\rho} = 0$  и, следовательно,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega}{\Delta t} = 0 \cdot \sqrt{\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2} = 0.$$

Учитывая это, формулу (39.12) можно записать в следующем виде:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \quad (39.13)$$

ПРИМЕР 39.4. Найти производную  $\frac{dz}{dt}$ , если  $z = y^x$ ,  $x = \cos t$ ,  $y = t^3$ .

Решение: Используя формулу (39.13), получим

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= (y^x)' \cdot \frac{dx}{dt} + (y^x)'_y \frac{dy}{dt} = -y^x \ln y \sin t + 3t^2 x y^{x-1} = \\ &= -t^{3 \cos t} \ln t^3 \sin t + 3t^2 \cos t \cdot t^{3(\cos t-1)} = t^{3 \cos t-1} (3 \cos t - 3 \ln t \sin t) = \\ &= t(\sin t)^{t^2-1} (t \cos t + 2 \sin t \cdot \ln \sin t).\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь функцию  $z = f(x; y)$  при условии, что  $y = y(x)$ . Здесь переменная  $z$  есть функция одной переменной  $x$ :  $z = f(x; y(x))$ . Этот случай сводится к предыдущему, причём роль переменной  $t$  играет  $x$ . По формуле (39.13) имеем

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}.$$

Но  $\frac{dx}{dx} = 1$ , и поэтому

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}. \quad (39.14)$$

В правой и левой частях этой формулы имеются производные  $z$  по  $x$ . Одна из них  $\frac{\partial z}{\partial x}$  — частная производная функции двух переменных  $z = f(x; y)$ , которая находится так, как если бы  $y$  не зависел от  $x$ . В отличие от неё производная  $\frac{dz}{dx}$ , стоящая в левой части формулы (39.14), есть производная сложной функции одной переменной  $z = f(x; y(x))$ . Эту производную мы будем называть полной производной.

Предположим теперь, что  $z = f(x; y)$ , причём  $x = x(u; v)$  и  $y = y(u; v)$ . Тогда  $z$  есть сложная функция двух независимых переменных  $u$  и  $v$ . Найдем частные производные  $\frac{\partial z}{\partial u}$  и  $\frac{\partial z}{\partial v}$  этой сложной функции.



Частные производные  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial x}{\partial u}$  и  $\frac{\partial y}{\partial u}$  находится так, как если бы  $z$ ,  $x$  и  $y$  были функциями одной переменной  $u$ . Но тогда можно воспользоваться формулой (39.13), заменив в ней производные  $\frac{dz}{dt}$ ,  $\frac{dx}{dt}$  и  $\frac{dy}{dt}$  соответствующими частными производными  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial x}{\partial u}$  и  $\frac{\partial y}{\partial u}$ :

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}. \quad (39.15)$$

Аналогично можно получить выражение для  $\frac{\partial z}{\partial v}$ :

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}. \quad (39.16)$$

Полученные результаты легко обобщаются на случай сложной функции любого конечного числа аргументов.

В частности, для функции трёх переменных  $u = F(x; y; z)$ , где  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ , имеем

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt}. \quad (39.17)$$

### 39.7. Дифференцирование неявных функций

Пусть дано уравнение

$$3^y - x^3 - 1 = 0. \quad (39.18)$$

В нём каждому действительному значению  $x$  соответствует такое единственное значение  $y$ , что если эти значения  $x$  и  $y$  подставить в уравнение (39.18), то оно превратится в тождество. Например, значению  $x = 0$  соответствует значение  $y = 0$ , так как при подстановке этих значений  $x$  и  $y$  в уравнение (39.18) мы получим тождество  $3^0 - 0^3 - 1 = 0$ . Аналогично, значению  $x = 1$  соответствует значение  $y = \log_3 2$  и т.д. Иными словами, с помощью уравнения (39.18) задана функция, областью определения которой является числовая ось при  $x > -1$ , а множество значений – множество всех действительных чисел. Эта функция называется неявной.

Пусть в общем случае дано уравнение

$$F(x; y) = 0, \quad (39.19)$$

где  $F(x; y)$  – функция двух переменных.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 39.3.** Если каждому значению  $x$ , принадлежащему некоторому множеству  $M$  ( $x \in M$ ), соответствует единственное значение  $y$ , которое совместно с  $x$  удовлетворяет уравнению (39.19), то говорят, что уравнение определяет на множестве  $M$  неявную функцию  $y = \varphi(x)$ .

Таким образом, для неявной функции  $y = \varphi(x)$ , определённой уравнением (39.19), имеет место тождество

$$F(x; \varphi(x)) = 0,$$

справедливое для всех  $x$  из области определения  $M$  этой неявной функции.

В отличие от неявной функции функция  $y = f(x)$ , заданная уравнением, разрешённым относительно  $y$ , называется явной.

Вернёмся к рассмотренному примеру. Уравнение (39.18) можно разрешить относительно  $y$ :

$$y = \log_3(x^3 + 1). \quad (39.20)$$

Эта функция – явная. Разумеется, это та же самая функция, которая ранее была задана неявно уравнением (39.18). Она тождественно удовлетворяет уравнению (39.18). В самом деле, подставив в соотношение (39.18) вместо  $y$  его выражение из формулы (39.20), получим

$$3^{\log_3(x^3+1)} - x^3 - 1 = x^3 + 1 - x^3 - 1 = 0.$$

В некоторых случаях каждому значению  $x \in M$  соответствует несколько значений  $y$ , удовлетворяющих совместно с данным  $x$  уравнению (39.19). Тогда это уравнение определяет не одну, а несколько неявных функций. Так, например, уравнение  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  определяет две неявные функции, которые можно записать в явном виде, разрешив уравнение  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  относительно  $y$ :

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad y = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Не следует, однако, думать, что всякую неявную функцию можно представить в виде явной элементарной функции. Например, уравнение

$$3^y - 3y + x^3 - 1 = 0$$

задаёт неявную функцию  $y$ , так как существуют пары значений  $x$  и  $y$ , удовлетворяющие данному уравнению (например,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ;

$x = 1$ ,  $y = 1$  и т.д.). Но это уравнение нельзя разрешить так, чтобы  $y$  выражался через элементарные функции аргумента  $x$ .

Не всякое уравнение вида  $F(x; y) = 0$  задаёт неявную функцию. Например, уравнению  $x^2 + y^2 + 1 = 0$  не удовлетворяют никакие действительные значения  $x$  и  $y$ , и, следовательно, оно не определяет никакой неявной функции.

Каким же условиям должна удовлетворять функция  $F(x; y)$ , чтобы уравнение  $F(x; y) = 0$  определяло единственную неявную функцию  $y$ ? Ответ на этот вопрос даёт следующая теорема существования неявной функции.

**ТЕОРЕМА 39.2.** *Если функция  $F(x; y)$  и её частные производные  $F'_x(x; y)$  и  $F'_y(x; y)$  определены и непрерывны в некоторой окрестности точки  $P_0(x_0; y_0)$  и при этом  $F(x_0; y_0) = 0$ , а  $F'_y(x_0; y_0) \neq 0$ , то уравнение  $F(x; y) = 0$  определяет в некоторой окрестности точки  $P_0(x_0; y_0)$  единственную неявную функцию  $y = y(x)$ , непрерывную и дифференцируемую в некотором интервале, содержащем точку  $x_0$ , причём  $y(x_0) = y_0$ .*

Эту теорему мы оставляем без доказательства.

Перейдем теперь к вопросу о дифференцировании неявной функции. Пусть левая часть уравнения (39.19) удовлетворяет указанным в теореме условиям. Тогда это уравнение определяет неявную функцию  $y = y(x)$ , для которой в окрестности точки  $P_0(x_0; y_0)$  имеет место тождество  $F(x; y(x)) \equiv 0$  относительно  $x$ .

Так как производная функции, тождественно равной нулю, также равна нулю, то полная производная  $\frac{dF}{dx} = 0$ , но в силу соотношения (39.14) имеем

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

и поэтому  $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$ , откуда

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \quad (39.21)$$

По этой формуле находится производная неявной функции одной переменной.

**ПРИМЕР 39.5.** Найти первую и вторую производные неявной функции  $y$ , заданной уравнением  $x^3 - 3x + y^2 - xy - 1 = 0$ , и вычислить их значение в точке  $P(1; 1)$ .

**Решение:** Введем обозначение  $F(x; y) = x^3 - 3x + y^2 - xy - 1 = 0$ . тогда  $\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3 - y$ ;  $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - x$ . Следовательно, по формуле (39.21)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{3x^2 - 3 - y}{2y - x} = \frac{3x^2 - 3 - y}{x - 2y}.$$

Продифференцировав это выражение по  $x$ , получим:

$$y'' = \frac{(6x - y')(x - 2y) - (1 - 2y')(3x^2 - 3 - y)}{(x - 2y)^2}.$$

Подставив найденное ранее выражение для  $y'$  и несколько упростив, получаем:

$$y'' = \frac{(3x^2 - 12xy + 3 + y)(x - 2y) - (x - 6x^2 + 6)(3x^2 - 3 - y)}{(x - 2y)^3}.$$

В частности, в точке  $P(1; 1)$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = 1, \quad y''|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = -6.$$

Не выражая  $y$  в явном виде через  $x$ , мы установили, что в данной точке касательная к графику образует с осью  $Ox$  угол  $45^\circ$  ( $\operatorname{tg} \varphi = 1$ ).

### 39.8. Инвариантность формы полного дифференциала

Как известно, для дифференциала функции одной переменной  $y = f(x)$  имеет место инвариантность его формы. Это значит, что выражение для дифференциала  $dy = f'(x)dx$  остается верным независимо от того, является ли  $x$  независимой переменной или функцией некоторой переменной:  $x = \varphi(t)$ .

Для функции нескольких переменных  $u = f(x; y; z; \dots; t)$  справедливо аналогичное утверждение: полный дифференциал функции  $n$  переменных  $u = f(x; y; z; \dots; t)$  сохраняет свою форму

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \dots + \frac{\partial u}{\partial t}dt$$

независимо от того, являются ли  $x, y, z, \dots, t$  независимыми переменными или функциями других переменных.

Мы ограничимся доказательством этого утверждения только для случая функции двух переменных  $z = f(x; y)$ . Как известно, если  $x$  и  $y$  являются независимыми переменными, полный дифференциал имеет следующий вид:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Покажем, что эта форма дифференциала сохраняется, когда  $x$  и  $y$  становятся функциями новых переменных:  $x = x(u; v)$ ,  $y = y(u; v)$ . Тогда  $z$  является сложной функцией  $u$  и  $v$ . Дифференциал этой сложной функции выражается формулой

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

Но по формулам (39.16) и (39.17)

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} dz &= \left( \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \right) du + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \right) dv = \\ &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} dv = \\ &= \frac{\partial z}{\partial x} \left( \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left( \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy, \end{aligned}$$

так как

$$\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv = dx, \quad \text{а} \quad \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv = dy.$$

Следовательно, полный дифференциал  $dz$  не изменяет своей формы, т.е.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

и тогда, когда  $x$  и  $y$  являются функциями новых переменных.

Заметим, что дифференциалы высших порядков такими свойствами не обладают.

## Практическое занятие 39. Полный дифференциал функции

**ПРИМЕР 39.1.** Для функции  $z = xy^2$  найдите полное приращение  $\Delta z$  и полный дифференциал  $dz$  в точке  $M(2,00; 1,00)$  для  $\Delta x = 0,20$ ,  $\Delta y = 0,10$  и сравните их.

**Решение:** Найдем  $\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y) = (x + \Delta x) \cdot (y + \Delta y)^2 - xy^2$ . Поскольку  $x = 2$ ,  $y = 1$ , получаем для точки  $M$ :  $\Delta z = 2,20 \cdot 1,10^2 - 2,00 \cdot 1,00^2 \approx 0,66$ .

$$\text{Найдем } dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = y^2 \Delta x + 2xy \Delta y.$$

Здесь  $dx = \Delta x$ ,  $dy = \Delta y$ , т.к.  $x$  и  $y$  — независимые переменные.

Для точки  $M$  получаем:

$$dz = 1,00^2 \cdot 0,20 + 2 \cdot 2,00 \cdot 1,00 \cdot 0,10 = 0,60.$$

Заметим, что разница между  $\Delta z$  и  $dz$  равна 0,06, т.е. значительно меньше величины  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \approx 0,22$ .

Ответ:  $\Delta z \approx 0,66$ ;  $dz = 0,60$ .

**ПРИМЕР 39.2.** Найдите полный дифференциал  $dz$  функции  $z = x^3 y^2$ .

**Решение:**

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 3x^2 y^2 dx + 2x^3 y dy.$$

Ответ:  $dz = 3x^2 y^2 dx + 2x^3 y dy$ .

**ПРИМЕР 39.3.** Вычислите приближённо  $1,01^2 \cdot 0,98^3$ .

**Решение:** Аналогично тому, как было сделано в примере (39.1), найдем полный дифференциал  $dz$  для функции  $z = x^2 y^3$  при  $x = 1$ ,  $y = 1$ ,  $\Delta x = 1,01 - 1 = 0,01$ ,  $\Delta y = 0,98 - 1 = -0,02$ . В этом случае искомое значение  $1,01^2 \cdot 0,98^3$  равно  $f(x + \Delta x; y + \Delta y)$ .

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 2xy^3 \Delta x + 3x^2 y^2 \Delta y = \\ &= 2 \cdot 1 \cdot 1^3 \cdot 0,01 + 3 \cdot 1^2 \cdot 1^2 (-0,02) = -0,04. \end{aligned}$$

Воспользовавшись приближённым равенством:  $\Delta z \approx dz$ , получим:

$$f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y) \approx dz \Rightarrow f(x + \Delta x; y + \Delta y) \approx f(x; y) + dz$$

Учитывая, что  $f(x; y) = 1^2 \cdot 1^3 = 1$ , окончательно получаем:

$$1,01^2 \cdot 0,98^3 \approx 1 - 0,04 = 0,96.$$

Заметим, что в ответе указывается столько цифр после запятой, сколько их дано в исходных данных.

Ответ:  $1,01^2 \cdot 0,98^3 \approx 1 - 0,04 = 0,96$ .

**ПРИМЕР 39.4.** Найдите полный дифференциал 2-го порядка функции

$$z = x^2 - 3xy - 2y^2.$$

**Решение:** Дифференциал 1-го порядка находим как в примере (39.2).

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (2x - 3y)dx - (3x - 4y)dy.$$

Находя дифференциал от  $dz$  и помня, что  $dx$  и  $dy$  не зависят от  $x$  и  $y$ , получаем:

$$\begin{aligned} d^2z &= d(dz) = d((2x - 3y)dx - (3x - 4y)dy) = \\ &= (2dx - 3dy)dx - (3dx - 4dy)dy = 2dx^2 - 3dxdy - 3dxdy - 4dy^2 = \\ &= 2dx^2 - 6dxdy - 4dy^2. \end{aligned}$$

Для нахождения  $d^2z$  можно также воспользоваться формулой (39.11):

$$\begin{aligned} d^2z &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 = \\ &= 2dx^2 + 2(-3)dxdy - 4dy^2 = 2dx^2 - 6dxdy - 4dy^2. \end{aligned}$$

**ПРИМЕР 39.5.** Найдите  $\frac{dz}{dt}$ , если  $z = \sqrt{3x - 5y}$ , где  $x = \sin t$ ,  $y = \sqrt{t}$ .

**Решение:** В соответствии с формулой производной сложной функции имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3}{2\sqrt{3x - 5y}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-5}{2\sqrt{3x - 5y}}, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{3}{2\sqrt{3x - 5y}} \cos t + \frac{-5}{2\sqrt{3x - 5y}} \frac{1}{2\sqrt{t}}. \end{aligned}$$

После подстановки выражений для  $x = \sin t$  и  $y = \sqrt{t}$ , вынесения общего множителя за скобки, получаем:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{3 \cos t - \frac{5}{2\sqrt{t}}}{2\sqrt{3 \sin t - 5\sqrt{t}}}.$$

ПРИМЕР 39.6. Найдите  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{dz}{dx}$ , если  $z = 2^{\frac{x}{y}}$ , где  $y = \sin x$ .

Решение:  $\frac{\partial z}{\partial x}$  находим как в предыдущем практическом занятии,  $\frac{dz}{dx}$  находим по формуле производной сложной функции.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 2^{\frac{x}{y}} \ln 2 \cdot \frac{1}{y} \\ \frac{dz}{dx} &= 2^{\frac{x}{y}} \ln 2 \frac{1}{y} + 2^{\frac{x}{y}} \ln 2 \left( -\frac{x}{y^2} \right) \cos x = \\ &= 2^{\frac{x}{y}} \ln 2 \frac{1}{\sin x} + 2^{\frac{x}{y}} \ln 2 \left( -\frac{x}{\sin^2 x} \right) \cos x = \frac{2^{\frac{x}{y}} \ln 2}{\sin x} (1 - x \operatorname{ctg} x).\end{aligned}$$

ПРИМЕР 39.7. Найдите производную  $\frac{dy}{dx}$  функции заданной неявно уравнением:  $y = x^y$ .

Решение: Запишем уравнение  $y = x^y$  в неявном виде  $F(x, y) = x^y - y = 0$ . На основании (39.21) имеем  $\frac{dy}{dx} = -\frac{y x^{y-1}}{x^y \ln x - 1}$ .

Продифференцировав это выражение ещё раз, имея в виду, что  $y$  есть функция от  $x$ , можем найти  $y''$ .

### Самостоятельная работа

В примерах 39.8, 39.9 найдите полное приращение  $\Delta z$  и полный дифференциал  $dz$  для данной функции в точке  $M(x; y)$  для заданных  $\Delta x$  и  $\Delta y$ .

ПРИМЕР 39.8.  $z = x^2 y$ ;  $M(1; 2)$ ;  $\Delta x = 0,05$ ;  $\Delta y = 0,10$ .

ПРИМЕР 39.9.  $z = x^2 y^2$ ;  $M(1; 1)$ ;  $\Delta x = 0,01$ ;  $\Delta y = 0,02$ .

В примерах 39.10–39.13 найдите полный дифференциал  $dz$  данной функции.

ПРИМЕР 39.10.  $z = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$ .



ПРИМЕР 39.11.  $z = xy^x$ .

ПРИМЕР 39.12.  $z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$ .

ПРИМЕР 39.13.  $u = xyz$ .

В примерах 39.14–39.16 найдите полные дифференциалы 1-го и 2-го порядков данной функции.

ПРИМЕР 39.14.  $z = e^{xy}$ .

ПРИМЕР 39.15.  $z = xe^y + ye^x$ .

ПРИМЕР 39.16.  $z = e^y \sin x$ .

В примерах 39.17–39.19 вычислите приближённо данное значение без использования калькулятора. При переводе градусов в радианы и при всех вычислениях брать три значащие цифры, в ответе последний знак округлить.

ПРИМЕР 39.17.  $0,99^3 \cdot 1,02^2$ .

ПРИМЕР 39.18.  $\sqrt{3,98 + 2,95}$ .

ПРИМЕР 39.19.  $\sin 31^\circ \cos 61^\circ$ .

В следующих примерах не упрощайте полученный результат.

ПРИМЕР 39.20. Найдите  $\frac{dz}{dt}$ , если  $z = \frac{y}{x}$ , где  $y = \arcsin t$ ,  $x = \ln t$ .

ПРИМЕР 39.21. Найдите  $\frac{dz}{dx}$ , если  $z = \sqrt{s-t}$ , где  $t = \operatorname{tg} x$ ,  $s = \sqrt[3]{x}$ .

ПРИМЕР 39.22. Найдите  $\frac{du}{dt}$ , если  $u = \frac{xy}{z}$ , где  $x = \sqrt{t+2}$ ,  $y = e^t$ ,  $z = \cos t$ .

ПРИМЕР 39.23. Найдите  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{dz}{dx}$ , если  $z = y^x$ , где  $y = \arctg x$ .

ПРИМЕР 39.24. Найдите  $\frac{dz}{dx}$ , если  $z = \sin(u \cdot v)$ , где  $u = \sqrt{x}$ ,  $v = \operatorname{tg} x$ .

ПРИМЕР 39.25. Найдите производную  $\frac{dy}{dx}$  функции, заданной неявно уравнением:  $y = x + \log_3 y$ .

ПРИМЕР 39.26. Найдите 1-ю и 2-ю производные функции  $y = y(x)$ , заданной неявно уравнением:  $xe^y + ye^x = 0$ .

## Лекция 40. Производная по направлению и градиент

Скалярное поле. Производная по направлению. Градиент. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

### 40.1. Производная по направлению

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 40.1. Если каждой точке  $P$  некоторой области  $D$  трёхмерного пространства соответствует число  $u$ , определяемое функцией  $u = f(P) = f(x; y; z)$ , то говорят, что в области  $D$  задано трёхмерное скалярное поле. Если поле определяется функцией двух переменных  $z = f(x; y)$ , то оно называется двумерным или плоским скалярным полем.

Пусть в области  $D$  задана дифференцируемая функция  $u = F(x; y; z)$ . Рассмотрим точку  $P(x; y; z)$  этого скалярного поля и луч  $l$ , выходящий из точки  $P$  в направлении единичного вектора  $\mathbf{l} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$ , где  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  — углы вектора  $\mathbf{l}$  с осями координат (рис 29).

Пусть  $P_1(x + \Delta x; y + \Delta y; z + \Delta z) \in D$  — какая-нибудь другая точка этого луча. Разность значений функции  $u$  скалярного поля в точках  $P_1$  и  $P$  назовем приращением этой функции в направлении  $\vec{l}$  и обозначим через  $\Delta_l u$ . Тогда

$$\Delta_l u = F(x + \Delta x; y + \Delta y; z + \Delta z) - F(x; y; z).$$

Обозначим через  $\Delta l$  расстояние между точками  $P$  и  $P_1$ :  $\Delta l = PP_1$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 40.2. Производной функции  $u = F(x; y; z)$  в точке  $P$  по направлению  $\vec{l}$  называется предел  $\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}$ .

Производная функции  $u$  по направлению  $\vec{l}$  обозначается символом  $\frac{\partial u}{\partial l}$ . Таким образом,

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}. \quad (40.1)$$

Заметим, что если производная функции  $u$  в точке  $P(x; y; z)$  по данному направлению  $\vec{l}$  положительна, то функция  $u$  в этом направлении возрастает; если же  $\frac{\partial u}{\partial l} < 0$ , то функция  $u$  в этом направлении убывает.

Можно сказать, что производная по направлению  $\frac{\partial u}{\partial l}$  даёт скорость изменения функции  $u$  в этом направлении.

Выведем формулу для вычисления производной по направлению. Прежде всего заметим, что приращения  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  и  $\Delta z$  координат точки  $P$  связаны с длиной отрезка  $P_1P = \Delta l$  и направляющими косинусами вектора  $\vec{l}$  следующими соотношениями (рис. 29):

$$\Delta x = \Delta l \cos \alpha; \quad \Delta y = \Delta l \cos \beta; \quad \Delta z = \Delta l \cos \gamma. \quad (40.2)$$

Так как функция  $u$  по условию дифференцируема, то, как было показано в лекции 39 (39.4), её приращение  $\Delta u$  в точке  $P(x; y; z)$  можно представить в виде

$$\Delta u = F'_x(x; y; z)\Delta x + F'_y(x; y; z)\Delta y + F'_z(x; y; z)\Delta z + \omega, \quad (40.3)$$

причём  $\omega$  стремится к нулю быстрее, чем  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ , т.е.  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\omega}{\rho} = 0$ .

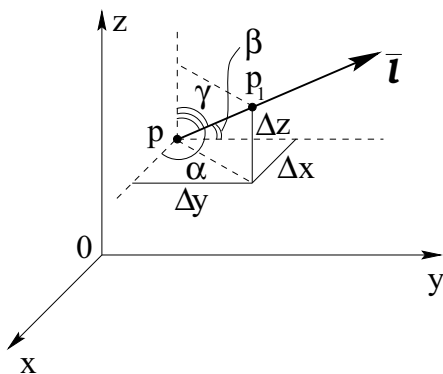


Рис. 29. Связь между  $\Delta l$  и  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$

Если рассматривать приращение функции вдоль луча в направлении вектора  $\vec{l}$ , то  $\Delta u = \Delta_l u$ ,  $\rho = \Delta l$ , а  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  и  $\Delta z$  выражаются по

формулам (40.2). Тогда равенство (40.3) примет следующий вид:

$$\Delta l u = F'_x(x; y; z) \Delta l \cos \alpha + F'_y(x; y; z) \Delta l \cos \beta + F'_z(x; y; z) \Delta l \cos \gamma + \omega.$$

Разделив обе части этого равенства на  $\Delta l$  и переходя к пределу при  $\Delta l \rightarrow 0$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta l u}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} (F'_x(x; y; z) \cos \alpha + \\ + F'_y(x; y; z) \cos \beta + F'_z(x; y; z) \cos \gamma) + \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\omega}{\Delta l}. \end{aligned}$$

Но  $F'_x(x; y; z)$ ,  $F'_y(x; y; z)$ ,  $F'_z(x; y; z)$  и направляющие косинусы не зависят от  $\Delta l$ , и так как  $\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\omega}{\Delta l} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\omega}{\rho} = 0$ , то

$$\frac{\partial u}{\partial l} = F'_x(x; y; z) \cos \alpha + F'_y(x; y; z) \cos \beta + F'_z(x; y; z) \cos \gamma. \quad (40.4)$$

Из формулы (40.4) следует, что если вектор  $\mathbf{l}$  совпадает с одним из ортов  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  или  $\mathbf{k}$ , то производная  $u$  по направлению  $\bar{l}$  совпадает с соответствующей частной производной этой функции. Так, например, если  $\mathbf{l} = \mathbf{i}$ , то  $\cos \alpha = 1$ ,  $\cos \beta = 0$ ,  $\cos \gamma = 0$  и, следовательно,  $\frac{\partial u}{\partial l} = F'_x(x; y; z)$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 40.1.** Все сказанное в этом разделе остается справедливым для функции двух переменных  $z = f(x; y)$ . В этом случае производная по направлению задаётся формулой (40.5) и равна скорости изменения функции  $z = f(x; y)$  в направлении вектора  $\bar{l}$ .

$$\frac{\partial z}{\partial l} = f'_x(x; y) \cos \alpha + f'_y(x; y) \cos \beta. \quad (40.5)$$

**ПРИМЕР 40.1.** Найти производную функции  $z = \sqrt{x^2 - y^2}$  в точке  $P_0(5; 3)$  в направлении вектора  $\mathbf{l} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$ .

**Решение:**

$$\cos \alpha = \frac{3}{|\mathbf{l}|} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5}; \quad \cos \beta = \frac{4}{|\mathbf{l}|} = \frac{4}{5},$$

частные производные в точке  $P_0$  были найдены в примере (38.6). В соответствии с формулой (40.5) получаем:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_{P_0} = \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{5} - \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{4} - \frac{3}{5} = \frac{3}{20}.$$

Полученный результат свидетельствует о том, что в точке  $P_0$  функция  $z = \sqrt{x^2 - y^2}$  возрастает в данном направлении  $\left(\frac{\partial z}{\partial l}\bigg|_{P_0} > 0\right)$ .

Ответ:  $\frac{\partial z}{\partial l}\bigg|_{P_0} = \frac{3}{20}$ .

## 40.2. Градиент скалярного поля

Определение скалярного поля было дано в начале этой лекции.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 40.3.** Градиентом в точке  $P(x; y; z)$  скалярного поля, заданного дифференцируемой функцией  $u = F(x; y; z)$  или просто градиентом функции называется вектор, равный

$$F'_x(x; y; z)\mathbf{i} + F'_y(x; y; z)\mathbf{j} + F'_z(x; y; z)\mathbf{k}.$$

Градиент функции  $u = F(x; y; z)$  мы будем обозначать одним из символов  $\text{grad } F(x; y; z)$ ,  $\text{grad } F(P)$ ,  $\text{grad } u$ . Следовательно, по определению

$$\text{grad } F(x; y; z) = F'_x(x; y; z)\mathbf{i} + F'_y(x; y; z)\mathbf{j} + F'_z(x; y; z)\mathbf{k}, \quad (40.6)$$

или кратко

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}. \quad (40.7)$$

Таким образом, каждой точке  $P(x; y; z)$  скалярного поля, заданного дифференцируемой функцией  $u = F(x; y; z)$ , соответствует не только значение этой функции, но и вполне определённый вектор  $\text{grad } F(P)$ .

**ПРИМЕР 40.2.** Найти градиент функции  $u = x^2 + y^2 - z^2$  в точке  $P_0(1; 1; 1)$

**Р е ш е н и е:** Найдём значение частных производных в точке  $P_0$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{P_0} = 2; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{P_0} = 2;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -2z; \quad \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{P_0} = -2.$$

В соответствии с формулой (40.7) получаем:

$$\text{grad } u = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Ответ:  $\text{grad } u = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ .

**ТЕОРЕМА 40.1.** *Проекция вектора  $\text{grad } u$  на единичный вектор  $\mathbf{l} = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \cos \beta + \mathbf{k} \cos \gamma$  равна производной функции  $u$  по направлению  $\bar{l}$ :*

$$\text{пр}_l \text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial l}. \quad (40.8)$$

**Доказательство:** Пусть  $u = F(x; y; z)$ . Из векторной алгебры известно, что проекция какого-либо вектора на единичный вектор равна скалярному произведению этих векторов. Но

$$\text{grad } u = F'_x(x; y; z)\mathbf{i} + F'_y(x; y; z)\mathbf{j} + F'_z(x; y; z)\mathbf{k}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \text{пр}_l \text{grad } u &= \text{grad } u \cdot \mathbf{l} = \\ &= F'_x(x; y; z) \cos \alpha + F'_y(x; y; z) \cos \beta + F'_z(x; y; z) \cos \gamma = \frac{\partial u}{\partial l}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Учитывая, что производная по направлению  $\frac{\partial u}{\partial l}$  выражает скорость изменения скалярного поля  $u = F(x; y; z)$  в этом направлении, можно сказать, что проекция  $\text{grad } u$  на вектор  $\mathbf{l}$  равна скорости изменения поля  $u = F(x; y; z)$  в направлении вектора  $\mathbf{l}$ .

Обозначим через угол  $\varphi$  угол между единичным вектором  $\mathbf{l}$  и  $\text{grad } u$ . Тогда  $\text{пр}_l \text{grad } u = |\text{grad } u| \cos \varphi$ . Поэтому, на основании формулы (40.8),

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\text{grad } u| \cos \varphi. \quad (40.9)$$

Если направление векторов  $\mathbf{l}$  и  $\text{grad } u$  совпадают ( $\varphi = 0$ ), то производная по направлению  $\frac{\partial u}{\partial l}$  имеет, очевидно, наибольшее значение, равное  $|\text{grad } u|$ .

Таким образом, мы приходим к следующему выводу:  $\text{grad } u$  есть вектор, указывающий направление наибольшего возрастания поля в данной точке и имеющий модуль, равный скорости этого возрастания.

Отсюда следует, что  $\text{grad } u$  функции скалярного поля  $u = F(x; y; z)$  определяется самим полем и не зависит от системы координат, в которой рассматривается функция поля.

Выясним взаимное расположение  $\text{grad } u = \text{grad } F(x; y; z)$  в данной точке  $P(x_0; y_0; z_0)$  и поверхности уровня, проходящей через эту точку. Пусть уравнение этой поверхности имеет вид

$$F(x; y; z) = C_0 \quad \text{или} \quad F(x; y; z) - C_0 = 0. \quad (40.10)$$

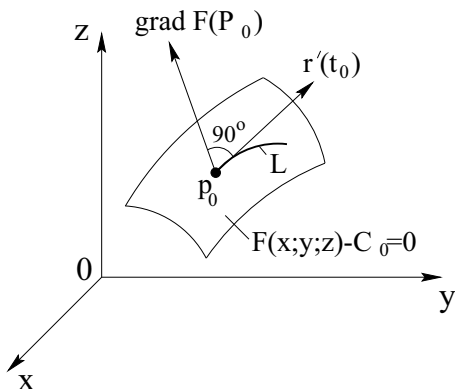


Рис. 30. Градиент скалярного поля

Рассмотрим кривую  $L$ , лежащую на поверхности (40.10) и проходящую через точку  $P_0$  (рис. 30). Предположим, что эта кривая задана уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$$

где  $x(t)$ ,  $y(t)$  и  $z(t)$  – дифференцируемые функции  $t$ , причём  $x_0 = x(t_0)$ ,  $y_0 = y(t_0)$ ,  $z_0 = z(t_0)$ . Если обозначить  $\bar{r} = (x; y; z)$ , то уравнения кривой можно записать в векторной форме:  $\bar{r} = \bar{r}(t)$ . Можно доказать, что вектор, составленный из производных  $(x'(t_0); y'(t_0); z'(t_0)) = \bar{r}'(t_0)$ , направлен по касательной к кривой  $L$  в точке  $\bar{r}(t_0)$ .

Действительно, по определению производной:

$$\bar{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{r}(t_0 + \Delta t) - \bar{r}(t_0)}{\Delta t}.$$

Вектор  $\bar{r}(t_0 + \Delta t) - \bar{r}(t_0)$  направлен по секущей к кривой  $L$ , проходящей через точку  $P_0(\bar{r}(t_0))$  и другую точку этой кривой  $\bar{r}(t_0 + \Delta t)$ ; вектор  $\frac{\bar{r}(t_0 + \Delta t) - \bar{r}(t_0)}{\Delta t}$  ему коллинеарен. Когда  $\Delta t \rightarrow 0$ , секущая превращается в касательную.

Каждая точка кривой  $L$  имеет координаты  $x(t)$ ,  $y(t)$  и  $z(t)$ , которые должны удовлетворять уравнению (40.10) поверхности уровня, поскольку кривая  $L$  полностью лежит на этой поверхности. Таким

образом, должно выполняться тождество

$$F(x(t); y(t); z(t)) - C_0 = 0.$$

Продифференцируем обе части этого тождества по  $t$ ; учитывая, что  $(C_0)'_t = 0$ , получим

$$\frac{\partial F}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}y'(t) + \frac{\partial F}{\partial z}z'(t) = 0.$$

В частности, при  $t = t_0$  имеем

$$F'_x(x_0; y_0; z_0)x'(t_0) + F'_y(x_0; y_0; z_0)y'(t_0) + F'_z(x_0; y_0; z_0)z'(t_0) = 0.$$

Левая часть этого равенства является скалярным произведением

$$\text{grad } u(P_0) = F'_x(x_0; y_0; z_0)\mathbf{i} + F'_y(x_0; y_0; z_0)\mathbf{j} + F'_z(x_0; y_0; z_0)\mathbf{k}$$

и вектора

$$\mathbf{r}'(t_0) = x'(t_0)\mathbf{i} + y'(t_0)\mathbf{j} + z'(t_0)\mathbf{k},$$

направленного по касательной к кривой  $L$ . Таким образом,

$$\text{grad } u(P_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0. \quad (40.11)$$

Предположим, что  $\text{grad } u(P_0) \neq 0$ . Тогда из равенства (40.11) вытекает, что  $\text{grad } u(P_0)$  перпендикулярен к вектору  $\mathbf{r}'(t_0)$ , направленному по касательной к кривой  $L$  в точке  $P_0$ .

Так как эта кривая была выбрана произвольно, то мы приходим к следующему выводу. Если скалярное поле задано дифференцируемой функцией  $u = F(x; y; z)$ , то все касательные, проведенные в точке  $P_0$  к линиям, лежащим на поверхности уровня и проходящим через точку  $P_0$ , расположены в одной плоскости, перпендикулярной вектору  $\text{grad } F(P_0)$ , при условии, что этот вектор не равен нулю.

В случае плоского скалярного поля, заданного дифференцируемой функцией двух переменных  $z = f(x; y)$ , градиент определяется формулой

$$\text{grad } f(x; y) = f'_x(x; y)\mathbf{i} + f'_y(x; y)\mathbf{j}. \quad (40.12)$$

Его связь с производной по направлению  $\frac{\partial z}{\partial l}$  выражается равенством

$$\text{пр}_l \text{grad } z = \frac{\partial z}{\partial l} \quad \text{или} \quad \frac{\partial z}{\partial l} = |\text{grad } z| \cos \varphi,$$

где  $\varphi$  – угол между единичным вектором направления  $\bar{l}$  и  $\text{grad } z$ .

Можно показать, что если поле задано дифференцируемой функцией  $z = f(x; y)$ , то вектор  $\text{grad } f(x_0; y_0)$  перпендикулярен к касательной, проведенной к линии уровня в точке  $P_0(x_0; y_0)$ .



### 40.3. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть поверхность задана уравнением

$$F(x; y; z) = 0, \quad (40.13)$$

где  $F(x; y; z)$  – дифференцируемая функция. Если в точке  $P_0(x_0; y_0; z_0)$  градиент отличен от нуля, то в соответствии с изложенным выше все касательные, проведённые в точке  $P_0$  к линиям, лежащим на поверхности и проходящим через точку  $P_0$ , расположены в одной плоскости, перпендикулярной  $\text{grad } F(P_0)$ .

Эта плоскость называется касательной к поверхности  $F(x; y; z) = 0$  в точке  $P_0$  (см. рис. 31).

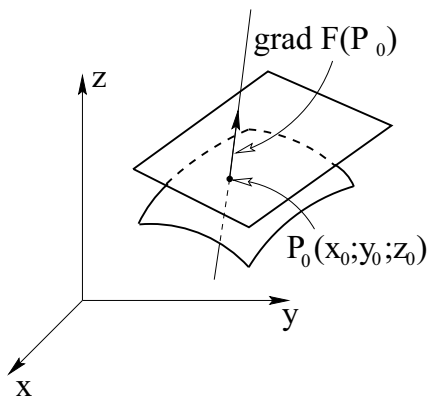


Рис. 31. Касательная плоскость и нормаль

Для нахождения уравнения этой плоскости используем уравнение плоскости, проходящей через данную точку  $P_0$  (лекция 30):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

В качестве нормального вектора  $\overline{N}(A; B; C)$  возьмём вектор градиента, перпендикулярный касательной плоскости. Уравнение касательной плоскости примет вид:

$$F'_x(x_0; y_0; z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0; y_0; z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0; y_0; z_0)(z - z_0) = 0. \quad (40.14)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 40.4.** *Прямая, проходящая через точку касания  $P_0$  перпендикулярно касательной плоскости называется нормалью к поверхности.*

Для нахождения её уравнения, воспользуемся уравнением прямой в пространстве, проходящей через заданную точку  $P_0$  (лекция 31):

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

В качестве направляющего вектора  $\vec{s}(m; n; p)$  возьмём вектор градиента, параллельный нормали:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0; y_0; z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0; y_0; z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0; y_0; z_0)}. \quad (40.15)$$

**ПРИМЕР 40.3.** *Найти уравнение касательной плоскости и нормали к параболоиду  $z = x^2 + 2y^2$  в точке  $P_0(1; 1; 3)$ .*

**Р е ш е н и е:** Запишем уравнение поверхности в виде (40.13):  $x^2 + 2y^2 - z = 0$ . Здесь  $F(x; y; z) = x^2 + 2y^2 - z$ .

Найдём  $\text{grad } F(P_0)$ :

$$F'_x(x; y; z) = 2x; \quad F'_y(x; y; z) = 4y; \quad F'_z(x; y; z) = -1.$$

$$F'_x(P_0) = 2; \quad F'_y(P_0) = 4; \quad F'_z(P_0) = -1.$$

В соответствии с (40.14) уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$2(x - 1) + 4(y - 1) - 1(z - 3) = 0, \quad \text{или:} \quad 2x + 4y - z - 3 = 0.$$

В соответствии с (40.15) уравнение нормали имеет вид:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{4} = \frac{z - 1}{-1}.$$

Ответ:  $2x + 4y - z - 3 = 0$ ,  $\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{4} = \frac{z - 1}{-1}$ .

Рассмотрим теперь часто встречающийся на практике случай, когда поверхность задана уравнением  $z = f(x; y)$ , как в примере (40.3). Этот случай сводится к предыдущему, как это сделано в предыдущем примере.

Запишем уравнение поверхности в виде

$$-f(x; y) + z = 0. \quad (40.16)$$

Здесь  $F(x; y; z) = -f(x; y) + z$ .

Найдем  $\text{grad} F(P_0)$ :

$$\begin{aligned} F'_x(x_0; y_0; z_0) &= -f'_x(x_0; y_0); & F'_y(x_0; y_0; z_0) &= -f'_y(x_0; y_0); \\ F'_z(x_0; y_0; z_0) &= 1. \end{aligned}$$

В соответствии с (40.14) уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$\begin{aligned} -f'_x(x_0; y_0)(x - x_0) - f'_y(x_0; y_0)(y - y_0) + (z - z_0) &= 0, \\ \text{или} \quad z - z_0 &= f'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(y - y_0). \end{aligned} \quad (40.17)$$

В соответствии с (40.15) уравнение нормали имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{-f'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{-f'_y(x_0; y_0)} = \frac{z - z_0}{1}. \quad (40.18)$$

Направляющие косинусы нормали в точке  $P_0$  находятся как было изложено в т. 1 Курса. Формулы для направляющих косинусов нормали при задании поверхности уравнением  $F(x; y; z) = 0$  получаются следующие:

$$\cos \alpha = \frac{F'_x(P_0)}{|\text{grad} F(P_0)|}; \quad \cos \beta = \frac{F'_y(P_0)}{|\text{grad} F(P_0)|}; \quad \cos \gamma = \frac{F'_z(P_0)}{|\text{grad} F(P_0)|}, \quad (40.19)$$

где  $|\text{grad} F(P_0)| = \sqrt{(F'_x(P_0))^2 + (F'_y(P_0))^2 + (F'_z(P_0))^2}$ . Если поверхность задана уравнением  $z = f(x; y)$ , формулы, очевидно будут следующими:

$$\cos \alpha = \frac{-f'_x(x_0; y_0)}{|\text{grad} F(P_0)|}; \quad \cos \beta = \frac{-f'_y(x_0; y_0)}{|\text{grad} F(P_0)|}; \quad \cos \gamma = \frac{1}{|\text{grad} F(P_0)|}, \quad (40.20)$$

где  $|\text{grad} F(P_0)| = \sqrt{(f'_x(x_0; y_0))^2 + (f'_y(x_0; y_0))^2 + 1}$ .

## Практическое занятие 40. Производная по направлению и градиент

**ПРИМЕР 40.1.** Найдите производную функции  $z = x^2 + 2y^2$  в точке  $M(1; 1)$  в направлении, составляющем с осью  $Ox$  угол  $60^\circ$ .

**Решение:** Найдем направляющие косинусы:  $\cos \alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ,  
 $\cos \beta = \cos(90^\circ - 60^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Заметим, что  $\cos \beta$  можно также найти из условия  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$ .  
Найдем значения частных производных в точке  $M$ :

$$\frac{\partial z}{\partial x}|_M = 2x|_{x=1} = 2; \quad \frac{\partial z}{\partial y}|_M = 4y|_{y=1} = 4.$$

Найдем производную по направлению:

$$\frac{\partial z}{\partial l}|_M = \frac{\partial z}{\partial x}|_M \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y}|_M \cos \beta = 2 \frac{1}{2} + 4 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + 2\sqrt{3} \approx 4,46.$$

Поскольку производная по направлению равна тангенсу угла наклона касательной в данной точке в данном направлении с плоскостью  $XOY$ , заключаем, что в точке  $M(1; 1)$  в заданном направлении функция  $z = x^2 + 2y^2$  возрастает и довольно «круто» – угол касательной с плоскостью  $XOY$  составляет около  $77^\circ$ .

**ПРИМЕР 40.2.** Найдите производную функции  $z = 2x^2 + y^2$  в точке  $M(1; 1)$  в направлении, идущем от этой точки к началу координат  $O(0; 0)$ .

**Решение:** Найдем направляющие косинусы, для чего предварительно найдем координаты вектора  $\overline{MO}$ , задающего направление. В соответствии с изложенным в Части I курса, координаты вектора получаются вычитанием координат начала вектора из координат его конца:  $\overline{MO} = (0 - 1; 0 - 1) = (-1; -1)$

Направляющие косинусы вектора равны координатам единичного вектора, сонаправленного с данным:

$$\overline{l}_{MN} = \frac{\overline{MO}}{|\overline{MO}|}.$$

$$\text{Найдем } |\overline{MO}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\overline{l}_{MN} = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Аналогично тому, как это делалось в предыдущем примере, найдем производную по направлению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x}|_M &= 4x|_{x=1} = 4; \quad \frac{\partial z}{\partial y}|_M = 2y|_{y=1} = 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial l}|_M &= 4 \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 2 \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -\frac{6}{\sqrt{2}} \approx -4,3. \end{aligned}$$

Заметим, что функция в данном направлении в точке  $M$  убывает (производная отрицательная). Самостоятельно с помощью калькулятора найдите угол касательной с плоскостью  $XOY$ .

**ПРИМЕР 40.3.** Найдите градиент функции  $z = x^2 + 2y^2$  в точке  $M(1; 1)$  и производную этой функции в данной точке в направлении градиента.

**Р е ш е н и е:** Используя найденные в примере (40.1) значения частных производных, найдем  $\text{grad } z$ :

$$\text{grad } z|_M = \left( \frac{\partial z}{\partial x}|_M; \frac{\partial z}{\partial y}|_M \right) = (2; 4).$$

В соответствии с изложенным в лекции 40 производная функции в данной точке принимает наибольшее значение в направлении градиента и равна его модулю; т.е.  $\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$ . Таким образом, в данном примере производная функции в точке  $M$  в направлении градиента равна  $\sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} \approx 4,47$ , что немного больше результата примера (40.1).

**ПРИМЕР 40.4.** Найдите уравнение касательной плоскости и нормали к конусу

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8} = 0$$

в точке  $P_0(4; 3; 4)$ .

**Р е ш е н и е:**

Здесь поверхность задана уравнением вида

$$F(x; y; z) = 0, \text{ где: } F(x; y; z) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8}.$$

$$F'_x(x; y; z) = \frac{x}{8}; \quad F'_y(x; y; z) = \frac{2y}{9}; \quad F'_z(x; y; z) = -\frac{z}{4}.$$

$$F'_x(P_0) = \frac{1}{2}; \quad F'_y(P_0) = \frac{2}{3}; \quad F'_z(P_0) = -1.$$

В соответствии с (39.16) уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$\frac{1}{2}(x - 4) + \frac{2}{3}(y - 3) - (z - 4) = 0 \quad \text{или} \quad 3x + 4y - 6z = 0.$$

В соответствии с (39.17) уравнение нормали имеет вид:

$$\frac{x-4}{1/2} = \frac{y-3}{2/3} = \frac{z-4}{-1}.$$

Ответ:  $3x + 4y - 6z = 0$ ;  $\frac{x-4}{1/2} = \frac{y-3}{2/3} = \frac{z-4}{-1}.$

### Самостоятельная работа

В примерах 40.4–40.8 найдите производную данной функции в данной точке в направлении, составляющем с осью  $Ox$  угол  $\alpha$ .

ПРИМЕР 40.5.  $z = 2x^2 + xy + 3y^2$ ;  $M(2; -2)$ ;  $\alpha = -45^\circ$ .

ПРИМЕР 40.6.  $z = x^2 - y^2$ ;  $M(-1; 1)$ ;  $\alpha = 120^\circ$ .

ПРИМЕР 40.7.  $z = \frac{x}{y}$ ;  $M(2; 1)$ ;  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ ;  $0 < \beta < \pi/2$ .

ПРИМЕР 40.8.  $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ ;  $M(5; 3)$ ;  $\cos \alpha = \cos \beta < 0$ .

В примерах 40.9–40.11 найдите производную данной функции в точке  $M$  в направлении, идущем от этой точки к точке  $N$ .

ПРИМЕР 40.9.  $z = \frac{1}{xy}$ ;  $M(1; 1)$ ;  $N(-1; 1)$ .

ПРИМЕР 40.10.  $z = \sqrt{x - y}$ ;  $M(1; 0)$ ;  $N(0; 1)$ .

ПРИМЕР 40.11.  $u = xy + yz + zx$ ;  $M(2; 1; 3)$ ;  $N(5; 5; 15)$ .

В примерах 40.12–40.15 найдите градиент данной функции в данной точке и производную этой функции в данной точке в направлении градиента (т.е. наибольшую скорость изменения функции в данной точке).

ПРИМЕР 40.12.  $z = 2x^3 + 3y^3 - 2xy$ ;  $M(2; 1)$ .

ПРИМЕР 40.13.  $z = 2\sqrt{y^2 - x^2}$ ;  $M(3; 5)$ .

ПРИМЕР 40.14.  $u = 2xyz$ ;  $M(3; 2; 1)$ .

ПРИМЕР 40.15.  $u = 4x^2 + y^2 + z^2$ ;  $M(1; 1; 1)$ .

ПРИМЕР 40.16. Найдите уравнение касательной плоскости и нормали к гиперболическому параболоиду  $z = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3}$  в точке  $P_0(2; 3; -1)$ .

## Лекция 41. Экстремум функции нескольких переменных

Формула Тейлора функции 2-х переменных. Решение систем нелинейных уравнений методом Ньютона. Локальный экстремум функции нескольких переменных. Наибольшее и наименьшее значения. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Численные методы поиска экстремума.

### 41.1. Формула Тейлора для функции двух переменных

В части I данного курса была выведена формула Тейлора для функции одной переменной (п. 19.2):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \quad (41.1)$$

$$+ \frac{f^{n-1}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + O((x - x_0)^n),$$

где  $O(\rho^n)$  есть бесконечно малая порядка  $n$  при  $\rho \rightarrow 0$ , в данном случае  $\rho = x - x_0$ .

Аналогичную формулу, дающую представление функции в виде многочлена от приращений её аргументов, можно доказать для функции двух (и более) аргументов. Вот как выглядят первые три её члена:

$$f(x; y) = f(x_0; y_0) + \frac{1}{1!} (f'_x(x_0; y_0)\Delta x + f'_y(x_0; y_0)\Delta y) + \quad (41.2)$$

$$+ \frac{1}{2!} (f''_{xx}(x_0; y_0)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(x_0; y_0)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(x_0; y_0)\Delta y^2) + O(\rho^3),$$

где  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ,  $\Delta x = x - x_0$ ,  $\Delta y = y - y_0$ .

Если заметить, что в скобках в правой части стоят дифференциалы равных порядков, формулу можно записать короче:

$$f(x; y) = f(x_0; y_0) + \frac{df(x_0; y_0)}{1!} + \frac{d^2f(x_0; y_0)}{2!} + \dots + \quad (41.3)$$

$$+ \frac{d^{n-1}f(x_0; y_0)}{(n-1)!} + O(\rho^n).$$

Заметим, что формула (39.3) есть формула Тейлора при  $n = 2$ .

$O(\rho^n)$  называется остаточным членом формулы Тейлора. Для функции  $m$  переменных формула Тейлора, выписанная до членов первого порядка будет иметь вид:

$$f(x_1; x_2; \dots; x_m) = f(x_1^0; x_2^0; \dots; x_m^0) + (f'_{x_1}(x_1^0; x_2^0; \dots; x_m^0)\Delta x_1 + (41.4) \\ + f'_{x_2}(x_1^0; x_2^0; \dots; x_m^0)\Delta x_2 + \dots + f'_{x_m}(x_1^0; x_2^0; \dots; x_m^0)\Delta x_m) + O(\rho^2),$$

где:  $\Delta x_i = x_i - x_i^0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^m \Delta x_i^2}$ .

## 41.2. Решение систем нелинейных уравнений методом Ньютона

Пусть дана система  $m$  нелинейных уравнений с  $m$  неизвестными, где  $f_i(x_1; \dots; x_m)$  – некоторые функции:

$$\begin{cases} f_1(x_1; x_2; \dots; x_m) = 0, \\ f_2(x_1; x_2; \dots; x_m) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ f_m(x_1; x_2; \dots; x_m) = 0. \end{cases} \quad (41.5)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 41.1.** *Решением системы (41.5) называется точка  $m$ -мерного пространства  $P_0(a_1; a_2; \dots; a_m)$ , координаты которой удовлетворяют этой системе.*

Введем матрицы-столбцы неизвестных  $X$  (координаты точки  $m$ -мерного пространства), функций  $F$  и нулевой столбец.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad F(X) = \begin{pmatrix} f_1(x_1; \dots; x_m) \\ \vdots \\ f_m(x_1; \dots; x_m) \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (41.6)$$

Тогда система (41.5) может быть записана в матричном виде:

$$F(X) = 0. \quad (41.7)$$

Для приближённого решения системы (41.5) в методе Ньютона предлагается процедура последовательного уточнения значений решения системы.

Пусть известно приближённое решение  $X_n$  системы (41.7) и его отличие  $\varepsilon$  от истинного решения:

$$X_n = \begin{pmatrix} x_1^n \\ \vdots \\ x_m^n \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_m \end{pmatrix}, \quad (41.8)$$



где  $\Delta x_i = x_i - x_i^n$  или  $x_i = x_i^n + \Delta x_i$ .

В матричных обозначениях (41.8) записывается следующим образом:

$$\varepsilon = X - X_n \quad \text{или} \quad X = X_n + \varepsilon.$$

Подставляя (41.8) в (41.5), получаем систему:

$$\begin{cases} f_1(x_1^n + \Delta x_1, \dots, x_m^n + \Delta x_m) = 0, \\ \dots \\ f_m(x_1^n + \Delta x_1, \dots, x_m^n + \Delta x_m) = 0. \end{cases}$$

Заменим каждую из функций в левых частях этих уравнений по формуле Тейлора с точностью до линейных членов, которая записывается подобно формуле (41.2):

$$\begin{aligned} f_i(x_1^n + \Delta x_1, \dots, x_m^n + \Delta x_m) &= f_i(x_1^n, \dots, x_m^n) + \\ &+ \sum_{j=1}^m f'_{i,x_j}(x_1^n, \dots, x_m^n) \Delta x_j + \alpha_2 \rho^2, \end{aligned}$$

где  $f'_{i,x_j}(x_1^n, \dots, x_m^n) = \frac{\partial f_i(x_1^n, \dots, x_m^n)}{\partial x_j}$ .

Пренебрегая остаточным членом, получим систему (41.9) линейных уравнений для определения неизвестных «поправок»  $\Delta x_j^n$ , ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) к  $n$ -му приближению  $x_1^n, \dots, x_m^n$ , которые будут отличаться от  $\Delta x_j$ :

$$\begin{cases} f_1(x_1^n, \dots, x_m^n) + f'_{1,x_1}(x_1^n, \dots, x_m^n) \Delta x_1^n + \dots + f'_{1,x_m}(x_1^n, \dots, x_m^n) \Delta x_m^n = 0, \\ \dots \\ f_m(x_1^n, \dots, x_m^n) + f'_{m,x_1}(x_1^n, \dots, x_m^n) \Delta x_1^n + \dots + f'_{m,x_m}(x_1^n, \dots, x_m^n) \Delta x_m^n = 0. \end{cases} \quad (41.9)$$

Находя из этой системы значения поправок  $\Delta x_j^n$  ( $j = 1, \dots, m$ ), находим « $(n+1)$ -ое приближение» по формулам (41.10)

$$x_1^{n+1} = x_1^n + \Delta x_1^n, \dots, x_m^{n+1} = x_m^n + \Delta x_m^n. \quad (41.10)$$

Конечно, подставляя найденные значения  $x_j^n$  ( $j = 1, \dots, m$ ) в систему (41.5), мы не получим (в общем случае) тождество, т.к. при вычислении поправок  $\Delta x_j^n$  мы пренебрегаем остаточным членом в формуле Тейлора. Вычисляя на основании значений  $x_j^{n+1}$  новые поправки из системы (41.9), найдем следующее,  $(n+2)$ -ое, приближение. Процесс обычно продолжается до тех пор, пока поправки к решению не оказываются по абсолютной величине меньше наперед заданной точности

вычислений  $\delta$ , которую обычно берут одинаковой для всех неизвестных:  $|\Delta x_j^n| < \delta$  для всех  $j = 1, \dots, m$ .

Метод Ньютона, как правило, сходится если начальное приближение достаточно близко к истинному решению. На практике начальное приближение для системы двух и трёх уравнений выбирают из геометрических соображений. Решение системы (41.9) и реализация метода Ньютона в настоящее время осуществляется с помощью ЭВМ.

В матричном виде, с использованием обозначений (41.6), система (41.9) и её решение записывается более удобно:

$$F(X_n) + W(X_n) \cdot \varepsilon_n = 0, \quad (41.11)$$

где  $W(X_n)$  – так называемая матрица Якоби, или якобиан, составлена из производных функций  $f_i(x_1, \dots, x_m)$  в точке  $(x_1^n, \dots, x_m^n)$ :

$$W(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}. \quad (41.12)$$

Решая матричное уравнение (41.11), получаем матрицу-столбец поправок:

$$\varepsilon_n = -W^{-1}(X_n)F(X_n), \quad (41.13)$$

где  $W^{-1}(X_n)$  – матрица, обратная к матрице Якоби, вычисленной для  $X_n$ .

Очередное  $(n+1)$ -ое приближение вычисляется по формуле:

$$X_{n+1} = X_n + \varepsilon_n. \quad (41.14)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 41.1.** Как правило, для системы двух и трёх уравнений аргументы  $x_1, x_2, x_3$  обозначают традиционным способом:  $x, y, z$ .

**ПРИМЕР 41.1.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 1 = 0 \\ y - x^3 = 0 \end{cases} \quad \text{с точностью } \delta = 0,01.$$

**Решение:** В данном случае система двух уравнений с двумя неизвестными:  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $f_1(x_1; x_2) = x^2 + 4y^2 - 1$ ,  $f_2(x_1; x_2) = y - x^3$ ,

$$F(X) = \begin{pmatrix} x^2 + 4y^2 - 1 \\ y - x^3 \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_1}{\partial y} = 8y, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x} = -3x^2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial y} = 1.$$

Таким образом, матрица Якоби получилась равной

$$W(X) = \begin{pmatrix} 2x & 8y \\ -3x^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

На практике далее вычисления производятся с помощью программы на ЭВМ, исходными данными для работы которой являются правые части уравнений  $F(X)$ , матрица Якоби  $W(X)$ , начальное приближение  $x^0$ ,  $y^0$  и точность вычислений  $\delta$ .

Для нахождения начального приближения воспользуемся геометрической интерпретацией уравнений системы примера 41.1. Уравнение  $x^2 + 4y^2 - 1 = 0$  определяет эллипс  $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{(0,5)^2} = 1$  с полуосями  $a = 1$  и  $b = 0,5$ . Уравнение  $y - x^3 = 0$  определяет кубическую параболу  $y = x^3$ . Нарисовав обе кривые в одних осях найдем нулевое приближение из графика (рис. 32)

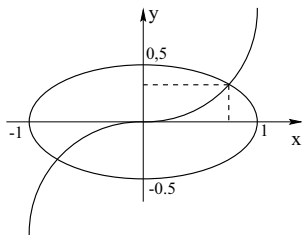


Рис. 32. Решение примера 41.1

Ограничимся нахождением решения системы с положительными координатами, выбрав в качестве начального приближения  $x_0 = 0,50$ ;  $y_0 = 0,25$ .

Для начальной иллюстрации метода Ньютона покажем процесс численного решения примера 41.1. В вычислениях будем брать на один знак больше требуемой точности, т.е. 3 знака после запятой.

Найдем матрицу обратную к матрице Якоби как было изложено в части 1 настоящего Курса (Лекция 25):

$$W^{-1}(X) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2x + 24x^2y} & -\frac{4y}{x + 12x^2y} \\ \frac{3x^2}{2x + 24x^2y} & \frac{x}{x + 12x^2y} \end{pmatrix}.$$

Система (41.13) для определения поправок  $\varepsilon = -W^{-1}(X)F(X)$  приобретает вид:

$$\begin{cases} \Delta x = -\left(\frac{x^2 + 4y^2 - 1}{2x + 24x^2y} - \frac{4y(y - x^3)}{x + 12x^2y}\right), \\ \Delta y = -\left(\frac{3x^2(x^2 + 4y^2 - 1)}{2x + 24x^2y} + \frac{x(y - x^3)}{x + 12x^2y}\right). \end{cases} \quad (41.15)$$

Подставляя сюда начальное приближение  $x_0 = 0,50$ ,  $y_0 = 0,25$  получаем значения поправок  $\Delta x_0 = 0,30$ ;  $\Delta y_0 = 0,10$ .

Вычисляя далее очередное приближение получаем:

$$x_1 = x_0 + \Delta x_0 = 0,8, \quad y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 0,35.$$

Поскольку условие окончания процесса

$$\begin{cases} |\Delta x_0| < 0,01 \\ |\Delta y_0| < 0,01 \end{cases} \quad \text{не выполнено, продолжаем вычисления.}$$

Подставляя в систему (41.15) значения  $x_1$ ,  $y_1$ , получаем  $\Delta x_1 = -0,084$ ;  $\Delta y_1 = 0,0014$ ;  $x_2 = x_1 + \Delta x_1 = 0,716$ ;  $y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 0,3514$ .

Поскольку условие окончания процесса:

$$\begin{cases} |\Delta x_1| < 0,01 \\ |\Delta y_1| < 0,01 \end{cases} \quad \text{не выполнено, вычисления продолжаем.}$$

Результаты вычислений сведены в таблицу:

$i$	$x_i$	$y_i$	$\Delta x_i$	$\Delta y_i$
0	0,50	0,25	0,30	0,10
1	0,80	0,35	-0,084	0,0044
2	0,716	0,3514	-0,0088	-0,009
3	0,707	0,3505		

Условия окончания процесса выполняются для  $i = 2$ :  $|\Delta x_2| < 0,01$ ;  $|\Delta y_2| < 0,01$ .

Ответ:  $x_3 = 0,71$ ;  $y_3 = 0,35$  с точностью до 0,01.

### 41.3. Локальный экстремум функции нескольких переменных

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 41.2.** Мы говорим, что функция  $z = f(x; y)$  имеет локальный максимум в точке  $M_0(x_0; y_0) \in D(f)$  (т.е. при  $x = x_0$  и  $y = y_0$ ), если

$$f(x_0; y_0) > f(x; y)$$

для всех точек  $(x; y)$ , достаточно близких к точке  $(x_0; y_0)$  (из  $\delta$  окрестности этой точки) и отличных от неё.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 41.3. Совершенно аналогично говорят, что функция  $z = f(x; y)$  имеет локальный минимум в точке  $M_0(x_0; y_0) \in D(f)$ , если

$$f(x_0; y_0) < f(x; y)$$

для всех точек  $(x; y)$ , достаточно близких к точке  $(x_0; y_0)$  и отличных от неё.

Локальный максимум и минимум функции называют локальными экстремумами функции, т.е. говорят, что функция имеет локальный экстремум в данной точке, если эта функция имеет локальный максимум или минимум в данной точке.

Как и для функции одной переменной локальные максимумы и минимумы будем называть просто максимумами и минимумами или экстремумами.

Данное выше определение максимума и минимума функции можно перефразировать следующим образом.

Положим  $x = x_0 + \Delta x$ ,  $y = y_0 + \Delta y$ ; тогда

$$f(x; y) - f(x_0; y_0) = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0) = \Delta f(x_0; y_0).$$

- 1) Если  $\Delta f(x_0; y_0) < 0$  при всех достаточно малых приращениях независимых переменных, то функция  $f(x; y)$  достигает максимума в точке  $M(x_0; y_0)$ .
- 2) Если  $\Delta f(x_0; y_0) > 0$  при всех достаточно малых приращениях независимых переменных, то функция  $f(x; y)$  достигает минимума в точке  $M(x_0; y_0)$ .

Эти формулировки переносятся без изменения на функцию любого числа переменных.

ТЕОРЕМА 41.1. (необходимые условия экстремума). Если функция  $z = f(x; y)$  достигает экстремума при  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ , то каждая частная производная первого порядка от  $z$  или обращается в нуль при этих значениях аргументов, или не существует.

Действительно, дадим переменному  $y$  определённое значение, именно  $y = y_0$ . Тогда функция  $f(x; y_0)$  будет функцией одного переменного  $x$ . Так как при  $x = x_0$  она имеет экстремум (максимум или минимум),

то, следовательно,  $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$  или равна нулю, или не существует. Совершенно аналогично можно доказать, что  $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$  или равна нулю (см. рис. 33), или не существует (рис. 34).

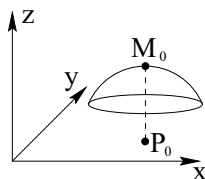


Рис. 33. Точка максимума

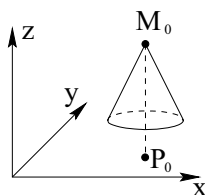


Рис. 34. Точка максимума

Эта теорема не является достаточной для исследования вопроса об экстремальных значениях функции, но позволяет находить эти значения в тех случаях, в которых мы заранее уверены в существовании максимума или минимума. В противном случае требуется дополнительное исследование.

Так например функция  $z = x^2 - y^2$  имеет производные  $\frac{\partial z}{\partial x} = +2x$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$ , которые обращаются в нуль при  $x = 0$  и  $y = 0$ . Но эта функция при указанных значениях не имеет ни максимума, ни минимума. Действительно, эта функция равна нулю в начале координат и принимает в как угодно близких от начала координат точках как положительные, так и отрицательные значения. Следовательно, значение нуль не является ни максимумом, ни минимумом (рис. 35).

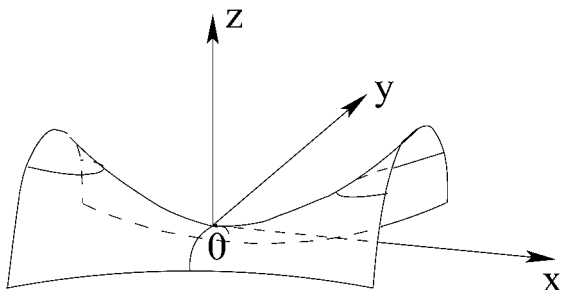


Рис. 35. Седловая точка

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 41.4.** Точки области определения, в которых  $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ , или не существует и  $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ , или не существует, называются критическими точками функции  $z = f(x; y)$ .

Если функция достигает экстремума в какой-либо точке, то в силу теоремы (41.1) это может случиться только в критической точке.

Для исследования дифференцируемой функции в критических точках установим достаточные условия экстремума функции двух переменных.

**ТЕОРЕМА 41.2.** Пусть в некоторой области, содержащей точку  $M_0(x_0; y_0)$ , функция  $f(x; y)$  имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно; пусть, кроме того, точка  $M_0(x_0; y_0)$  является критической точкой функции  $f(x; y)$ , т.е.

$$\frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y} = 0.$$

Тогда при  $x = x_0, y = y_0$ :

1)  $f(x; y)$  имеет максимум, если

$$\frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x^2} < 0;$$

(или  $f''_{yy}(x_0; y_0) < 0$ );

2)  $f(x; y)$  имеет минимум, если

$$\frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x^2} > 0;$$

(или  $f''_{yy}(x_0; y_0) > 0$ );

3)  $f(x; y)$  не имеет ни максимума, ни минимума, если

$$\frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 < 0;$$

4) если  $\frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0$ , то экстремум может быть и может не быть (в этом случае требуется дальнейшее исследование).

Теорема приводится без доказательства.

ЗАМЕЧАНИЕ 41.2. В случае, когда функция имеет локальный экстремум в точке  $(x_0; y_0)$ , знаки  $f''_{xx}(x_0; y_0)$  и  $f''_{yy}(x_0; y_0)$  совпадают.

Действительно, если  $f''_{xx}(x_0; y_0) \cdot f''_{yy}(x_0; y_0) - (f''_{xy}(x_0; y_0))^2 > 0$  и, например,  $f''_{xx}(x_0; y_0) < 0$ , то  $f''_{yy}(x_0; y_0) < \frac{(f''_{xy}(x_0; y_0))^2}{f''_{xx}(x_0; y_0)} < 0$ .

ПРИМЕР 41.2. Исследовать на максимум и минимум функцию  $z = x^3 + y^3 - 3xy$ .

Р е ш е н и е:

1) Найдем критические точки, пользуясь необходимыми условиями экстремума:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 3x^2 - 3y = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 3y^2 - 3x = 0. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда получаем две критические точки:

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 1 \quad \text{и} \quad x_2 = 0, \quad y_2 = 0.$$



2) Найдем производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

3) Исследуем характер первой критической точки  $M(1; 1)$ :

$$A = \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{\substack{x=1 \\ y=1}} = 6, \quad B = \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)_{\substack{x=1 \\ y=1}} = -3, \quad C = \left( \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_{\substack{x=1 \\ y=1}} = 6,$$

$$AC - B^2 = 36 - 9 = 27 > 0; \quad A > 0 (\text{и } C > 0).$$

Следовательно, в точке  $(1; 1)$  данная функция имеет минимум, именно:

$$z_{\min} = -1.$$

4) Исследуем характер второй критической точки  $M_2(0; 0)$ :

$$A = 0, \quad B = -3, \quad C = 0;$$

$$AC - B^2 = -9 < 0.$$

Следовательно, во второй критической точке функция не имеет ни максимума, ни минимума (минимакс).

#### 41.4. Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой области

В некоторых задачах необходимо найти максимум или минимум функции от нескольких переменных, не являющихся независимыми, но связанными друг с другом некоторыми дополнительными условиями: уравнениями или неравенствами.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 41.5.** *Наибольшее значение функции  $z = f(x; y)$  на множестве  $M$  называется глобальным максимумом этой функции на множестве  $M$ .*

*Аналогично вводится понятие глобального минимума на множестве  $M$  как наименьшего значения. Наибольшее и наименьшее значения называются глобальными экстремумами.*

Пусть функция  $z = f(x; y)$  непрерывна в ограниченной замкнутой области  $G$  и дифференцируема внутри этой области.

В этом случае доказано, что она имеет в этой области наибольшее и наименьшее значение, которые достигаются либо внутри области, либо на её границе. Если наибольшее или наименьшее значение функция принимает во внутренних точках области  $G$ , то эти точки, очевидно, являются точками экстремума функции  $z = f(x; y)$ . Таким образом,

точки, в которых функция имеет наибольшее или наименьшее значения, являются либо точками экстремума функции, либо граничными точками области  $G$ .

Мы приходим к следующему правилу нахождения наибольшего и наименьшего значения функции двух переменных.

Для того, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции  $z = f(x; y)$  в ограниченной области  $G$ , следует найти значение функции в критических точках этой области, а также её наибольшее и наименьшее значения на границе области  $G$ . Наибольшее и наименьшее из всех этих значений являются соответственно наибольшим и наименьшим значением функции  $z = f(x; y)$  в заданной области  $G$ .

В некоторых случаях при нахождении наибольших и наименьших значений функции двух переменных в ограниченной замкнутой области границу этой области удобно разбить на части, каждая из которых задаётся своими уравнениями.

**ПРИМЕР 41.3.** Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $z = x^2 - y^2$  в круге  $x^2 + y^2 \leq 4$ .

**Решение:** Находим первые частные производные  $z'_x = 2x$  и  $z'_y = -2y$ . Решая систему уравнений

$$\left. \begin{array}{l} 2x = 0, \\ -2y = 0, \end{array} \right\}$$

получим одну критическую точку  $P_0(0; 0)$ , в которой значение функции равно нулю.

Найдем теперь наибольшее и наименьшее значение функции на границе, т.е. на окружности  $x^2 + y^2 = 4$ . Для точек этой окружности функцию  $z = x^2 - y^2$  можно представить как функцию одной переменной  $x$ :  $z = x^2 - (4 - x^2)$ , т.е.  $z = 2x^2 - 4$ , причём  $-2 \leq x \leq 2$ . Итак, нахождение наибольшего и наименьшего значений функций двух переменных на окружности  $x^2 + y^2 = 4$  мы свели к нахождению наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной  $z = 2x^2 - 4$  на сегменте  $[-2; 2]$ . Найдем критические точки функции в интервале  $(-2; 2)$  и вычислим значение функции в этих точках и на концах интервала. Имеем  $z' = 4x$ ,  $4x = 0$ , откуда получаем критическую точку  $x = 0$ ;  $z|_{x=0} = -4$ . Далее находим  $z|_{x=-2} = 4$ ,  $z|_{x=2} = 4$ . Таким образом, функция имеет наибольшее значение, равное 4, и наименьшее значение, равное  $-4$ .

Итак, наибольшее значение функции  $z = x^2 - y^2$  в круге  $x^2 + y^2 \leq 4$  принимает в точках  $M_1(-2; 0)$  и  $M_2(2; 0)$  окружности  $x^2 + y^2 = 4$  и наименьшее – в точках  $M_3(0; 2)$  и  $M_4(0; -2)$  той же окружности.

Заметим, что наибольшее и наименьшее значение функции на окружности  $x^2 + y^2 = 4$  можно найти иначе.

Представим уравнение окружности в параметрическом виде:

$$x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Тогда  $z = x^2 - y^2 = 4 \cos^2 t - 4 \sin^2 t = 4 \cos 2t$ . Найдем наибольшее и наименьшее значение этой функции на сегменте  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Для этого продифференцировав функцию  $z = 4 \cos 2t$ , получим  $z' = -8 \sin 2t$ . Составив уравнение  $-8 \sin 2t = 0$ , находим три критические точки  $t_1 = \pi/2$ ,  $t_2 = \pi$ ,  $t_3 = 3\pi/2$ , лежащие внутри указанного сегмента. Вычислив значения функции  $4 \cos 2t$  в этих точках, а также на концах сегмента  $t = 0$  и  $t = 2\pi$ , заметим, что получаются лишь два различных между собой значения функции:  $z_1 = -4$  (наименьшее значение) и  $z_2 = 4$  (наибольшее значение).

#### 41.5. Условный экстремум

**ПРИМЕР 41.4.** Из куска жести площадью  $2a$  требуется сделать закрытую коробку в виде прямоугольного параллелепипеда, имеющего наибольший объём.

**Решение:** Обозначив длину ребер параллелепипеда  $x$ ,  $y$  и  $z$ , сведем задачу к нахождению максимума функции  $V = xyz$  при условии:  $2xy + 2xz + 2yz = 2a$ ,  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $z > 0$ . Решение этой задачи приводится ниже.

Такие задачи называются задачами на условный экстремум.

Сначала рассмотрим задачу нахождения условного экстремума функции двух переменных, связанных одним условием.

Требуется найти максимумы и минимумы функции

$$u = f(x; y) \tag{41.16}$$

при условии, что  $x$  и  $y$  связаны уравнением

$$\varphi(x; y) = 0. \tag{41.17}$$

Геометрически задача сводится к нахождению такой точки  $P(x; y)$  на линии  $L$  плоскости  $Oxy$ , задаваемой уравнением (41.17), в которой значение функции  $f(x; y)$  является наибольшим или наименьшим по

сравнению с другими значениями этой функции на этой линии (см. рис. 36)

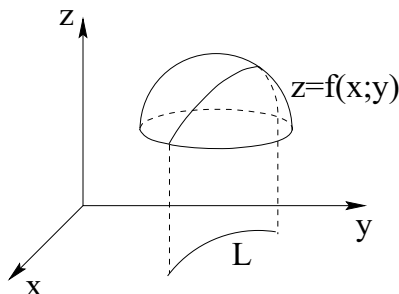


Рис. 36. Условный экстремум

В принципе можно из уравнения (41.17) выразить одну из переменных, например  $y$ , через другую (через  $x$ ) и, подставив в функцию (41.16) это выражение вместо  $y$ , свести задачу к задаче нахождения максимума и минимума функции одного независимого переменного  $x$ . Этот путь, однако, может оказаться сложным, если выражение (41.17) достаточно громоздкое.

Иногда такие задачи решают методом неопределённых множителей Лагранжа.

#### 41.6. Метод множителей Лагранжа

Считая  $y$  функцией от  $x$ , задаваемой неявно уравнением (41.17), а  $u$  — сложной функцией одной переменной  $x$ , заметим, что в точка экстремума производная функции  $u$  по  $x$  найденная как производная сложной функции, должна обращаться в нуль.

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \Rightarrow \\ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} &= 0.\end{aligned}\quad (41.18)$$

Дифференцируя обе части равенства (41.17) по  $x$ , находим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0. \quad (41.19)$$

Это равенство выполняется для всех  $x$  и  $y$ , удовлетворяющих уравнению (41.17).

Умножив обе части равенства (41.19) на неопределённый пока коэффициент  $\lambda$  и сложив их с соответствующими частями равенства (41.18), получаем равенство:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \frac{dy}{dx} = 0, \quad (41.20)$$

выполняющееся в точках экстремума.

Подберем  $\lambda$  так, чтобы в этих точках вторая скобка в (41.20) обрратилась в нуль:

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Тогда при этих значениях  $x$  и  $y$  следует равенство нулю первой скобки в (41.20):

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Таким образом, в точках экстремума выполняются три условия:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x; y) = 0. \end{cases} \quad (41.21)$$

Т.е. система (41.21) является необходимым условием условного экстремума. Заметим, что левые части уравнений (41.20) являются частными производными функции Лагранжа

$$F(x; y; \lambda) = f(x; y) + \lambda \varphi(x; y) \quad (41.22)$$

трёх переменных  $x$ ,  $y$  и  $\lambda$ .

Таким образом, для нахождения условного экстремума функции (41.16) при условии (41.17) методом множителей Лагранжа нужно составить дополнительную функцию (41.22), приравняв к нулю её частные производные по  $x$ ,  $y$  и  $\lambda$ , и из полученной системы (41.21) определить значение  $x$  и  $y$  (вспомогательный множитель  $\lambda$  не нужен). Заметим, что поскольку уравнения (41.21) являются необходимым условием, требуется дополнительное исследование характера критической точки. Иногда при решении конкретных задач удаётся установить характер критической точки из физического смысла задачи.

Рассмотренный метод распространяется на случай любого числа переменных.

Если требуется найти экстремумы функции  $n$  переменных  $u = f(x_1; \dots; x_n)$  при условии:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1; \dots; x_n) = 0, \\ \dots \\ \varphi_m(x_1; \dots; x_n) = 0, \quad \text{где } m < n \end{cases} \quad (41.23)$$

нужно составить функцию Лагранжа:

$$\begin{aligned} F(x_1; \dots; x_n; \lambda_1; \dots; \lambda_m) = \\ = f(x_1; \dots; x_n) + \lambda_1 \varphi_1(x_1; \dots; x_n) + \dots + \lambda_m \varphi_m(x_1; \dots; x_n). \end{aligned}$$

Приравняв к нулю её частные производные по всем  $n + m$  переменным, получим систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} = 0, \\ \varphi_1 = 0, \\ \dots \\ \varphi_m = 0. \end{cases} \quad (41.24)$$

Определив из системы (41.24) значения  $x_1, \dots, x_n$  (вспомогательные множители  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  не нужны), выделим экстремумы из найденных критических точек (с помощью вспомогательных соображений).

**ПРИМЕР 41.5.** Решим пример (41.4) методом множителей Лагранжа.

**Решение:** Составим вспомогательную функцию

$$F(x; y; \lambda) = xyz + \lambda(2xy + 2xz + 2yz - 2a).$$

Найдем её частные производные и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} yz + \lambda(y + z) = 0, \\ xz + \lambda(x + z) = 0, \\ xy + \lambda(x + y) = 0, \\ xy + xz + yz - a = 0. \end{cases}$$

Для решения этой системы умножим первое уравнение на  $x$ , второе на  $y$ , третье на  $z$  и сложим их; с учётом последнего уравнения,

получаем:  $\lambda = -\frac{3xyz}{2a}$ . Подставив это выражение в первые три уравнения, получаем:

$$\begin{cases} yz \left( 1 - \frac{3x}{2a}(y+z) \right) = 0, \\ xz \left( 1 - \frac{3y}{2a}(x+z) \right) = 0, \\ xy \left( 1 - \frac{3z}{2a}(x+y) \right) = 0, \\ xy + xz + yz - a = 0. \end{cases}$$

Т.к.  $x, y, z$  по смыслу задачи отличны от нуля, из первых трёх уравнений имеем:

$$\begin{cases} 1 - \frac{3x}{2a}(y+z) = 0, \\ 1 - \frac{3y}{2a}(x+z) = 0, \\ 1 - \frac{3z}{2a}(x+y) = 0, \\ xy + xz + yz - a = 0. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений находим  $x = y$ , из второго и третьего  $y = z$ , из последнего:

$$x = y = z = \sqrt{\frac{a}{3}}.$$

Из геометрических соображений следует, что полученная критическая точка даёт максимум, т.к. минимум объёма будет при  $x = 0$  или  $y = 0$  или  $z = 0$ .

Ответ: Объём коробки наибольший, когда коробка имеет форму куба с ребром равным  $\sqrt{\frac{a}{3}}$ .

#### 41.7. Понятие о численных методах поиска экстремума

В связи с тем, что аналитические методы зачастую приводят к громоздким вычислениям, в связи с развитием вычислительной техники большое распространение получили численные методы поиска экстремума.

Ряд таких методов, получивших название градиентных, основаны на свойстве градиента указывать направление наибольшего возрастания функции в данной точке.

В соответствии с градиентным методом для нахождения максимума функции  $z = f(x; y)$  тем или иным методом определяется начальное приближение – точка  $P_0(x_0; y_0)$ . Далее вычисляется вектор  $\text{grad } f(P_0)$  и определяется точка наибольшего значения функции в этом направлении – точка  $P_1(x_1; y_1)$ . Вычисляется вектор  $\text{grad } f(P_1)$  указывающий направление следующего шага; вычисляется точка наибольшего значения функции в направлении  $\text{grad } f(P_1)$  – точка  $P_2(x_2; y_2)$  и т.д. до достижения «вершины» – точки локального максимума. На практике процесс прекращают когда абсолютная величина  $|\text{grad } f(P_n)|$  становится достаточно малой.

Иногда градиентные методы называют «методами наискорейшего спуска» – применяя их для нахождения точки минимума.

Кроме градиентных методов широкое распространение получили также численные методы поиска экстремума, основанные на приближении (линейном или более высокого порядка) значения функции в данной точке

## Практическое занятие 41. Экстремум функции нескольких переменных

**ПРИМЕР 41.1.** Найдите экстремумы функции  $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 3y$ .

**Решение:** Найдем частные производные первого порядка и найдем стационарные точки из необходимого условия экстремума, решив систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2x + y - 6; & \frac{\partial z}{\partial y} &= x + 2y - 3 \\ \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 6 = 0, \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Найдем далее частные производные второго порядка и вычислим значение дискриминанта  $\Delta = z''_{xx} \cdot z''_{yy} - (z''_{xy})^2$  в стационарных точках.

$$z''_{xx} = 2; \quad z''_{yy} = 2; \quad z''_{xy} = 1 \Rightarrow \Delta = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0.$$

В соответствии с достаточным условием экстремума найденная стационарная точка  $M(3; 0)$  является точкой экстремума. Поскольку  $z''_{xx} > 0$ , это минимум.

Ответ: Точка  $M(3; 0)$  является точкой минимума.



ПРИМЕР 41.2. Исследуйте на экстремум функцию  $z = y^3 + 3x^2y - 12x - 15y$ .

Р е ш е н и е: Найдем стационарные точки:

$$z'_x = 6xy - 12; \quad z'_y = 3y^2 + 3x^2 - 15$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 6xy - 12 = 0, \\ 3y^2 + 3x^2 - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 9, \\ x^2 - 2xy + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 9, \\ (x-y)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \pm 3, \\ x-y = \pm 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Решая 4 системы, получаем 4 стационарные точки:

$$M_1(1; 2); \quad M_2(2; 1); \quad M_3(-1; -2); \quad M_4(-2; -1).$$

Определим знак дискриминанта  $\Delta = z''_{xx}z''_{yy} - (z''_{xy})^2$  в каждой из этих точек

$$z''_{xx} = 6y; \quad z''_{yy} = 6y; \quad z''_{xy} = 6x \Rightarrow$$

$$\Delta = 6y6y - (6x)^2 = 36(y^2 - x^2)$$

$$\Delta|_{M_1} = 36(4 - 1) > 0; \quad \Delta|_{M_2} = 36(1 - 4) < 0$$

$$\Delta|_{M_3} = 36(4 - 1) > 0; \quad \Delta|_{M_4} = 36(1 - 4) < 0.$$

Следовательно в точках  $M_1$  и  $M_3$  есть экстремум, а в точках  $M_2$  и  $M_4$  его нет.

Определите знак частной производной  $z''_{xx}$  в точках  $M_1$  и  $M_3$ .

$$z''_{xx}|_{M_1} = 6 \cdot 2 > 0; \quad z''_{xx}|_{M_3} = 6 \cdot (-2) < 0.$$

Следовательно в точке  $M_1$  функция имеет минимум, а в точке  $M_3$  — максимум.

ПРИМЕР 41.3. Исследуйте на экстремум функцию  $z = 2x^2 + (y - 1)^2$ .

Р е ш е н и е: Найдем частные производные первого порядка и определим стационарные точки из необходимого условия экстремума, решив систему уравнений:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2(y - 1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 0, \\ 2(y - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 1. \end{cases}$$

Найдем частные производные второго порядка и вычислим значение дискриминанта  $\Delta = z''_{xx}z''_{yy} - (z''_{xy})^2$  в стационарных точках:

$$z''_{xx} = 4, \quad z''_{yy} = 2, \quad z''_{xy} = 0 \Rightarrow \Delta = 4 \cdot 2 - 0 = 8 > 0.$$

На основании достаточного условия экстремума заключаем, что найденная стационарная точка  $M(0; 1)$  является точкой экстремума. Поскольку  $\Delta z''_{xx} > 0$ , это точка минимума.  
 Ответ: Точка  $M(0; 1)$  — точка минимума.

**ПРИМЕР 41.4.** Найдите условные экстремумы функции  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  при условии  $x + y - 1 = 0$ .

**Решение:** Графиком функции  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  является верхняя полусфера (см. рис. 37), линия  $L : x + y - 1 = 0$  есть прямая на плоскости  $Oxy$ .

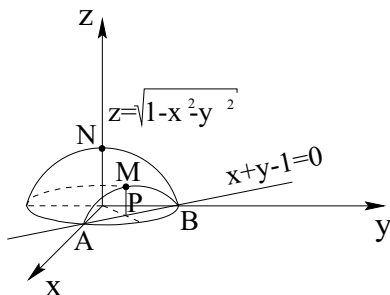


Рис. 37. Решение примера (41.4)

Из геометрических соображений ясно, что для точек этой линии наибольшее значение функции достигается в точке  $P\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ , лежащей посередине между точками  $A(1; 0)$  и  $B(0; 1)$ , а наименьшее значение — в точках  $A$  и  $B$ .

Заметим, что условный максимум — точка  $M$  не совпадает с глобальным максимумом — точкой  $N$ .

Из уравнения связи  $x + y - 1 = 0$  получаем  $y = 1 - x$ . Отсюда  $z = \sqrt{1 - x^2 - (1 - x)^2} \Leftrightarrow z = \sqrt{2x - 2x^2}$ . Область изменения  $x$  найдем из условия  $2x - 2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0; 1]$ .

Находя производную  $z'_x = \frac{2-4x}{2\sqrt{2x-2x^2}}$ , определяем критическую точку  $z'_x = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}$  принадлежащую отрезку, вычисляем значение функции в этой критической точке и на концах отрезка:  $z\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ;  $z(0) = 0$ ;  $z(1) = 0$  и находим как раз те локальные экстремумы, которые были определены из геометрических соображений:

$$x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow y_0 = 1 - x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow z\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow y_0 = 1 - x_0 = 1 \Rightarrow z(0) = 0;$$

$$x_2 = 1 \Rightarrow y_0 = 1 - x_0 = 0 \Rightarrow z(1) = 0.$$

**ПРИМЕР 41.5.** Найдите экстремумы функций  $z = 6 - 3x - 4y$  при условии, что  $x^2 + y^2 = 1$ .

**Решение:** Составим функцию Лагранжа:

$$F(x; y; \lambda) = 6 - 3x - 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Необходимые условия экстремума дают систему:

$$\begin{cases} F'_x = 0, \\ F'_y = 0, \\ F'_\lambda = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 + 2\lambda x = 0, \\ -4 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2\lambda}, \\ y = \frac{2}{\lambda}, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2\lambda}, \\ y = \frac{2}{\lambda}, \\ \left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 - 1 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2\lambda}, \\ y = \frac{2}{\lambda}, \\ \frac{25 - 4\lambda^2}{4\lambda^2} = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2\lambda}, \\ y = \frac{2}{\lambda}, \\ \lambda = \pm \frac{5}{2}. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{5}, \\ y_1 = \frac{4}{5}, \\ \lambda_1 = \frac{5}{2}. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{5}, \\ y_2 = -\frac{4}{5}, \\ \lambda_2 = -\frac{5}{2}. \end{cases}$$

Для определения наличия экстремума и его характера определим знак  $d^2F = F''_{xx}dx^2 + 2F''_{xy}dxdy + F''_{yy}dy^2$  при данных значениях переменных.

$$F''_{xx} = 2\lambda; \quad F''_{yy} = 2\lambda; \quad F''_{xy} = 0 \Rightarrow d^2F = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2.$$

Если  $\lambda_1 = \frac{5}{2}$ ,  $x_1 = \frac{3}{5}$ ,  $y_1 = \frac{4}{5}$ , то  $d^2F = 5(dx^2 + dy^2) > 0$  и следовательно, в этой точке минимум.

Если  $\lambda_2 = -\frac{5}{2}$ ,  $x_2 = -\frac{3}{5}$ ,  $y_2 = -\frac{4}{5}$ , то  $d^2F = -5(dx^2 + dy^2) < 0$  и следовательно, в этой точке максимум.

$$z_{\min} = 6 - 3\left(\frac{3}{5}\right) - 4\left(\frac{4}{5}\right) = 1,$$

$$z_{\max} = 6 - 3\left(-\frac{3}{5}\right) - 4\left(-\frac{4}{5}\right) = 11.$$

Заметим, что геометрически данная задача сводится к нахождению самой «высокой» ( $z_{\max}$ ) и самой «низкой» ( $z_{\min}$ ) точек пересечения плоскости  $z = 6 - 3x - 4y$  с цилиндром  $x^2 + y^2 = 1$ .

Ответ: точка максимума  $M_{\max}\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$ , точка минимума

$$M_{\min}\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right).$$

**ПРИМЕР 41.6.** Найдите наибольшее и наименьшее значение функции  $z = x^2 - xy + y^2 - 4y - x$  в области  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $3x + 2y - 12 \leq 0$ .

**Р е ш е н и е:** Найдём стационарные точки данной функции

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 1 = 0, \\ -x + 2y - 4 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 3. \end{cases}$$

Проверим принадлежность этой точки  $M(2; 3)$  данной области:  $2 > 0$ ;  $3 > 0$ ;  $3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 12 = 0$ .

Найдём значение функции в этой точке  $z|_M = 2^2 - 2 \cdot 3 + 3^2 - 4 \cdot 3 - 2 = -7$ . Исследуем функцию на границах области. При  $x = 0$  имеем  $z_I = y^2 - 4y$  при  $2y - 12 \leq 0$ ,  $y \geq 0$ . Найдём наименьшее и наибольшее значения этой функции одного аргумента на отрезке  $[0; 6]$ .

Найдём критические точки, принадлежащие отрезку  $(z_I)'_y = 2y - 4$ ,  $(z_I)'_y = 0 \Leftrightarrow 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 2$ . Найдём значение функции в этой точке  $z_I|_{y=2} = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4$ . Найдём значение функции на концах отрезка:  $z_I|_{y=0} = 0$ ,  $z_I|_{y=6} = 6^2 - 4 \cdot 6 = 12$ . Заключаем, что наибольшее значение при  $x = 0$  функция достигает при  $y = 6$ :  $(z_{I\text{наиб}}) = 12$ , наименьшее — при  $y = 2$ :  $(z_{I\text{наим}}) = -4$ .

Аналогично найдем наименьшее и наибольшее значения функции при  $y = 0$ . Самостоятельно убедитесь, что наибольшее значение при  $y = 0$  функция достигает при  $x = 4$ :  $(z_{II\text{наиб}}) = 12$ , наименьшее – при  $x = \frac{1}{2}$ :  $(z_{II\text{наиб}}) = -\frac{1}{4}$ .

Для исследования функции на третьей границе:  $3x + 2y - 12 = 0$ , выразим из этого уравнения  $y = 6 - \frac{3x}{2}$  и подставим в правую часть уравнения функции. Получим  $z_{III} = \frac{19x^2}{4} - 19x + 12$ . Из условия

$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ 6 - \frac{3x}{2} \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x \leq 0. \end{cases}$  заключаем, что на третьей границе  $x$  меняется в пределах от 0 до 4. Самостоятельно найдите наименьшее и наибольшее значения функции  $z_{III}$  на  $[0; 4]$ . Убедитесь, что наименьшее значение функция достигает при  $x = 2, y = 3$ :  $z_{III\text{наим}} = -7$ , наибольшее – при  $x = 0, y = 6$ :  $z_{III\text{наиб}} = 12$  (Впрочем, эти значения уже были). Выбирая из всех найденных значений функции самое большое и самое маленькое, окончательно заключаем, что наибольшее значение  $z_{\text{наиб}} = 12$  в данной области функция принимает в точках  $M_1(0; 6)$  и  $M_2(4; 0)$ , а наименьшее  $z_{\text{наим}} = -7$  – в точке  $M_3(2; 3)$ .

Ответ:  $z_{\text{наиб}} = 12$ ,  $z_{\text{наим}} = -7$ .

### Самостоятельная работа

В примерах 41.7–41.9 исследуйте данные функции на экстремум.

ПРИМЕР 41.7.  $z = x^2 + xy + y^2 - x - 2y$ .

ПРИМЕР 41.8.  $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ .

ПРИМЕР 41.9.  $z = y^2 - 2x^2 - 2y + 1$ .

В примерах 41.10–41.11 определите условные экстремумы приведённых функций.

ПРИМЕР 41.10.  $z = 2x + y$  при  $x^2 + y^2 = 5$ .

ПРИМЕР 41.11.  $z = x^2 + y^2$  при  $2x + 3y = 6$ .

В примерах 41.12–41.13 найдите наибольшее и наименьшее значения функции в данной области.

ПРИМЕР 41.12.  $z = xy + x + y$  в области  $1 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 3$ .

ПРИМЕР 41.13.  $z = xy$  в области  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

ПРИМЕР 41.14. Из всех точек кривой, являющейся линией пересечения параболоида  $z = x^2 + y^2$  и плоскости  $z = 2x + y$  найти точку  $M$ , наиболее удалённую от начала координат.

## Лекция 42. Понятия о функциях комплексной переменной

Функция комплексной переменной. Основные элементарные функции. Производная. Условие Коши-Римана. Аналитическая функция. Ряды Тейлора и Лорана. Изолированные особые точки и их классификация.

### 42.1. Функция комплексной переменной

В лекции 33 настоящего курса были введены комплексные числа. Определим теперь понятие функции комплексной переменной.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 42.1.** *Функцией  $w = f(z)$  комплексной переменной  $z$ , заданной на области  $M$  называется правило, которое каждому значению  $z \in M$  ставит в соответствие одно или множество комплексных значений  $w$ . В первом случае функция  $w = f(z)$  называется однозначной, во втором многозначной. Множество  $M$  называется областью определения функции, а совокупность  $N$  всех значений  $w$ , принимаемых функцией её областью изменения или множеством значений.*

Если значение  $z$  откладывать на одной комплексной плоскости, а  $w$  — на другой, то функцию  $w = f(z)$  можно геометрически представить как некоторое отображение множества  $M$  плоскости  $z$  на множество  $N$  плоскости  $w$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 42.2.** *Если функция  $w = f(z)$  однозначна на  $M$  и двум равным значениям  $z$  соответствуют разные значения  $w$ , то такое отображение называется взаимно однозначным или однолистным.*

Ясно, что у такой функции существует обратная  $z = f^{-1}(w)$ , отображающая множество  $N$  плоскости  $w$  на множество  $M$  плоскости  $z$  и являющаяся также взаимно однозначной.

## 42.2. Основные элементарные функции

**Степенная функция** (при  $n \in \mathbf{N}$ )  $w = z^n$ . Эта функция однозначна. Если в плоскостях  $z$  и  $w$  ввести полярные координаты (перейти к тригонометрической форме комплексного числа):  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ,  $w = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ , то уравнение функции запишется в виде системы уравнений двух действительных функций:

$$\begin{cases} \rho = r^n, \\ \theta = n\varphi. \end{cases}$$

Из этой системы видно, что функция  $w = z^n$  осуществляет отображение, заключающееся в повороте вектора  $z$  на угол  $(n-1) \arg z$  и в растяжении его в  $|z|^n$  раз.

Это отображение однолистно в секторах вида  $k\frac{2\pi}{n} < \varphi < (k+1)\frac{2\pi}{n}$ , где  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , каждый из которых переходит в плоскость  $w$  (с исключенной положительной полуосью).

**Функция  $w = \sqrt[n]{z}$**  —  $n$ -значная (см. лекцию 33). Можно показать, что в любой области  $M$ , не содержащей начала координат  $z \neq 0$ , можно выделить  $n$  однозначных функций, каждая из которых принимает одно из значений  $\sqrt[n]{z}$ . Эти  $n$  функций называются ветвями многозначной функции  $w = \sqrt[n]{z}$ .

**Показательная функция  $w = e^z$**

Напомним, что если  $z = x + iy$ , то  $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ . Отсюда при  $x = 0$ ,  $y = \varphi$  получаем формулу Эйлера (33.23)

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Отметим, что показательная функция комплексной переменной оказывается периодической с мнимым периодом  $2\pi i$ . Действительно, по формуле Эйлера  $e^{2\pi ki} = \cos 2\pi k + i \sin 2\pi k$ , ( $k \in \mathbf{Z}$ ) следовательно

$$e^{z+2\pi ki} = e^z \cdot e^{2\pi ki} = e^z \cdot 1 = e^z.$$

Для комплексного числа  $z$  можно определить логарифм  $\ln z$ , как число  $w$ , такое, что  $e^w = z$ . Определённая таким образом логарифмическая функция  $w = \ln z$  определена не только для отрицательных действительных чисел, но и для комплексных  $z \neq 0$ .

Каждое комплексное число  $z$  имеет бесчисленное множество логарифмов, мнимые части которых определяются с точностью до слагаемого, кратного  $2\pi$ :

$$\ln z = \ln r + i(\varphi + 2\pi k), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Для действительных положительных чисел ( $\varphi = 0$ ,  $r \neq 0$ ) значение  $\ln z$  при  $k = 0$  совпадает с известной ранее логарифмической функцией. Поэтому будем обозначать  $\ln z$  значение функции  $\ln z$  при фиксированном  $k$  (одну ветвь функции  $\ln z$ ). Очевидно, что функция  $\ln z$  будет однозначной при  $z \neq 0$ .

С помощью логарифмической функции можно определить общую степенную функцию  $w = z^a$ , где  $a = \alpha + i\beta$ , соотношением  $z^a = e^{a \ln z}$ .

**ПРИМЕР 42.1.** Найдти  $\ln(-1)$ .

**Р е ш е н и е:** Представим  $(-1)$  в тригонометрической форме:  $-1 = 1(\cos \pi + i \sin \pi)$ , т.к. для  $z = -1$ ,  $|z| = r = 1$ ,  $\varphi = \pi$ . В соответствии с определением  $\ln z$ , получаем:

$$\ln(-1) = \ln 1 + i(\pi + 2\pi k) = i(\pi + 2\pi k), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Получили бесконечно много мнимых значений  $\ln(-1)$ .

*Тригонометрические функции  $\sin z$ ,  $\cos z$*

$$\text{Определим } \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Так определённые тригонометрические функции комплексного переменного позволяют обобщить формулу Эйлера на случай комплексного аргумента:  $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ .

Кроме того, эти функции (см. лекцию 33) периодичны с периодом  $2\pi$ ,  $\sin(-z) = -\sin(z)$ ,  $\cos(-z) = \cos(z)$ ,  $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ ,  $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$ ,  $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$  и т.д. Можно показать, что  $\sin z$  и  $\cos z$  в комплексной области неограничены.

**ПРИМЕР 42.2.** Найдти  $\cos i$ .

**Р е ш е н и е:** В соответствии с определением

$$\cos i = \frac{e^{i^2} + e^{-i^2}}{2} = \frac{e^{-1} + e^1}{2} \approx 1,54.$$

Получим значение большее 1.

## 42.3. Производная

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 42.3.** Если функция  $w = f(z)$ , где  $z = x + iy$ ,  $w = u(x; y) + iv(x; y)$ , определена и однозначна в некоторой окрестности точки  $z_0 = x_0 + iy_0$ , то предел  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  определяется через введенные ранее пределы функции двух переменных:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x; y) + i \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x; y).$$



Таким образом основные свойства предела сохраняются для функции комплексного переменного.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 42.4.** Функция  $w = f(z)$  называется непрерывной в точке  $z_0$  или она определена и однозначна в этой точке, некоторой её окрестности и  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ . Функция  $f(z)$  называется непрерывной в области  $D$ , если она непрерывна в каждой её точке.

Для непрерывных функций комплексной переменной остаются справедливыми известные ранее свойства.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 42.5.** Производной  $f'(z)$  функции  $f(z)$  называется предел:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Если этот предел существует, то функция  $f(z)$  называется дифференцируемой в точке  $z$ .

Известные свойства дифференцируемых функций (так же, как и обычные правила дифференцирования) сохраняются для функций комплексного переменного  $z$ , если она задана как  $w = f(z)$ .

**ПРИМЕР 42.3.** Найти производную функции:  $f(z) = z^2 - \sqrt{z} + 3e^z - 5 \ln z + \sin z + \cos z + \operatorname{tg} z$ .

**Решение:**

$$f'(z) = 2z - \frac{1}{2\sqrt{z}} + 3e^z - \frac{5}{z} + \cos z - \sin z + \frac{1}{\cos^2 z}.$$

Если же  $w$  задана своей действительной  $u = u(x; y)$  и мнимой частью  $v = v(x; y)$ , то для дифференцируемости функции  $w = u + iv$  должна быть выполнена теорема.

**ТЕОРЕМА 42.1.** (Условия Коши–Римана). Если функция  $f(z) = u(x; y) + iv(x; y)$  определена в некоторой окрестности точки  $z$  и в этой точке функции  $u(x; y)$  и  $v(x; y)$  дифференцируемы, то для дифференцируемости функции  $f(z)$  в точке  $z$  необходимо и достаточно выполнение условий.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases} \quad (42.1)$$

При этом:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (42.2)$$

Примем эту теорему без доказательства.

**ПРИМЕР 42.4.** Проверить дифференцируемость  $f(z) = \bar{z}$ .

**Решение:** Комплексно сопряженным для числа  $z = x + iy$  называется (см. лекцию 33) число  $\bar{z} = z - iy$ . Поэтому в данном примере

$$u(x; y) = x, \quad v(x; y) = -y \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y},$$

условие Коши–Римана не выполняется  $\Rightarrow$  функция  $f(z) = \bar{z}$  не дифференцируема.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 42.6.** Функция  $f(z)$  однозначная и дифференцируемая в каждой точке области  $D$ , называется аналитической (регулярной, монотонной) в этой области.

Возникает вопрос: всякая ли функция двух переменных может быть действительной (или мнимой) частью аналитической функции и можно ли по данной действительной (или мнимой) части найти мнимую (действительную) часть и, следовательно, всю аналитическую функцию. Дифференцируя первое из условий (42.1) по  $x$ , а второе по

$$y, \text{ получаем: } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

Складывая обе части этих уравнений, получаем уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (42.3)$$

Аналогично для  $v(x; y)$  получаем уравнение:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \quad (42.4)$$

Уравнения (42.3), (42.4) называются уравнениями Лапласа, а функции, удовлетворяющие этим уравнениям, называются гармоническими. Таким образом, действительная и мнимая части аналитической функции должны быть гармоническими функциями.

С методами решения уравнений в частных производных, в том числе — уравнения Лапласа, мы познакомимся в III части настоящего курса.

**ПРИМЕР 42.5.** Могут ли быть функции  $\varphi(x; y) = x^3y^2$  и  $\psi(x; y) = x^3 - 3xy^2$  действительной или мнимой частями аналитической функции.

**Решение:** Для того, чтобы  $\varphi(x; y)$  или  $\psi(x; y)$  были бы действительной или мнимой частями аналитической функции должны быть выполнены условия (42.3) или (42.4). В нашем случае  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 3x^2y^2$ ,  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 6xy^2$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2x^3y$ ,  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 2x^3$  и  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 6xy^2 + 2x^3 \neq 0$ .

Следовательно,  $\varphi(x; y) = x^3y^2$  не является гармонической функцией и не может быть действительной или мнимой частью аналитической функции.

Рассмотрим теперь  $\psi(x; y)$ . Найдем

$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2$ ;  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 6x$ ;  $\frac{\partial \psi}{\partial y} = -6xy$ ;  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -6x$  и  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0$ , таким образом  $\psi(x; y) = x^3 - 3xy^2$  является гармонической функцией и существует аналитическая функция, у которой  $\psi(x; y) = x^3 - 3xy^2$  может быть действительной или мнимой частью.

С методикой определения аналитической функции по её действительной или мнимой частям мы встретимся в лекции 46 (п. 46.6)

#### 42.4. Ряды Тейлора и Лорана

Аналитические функции, а также и некоторые другие функции комплексной переменной удобно представлять в виде суммы степенных рядов.

**ТЕОРЕМА 42.2. (Коши)** Функция  $f(z)$ , аналитическая в открытом круге с центром в точке  $a$ , представима в нем своим рядом Тейлора:

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots \quad (42.5)$$

Известные разложения элементарных функций сохраняются в комплексной области:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \quad (42.6)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \quad (42.7)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \quad (42.8)$$

(перечисленные ряды сходятся для любого  $z$ )

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots \quad (42.9)$$

$$(1+z)^a = 1 + az + \frac{a(a-1)}{2!}z^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}z^3 + \dots \quad (42.10)$$

(последние два ряда сходятся в круге  $|z| < 1$ ).

Возникает вопрос, будет ли сумма произвольного степенного ряда  $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(z-a)^n$  аналитической функцией.

Вейерштрасс<sup>1</sup> и Абель<sup>2</sup> доказали это утверждение (теорема 42.4).

Приведем сначала утверждение, определяющее вид области, в которой степенной ряд сходится.

**ТЕОРЕМА 42.3.** *Областью сходимости степенного ряда*

$\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(z-a)^n$  *является открытый круг с центром в точке  $a$ :*

$z \mid |z-a| < R$ , *где радиус сходимости  $R$  определяется по формуле:*

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right|}. \quad (42.11)$$

Внутри этого круга ряд сходится, вне — расходится, сходимость на границе требует отдельного исследования.

Доказательство этого утверждения не приводится.

**ПРИМЕР 42.6.** *Найти область сходимости степенного ряда*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-i)^n \sqrt{n}}{2^n}.$$

**Р е ш е н и е:** В соответствии с теоремой (42.3) областью сходимости является круг  $|z-i| < R$  с центром в точке  $i$ . Найдем радиус

<sup>1</sup>Карл Вейерштрасс (1815–1897) — немецкий математик

<sup>2</sup>Нильс Абель (1802–1829) — норвежский математик

сходимости по формуле (42.11):

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\sqrt{n+1} \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot \sqrt{n}} \right|} = 2.$$

**ТЕОРЕМА 42.4.** Сумма любого степенного ряда  $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(z-a)^n$  в круге его сходимости является аналитической функцией.

Отсюда следует, что внутри круга сходимости сумма этого ряда есть непрерывная функция и его можно почленно дифференцировать.

Для изучения функций, аналитических в кольцевых областях вида  $r < |z-a| < R$ , где  $0 \leq r \leq +\infty$ ,  $0 \leq R \leq +\infty$ , рассмотрим разложение по положительным и отрицательным степеням  $(z-a)$ :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(z-a)^n, \quad (42.12)$$

являющиеся обобщением тейлоровского разложения.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 42.7.** Правая часть разложения (42.12) называется рядом Лорана<sup>3</sup> для функции  $f(z)$ , его часть

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} C_n(z-a)^n = C_{-1}(z-a)^{-1} + C_{-2}(z-a)^{-2} + \dots \quad (42.13)$$

называется главной частью ряда Лорана, а  $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(z-a)^n = C_0 + C_1(z-a) + C_2(z-a)^2 + \dots$  — правильной частью.

**ТЕОРЕМА 42.5.** Функция  $f(z)$  аналитична в кольце  $r < |z-a| < R$  тогда и только тогда, когда она может быть представлена в нем своим рядом Лорана (42.12).

Лорановское разложение позволяет изучать поведение функций, аналитических везде, за исключением некоторых, так называемых, особых точек.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 42.8.** Точка  $a$  называется изолированной особой точкой функции  $f(z)$ , если существует выколотая окрестность этой точки  $0 < |z-a| < R$ , в которой  $f(z)$  аналитична.

---

<sup>3</sup>Пьер Лоран (1813–1854) французский математик

Различают три типа изолированных особых точек:

*a* называется устранимой особой точкой, если существует конечный предел  $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ ;

*a* называется полюсом, если  $|f(z)|$  неограниченно возрастает при  $z \rightarrow a$  (т.е.  $f(z)$  является бесконечно большой при  $z \rightarrow a$ );

*a* называется существенно особой точкой, если  $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$  не существует.

Тип особой точки функции  $f(z)$  может быть установлен по виду ряда Лорана в окрестности этой точки и наоборот.

**ТЕОРЕМА 42.6.** Для того, чтобы *a* была устранимой особой точкой функции  $f(z)$ , необходимо и достаточно, чтобы её ряд Лорана в окрестности этой точки не содержал главной части, т.е. имел вид:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n(z-a)^n.$$

Для того чтобы *a* была полюсом функции  $f(z)$ , необходимо и достаточно, чтобы её ряд Лорана в окрестности этой точки содержал конечное число членов в главной части, т.е. имел вид:

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{+\infty} C_n(z-a)^n.$$

Для того чтобы *a* была существенно особой точкой функции  $f(z)$ , необходимо и достаточно, чтобы её ряд Лорана в окрестности этой точки содержал бесконечно много членов, т.е. имел вид:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(z-a)^n.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 42.1.** Если *a* — полюс функции  $f(z)$ , то число *k* членов главной части её ряда Лорана называется порядком полюса. Это число называют также порядком нуля функции  $\frac{1}{f(z)}$ , т.к. при  $z = a$  обращается в нуль сама функция  $\frac{1}{f(z)}$  и  $n-1$  её производная.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 42.9.** Функция  $f(z)$  называется целой (голоморфной), если она аналитична при всех *z* (т.е. не имеет конечных особых точек).

Очевидно, что целая функция представляется рядом Тейлора, сходящимся во всей плоскости. Целыми функциями являются многочлены, показательная функция,  $\sin z$ ,  $\cos z$  и др.

**ПРИМЕР 42.7.** Определить тип особой точки  $z = 0$  для функции  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ .

**Решение:** Пользуясь разложением (42.7), представим данную функцию в виде ряда Лорана по степеням  $z$ :

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

В соответствии с теоремой (42.6)  $z = 0$  является устранимой особой точкой этой функции.

**ПРИМЕР 42.8.** Определить тип особой точки  $z = 0$  для функции  $f(z) = \frac{\cos z}{z}$ .

**Решение:** Пользуясь разложением (42.8), представим данную функцию в виде ряда Лорана по степеням  $z$ :

$$\frac{\cos z}{z} = \frac{1}{z} - \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} - \dots$$

В соответствии с теоремой (42.6)  $z = 0$  является полюсом 1-го порядка этой функции. Заметим, что  $z = 0$  является нулем первого порядка для функции  $\frac{1}{f(z)} = \frac{z}{\cos z}$ . Действительно, при  $z = 0$  обращается в нуль сама функция  $\frac{z}{\cos z}$ , а её производная

$$\left( \frac{z}{\cos z} \right)' = \frac{\cos z + z \sin z}{\cos^2 z}$$

уже не равна нулю при  $z = 0$ .

**ПРИМЕР 42.9.** Определить тип особой точки  $z = 0$  для функции  $f(x) = e^{1/z}$ .

**Решение:** По (42.6) имеем:  $e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$

Главная часть разложения содержит бесконечное число членов, следовательно, точка  $z = 0$  для функции  $f(z) = e^{1/z}$  является существенно особой.

## Практическое занятие 42. Контрольная работа по материалам лекций 35–41

### Рассмотрим один из вариантов контрольной работы

ПРИМЕР 42.1. Найдите область определения функции

$$z = \arcsin(4x^2 + y^2).$$

ПРИМЕР 42.2. Определите вид поверхности, заданной уравнением  $4x^2 - 36y - 3z^2 = 0$ .

ПРИМЕР 42.3. Найдите все частные производные второго порядка функции  $z = \frac{x\sqrt{x-x} + \sqrt{y}}{y}$ .

ПРИМЕР 42.4. Найдите  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{dz}{dx}$ , если  $z = x^y$ ,  $y = \operatorname{ctg} x$ .

ПРИМЕР 42.5. Найдите  $y'$  и  $y''$  функции, заданной неявно уравнением  $\ln y + x = \ln x$ .

ПРИМЕР 42.6. Найдите производную функции  $z = \sqrt{x+2y}$  в точке  $M(4; 2)$  в направлении к точке  $N(5; 3)$ , найдите  $\operatorname{grad} z(M)$ .

ПРИМЕР 42.7. Исследуйте на экстремум функцию  $z = x^2 + xy + \frac{y^2}{2} + x - 2y$  и найдите её наименьшее  $m$  и наибольшее  $M$  значения в замкнутой области  $x \leq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $y \leq 10 + x$ . Найдите уравнение касательной плоскости в точке  $M_0(1; 1; 3/2)$  к поверхности, являющейся графиком этой функции.

### Решение примеров варианта контрольной работы

ПРИМЕР 42.1.

Р е ш е н и е:  $|4x^2 + y^2| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 4x^2 + y^2 \leq 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x^2 + y^2 \geq -1, & \text{при любых } x \text{ и } y, \\ 4x^2 + y^2 \leq 1, & \text{внутри эллипса с полуосями } a = \frac{1}{2}; b = 1 \end{cases}$$

(рис. 38).

ПРИМЕР 42.2.

Р е ш е н и е:

$$4x^2 - 36y - 3z^2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{12} \Rightarrow$$

гиперболический параболоид вдоль оси  $Ox$ .



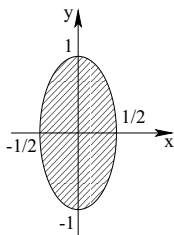


Рис. 38. К примеру 42.1

ПРИМЕР 42.3.

Решение:

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{x\sqrt{x} - x + \sqrt{y}}{y} \Leftrightarrow z = \frac{x^{3/2} - x}{y} + y^{-1/2} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\frac{3}{2}x^{1/2} - 1}{y} = \frac{3\sqrt{x} - 2}{2y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^{3/2} - x}{y^2} - \frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}} \\
 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\frac{3}{4}x^{-1/2}}{y} = \frac{3}{4\sqrt{x}y}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(x^{3/2} - x)}{y^3} + \frac{3}{4}y^{-5/2} \\
 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -\frac{\frac{3}{2}x^{1/2} - 1}{y^2} = \frac{2 - 3\sqrt{x}}{2y^2}.
 \end{aligned}$$

ПРИМЕР 42.4.

Решение:

$$\begin{aligned}
 z &= x^y; \quad y = \operatorname{ctg} x \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{dz}{dx} &= \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} = y \cdot x^{y-1} + x^y \ln x \left( -\frac{1}{\sin^2 x} \right) = \\
 &= \operatorname{ctg} x \cdot x^{\operatorname{ctg} x - 1} - \frac{x^{\operatorname{ctg} x} \cdot \ln \operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}.
 \end{aligned}$$

ПРИМЕР 42.5.

Решение:

$$\ln y + x = \ln x \Leftrightarrow \frac{y'}{y} + 1 = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{y}{x} - y = y \left( \frac{1}{x} - 1 \right)$$

$$\begin{aligned}
 y'' &= \left( y \left( \frac{1}{x} - 1 \right) \right)'_x = y' \left( \frac{1}{x} - 1 \right) - y \frac{1}{x^2} = \\
 &= y \left( \frac{1}{x} - 1 \right)^2 - \frac{y}{x^2} = y \left( 1 - \frac{2}{x} \right).
 \end{aligned}$$

ПРИМЕР 42.6.

Р е ш е н и е:  $z = \sqrt{x+2y}$ ;  $M(4; 2)$ ;  $N(5; 3) \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 \overline{MN} &= (1; 1) \Rightarrow |\overline{MN}| = \sqrt{2} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}; \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial l} \Big|_M = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_M \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_M \cos \beta = \\
 &= \left( \frac{1}{2\sqrt{x+2y}} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{2\sqrt{x+2y}} \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \Big|_{\substack{x=4 \\ y=2}} = \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{8}} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{8}} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{8}, \\
 \text{grad } z(M) &= \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_M \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_M \vec{j} = \frac{1}{2\sqrt{8}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{8}} \vec{j}.
 \end{aligned}$$

ПРИМЕР 42.7.

Р е ш е н и е:  $z = x^2 + xy + \frac{y^2}{2} + x - 2y \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial x} &= 2x + y + 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x + y - 2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 1; \\
 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 1 = 0, \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3, \\ y = 5. \end{cases} \\
 \Delta &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 2 - 1 > 0; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 > 0 \Rightarrow \min \\
 &\quad x_{\min} = -3; \quad y_{\min} = 5; \quad z_{\min} = -6,5.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим заданную область  $x \leq 10 + x$ ,  $x \leq 0$ ,  $y \geq 0$ , включающую треугольник  $ABC$  и ограничивающие его прямые  $x = 0$ ,  $y = 0$

и  $y = x + 10$ . Точка  $M(-3; 5)$ , в которой функция имеет минимум  $z = -6,5$ , находится внутри треугольника  $ABC$  (рис. 39).

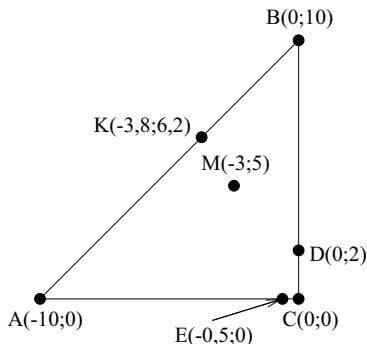


Рис. 39. К примеру 42.7

Исследуем заданную функцию на границе области:

- $x = 0$ :  $z = \frac{y^2}{2} - 2y$  при  $y \in [0; 10]$ ,  $\frac{dz}{dy} = y - 2 = 0 \Rightarrow y_{\text{кр}} = 2$ .

Следовательно  $m$  и  $M$  могут достигаться в точках  $B(0; 10)$ ,  $C(0; 0)$  и  $D(0; 2)$ .

- $y = 0$ :  $z = x^2 + x$  при  $x \in [-10; 0]$ ,  $\frac{dz}{dx} = 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_{\text{кр}} = -\frac{1}{2}$ .  
Таким образом,  $m$  и  $M$  могут достигаться, кроме указанных выше точек, также в точках  $A(-10; 0)$  и  $E(-\frac{1}{2}; 0)$ .

- $y = x + 10$ :  $z = x^2 + x(x + 10) + \frac{(x + 10)^2}{2} + x - 2(x + 10) = \frac{5}{2}x^2 + 19x + 30$ ;  $\frac{dz}{dx} = 5x + 19 = 0 \Rightarrow x_{\text{кр}} = -3, 8$ .  $m$  и  $M$  могут достигаться также в точке  $K(-3, 8; 6, 2)$ .

Из значений  $z(A) = z(-10; 0) = 90$ ,  $z(B) = z(0; 10) = 30$ ,  $z(C) = z(0; 0) = 0$ ,  $z(D) = z(0; 2) = -2$ ,  $z(E) = z(-\frac{1}{2}; 0) = -0, 25$ ,  $z(K) = z(-3, 8; 6, 2) = -6$ ,  $z(M) = z(-3; 5) = -6, 5$ , выбираем наибольшее  $z(A) = z(-10; 0) = M = 90$  и наименьшее  $z(M) = z(-3; 5) = m = -6, 5$ .

Уравнение искомой касательной имеет вид

$$z - z_0 = f'_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(y - y_0),$$

где  $x_0 = y_0 = 1$ ;  $z_0 = 3/2$ ;  $f'_x(x_0; y_0) = 2x_0 + y_0 + 1 = 4$ ;  
 $f'_y(x_0; y_0) = x_0 + y_0 - 2 = 0$  и, следовательно,  $z - 3/2 = 4(x - 1)$  или  $8x - 2z - 5 = 0$ .

## Самостоятельная работа

ПРИМЕР 42.8. Найдите область определения функции  
 $z = \ln(x^2 - y^2 - 4)$ .

ПРИМЕР 42.9. Определите вид поверхности, задаваемой уравнением:  $4x - 2y^2 - z^2 = 0$ .

ПРИМЕР 42.10. Найдите все частные производные второго порядка функции  $z = \arcsin \frac{x}{y}$ .

ПРИМЕР 42.11. Найдите  $\frac{dz}{dx}$ , если  $z = \frac{1}{u - v}$ ,  $u = \sin x$ ,  $v = \sqrt{x}$ .

ПРИМЕР 42.12. Найдите  $\frac{dy}{dx}$  и  $\frac{d^2y}{dx^2}$  функции, заданной неявно уравнением  $2^y = x + \ln x$ .

ПРИМЕР 42.13. Найдите наибольшую скорость изменения функции  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  в точке  $M(3; 4)$ .

ПРИМЕР 42.14. Исследуйте на экстремум функцию  $z = x^2 + y^2 + y - 2x$  и найдите  $m$  и  $M$  в замкнутой области  $0 \leq x \leq 2$ ,  $0 \leq y \leq 3$ . Найдите уравнение нормали в точке  $M_0(1; 0; -1)$  к поверхности, являющейся графиком этой функции.

# ГЛАВА VIII

## Интегральное исчисление функций одной переменной

### Лекция 43. Первообразная и неопределённый интеграл

Первообразная. Неопределённый интеграл, его свойства. Внесение функций под знак дифференциала. Таблица основных интегралов. Основные методы интегрирования – замены переменной, разложения, по частям.

#### 43.1. Первообразная функции

В предыдущем семестре мы изучали дифференциальное исчисление, основная задача которого заключается в нахождении производной заданной функции.

Рассмотрим теперь обратную задачу: для данной функции  $f(x)$  на  $[a; b]$  найти такую функцию  $F(x)$ , производная которой равнялась бы данной функции  $f(x)$ , т.е.

$$F'(x) = f(x). \quad (43.1)$$

Допустима и следующая формулировка этой задачи: для данной функции  $f(x)$  найти такую функцию  $F(x)$ , дифференциал которой равнялся бы  $f(x)dx$ , т.е.

$$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx. \quad (43.2)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 43.1.** *Функция  $F(x)$ , производная которой на  $[a; b]$  равна  $f(x)$ , называется первообразной функции  $f(x)$  на  $[a; b]$ .*

Очевидно, что  $F(x)$  является непрерывной на  $[a; b]$ .

Так, например, первообразной функции  $f(x) = \cos 2x$  является функция  $F(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$ , так как

$$\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)' = \cos 2x \quad \text{или} \quad d\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right) = \cos 2x dx.$$

Отыскание по данной функции её первообразной составляет основную задачу интегрального исчисления. При этом возникает вопрос:

для всякой ли функции существует первообразная? Отвечает на него следующая теорема, принимаемая без доказательства.

**ТЕОРЕМА 43.1.** *Любая непрерывная на отрезке функция имеет на этом отрезке первообразную.*

Поэтому в дальнейшем (если это специально не оговорено) функции, для которых ищутся первообразные, мы будем рассматривать на тех промежутках, где они непрерывны.

Теперь возникает следующий естественный вопрос: если первообразная существует, то одна или несколько? На этот вопрос отвечает следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 43.2.** *Если функция  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  имеет первообразную  $F(x)$ , то на этом отрезке она имеет бесчисленное множество первообразных вида  $F(x) + C$ , где  $C$  – произвольная константа.*

Доказательство. Очевидно, что если  $F(x)$  – первообразная для  $f(x)$ , то  $F(x) + C$  – тоже ( $F'(x) = f(x) \Rightarrow (F(x) + C)' = f(x)$ ). Допустим, что на отрезке  $[a; b]$  функция  $f(x)$  имеет различные первообразные  $F(x)$  и  $\Phi(x)$ . Тогда из равенства (43.1) следует:

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= f(x), \\ F'(x) &= f(x).\end{aligned}$$

Вычитая из одного равенства другое и учитывая, что разность производных двух функций равна производной разности этих функций, получим:

$$(\Phi(x) - F(x))' = 0. \quad (43.3)$$

С помощью теоремы Лагранжа легко можно доказать, что если на некотором числовом промежутке производная функции равна нулю, то функция на этом числовом промежутке постоянна. Поэтому из формулы (43.3) следует, что

$$\begin{aligned}\Phi(x) - F(x) &= C \text{ или} \\ \Phi(x) &= F(x) + C.\end{aligned} \quad (43.4)$$

В формуле (43.4)  $C$  – произвольное число. Ясно, что выражение  $F(x) + C$  охватывает совокупность всех первообразных данной функции. Следовательно, все первообразные функции  $\cos 2x$  имеют вид  $\frac{1}{2} \sin 2x + C$ , а все первообразные функции  $x^2$  имеют вид  $\frac{x^3}{3} + C$ . Отметим, что значение константы  $C$  на каждом интервале непрерывности первообразной может быть различным. Например, первообразные

функции  $\frac{1}{x}$  имеют вид  $\ln x + C_1$  при  $x > 0$  и  $\ln(-x) + C_2$  при  $x < 0$ , причём постоянные  $C_1$  и  $C_2$  никак не связаны друг с другом. Если объединить эти выражения для первообразных функции  $\frac{1}{x}$  в одно выражение в виде  $\ln|x| + C$ , то следует учесть, что значения постоянной  $C$  при  $x > 0$  и  $x < 0$  не зависят одно от другого.

### 43.2. Неопределённый интеграл

Введем теперь одно важное понятие.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 43.2.** Если функция  $F(x)$ , непрерывная на некотором числовом промежутке, является одной из первообразных функции  $f(x)$ , то выражение  $F(x) + C$ , где  $C$  – постоянная, называется неопределённым интегралом; иными словами, неопределённым интегралом называется однопараметрическое семейство всех первообразных данной функции.

Неопределённый интеграл обозначается  $\int f(x) dx$ . Таким образом,

$$\int f(x) dx = F(x) + C. \quad (43.5)$$

Здесь

$$\begin{array}{ll} \int & \text{— знак неопределённого интеграла,} \\ f(x) & \text{— подынтегральная функция,} \\ f(x) dx & \text{— подынтегральное выражение.} \end{array}$$

Рассмотренные ранее примеры, мы можем записать так:

$$\begin{aligned} \int \cos 2x dx &= \frac{1}{2} \sin 2x + C, \\ \int x^2 dx &= \frac{x^3}{3} + C. \end{aligned}$$

Действие отыскания неопределённого интеграла (или, что то же самое, бесчисленного множества первообразных) называется интегрированием. Заметим, что вместо слов «найти интеграл» иногда используется выражение «взять интеграл».

Необходимо отметить, что из факта существования первообразной не следует, что у элементарной функции  $f(x)$  первообразная  $F(x)$  также является элементарной функцией.

Существующая в силу теоремы 43.1 первообразная не всегда может быть выражена с помощью конечного числа алгебраических действий и суперпозиций, проведённых над элементарными функциями. К таким интегралам относятся, например,

$$\int \frac{\sin x}{x} dx \text{ — интегральный синус,}$$
$$\int e^{-x^2} dx \text{ — интеграл вероятностей.}$$

Интегралы такого типа называются на математическом жаргоне «неберущимися», а соответствующие первообразные находятся приближённо с помощью различных приемов.

Для сравнения вспомним, что у элементарной функции производная (в отличие от первообразной) всегда является элементарной функцией.

### 43.3. Свойства неопределённого интеграла

1. Постоянный множитель  $k$  можно вынести за знак интеграла:

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx, \quad k \neq 0. \quad (43.6)$$

2. Неопределённый интеграл от алгебраической суммы двух функций равен сумме неопределённых интегралов от этих функций:

$$\int (f(x) \pm \phi(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int \phi(x) dx. \quad (43.7)$$

Справедливость формул (43.6) и (43.7) может быть доказана их дифференцированием. Свойство 2 легко обобщается на случай любого (большого двух) конечного числа слагаемых.

3. Производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left( \int f(x) dx \right)' = f(x). \quad (43.8)$$

4. Дифференциал неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d \left( \int f(x) dx \right) = f(x) dx. \quad (43.9)$$

Справедливость последних двух свойств вытекает из определения неопределённого интеграла.



5. Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс  $C$ :

$$\int dF(x) = F(x) + C. \quad (43.10)$$

Это свойство доказывается подстановкой  $f(x) dx = dF(x)$  в левую часть (43.5) (см. формулу (43.2)).

**ЗАМЕЧАНИЕ 43.1.** Обратите внимание на формулы (43.9) и (43.10): знаки  $d$  и  $\int$ , следуя друг за другом, как бы уничтожаются друг друга. Но ведь дифференцирование и интегрирование – два взаимно обратных действия.

Из (43.10) следует, что если, например,  $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$ , то

$$\begin{aligned} \int \sin x \cos x dx &= \int \sin x d(\sin x) = \frac{\sin^2 x}{2} + C, \\ \int (e^x - \operatorname{tg} x) \left( e^x - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx &= \\ \int (e^x - \operatorname{tg} x) d(e^x - \operatorname{tg} x) &= \frac{(e^x - \operatorname{tg} x)^2}{2} + C, \\ \int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int \arcsin x d(\arcsin x) = \frac{\arcsin^2 x}{2} + C, \text{ и} \\ \int \frac{\ln x}{x} dx &= \int \ln x d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C. \end{aligned}$$

Это вытекает из известного свойства инвариантности формы первого дифференциала функции:

*Формула*

$$dy = y' dx$$

сохраняет свой вид как для случая, когда  $x$  является независимой переменной, так и для случая, когда  $x$  зависит ещё от какой-то другой переменной.

При нахождении первого, второго, третьего и четвёртого вышеуказанных интегралов мы воспользовались тем, что

$$\begin{aligned} \cos x dx &= d(\sin x), \\ \left( e^x - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx &= d(e^x - \operatorname{tg} x), \end{aligned}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d \arcsin x,$$

$$\frac{dx}{x} = d \ln x.$$

Такое преобразование подынтегрального выражения называется подведением (внесением) функций под знак дифференциала. Это преобразование – самый универсальный прием практического интегрирования. Можно даже утверждать (с небольшой долей преувеличения), что интеграл не найти, если ничего нельзя внести под знак дифференциала. С операцией внесения функции под знак дифференциала студенты уже были ознакомлены в первой части пособия. Напомним, что далеко не каждую функцию можно внести под знак дифференциала. В частности, приведенные выше выражения  $\frac{\sin x}{x} dx$  и  $e^{-x^2} dx$  не являются дифференциалами элементарных функций, или условно говоря, функции  $\frac{\sin x}{x}$  и  $e^{-x^2}$  не «вносятся» под знак дифференциала.

#### 43.4. Таблица основных интегралов

Как и всякая обратная задача, отыскание первообразной (неопределённого интеграла) сложнее, чем производной (дифференциала).

Если для отыскания производной существует чёткий алгоритм, то для отыскания первообразных элементарных функций такого алгоритма не существует. Так, например, не существует правил нахождения интеграла от произведения двух функций, даже если известны интегралы от сомножителей.

Методы интегрирования функций сводятся к указанию ряда приемов, выполнение которых приводит к цели в некоторых частных случаях.

Для облегчения интегрирования составляется таблица так называемых основных интегралов:

$$1. \int x^n dx = \int d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1),$$

в частности, при  $n = 0$   $\int dx = x + C,$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \int d(\ln |x|) = \ln |x| + C,$$

$$3. \int \sin x dx = \int d(-\cos x) = -\cos x + C,$$

$$4. \int \cos x \, dx = \int d(\sin x) = \sin x + C,$$

$$5. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int d(\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg} x + C,$$

$$6. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int d(-\operatorname{ctg} x) = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$7. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int d\left(\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C,$$

$$8. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int d\left(\arcsin \frac{x}{a}\right) = \arcsin \frac{x}{a} + C,$$

$$9. \int a^x \, dx = \int d\left(\frac{a^x}{\ln a}\right) = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad \int e^x \, dx = e^x + C,$$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C,$$

$$11. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$$

Первые девять формул этой таблицы являются следствием таблицы производных (или дифференциалов). Формулы 10 и 11 будут рассмотрены в следующих пунктах этой лекции. Иногда в таблицу включают и некоторые другие часто встречающиеся интегралы. Мы ограничимся наименьшим числом основных интегралов, которые включаются во все учебные пособия по интегральному исчислению

**ЗАМЕЧАНИЕ 43.2.** Все формулы интегрирования сохраняют вид, если в обе части формулы вместо  $x$  подставить любую дифференцируемую функцию  $x$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 43.3.** Если подынтегральная функция разрывна, что имеет место в формулах № 1 (при  $n < 0$ ), 2, 5, 6, 10 и 11, то значение постоянной  $C$  на каждом интервале непрерывности первообразной может быть различным.

Процесс интегрирования (нахождения интеграла или первообразной) сводится к выполнению тождественных преобразований до тех пор, пока нельзя будет применить одну или несколько формул из таблицы интегралов.

Рассмотрим теперь некоторые приемы, позволяющие сводить заданные интегралы к табличным.

### 43.5. Интегрирование методом замены переменной

Имеет место формула

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt, \quad (43.11)$$

в справедливости которой можно убедиться, найдя дифференциалы обеих её частей:

$$d \int f(x)dx = f(x)dx,$$

$$d \int f(\phi(t))\phi'(t)dt = f(\phi(t))d(\phi(t)) = |x = \phi(t)| = f(x)dx.$$

Допустим, что интеграл в правой части формулы (43.11) найден. Тогда разрешим выражение  $x = \phi(t)$  относительно  $t$ :  $t = \psi(x)$  и подставим его в  $\Phi(t)$ :

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt = \Phi(t) + C = \Phi(\psi(x)) + C.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 43.4.** Для запоминания формулы (43.11) заметим, что правая её часть получается, если в интеграле  $\int f(x)dx$  заменить  $x$  на  $\phi(t)$  и  $dx$  на  $\phi'(t)dt$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 43.5.** При нахождении интегралов чаще всего делается замена  $\varphi(x) = t$ .

**ПРИМЕР 43.1.** Найти интеграл  $I = \int x^2 e^{x^3} dx$ .

**Решение:** При нахождении такого типа интегралов надо обращать внимание на функции  $x^3$  и  $x^2$ . Степень аргумента  $x$  во второй на единицу меньше, как и у производной степенной функции. Поэтому, если воспользоваться подстановкой  $x^3 = t$ , то после дифференцирования последнего равенства получим  $3x^2 dx = dt$ . Следовательно, множитель  $x^2$  «войдет» в  $dt$ .

Оформим нахождение интеграла с помощью подстановки следующим образом:

$$I = |x^3 = t \Rightarrow 3x^2 dx = dt| = \frac{1}{3} \int e^t dt = \frac{1}{3} e^t + C = \frac{1}{3} e^{x^3} + C.$$

**ПРИМЕР 43.2.** Найти интеграл  $I = \int \sin kx dx$ .

Р е ш е н и е: Обозначим  $kx = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{k}$ . Поэтому:

$$I = \frac{1}{k} \int \sin t dt = -\frac{1}{k} \cos t + C = -\frac{1}{k} \cos kx + C.$$

ПРИМЕР 43.3. Найти интеграл  $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$ .

Применим подстановку

$$\begin{aligned} t &= x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow dt &= \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right) = \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2} + x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} &= \frac{dt}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Поэтому:

$$I = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$$

Мы получили формулу № 10 из нашей таблицы интегралов.

### 43.6. Интегрирование методом разложения

Этот метод основан на разложении подынтегральной функции на сумму нескольких функций и применении свойств 1 и 2 неопределённого интеграла.

ПРИМЕР 43.4. Найти  $I = \int (x - 3)^2 dx$ .

Р е ш е н и е:

$$\begin{aligned} I &= \int (x^2 - 6x + 9) dx = \int x^2 dx - 6 \int x dx + 9 \int dx = \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + C_1\right) - \left(6\frac{x^2}{2} + C_2\right) + (9x + C_3) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x + C. \end{aligned}$$

Ясно, что сумма трёх произвольных постоянных  $C_1 - C_2 + C_3$  произвольная постоянная, которую можно обозначить просто  $C$ . Поэтому при нахождении интеграла от суммы нескольких слагаемых следует писать только одно произвольное слагаемое.

ПРИМЕР 43.5. Найти  $I = \int \frac{x^2 - 3}{\sqrt{x}} dx$ .

Р е ш е н и е:

$$I = \int (x^{\frac{3}{2}} - 3x^{-\frac{1}{2}}) dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - 3 \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} - 6\sqrt{x} + C.$$

ПРИМЕР 43.6. Найти  $I = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ .

Р е ш е н и е:

$$I = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

Этот интеграл можно найти ещё и так:

$$I = 4 \int \frac{dx}{\sin^2 2x} = 2 \int \frac{d(2x)}{\sin^2 2x} = -2 \operatorname{ctg} 2x + C.$$

ПРИМЕР 43.7. Найти интеграл:  $I = \int \operatorname{tg}^5 x dx$ .

Р е ш е н и е:

$$\begin{aligned} I &= \int \operatorname{tg}^3 x \operatorname{tg}^2 x dx = \int \operatorname{tg}^3 x \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \operatorname{tg}^3 x \frac{dx}{\cos^2 x} - \\ &- \int \operatorname{tg}^3 x dx = \int \operatorname{tg}^3 x d \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg}^3 x dx = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int \operatorname{tg}^3 x dx. \end{aligned}$$

В исходном интеграле степень  $n = 5$ , в последнем  $n = 3$ . Применяем тот же прием.

$$\begin{aligned} I &= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int \operatorname{tg} x \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \\ &= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int \operatorname{tg} x d \operatorname{tg} x + \int \operatorname{tg} x dx = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln |\cos x| + C. \end{aligned}$$

Интегралы, в которых подынтегральная функция есть произведение синусов и косинусов разных аргументов, также могут быть разложены на слагаемые с помощью тригонометрических формул:

$$\begin{aligned} \sin nx \cos mx &= \frac{1}{2} (\sin(n-m)x + \sin(n+m)x), \\ \sin nx \sin mx &= \frac{1}{2} (\cos(n-m)x - \cos(n+m)x), \\ \cos nx \cos mx &= \frac{1}{2} (\cos(n-m)x + \cos(n+m)x). \end{aligned} \tag{43.12}$$

ПРИМЕР 43.8. Найти интеграл:  $I = \int \sin 2x \cos 3x dx$ .

Р е ш е н и е:

$$I = \int \frac{1}{2}(-\sin x + \sin 5x)dx = \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{10} \cos 5x + C.$$

ПРИМЕР 43.9. Найти интеграл:  $I = \int \frac{dx}{x^2 - a^2}$ .

Р е ш е н и е: Можно показать, что

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left( \frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a} \right).$$

Для доказательства достаточно в правой части привести к общему знаменателю. Поэтому:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2a} \left( \int \frac{d(x-a)}{x-a} - \int \frac{d(x+a)}{x+a} \right) = \\ &= \frac{1}{2a} (\ln |x-a| - \ln |x+a|) = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C. \end{aligned}$$

Это – табличный интеграл № 11.

### 43.7. Интегрирование по частям

Очевидно:  $d(uv) = u dv + v du$ ; проинтегрировав обе части этого равенства, получим:

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (43.13)$$

Формула (43.13) называется формулой интегрирования по частям. Она применяется, когда:

1) подынтегральная функция есть произведение степенной на показательную или тригонометрическую функции

$$\int P_n(x) e^{\alpha x} dx \text{ или } \int P_n(x) \sin \alpha x dx \text{ или } \int P_n(x) \cos \alpha x dx.$$

В этих случаях подынтегральное выражение разбивается на множители и преобразуется так:

$$\int P_n(x) e^{\alpha x} dx \Rightarrow$$

$$u = P_n(x), \quad du = P'_n(x) dx, \quad dv = e^{\alpha x} dx = d\left(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right), \quad v = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}.$$

$$\int P_n(x) \sin \alpha x dx \Rightarrow$$

$$u = P_n(x), \quad du = P'_n(x) dx, \quad dv = \sin \alpha x dx = d\left(-\frac{\cos \alpha x}{\alpha}\right), \quad v = -\frac{\cos \alpha x}{\alpha}.$$

$$\int P_n(x) \cos \alpha x dx \Rightarrow$$

$$u = P_n(x), \quad du = P'_n(x) dx, \quad dv = \cos \alpha x dx = d\left(\frac{\sin \alpha x}{\alpha}\right), \quad v = \frac{\sin \alpha x}{\alpha}.$$

II) подынтегральная функция есть произведение степенной на логарифмическую или обратную тригонометрическую функции

$$\int P_n(x) \ln x dx \text{ или } \int P_n(x) \arcsin \alpha x dx \text{ или } \int P_n(x) \operatorname{arctg} \alpha x dx.$$

В этих случаях подынтегральное выражение разбивается на множители и преобразуется так:

$$\int P_n(x) \ln x dx \Rightarrow$$

$$u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x}, \quad dv = P_n(x) dx, \quad v = \int P_n(x) dx,$$

$$\int P_n(x) \arcsin \alpha x dx \Rightarrow$$

$$u = \arcsin \alpha x, \quad du = \frac{\alpha dx}{\sqrt{1 - (\alpha x)^2}}, \quad dv = P_n(x) dx, \quad v = \int P_n(x) dx,$$

$$\int P_n(x) \operatorname{arctg} \alpha x dx \Rightarrow$$

$$u = \operatorname{arctg} \alpha x, \quad du = \frac{\alpha dx}{1 + (\alpha x)^2}, \quad dv = P_n(x) dx, \quad v = \int P_n(x) dx.$$

III) в некоторых других случаях;

ПРИМЕР 43.10. Найти интеграл  $I = \int x^2 \ln x dx$ .



Р е ш е н и е:

$$\begin{aligned} I &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^2 dx = d\frac{x^3}{3} & v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right| = \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 43.11. Найти интеграл  $I = \int x \arctg x dx$ .

Р е ш е н и е:

$$\begin{aligned} I &= \left| \begin{array}{ll} u = \arctg x & du = \frac{dx}{x^2+1} \\ dv = x dx = d\frac{x^2}{2} & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{x^2+1} = \\ &= \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \frac{x^2}{2} \arctg x - \\ &- \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \arctg x + C. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 43.12. Найти интеграл  $I = \int x^2 \sin x dx$ .

Формулу интегрирования по частям применим дважды.

Р е ш е н и е:

$$\begin{aligned} I &= \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & du = 2x dx \\ dv = \sin x dx = d(-\cos x) & v = -\cos x \end{array} \right| = -x^2 \cos x + \\ &+ 2 \int x \cos x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx = d(\sin x) & v = \sin x \end{array} \right| = \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 43.13. Найти интеграл  $I = \int x e^{3x} dx$ .

Р е ш е н и е:

$$\begin{aligned} I &= \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = e^{3x} dx & v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{array} \right| = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx = \\ &= \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + C. \end{aligned}$$

И, наконец, рассмотрим примеры на вышеупомянутый пункт III. В следующих двух упражнениях применение формулы интегрирования по частям дважды приводит к уравнению относительно искомого интеграла, из которого последний и находится.

ПРИМЕР 43.14.  $I = \int e^{ax} \cos nx dx$ .

Р е ш е н и е:

$$\begin{aligned}
 I &= \left| \begin{array}{ll} u = e^{ax} & du = ae^{ax} dx \\ dv = \cos nx dx & v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right| = \\
 &= \frac{1}{n} e^{ax} \sin nx - \frac{a}{n} \int e^{ax} \sin nx dx = \\
 &= \left| \begin{array}{ll} u = e^{ax} & du = ae^{ax} dx \\ dv = \sin nx dx & v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right| = \frac{1}{n} e^{ax} \sin nx - \\
 &- \frac{a}{n} \left( -\frac{1}{n} e^{ax} \cos nx + \frac{a}{n} \int e^{ax} \cos nx dx \right) = \\
 &= \frac{1}{n} e^{ax} \sin nx + \frac{a}{n^2} e^{ax} \cos nx - \frac{a^2}{n^2} I.
 \end{aligned}$$

Получили уравнение, содержащее искомый интеграл  $I$ . Решая это уравнение, находим:

$$I = \int e^{ax} \cos nx dx = \frac{e^{ax}(a \cos nx + n \sin nx)}{a^2 + n^2} + C.$$

Величина  $C$  прибавляется потому, что равенство содержит интегралы с точностью до произвольной константы.

ПРИМЕР 43.15. Найти интеграл  $I = \int \sqrt{x^2 - a^2} dx$ .

Р е ш е н и е:

$$\begin{aligned}
 I &= \left| \begin{array}{ll} u = \sqrt{x^2 - a^2} & du = \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right| = x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \\
 &= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2 - a^2 + a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \sqrt{x^2 - a^2} dx - \\
 &- a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = x^2 \sqrt{x^2 - a^2} - I - a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C_1.
 \end{aligned}$$

Итак, мы получили равенство:

$$I = x^2 \sqrt{x^2 - a^2} - I - a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C_1,$$

откуда

$$I = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C.$$

## Практическое занятие 43. Первообразная и неопределённый интеграл

Вспомните определение 43.1 первообразной. Исходя из него с помощью обращения формул дифференцирования найдем первообразные функций и проверим результат дифференцированием.

ПРИМЕР 43.1.  $f(x) = \frac{1}{\cos^2 2x}$ .

Р е ш е н и е:  $F(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x + C$ .

Проверка:  $f(x) = F'(x) = \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{1}{\cos^2 2x} = \frac{1}{\cos^2 2x}$ .

ПРИМЕР 43.2.  $f(x) = x^4$ .

Р е ш е н и е:  $F(x) = \frac{x^5}{5} + C$ .

Проверка:  $f(x) = F'(x) = \left(\frac{x^5}{5} + C\right)' = \frac{1}{5} \cdot 5x^4 + 0 = x^4$ .

ПРИМЕР 43.3.  $f(x) = \frac{2}{x}$ .

Р е ш е н и е:  $F(x) = 2 \ln | -x | + C$ .

Проверка:  $f(x) = F'(x) = (2 \ln | -x | + C)' = 2\left(-\frac{1}{x}\right)(-1) + 0 = \frac{2}{x}$ .

Вспомним теперь определение 43.2 неопределённого интеграла, таблицу основных интегралов.

При нахождении неопределённых интегралов на этом занятии мы будем пользоваться только одним, но универсальным приемом – внесением функций под знак дифференциала.

Ради краткости слово «неопределённый» часто будем опускать.

Найти интегралы с использованием формулы № 1 таблицы интегралов:

ПРИМЕР 43.4.  $I = \int \sin^3 x \cos x \, dx$ .

Р е ш е н и е:

Учитывая, что  $d(\sin x) = \cos x \, dx$ , найдем

$$I = \int \sin^3 x \, d(\sin x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

ПРИМЕР 43.5.  $I = \int \frac{\sqrt{\arctg x}}{1+x^2} dx.$

Р е ш е н и е: Учитывая, что  $d(\arctg x) = \frac{dx}{1+x^2}$ , найдем

$$I = \int (\arctg x)^{1/2} d \arctg x = \frac{(\arctg x)^{1/2+1}}{1/2+1} = \frac{2}{3}(\arctg x)^{3/2} + C.$$

Найти интегралы с использованием формулы № 2 таблицы интегралов:

ПРИМЕР 43.6.  $I_1 = \int \tg x \, dx, \quad I_2 = \int \ctg x \, dx.$

Р е ш е н и е:

$$I_1 = \int \frac{\sin x \, dx}{\cos x} = - \int \frac{d \cos x}{\cos x} = - \ln |\cos x| + C.$$

$$I_2 = \int \frac{\cos x \, dx}{\sin x} = \int \frac{d \sin x}{\sin x} = \ln |\sin x| + C.$$

ПРИМЕР 43.7.  $I = \int \frac{dx}{x \ln x}.$

Р е ш е н и е:

$$I = \int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{dx/x}{\ln x} = \int \frac{d \ln |x|}{\ln x} = \ln |\ln |x|| + C.$$

Найти интегралы с использованием формул № 3 и № 4 таблицы интегралов:

ПРИМЕР 43.8.  $I = \int \sin 5x \, dx.$

Р е ш е н и е: Число 5 нельзя вынести за знак синуса, но зато число 5 можно внести под знак дифференциала, умножив одновременно интеграл на  $\frac{1}{5}$ :

$$I = \frac{1}{5} \int \sin 5x \, d5x = -\frac{1}{5} \cos 5x + C.$$

ПРИМЕР 43.9.  $I = \int e^x \cos e^x \, dx.$

Р е ш е н и е: Так как  $d(e^x) = e^x \, dx$ , то:

$$I = \int \cos e^x \, de^x = \sin e^x + C.$$

Найдите следующие интегралы с использованием других формул таблицы интегралов с помощью приема, неоднократно использованного выше – внесение функций под знак дифференциала

ПРИМЕР 43.10.  $I = \int \frac{dx}{x^2 \cos^2 \frac{1}{x}}.$

Р е ш е н и е:

$$I = - \int \frac{d\frac{1}{x}}{\cos^2 \frac{1}{x}} = \operatorname{tg} \frac{1}{x} + C.$$

ПРИМЕР 43.11.  $I = \int \frac{dx}{\sin^2(3x-5)}.$

Р е ш е н и е:

$$I = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x-5)}{\sin^2(3x-5)} = -\frac{1}{3} \operatorname{ctg}(3x-5) + C.$$

ПРИМЕР 43.12.  $I = \int \frac{x^3 dx}{5-x^8}.$

Р е ш е н и е:

$$I = \frac{1}{4} \int \frac{dx^4}{(\sqrt{5})^2 - (x^4)^2} = \frac{1}{8\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5} + x^4}{\sqrt{5} - x^4} \right| + C.$$

ПРИМЕР 43.13.  $I = \int x 3^{x^2} dx.$

Р е ш е н и е:

$$I = \frac{1}{2} \int 3^{x^2} dx^2 = \frac{3^{x^2}}{2 \ln 3} + C.$$

Решим теперь несколько примеров с использованием метода разложения, который заключается в представлении подынтегральной функции в виде суммы нескольких слагаемых и использовании свойств интеграла:

$$\begin{aligned} \int (f(x) \pm \varphi(x)) dx &= \int f(x) dx \pm \int \varphi(x) dx, \\ \int k f(x) dx &= k \int f(x) dx. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 43.14.  $I = \int \frac{x^4 - 10x^2 + 5}{x^2} dx.$

Р е ш е н и е:

$$\begin{aligned} I &= \int \left( x^2 - 10 + \frac{5}{x^2} \right) dx = \int x^2 dx - 10 \int dx + 5 \int x^{-2} dx = \\ &= \frac{x^3}{3} - 10x - \frac{5}{x} + C. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 43.15.  $I = \int \left( \sqrt{2x} + \sqrt{\frac{2}{x}} \right) dx.$

Р е ш е н и е:

$$I = \sqrt{2} \int x^{\frac{1}{2}} dx + \sqrt{2} \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \sqrt{2} \left( \frac{2}{3} x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \right) + C.$$

ПРИМЕР 43.16.  $I = \int \cos 2x \cos 5x dx.$

Р е ш е н и е:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int (\cos 7x + \cos 3x) dx = \frac{1}{14} \int \cos 7x d(7x) + \\ &+ \frac{1}{6} \int \cos 3x d(3x) = \frac{1}{14} \sin 7x + \frac{1}{6} \sin 3x + C. \end{aligned}$$

Но этого достаточно только для нахождения простейших интегралов.

Сейчас мы рассмотрим более сложные методы.

Найти интегралы с помощью замены переменной.

ПРИМЕР 43.17.  $I = \int 9x^2 \sqrt[3]{x^3 + 10} dx.$

Р е ш е н и е:  $I = \left| \begin{array}{l} x^3 + 10 = t \\ 3x^2 dx = dt \end{array} \right| = 3 \int t^{\frac{1}{3}} dt = 3 \frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C =$   
 $= \frac{9}{4} t^{\frac{4}{3}} + C = \frac{9}{4} (x^3 + 10)^{\frac{4}{3}} \sqrt{x^3 + 10} + C.$

ПРИМЕР 43.18.  $I = \int \frac{4x dx}{\sqrt[5]{8 - x^2}}.$

Р е ш е н и е:  $I = \left| \begin{array}{l} 8 - x^2 = t \\ -2x dx = dt \end{array} \right| = -2 \int t^{-\frac{1}{5}} dt = -2 \frac{t^{-\frac{1}{5}+1}}{-\frac{1}{5}+1} + C =$   
 $= -\frac{5}{2} t^{\frac{4}{5}} + C = -\frac{5}{2} (8 - x^2)^{\frac{4}{5}} + C.$

ПРИМЕР 43.19.  $I = \int \frac{2 \cos x \, dx}{4 + \sin x}.$

Р е ш е н и е:  $I = \left| \frac{4 + \sin x = t}{\cos x \, dx = dt} \right| = 2 \int \frac{dt}{t} = 2 \ln |t| + C =$   
 $= 2 \ln(4 + \sin x) + C.$

ЗАМЕЧАНИЕ 43.1. Поскольку  $4 + \sin x > 0$ , знак абсолютной величины опущен.

ПРИМЕР 43.20.  $I = \int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1 - x^2}} \, dx.$

Р е ш е н и е:  $I = \left| \frac{\arcsin x = t}{\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt} \right| = \int \sqrt{t} \, dt = \frac{2}{3} t \sqrt{t} + C =$   
 $= \frac{2}{3} \arcsin x \sqrt{\arcsin x} + C.$

Этот интеграл можно найти и с помощью подведения функции  $\sqrt{1-x^2}$  под знак дифференциала:

$$I = \int \sqrt{\arcsin x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \sqrt{\arcsin x} \, d(\arcsin x) =$$

$$= \frac{2}{3} \arcsin x \sqrt{\arcsin x} + C.$$

Найти интегралы с помощью подведения функций под знак дифференциала.

ПРИМЕР 43.21.  $I = \int e^x (e^x + 2)^2 \, dx.$

Р е ш е н и е:  $I = \int (e^x + 2)^2 \, d(e^x + 2) = \frac{(e^x + 2)^3}{3} + C.$

ПРИМЕР 43.22.  $I = \int \frac{e^x + \sin x}{e^x - \cos x} \, dx.$

Р е ш е н и е:  $I = \int \frac{d(e^x - \cos x)}{e^x - \cos x} = \ln |e^x - \cos x| + C.$

ПРИМЕР 43.23.  $I = \int \frac{x+5}{\sqrt{x^2+3}} \, dx.$

Р е ш е н и е:  $I = \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2+3}} + 5 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+3)}{\sqrt{x^2+3}} +$   
 $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+3)}} = \sqrt{x^2+3} + \ln |x + \sqrt{x^2+3}| + C.$

ПРИМЕР 43.24.  $I = \int \frac{x^4 dx}{1 + x^{10}}.$

Р е ш е н и е:  $I = \frac{1}{5} \int \frac{dx^5}{1 + (x^5)^2} = \frac{1}{5} \operatorname{arctg} x^5 + C.$

Найти интегралы с помощью интегрирования по частям.

ПРИМЕР 43.25.  $I = \int x e^{ax} dx.$

Р е ш е н и е:  $I = \left| \begin{array}{l} u = x \\ dv = e^{ax} dx \end{array} \right| \begin{array}{l} du = dx \\ v = \frac{1}{a} e^{ax} \end{array} \Bigg| = \frac{x e^{ax}}{a} - \frac{1}{a} \int e^{ax} dx =$   
 $= \frac{x e^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2} + C.$

ПРИМЕР 43.26.  $I = \int x^n \ln x dx \ (n \neq -1).$

Р е ш е н и е:  $I = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = x^n dx \end{array} \right| \begin{array}{l} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{array} \Bigg| = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x + \int x^{n-1} dx =$   
 $= \frac{x^{n+1}}{n+1} \left( \ln x - \frac{1}{n+1} \right) + C.$

Если же показатель степени  $n = -1$ , то интеграл находится так:

$$I = \int \ln x \frac{dx}{x} = \int \ln x d(\ln x) = \frac{1}{2} \ln^2 x + C.$$

ПРИМЕР 43.27.  $I = \int e^{ax} \sin nx dx.$

Р е ш е н и е:

$$\begin{aligned} I &= \left| \begin{array}{l} u = e^{ax}, \\ dv = \sin nx dx, \end{array} \right| \begin{array}{l} du = a e^{ax} dx \\ v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \Bigg| = -\frac{1}{n} e^{ax} \cos nx + \\ &+ \frac{a}{n} \int e^{ax} \cos nx dx = \left| \begin{array}{l} u = e^{ax} \\ dv = \cos nx dx \end{array} \right| \begin{array}{l} du = a e^{ax} dx \\ v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \Bigg| = \\ &= -\frac{1}{n} e^{ax} \cos nx + \frac{a}{n} \left( \frac{1}{n} e^{ax} \sin nx - \frac{a}{n} \int e^{ax} \sin nx dx \right) = \\ &= -\frac{1}{n} e^{ax} \cos nx + \frac{a}{n^2} - \frac{a^2}{n^2} I. \Rightarrow \\ &\Rightarrow I = \int e^{ax} \sin nx dx = \frac{e^{ax} (a \sin nx - n \cos nx)}{a^2 + n^2} + C. \end{aligned}$$

Напомним, что в лекции мы нашли таким же способом похожий интеграл  $\int e^{ax} \cos nx dx.$



### Самостоятельная работа

Найдите первообразные функций и проверьте результат дифференцированием.

ПРИМЕР 43.28.  $f(x) = 6x^2$ .

ПРИМЕР 43.29.  $f(x) = \operatorname{tg} 5x$ .

Найдите неопределённые интегралы.

ПРИМЕР 43.30.  $I = \int \frac{x dx}{\sqrt{2 - x^4}}$ .

ПРИМЕР 43.31.  $I = \int \frac{\sin^2 x dx}{\cos 2x}$ .

ПРИМЕР 43.32.  $I = \int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$ .

ПРИМЕР 43.33.  $I = \int (1 - 7x)^5 x dx$ .

ПРИМЕР 43.34.  $I = \int e^{\operatorname{tg} x} \frac{dx}{\cos^2 x}$ .

ПРИМЕР 43.35.  $I = \int \sqrt{\frac{\arcsin^3 x}{1 - x^2}} dx$ .

ПРИМЕР 43.36.  $I = \int e^{x^2+2x}(x+1) dx$ .

ПРИМЕР 43.37.  $I = \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 6}}$ .

ПРИМЕР 43.38.  $I = \int e^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ .

ПРИМЕР 43.39.  $I = \int \sqrt[5]{9 - e^x} e^x dx$ .

ПРИМЕР 43.40.  $I = \int (\sqrt{x} - 1)^2 dx$ .

ПРИМЕР 43.41.  $I = \int \frac{(x-1)^3}{x} dx$ .

ПРИМЕР 43.42.  $I = \int (\sin 5x \cos x) dx$ .

Найти интегралы с помощью замены переменной.

ПРИМЕР 43.43.  $I = \int x \sqrt{2x^2 + 7} dx$ .

ПРИМЕР 43.44.  $I = \int \frac{(2x + 5) dx}{x^2 + 5x - 13}.$

ПРИМЕР 43.45.  $I = \int \frac{\sin 3x dx}{\sqrt{5 + \cos 3x}}.$

ПРИМЕР 43.46.  $I = \int \sqrt[3]{\operatorname{tg} 2x} \frac{dx}{\cos^2 2x}.$

Найти интегралы с помощью подведения функций под знак дифференциала.

ПРИМЕР 43.47.  $I = \int \frac{2 + \ln x}{x}.$

ПРИМЕР 43.48.  $I = \int \frac{\sin 2x dx}{7 + \cos^2 x}.$

ПРИМЕР 43.49.  $I = \int \frac{x + x^3}{x^4 + 5} dx.$

Найти интегралы с помощью интегрирования по частям.

ПРИМЕР 43.50.  $I = \int x \sin 2x dx.$

ПРИМЕР 43.51.  $I = \int \operatorname{arctg} x dx.$

ПРИМЕР 43.52.  $I = \int e^{2t} \cos 3t dt.$

## Лекция 44. Интегрирование рациональных дробей

Интегрирование простейших элементарных дробей. Примеры интегрирования рациональных функций.

### 44.1. Интегрирование простейших рациональных дробей

В лекции 34 мы ввели понятие так называемых *простейших* дробей следующих четырёх типов.

I.  $\frac{A}{x - a},$

II.  $\frac{A}{(x - a)^n} \ (n = 2, 3, \dots),$

III.  $\frac{Mx + N}{x^2 + px + q} \ (D = p^2 - 4q < 0),$

IV.  $\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} \ (D = p^2 - 4q < 0, n = 2, 3, \dots).$

Рассмотрим, как находятся интегралы от этих дробей.

Интегралы от простейших дробей первого и второго типов являются табличными интегралами, входящими туда под номерами 1 и 2.

$$I. \int \frac{A dx}{x-a} = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln |x-a| + C.$$

$$II. \int \frac{A dx}{(x-a)^n} = A \int (x-a)^{-n} d(x-a) = A \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C = \\ = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C.$$

Интеграл от дроби третьего типа относится к интегралам, содержащим квадратный трёхчлен  $ax^2 + bx + c$ , при нахождении которых используется подстановка

$$\frac{1}{2}(ax^2 + bx + c)' = ax + \frac{b}{2} = t. \quad (44.1)$$

$$III. \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2}(x^2 + px + q)' = t \\ x + \frac{p}{2} = t \end{array} \right| \begin{array}{l} dx = dt \\ x = t - \frac{p}{2} \end{array} \Bigg| = \\ = \int \frac{M(t - \frac{p}{2}) + N}{(t - \frac{p}{2})^2 + p(t - \frac{p}{2}) + q} dt = \int \frac{Mt + (N - \frac{Mp}{2})}{t^2 + (q - \frac{p^2}{4})} dt.$$

Если ввести обозначение:

$$q - \frac{p^2}{4} = a^2 > 0,$$

то

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx = M \int \frac{tdt}{t^2 + a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \\ = \frac{M}{2} \ln(t^2 + a^2) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C.$$

Заменяя  $t$  и  $a$  их выражениями, получим:

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx = \\ = \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{N - \frac{Mp}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C. \quad (44.2)$$

Для вычисления интеграла от дроби третьего типа можно поступить так:

а) В числителе дроби, стоящей под интегралом, записываем производную знаменателя, т.е.  $2x + p$ . Тожественными преобразованиями из  $2x + p$  получаем заданный числитель  $Mx + N$ . Для этого  $2x + p$  умножаем на  $N/2$  и к полученному произведению прибавляем  $N - Mp/2$ . Очевидно, что

$$(2x + p)\frac{M}{2} + N - \frac{Mp}{2} = Mx + N.$$

б) Преобразованная дробь

$$\frac{Mx + N}{x^2 + px + q}$$

принимает вид

$$\frac{(2x + p)\frac{M}{2} + N - \frac{Mp}{2}}{x^2 + px + q}$$

и представляется как сумма двух дробей:

$$\frac{M}{2} \frac{2x + p}{x^2 + px + q} + \frac{N - \frac{Mp}{2}}{x^2 + px + q}.$$

Числитель первой дроби равен производной знаменателя, поэтому интеграл от неё равен натуральному логарифму модуля знаменателя.

Для интегрирования второй дроби в знаменателе выделяем полный квадрат:

$$x^2 + px + 1 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}.$$

Интеграл от второй дроби приводится к табличному № 11, если  $4q - p^2 < 0$ , и к табличному № 7, если  $4q - p^2 > 0$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 44.1.** Если в знаменателе дроби вместо трёхчлена  $x^2 + px + q$  находится трёхчлен  $ax^2 + bx + c$ , то для сведения этого случая к предыдущему необходимо коэффициент  $a$  вынести за скобку.

**ПРИМЕР 44.1.** Найти интеграл:  $I = \int \frac{x + 1}{x^2 + 4x + 8} dx$ .

**Р е ш е н и е:** Половину производной квадратного трёхчлена обозначим через  $t$ , т.е.  $t = x + 2$ , тогда  $x = t - 2$  и  $dx = dt$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+1}{x^2+4x+8} dx = \int \frac{t-2+1}{(t-2)^2+4(t-2)+8} dt = \int \frac{t-1}{t^2+4} dt = \\ &= \int \frac{tdt}{t^2+4} - \int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2} \ln(t^2+4) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+4x+8) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{2} + C. \end{aligned}$$

Этот же интеграл найдем другим способом.

Производная знаменателя равна  $2x + 4$ . Умножаем и делим дробь на 2. Константу в числителе, равную 2, записываем, как  $4 - 2$ :

$$\frac{x+1}{x^2+4x+8} = \frac{1}{2} \frac{2x+4-2}{x^2+4x+8}.$$

Почленным делением числителя на знаменатель разбиваем дробь на две дроби и в знаменателе второй дроби выделяем полный квадрат:

$$\frac{1}{2} \frac{2x+4-2}{x^2+4x+8} = \frac{1}{2} \frac{2x+4}{x^2+4x+8} - \frac{1}{(x+2)^2+4}.$$

Тогда интеграл равен:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+4x+8)}{x^2+4x+8} - \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+2^2} = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+4x+8) - \frac{1}{2} \ln \operatorname{arctg} \frac{x+2}{2} + C. \end{aligned}$$

IV. Применив к интегралу от простейшей дроби IV типа ту же подстановку, что и к интегралу от дроби III типа, получим:

$$\begin{aligned} &\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} dx = \\ &= M \int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}. \end{aligned} \quad (44.3)$$

Первый интеграл в (44.3) легко вычисляется:

$$\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2} \int (t^2+a^2)^{-n} d(t^2+a^2) = \frac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}} + C.$$

Для вычисления второго интеграла  $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$  запишем его в виде:

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2} \int \frac{(t^2+a^2) - t^2}{(t^2+a^2)^n} dt = \\ &= \frac{1}{a^2} \left( \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}} - \int \frac{t^2 dt}{(t^2+a^2)^n} \right). \end{aligned}$$

Замечая, что  $\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}} = I_{n-1}$ , получим:

$$I_n = \frac{1}{a^2} \left( I_{n-1} - \int \frac{t^2 dt}{(t^2+a^2)^n} \right). \quad (44.4)$$

К интегралу  $\int \frac{t^2 dt}{(t^2+a^2)^n}$  применим интегрирование по частям, полагая:

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{ll} u = t & du = dt \\ dv = \frac{t dt}{(t^2+a^2)^n} & v = \frac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}} \end{array} \right| \\ \int \frac{t^2 dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{t}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)} I_{n-1}. \end{aligned}$$

Подставляя данный интеграл в формулу (44.4), после приведения подобных членов, получим:

$$I_n = \frac{1}{a^2} \left( \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} + \frac{t}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} \right). \quad (44.5)$$

Это – рекуррентная формула или – формула приведения. Она позволяет свести интеграл от дроби IV типа с показателем степени  $n$  к интегралу от дроби IV типа с показателем степени  $n-1$ .

Формулу (44.5) надо применять  $n-1$  раз, пока показатель степени в знаменателе не станет равным единице.

**ПРИМЕР 44.2.** Найти интеграл:  $I_3 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^3}$ .

**Р е ш е н и е:** Здесь  $a = 1, n = 3$ . Применяя формулу (44.5), получим:

$$I_3 = \frac{1}{1^2} \left( \frac{2 \cdot 3 - 3}{2 \cdot 3 - 2} I_2 + \frac{t}{2(3-1)(t^2+1)^2} \right) = \frac{3}{4} I_2 + \frac{t}{4(t^2+1)^2}.$$

По той же формуле:

$$I_2 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{2 \cdot 2 - 3}{2 \cdot 2 - 2} I_1 + \frac{t}{2(2-1)(t^2+1)} = \frac{1}{2} I_1 + \frac{t}{2(t^2+1)}.$$

Так как

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \operatorname{arctg} t + C,$$

то

$$I_2 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + \frac{t}{2(t^2 + 1)} + C$$

и

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{3}{4} \left( \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + \frac{t}{2(t^2 + 1)} \right) + \frac{t}{4(t^2 + 1)^2} + C = \\ &= \frac{t}{4(t^2 + 1)^2} + \frac{3t}{8(t^2 + 1)} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} t + C. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь  $\int R(x)dx$ , где  $R(x)$  – рациональная дробь. Как мы видели в лекции 34, любая дробь может быть представлена в виде целой части (многочлена) и суммы простейших дробей. Следовательно,  $\int R(x)dx$  всегда может быть сведен к интегралам от многочлена и суммы от простейших дробей.

**ПРИМЕР 44.3.** Найти интеграл

$$I = \int \frac{2x^2 + 5x - 8}{(x - 1)^3(x + 2)^2} dx.$$

**Решение:** Дробь под интегралом правильная. Представим её в виде:

$$\frac{2x^2 + 5x - 8}{(x - 1)^3(x + 2)^2} = \frac{A}{(x - 1)^3} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x - 1} + D \frac{D}{(x + 2)^2} + \frac{E}{x + 2}.$$

Приведем в правой части к общему знаменателю и приравняем числители:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 5x - 8 &= A(x + 2)^2 + B(x - 1)(x + 2)^2 + C(x - 1)^2(x + 2)^2 + \\ &+ D(x - 1)^3 + E(x - 1)^3(x + 2). \end{aligned}$$

Коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  найдем пользуясь и методом произвольных значений, и методом неопределённых коэффициентов:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow -1 = 9A \Rightarrow A = -\frac{1}{9}, \\ x = -2 \Rightarrow -10 = -27D \Rightarrow D = \frac{10}{27}, \\ x = 2 \Rightarrow 10 = 16A + 16C + D + 4E \Rightarrow 4B + 4C + E = \frac{77}{27}, \\ x^4 \Rightarrow C + E = 0, \\ \text{св. чл.} \Rightarrow -8 = 4A - 4B + 4C - D - 2E \Rightarrow 2B - 2C + E = \frac{97}{27}. \end{array} \right.$$

При нахождении последних трёх уравнений мы использовали найденные ранее значения  $A$  и  $D$ .

Для определения  $B$ ,  $C$ ,  $E$  имеем систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} C + E = 0, \\ 2B - 2C + E = \frac{97}{27}, \\ 4B + 4C + E = \frac{77}{27}, \end{array} \right.$$

решая которую, найдем:

$$B = \frac{29}{27}, \quad C = -\frac{13}{27}, \quad E = \frac{13}{27}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 + 5x - 8}{(x-1)^3(x+2)^2} dx &= \int \left( \frac{-1/9}{(x-1)^3} + \frac{29/27}{(x-1)^2} + \frac{-13/27}{x-1} + \right. \\ &+ \left. \frac{10/27}{(x+2)^2} + \frac{13/27}{x+2} \right) dx = \frac{1}{18} \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{29}{27} \frac{1}{x-1} - \\ &- \frac{13}{27} \ln|x-1| - \frac{10}{27} \frac{1}{x+2} + \frac{13}{27} \ln|x+2| + C = \\ &= -\frac{26x^2 + 5x - 34}{18(x-1)^2(x+2)} + \frac{13}{27} \ln \left| \frac{x+2}{x-1} \right| + C. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 44.4. Найти интеграл

$$I = \int \frac{x^4 + 5x^3 - 6x + 5}{x^3 + 2x^2 - 1} dx.$$

Решение: Неправильную дробь, стоящую под интегралом, представим в виде суммы целой части и правильной дроби:

$$\frac{x^4 + 5x^3 - 6x + 5}{x^3 + 2x^2 - 1} = x + 3 + \frac{-6x^2 - 5x + 8}{x^3 + 2x^2 - 1}.$$



Далее разложим знаменатель  $x^3 + 2x^2 - 1$  на множители. Этот многочлен имеет очевидный корень  $x = -1$ . Поэтому он делится на двучлен  $x + 1$  без остатка. Выполнив это деление, найдем:

$$x^3 + 2x^2 - 1 = (x + 1)(x^2 + x - 1).$$

Квадратный трёхчлен  $x^2 + x - 1$  имеет действительные корни и также может быть разложен на множители. Но не будем это делать, так как корни иррациональные.

Представим правильную дробь в виде суммы дробей:

$$\frac{-6x^2 - 5x + 8}{(x + 1)(x^2 + x - 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x - 1}.$$

Приведем в правой части к общему знаменателю и приравняем числители:

$$\begin{aligned} -6x^2 - 5x + 8 &= A(x^2 + x - 1) + (Bx + C)(x + 1) = \\ &= (A + B)x^2 + (A + B + C)x - A + C. \end{aligned}$$

Коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  найдем пользуясь и методом произвольных значений, и методом неопределённых коэффициентов:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow 7 = -A \Rightarrow A = -7, \\ x^2 \Rightarrow -6 = A + B \Rightarrow B = 1, \\ \text{свободные члены} \Rightarrow 8 = -A + C \Rightarrow C = 1. \end{array} \right.$$

Следовательно,

$$\frac{-6x^2 - 5x + 8}{(x + 1)(x^2 + x - 1)} = \frac{-7}{x + 1} + \frac{x + 1}{x^2 + x - 1}.$$

Проведем теперь над второй дробью в правой части тождественные преобразования:

$$\frac{x + 1}{x^2 + x - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x + 1 + 1}{x^2 + x - 1} = \frac{1}{2} \frac{2x + 1}{x^2 + x - 1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}}.$$

Теперь окончательно получаем:

$$\begin{aligned}
 I &= \int \left( x + 3 - \frac{7}{x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+1}{x^2+x-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}} \right) dx = \\
 &= \int x dx - 3 \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+x-1)}{x^2+x-1} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}} = \\
 &= \frac{x^2}{2} + 3x - 7 \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln|x^2+x-1| + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}}{x+\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} \right| + C.
 \end{aligned}$$

ПРИМЕР 44.5. Вычислить интеграл

$$I = \int \frac{x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 5}{x^3 - x^2 + 5x - 5} dx.$$

Р е ш е н и е: Дробь, стоящая под интегралом, — неправильная. Разделив числитель на знаменатель, найдем:

$$\frac{x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 5}{x^3 - x^2 + 5x - 5} = x + 6 - \frac{6x^2 + 25x - 35}{x^3 - x^2 + 5x - 5}.$$

Разложим знаменатель на множители:

$$x^3 - x^2 + 5x - 5 = x^2(x-1) + 5(x-1) = (x-1)(x^2+5).$$

Разложим правильную дробь на простейшие:

$$\frac{6x^2 + 25x - 35}{x^3 - x^2 + 5x - 5} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+5}.$$

Приведем в правой части к общему знаменателю и приравняем числители:

$$6x^2 + 25x - 35 = A(x^2+5) + (Bx+C)(x-1).$$

Коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  найдем пользуясь и методом произвольных значений, и методом неопределённых коэффициентов:

$$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow -4 = 6A \Rightarrow A = -\frac{2}{3}, \\ x^2 \Rightarrow 6 = A + B \Rightarrow B = 6 - A = 6 + \frac{2}{3} = \frac{20}{3}, \\ \text{св. чл.} \Rightarrow -35 = 5A - C \Rightarrow C = \frac{95}{3}. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\frac{6x^2 + 25x - 35}{x^3 - x^2 + 5x - 5} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{20x/3 + 95/3}{x^2+5}.$$

Окончательно получаем:

$$\begin{aligned} I &= \int \left( x + 6 + \left( -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{20x/3 + 95/3}{x^2 + 5} \right) \right) dx = \\ &= \frac{x^2}{2} + 6x - \frac{2}{3} \ln|x-1| + \frac{20}{3} \int \frac{x dx}{x^2 + 5} + \frac{95}{3} \int \frac{dx}{x^2 + 5} = \\ &= \frac{x^2}{2} + 6x + \frac{1}{3} \ln \frac{(x^2 + 5)^{10}}{(x-1)^2} + \frac{95}{3\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} + C. \end{aligned}$$

## Практическое занятие 44. Интегрирование рациональных дробей

Это практическое занятие вначале мы посвятим интегрированию элементарных дробей, а затем примерам интегрирования рациональных функций, разложение которых на дроби мы получим на практическом занятии.

Проинтегрировать элементарные дроби.

ПРИМЕР 44.1. Найти интеграл от дроби 1 типа  $I = \int \frac{dx}{x-5}$ .

Р е ш е н и е:  $I = \int \frac{d(x-5)}{x-5} = \ln|x-5| + C$ .

ПРИМЕР 44.2. Найти интеграл от дроби 2 типа  $I = \int \frac{dx}{(x+2)^4}$ .

Р е ш е н и е:

$$I = \int (x+2)^{-4} d(x+2) = \frac{(x+2)^{-4+1}}{-4+1} + C = -\frac{1}{3(x+2)^3} + C.$$

ПРИМЕР 44.3. Найти интеграл от дроби 3 типа

$$I = \int \frac{x+3}{x^2+4x+29} dx.$$

Р е ш е н и е:

$$\begin{aligned} I &= \left| \frac{1}{2}(x^2+4x+29)' = x+2 = t, \quad dx = dt \right| = \int \frac{t+1}{t^2+25} dt = \\ &= \int \frac{t dt}{t^2+25} + \int \frac{dt}{t^2+25} = \frac{1}{2} \ln(t^2+25) + \frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{t}{5} + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+4x+29) + \frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{5} + C. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 44.4. Найти интеграл от дроби 4 типа  $I_4 = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^4}$ .

Р е ш е н и е: Последовательно применяем рекуррентную формулу (44.5):

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{1}{a^2} \left( \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}} \right);$$

$$I_4 = \frac{5}{6} I_3 + \frac{x}{6(x^2 + 1)^3};$$

$$I_3 = \frac{3}{4} I_2 + \frac{x}{4(x^2 + 1)^2};$$

$$I_2 = \frac{1}{2} I_1 + \frac{x}{2(x^2 + 1)}.$$

Но ведь  $I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x + C$ .

Далее увеличиваем индекс:

$$I_2 = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2(x^2 + 1)};$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{3}{4} \left( \frac{2}{3} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2(x^2 + 1)} \right) + \frac{1}{4(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{3}{8(x^2 + 1)} + \frac{1}{4(x^2 + 1)^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{5}{4} \left( \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{3}{8(x^2 + 1)} + \frac{1}{4(x^2 + 1)^2} \right) + \frac{1}{6(x^2 + 1)^3} = \\ &= \frac{5}{8} \operatorname{arctg} x + \frac{15}{32(x^2 + 1)} + \frac{5}{16(x^2 + 1)^2} + \frac{1}{6(x^2 + 1)^3} + C. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 44.5. Найти  $I = \int \frac{x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 30x - 22}{x^3 - x^2 - 8x + 12} dx$ .

Р е ш е н и е: Под интегралом стоит неправильная рациональная дробь. Разделив числитель на знаменатель, получим

$$\frac{x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 30x - 22}{x^3 - x^2 - 8x + 12} = x - 2 + \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3 - x^2 - 8x + 12}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I &= \int \left( x - 2 + \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3 - x^2 - 8x + 12} \right) dx = \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x + \int \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3 - x^2 - 8x + 12} dx. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x - 2)^2(x + 3)$ , разложим правильную рациональную дробь на простейшие дроби

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{x^3 - x^2 - 8x + 12} = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x - 2)^2(x + 3)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{(x - 2)^2} + \frac{C}{x + 3}.$$

Приведем к общему знаменателю в правой части тождества и приравняем числители

$$x^2 + 2x + 2 = A(x - 2)(x + 3) + B(x + 3) + C(x - 2)^2.$$

Коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$  найдем пользуясь и методом произвольных значений, и методом неопределённых коэффициентов:

$$\begin{cases} x = 2 \Rightarrow 10 = 5B \Rightarrow B = 2, \\ x = -3 \Rightarrow 5 = 25C \Rightarrow C = \frac{1}{5}, \\ x^2 \Rightarrow 1 = A + C \Rightarrow A = \frac{4}{5}. \end{cases}$$

Поэтому

$$I = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{4}{5} \ln |x - 2| - \frac{2}{x - 2} + \frac{1}{5} \ln |x + 3| + C.$$

ПРИМЕР 44.6. Найдите  $I = \int \frac{x^2 - 5x + 9}{(x - 1)^2(x^2 + 2x + 2)} dx$ .

Решение: Это интеграл от правильной дроби. Раскладываем её на простейшие:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 5x + 9}{(x - 1)^2(x^2 + 2x + 2)} &= \frac{A}{x - 1} + \\ &+ \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 2}. \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 9 &= A(x-1)(x^2 + 2x + 2) + B(x^2 + 2x + 2) + \\ &+ (Cx + D)(x-1)^2, \text{ или } x^2 - 5x + 9 = (A+C)x^3 + \\ &+ (A+B-2C+D)x^2 + (2B+C-2D)x + (-2A+2B+D). \end{aligned}$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в обеих частях равенства:

$$\begin{cases} x^3 & \Rightarrow A+C=0, \\ x^2 & \Rightarrow A+B-2C+D=1, \\ x & \Rightarrow 2B+C-2D=-5, \\ \text{Св.чл. :} & \Rightarrow -2A+2B+D=9. \end{cases}$$

Решив систему, найдем

$$A = -\frac{7}{5}, \quad B = 1, \quad C = \frac{7}{5}, \quad D = \frac{21}{5}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2 - 5x + 9}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)} dx = \\ &= -\frac{7}{5} \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{7}{5} \int \frac{x+3}{x^2 + 2x + 2} dx. \end{aligned}$$

Последний интеграл берется с помощью подстановки

$$\frac{1}{2}(x^2 + 2x + 2)' = t \Rightarrow t = x + 1, \quad x = t - 1; \quad dx = dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{x^2 + 2x + 2} dx &= \int \frac{t+2}{t^2+1} dt = \int \frac{t dt}{t^2+1} + 2 \int \frac{dt}{t^2+1} = \\ &= \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) + 2 \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 2) + \\ &+ 2 \operatorname{arctg}(x+1) + C. \end{aligned}$$

Таким образом:

$$I = -\frac{7}{5} \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{7}{10}(x^2 + 2x + 2) + \frac{14}{5} \operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

ПРИМЕР 44.7.  $I = \int \frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2} dx.$

Р е ш е н и е:

$$\frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Приведа к общему знаменателю и приравняв числители, получим  
 $2x+2 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2+1) + (Dx+E)(x-1)$   
 или

$$2x+2 = (A+B)x^4 + (C-B)x^3 + (2A+D+B+C)x^2 + (E-D+C-B)x + (A-C-E).$$

Приравнивая друг другу соответствующие коэффициенты левой и правой частей, приходим к системе

$$\begin{cases} A+B=0, \\ C-B=0, \\ 2A+D+B+C=0, \\ E-D+C-B=2 \\ A-C-E=2. \end{cases}$$

Её решение:  $A=1$ ,  $B=-1$ ,  $C=-1$ ,  $D=-2$ ,  $E=0$ .

Таким образом:

$$\begin{aligned} I &= \int \left( \frac{1}{x-1} - \frac{2x}{(x^2+1)^2} - \frac{x+1}{x^2+1} \right) dx = \\ &= \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1} = \\ &= \ln|x-1| + \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

## Самостоятельная работа

Проинтегрировать элементарные дроби.

ПРИМЕР 44.8. Найти интеграл от дроби 1 типа  $I = \int \frac{dx}{x+3}$ .

ПРИМЕР 44.9. Найти интеграл от дроби 2 типа  $I = \int \frac{dx}{(x-2)^5}$ .

ПРИМЕР 44.10. Найти интеграл от дроби 3 типа  
 $I = \int \frac{2x+5}{x^2+2x+5} dx.$

ПРИМЕР 44.11. Найти интеграл от дроби 4 типа

$$I = \int \frac{x+1}{x^2+4x+5} dx.$$

Найти интегралы от рациональных дробей.

ПРИМЕР 44.12.  $I = \int \frac{dx}{x^3 - 2x^2 + x}.$

ПРИМЕР 44.13.  $I = \int \frac{x dx}{(x-1)(x+1)^2}.$

ПРИМЕР 44.14.  $I = \int \frac{dx}{(x^3 - 1)^2}.$

ПРИМЕР 44.15.  $I = \int \frac{x dx}{(5x^2 + 2x + 4)^2}.$

## Лекция 45. Интегрирование тригонометрических функций

Универсальная тригонометрическая подстановка. Некоторые частные приемы нахождения интегралов, содержащих тригонометрические функции.

Рассмотрим некоторые приемы, полезные при нахождении интегралов:

$$\int R(\sin x, \cos x) dx, \quad (45.1)$$

где  $R(\sin x, \cos x)$  – рациональная функция.

Например, если  $x^2 y^3$  – рациональная функция относительно  $x$  и  $y$ , то  $\sin^2 x \cos^3 y$  – рациональная функция относительно  $\sin x$  и  $\cos y$ , а  $(\sqrt{2})^2 (\sqrt[5]{5})^3$  – рациональная функция относительно  $\sqrt{2}$  и  $\sqrt[5]{5}$ .

### 45.1. Универсальная тригонометрическая подстановка

Из тригонометрии известно, что все тригонометрические функции аргумента  $x$  рационально выражаются через тангенс половинного аргумента:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Поэтому с помощью формул:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \quad (45.2)$$



интеграл (45.1) сводится к интегралу

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt,$$

где  $R_1(t)$  – рациональная функция  $t$ , а, как показано в предыдущей лекции, такой интеграл, в принципе, берется в элементарных функциях.

ПРИМЕР 45.1. Найти интегралы:  $\int \frac{dx}{\sin x}$  и  $\int \frac{dx}{\cos x}$ .

Решение:  $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C$ ,  
аналогично  $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin(\frac{\pi}{2} + x)} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right)\right| + C$ .

ПРИМЕР 45.2. Найти интеграл  $I = \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 3}$ .

Решение: По формулам (45.2):

$$I = \int \frac{\frac{2}{t^2+1} dt}{\frac{4t}{t^2+1} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 3} = \int \frac{dt}{2t^2 + 2t + 1}.$$

Сделаем ещё одну подстановку:

$$\frac{1}{2}(2t^2 + 2t + 1)' = 2t + 1 = z \Rightarrow t = \frac{z-1}{2}, \quad dt = \frac{dz}{2}.$$

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{2(\frac{z-1}{2})^2 + 2(\frac{z-1}{2}) + 1} = \int \frac{dz}{z^2 + 1} = \operatorname{arctg} z + C.$$

Возвращаясь от  $z$  к  $t$ , а затем от  $t$  к  $x$ , получим:

$$I = \operatorname{arctg}(2t + 1) + C = \operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1\right) + C.$$

Применение универсальной тригонометрической подстановки часто приводит к сложным выкладкам. Поэтому на практике она применяется к интегралам, для которых не существует более простых подстановок, например, к интегралам вида

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}.$$

При нахождении интегралов, содержащих тригонометрические функции в другой форме, применяются другие приемы.

**45.2. Нахождение интегралов вида  $\int \sin^n x \cos^m x dx$** 

45.2.1. Хотя бы один из показателей степени – целое нечётное положительное число  $2k + 1$  ( $k \geq 0$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ), другой показатель – равен любому числу (даже не целому).

Если  $m = 2k + 1$ , делается подстановка  $\sin x = t$ , если  $n = 2k + 1$ , то  $-\cos x = t$ . Если и  $m$ , и  $n$  – нечётные числа, делается любая из указанных подстановок.

Если же при нахождении интегралов пользуются не подстановкой, а подведением под знак дифференциала, то надо руководствоваться правилом: та функция, показатель степени которой  $2k + 1$ , вносится под знак дифференциала.

**ПРИМЕР 45.3.** Найти интеграл  $I = \int \sin^2 x \cos^3 x dx$ .

**Решение:**

а) с помощью подстановки:

$$\begin{aligned} I &= |\sin x = t, \cos x dx = dt| = \int (1 - t^2)t^2 dt = \int (t^2 - t^4) dt = \\ &= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C. \end{aligned}$$

б) с помощью подведения функции под знак дифференциала:

$$\begin{aligned} I &= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) d \sin x = \\ &= \int (\sin^2 x - \sin^4 x) d \sin x = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C. \end{aligned}$$

**ПРИМЕР 45.4.** Найти интеграл  $I = \int \frac{\cos^5 x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx$ .

**Решение:** Внесём  $\cos x$  под знак дифференциала:

$$\cos x dx = d(\sin x),$$

и представим:

$$\cos^4 x = (1 - \sin^2 x)^2.$$

Тогда:

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{1 - 2 \sin^2 x + \sin^4 x}{\sin^{1/3} x} d(\sin x) = \\
 &= \int (\sin x)^{-1/3} d(\sin x) - 2 \int (\sin x)^{5/3} d(\sin x) + \\
 &+ \int (\sin x)^{11/3} d(\sin x) = \frac{3}{2} (\sin x)^{2/3} - \frac{3}{4} (\sin x)^{8/3} + \\
 &+ \frac{3}{14} (\sin x)^{14/3} + C.
 \end{aligned}$$

45.2.2. Оба показателя степени – чётные положительные числа (один из них может равняться 0). В этом случае пользуются тригонометрическими формулами:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}. \quad (45.3)$$

После их применения интегралы сводятся к случаю 45.2.1 или вновь к 45.2.2.

ПРИМЕР 45.5. Найти интеграл  $I = \int \sin^4 x \cos^2 x dx$

Решение:

$$\begin{aligned}
 I &= \int \sin^2 x (\sin x \cos x)^2 dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot \frac{\sin^2 2x}{4} dx = \\
 &= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x dx.
 \end{aligned}$$

Первый интеграл относится к пункту 45.2.2, второй к пункту 45.2.1. Поэтому

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{8} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx - \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \\
 &= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.
 \end{aligned}$$

Оба показателя отрицательные числа одинаковой четности.

В этом случае числитель и знаменатель надо разделить на  $\cos^k x$ ,  $(\sin^k x)$ , где  $k = \frac{|m+n|}{2} \in N$ , и ввести дифференциал тангенса (котангенса). Требование того, чтобы  $m$  и  $n$  были целыми числами и оба отрицательными, не является обязательным.

ПРИМЕР 45.6. Найти интеграл:  $I = \int \frac{dx}{\cos^3 x \sin x}$ .

Решение:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\sin x \cos x} = \int \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{tg} x} d \operatorname{tg} x = \\ &= \int \operatorname{tg} x d \operatorname{tg} x + \int \frac{d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln |\operatorname{tg} x| + C. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 45.7.  $I = \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$ .

Решение: Очевидно, что

$$\begin{aligned} \frac{dx}{\cos^2 x} &= d \operatorname{tg} x, \text{ а остальное выражение равно} \\ \frac{1}{\sin^3 x \cos^3 x} &= \frac{1}{\left( \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} \right)^3} = \left( \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} \right)^3. \end{aligned}$$

Поэтому:

$$\begin{aligned} I &= \int \left( \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} \right)^3 d \operatorname{tg} x = \frac{1}{3} \int \frac{1+3\operatorname{tg}^2 x+3\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{tg}^6 x}{\operatorname{tg}^3 x} d \operatorname{tg} x = \\ &= \frac{1}{3} \int \left( \operatorname{tg}^{-3} x + \frac{3}{3\operatorname{tg} x} + 3\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x \right) d \operatorname{tg} x = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x + 3 \ln |\operatorname{tg} x| + \frac{3}{2} \operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + C. \end{aligned}$$

45.2.3. Укажем ещё случаи, позволяющие избежать применения универсальной тригонометрической подстановки.

Если  $R(\sin x, \cos x)$  меняет знак при замене  $\sin x$  на  $-\sin x$ , полезна подстановка  $\cos x = t$ .

Если  $R(\sin x, \cos x)$  меняет знак при замене  $\cos x$  на  $-\cos x$ , полезна подстановка  $\sin x = t$ .

Если  $R(\sin x, \cos x)$  не меняется при одновременной замене  $\sin x$  на  $-\sin x$ , и  $\cos x$  на  $-\cos x$ , то применяется подстановка  $\operatorname{tg} x = t$ .

ПРИМЕР 45.8. Найти интеграл:  $I = \int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ .

**Решение:** Так как синус и косинус находятся в чётных степенях, то подынтегральная функция не изменится при изменениях знака у этих функций.

Делаем подстановку:

$$\operatorname{tg} x = t \implies x = \operatorname{arctg} t \implies dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Если

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x = t, \text{ то } \sin x &= \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ \sin^2 x &= \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Поэтому:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{a^2}{1+t^2} + \frac{b^2 t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{a^2 + b^2 t^2} = \frac{1}{b} \int \frac{b dt}{a^2 + (bt)^2} = \\ &= \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{bt}{a} + C = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \left( \frac{b}{a} \operatorname{tg} x \right) + C. \end{aligned}$$

**ПРИМЕР 45.9.** Найдти интеграл:  $I = \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^2 x}$ .

**Решение:** При замене  $\sin x$  на  $-\sin x$  подынтегральная функция меняет знак, поэтому применяем подстановку

$$\cos x = t \implies \sin x = \sqrt{1-t^2} \implies x = \arccos t \implies dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Интеграл примет вид:

$$I = - \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{(1-t^2)^3 t^2}} = - \int \frac{dt}{(1-t^2)^2 t^2}.$$

Это – интеграл от рациональной дроби. Раскладывая дробь

$$\frac{1}{(1-t^2)^2 t^2}$$

на простейшие, после тождественных преобразований, окончательно получим

$$I = \frac{1}{\cos x} - \frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{3}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

**45.3. Нахождение интегралов вида  $\int \operatorname{tg}^n x dx$** 

Можно рекомендовать два способа:

а) С использованием формулы:

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \quad (45.4)$$

и понижением показателя степени  $n$  на две единицы.

б) С помощью подстановки:  $\operatorname{tg} x = t$ , откуда  $x = \operatorname{arctg} t$  и  $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ .

**ПРИМЕР 45.10.** Найти интеграл:  $I = \int \operatorname{tg}^4 2x dx$

**Решение:** Обозначим:  $\operatorname{tg} 2x = t$ , тогда  $x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t$  и  $dx = \frac{1}{2} \frac{dt}{1+t^2}$ .  
Поэтому:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int \frac{t^4 dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{2} \int \left( t^2 - 1 + \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt = \\ &= \frac{t^3}{6} - \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C = \frac{\operatorname{tg}^3 2x}{6} - \frac{\operatorname{tg} 2x}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \operatorname{tg} 2x + C = \\ &= \frac{\operatorname{tg}^3 2x}{6} - \frac{\operatorname{tg} 2x}{2} + x + C. \end{aligned}$$

Аналогично находятся интегралы вида  $\int \operatorname{ctg}^n x dx$ .

**45.4. Нахождение интегралов вида  $\int R(\operatorname{tg} x) dx$** 

В этом случае с помощью подстановки  $\operatorname{tg} x = t$  получаем интеграл от рациональной функции аргумента  $t$ .

**ПРИМЕР 45.11.** Вычислить интеграл  $I = \int \frac{\operatorname{tg} x + 3}{\operatorname{tg} x - 1} dx$ .

**Решение:** Введя новую переменную

$$t = \operatorname{tg} x \implies x = \operatorname{arctg} t \implies dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

получаем интеграл от правильной рациональной дроби:

$$I = \int \frac{t+3}{(t-1)(t^2+1)} dt.$$

Разлагаем дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{t+3}{(t-1)(t^2+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+1}.$$

Приводим в правой части тождества к общему знаменателю и приравниваем числители:

$$t + 3 = A(t^2 + 1) + (Bt + C)(t - 1).$$

Подставив в последнее соотношение  $t = 1$ , найдем  $A = 2$ . Приравняв коэффициенты при  $t^2$ , а затем свободные члены, найдем  $B = -2$  и  $C = -1$ .

Следовательно,

$$\begin{aligned} I &= \int \left( \frac{2}{t-1} - \frac{2t+1}{t^2+1} \right) dt = \\ &= 2 \int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} - \int \frac{dt}{t^2+1} = \\ &= 2 \ln |t-1| - \ln(t^2+1) - \operatorname{arctg} t + C. \end{aligned}$$

Сделав обратную подстановку, и учитывая, что

$$\operatorname{tg}^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t} \quad \text{и} \quad \operatorname{arctg} \operatorname{tg} t = t,$$

получим

$$I = 2 \ln |\operatorname{tg} x - 1| + \ln |\cos x| - x + C.$$

## Практическое занятие 45. Интегрирование тригонометрических функций

На этом занятии мы поупражняемся в нахождении интегралов от тригонометрических функций. Некоторые интегралы такого типа мы находили ранее, при знакомстве с методом разложения.

**ПРИМЕР 45.1.** *Найти интеграл  $I = \int \cos 3x \cos 9x \, dx$ .*

**Р е ш е н и е:** Воспользуемся формулой, преобразования произведения косинусов в сумму:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int (\cos(-6x) + \cos 12x) \, dx = \frac{1}{2} \int (\cos 6x + \cos 12x) \, dx = \\ &= \frac{1}{12} \sin 6x + \frac{1}{24} \sin 12x + C. \end{aligned}$$

**ПРИМЕР 45.2.** *Найти интеграл  $I = \int \sin 2x \cos 5x \sin 9x \, dx$ .*

Р е ш е н и е:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int (-\sin 3x + \sin 7x) \sin 9x \, dx = -\frac{1}{2} \int \sin 3x \sin 9x \, dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int \sin 7x \sin 9x \, dx = -\frac{1}{4} \int (\cos 6x - \cos 12x) \, dx + \frac{1}{4} \int (\cos 2x - \\ &- \cos 16x) \, dx = \frac{1}{4} \left( \frac{\sin 12x}{12} - \frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 16x}{16} \right) + C. \end{aligned}$$

Рассмотрим три вида интегралов  $\int \sin^n x \cos^m x \, dx$ .

а) Хотя бы один из показателей – нечётное положительное число, другой – любое число.

ПРИМЕР 45.3. Найти интеграл  $I = \int \sin^2 x \cos^7 x \, dx$ .

Р е ш е н и е:

$$\begin{aligned} I &= \int \sin^2 x \cos^6 x \cos x \, dx = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^3 \, d \sin x = \\ &= \int (\sin^2 x - 3 \sin^4 x + 3 \sin^6 x - \sin^8 x) \, dx = \\ &= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{3 \sin^5 x}{5} + \frac{3 \sin^7 x}{7} - \frac{\sin^9 x}{9} + C. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 45.4. Найти интеграл  $I = \int \frac{\sin^5 x}{\sqrt{\cos x}} \, dx$ .

Р е ш е н и е: Воспользуемся заменой переменной:  $\cos x = t$ ,  $-\sin x \, dx = dt$ . Тогда

$$\begin{aligned} I &= - \int \frac{(1 - t^2)^2}{\sqrt{t}} \, dt = \int (-t^{-1/2} + 2t^{3/2} - t^{7/2}) \, dx = \\ &= -2\sqrt{t} + \frac{4}{5}t^2\sqrt{t} - \frac{2}{9}t^4\sqrt{t} + C = \sqrt{\cos x}(-2 + \frac{4}{5}\cos^2 x - \frac{2}{9}\cos^4 x) + C. \end{aligned}$$

б) Оба показателя чётные положительные числа (один из них, в частности, может равняться нулю).

ПРИМЕР 45.5. Найти интеграл  $I = \int \cos^4 x \, dx$ .



Р е ш е н и е: Так как

$$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2, \text{ то}$$

$$I = \frac{1}{4} \int (1 + \cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx.$$

Опять применив формулу понижения степени:  $\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$ , получим

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} \int \left( 1 + 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \left( \frac{3}{2} + 2 \cos 2x + \frac{1}{2} \cos 4x \right) dx = \frac{1}{4} \left( \frac{3}{2} x + \sin 2x + \frac{1}{8} \sin 8x \right) + C. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 45.6. Найдти интеграл  $I = \int \cos^2 3x \sin^4 3x dx$ .

Р е ш е н и е:

$$\begin{aligned} I &= \int (\cos 3x \sin 3x)^2 \sin^2 3x dx = \int \frac{\sin^2 6x}{4} \frac{1 - \cos 6x}{2} dx = \\ &= \frac{1}{8} \int (\sin^2 6x - \sin^2 6x \cos 6x) dx = \frac{1}{8} \int \left( \frac{1 - \cos 12x}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \sin^2 6x \cos 6x \right) dx = \frac{1}{8} \left( \frac{x}{2} - \frac{\sin 12x}{24} - \frac{\sin^3 6x}{18} \right) + C. \end{aligned}$$

в) Показатели степени – отрицательные числа одинаковой четности ( $m + n = 2k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ).

Требование того, чтобы  $m$  и  $n$  были целыми числами и оба отрицательными, не является обязательным.

ПРИМЕР 45.7. Найдти интеграл  $I = \int \sqrt[3]{\frac{\cos^2 x}{\sin^8 x}} dx$ .

Р е ш е н и е: В этом примере показатель синуса  $m = -\frac{8}{3}$ , а показатель степени косинуса  $n = \frac{2}{3}$ , а потому  $m + n = -\frac{8}{3} + \frac{2}{3} = -2$ .

Применим подстановку  $\operatorname{ctg} x = t$ , тогда

$$-\frac{dx}{\sin^2 x} = dt \text{ и } \sqrt[3]{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \operatorname{ctg}^{\frac{2}{3}} x.$$

Поэтому

$$I = - \int t^{\frac{2}{3}} dt = -\frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}} + C = -\frac{3}{5} \operatorname{ctg} x \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x} + C.$$

В следующих двух примерах применим рассмотренные в лекции два приема нахождения интегралов от  $n$ -ой степени  $\operatorname{tg} x$  или  $\operatorname{ctg} x$ .

ПРИМЕР 45.8. Найти интеграл  $I = \int \operatorname{tg}^4 x dx$ .

Решение:

$$\begin{aligned} I &= \left| \operatorname{tg} x = t, x = \operatorname{arctg} t, dx = \frac{dt}{t^2 + 1} \right| = \\ &= \int \frac{t^4 dt}{t^2 + 1} = \int \left( t^2 - 1 + \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt = \\ &= \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + \\ &+ \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 45.9. Найти интеграл  $I = \int \operatorname{ctg}^5 x dx$ .

Решение: Воспользуемся формулами

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}^2 x &= \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \text{ и } \frac{dx}{\sin^2 x} = -d \operatorname{ctg} x : \\ I &= \int \operatorname{ctg}^3 x \operatorname{ctg}^2 x dx = \int \operatorname{ctg}^3 x \left( \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = \\ &= - \int \operatorname{ctg}^3 x d \operatorname{ctg} x - \int \operatorname{ctg}^3 x dx = -\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4} - \\ &- \int \operatorname{ctg} x \left( \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = -\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4} + \int \operatorname{ctg} x d \operatorname{ctg} x + \\ &+ \int \operatorname{ctg} x dx = -\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} + \ln |\sin x| + C. \end{aligned}$$

И, наконец, решим два примера на универсальную тригонометрическую подстановку.

ПРИМЕР 45.10. Найти интеграл  $I = \int \frac{dx}{\sin^3 x}$ .

Р е ш е н и е:

$$\begin{aligned}
 I &= \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, dx = \frac{dt}{1+t^2} \right| = \\
 &= \frac{1}{4} \int \frac{(1+t^2)^2}{t^3} dt = \frac{1}{4} \int \left( \frac{1}{t^3} + \frac{2}{t} + t \right) dt = \\
 &= \frac{1}{4} \left( -\frac{1}{2t^2} + 2 \ln |t| + \frac{t^2}{2} \right) + C = \\
 &= -\frac{1}{8} \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{8} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + C.
 \end{aligned}$$

При нахождении, например, интеграла  $\int \frac{dx}{\cos^5 x}$ , целесообразнее сначала заменить  $\cos^5 x$  на  $\sin^5 \left( \frac{\pi}{2} + x \right)$ , а затем применить универсальную подстановку.

ПРИМЕР 45.11. Найти интеграл  $I = \int \frac{5 + 6 \sin x}{\sin x (4 + 3 \cos x)} dx$ .

Р е ш е н и е:

Опять применим универсальную подстановку  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ , тогда

$$I = \int \frac{5 + \frac{12t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} \left( 4 + \frac{3(1-t^2)}{1+t^2} \right)} \frac{2 dt}{1+t^2} = \int \frac{5t^2 + 12t + 5}{t(7+t^2)} dt.$$

Разложим дробь на простейшие

$$\frac{5t^2 + 12t + 5}{t(7+t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt + C}{7+t^2}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 5t^2 + 12t + 5 &= A(7+t^2) + t(Bt+C); \\
 A &= \frac{5}{7}, \quad B = \frac{30}{7}, \quad C = 12.
 \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 I &= \int \left( \frac{5}{7t} + \frac{\frac{30}{7}t + 12}{7 + t^2} \right) dt = \\
 &= \frac{5}{7} \ln |t| + \frac{15}{7} \ln(7 + t^2) + \frac{12}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{7}} + C = \\
 &= \frac{5}{7} \left( \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + 3 \ln(7 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}) \right) + \frac{12}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C.
 \end{aligned}$$

### Самостоятельная работа

ПРИМЕР 45.12. Найти интеграл  $I = \int \sin 6x \cos 2x dx$ .

ПРИМЕР 45.13. Найти интеграл  $I = \int \cos 2x \cos 3x dx$ .

ПРИМЕР 45.14. Найти интеграл  $I = \int \sin^5 x \cos^2 x dx$ .

ПРИМЕР 45.15. Найти интеграл  $I = \int \cos^5 x \sqrt[3]{\sin^2 x} dx$ .

ПРИМЕР 45.16. Найти интеграл  $I = \int \sin^4 x dx$ .

ПРИМЕР 45.17. Найти интеграл  $I = \int \sin^4 x \cos^6 x dx$ .

ПРИМЕР 45.18. Найти интеграл  $I = \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^6 x}$ .

ПРИМЕР 45.19. Найти интеграл  $I = \int \sqrt{\frac{\sin x}{\cos^9 x}} dx$ .

ПРИМЕР 45.20. Найти интеграл  $I = \int \operatorname{ctg}^5 x dx$ .

ПРИМЕР 45.21. Найти интеграл  $I = \int \operatorname{tg}^8 x dx$ .

ПРИМЕР 45.22. Найти интеграл  $I = \int \frac{dx}{\sin^5 x}$ .

## Лекция 46. Интегрирование иррациональных функций

Нахождение интегралов от иррациональных выражений. Рационализация функций с помощью тригонометрических подстановок. Заключительные замечания об интегрировании. Определение аналитической функции по действительной или мнимой части.

Рассмотрим некоторые частные приемы, позволяющие иррациональные функции свести к рациональным.

### 46.1. Интегралы вида $\int R(x; \sqrt[n]{ax+b}) dx$

Интегралы вида  $\int R(x; \sqrt[n]{ax+b}) dx$ , где  $R(x; \sqrt[n]{ax+b})$  – рациональное выражение относительно  $x$  и  $\sqrt[n]{ax+b}$  и  $n$  – целое положительное число не меньшее двух, могут быть сведены к интегралам от рациональных функций с помощью замены переменной:

$$ax+b=t^n, \text{ тогда } x=\frac{t^n-b}{a}, \quad dx=\frac{nt^{n-1}}{a}dt, \quad \sqrt[n]{ax+b}=t. \quad (46.1)$$

Следовательно,

$$\int R(x; \sqrt[n]{ax+b}) dx = \int R\left(\frac{t^n-b}{a}; t\right) \frac{nt^{n-1}}{a} dt.$$

Интеграл в правой части последнего равенства может быть найден приемами, изложенными ранее.

ПРИМЕР 46.1. Найдти интеграл:  $I = \int \frac{\sqrt{x+1}}{x-\sqrt{x+1}} dx.$

Р е ш е н и е: Положим:

$$x+1=t^2, \text{ тогда } x=t^2-1 \text{ и } dx=2tdt.$$

Поэтому:

$$I = \int \frac{t \cdot 2tdt}{t^2-t-1} = 2 \int \frac{t^2 dt}{t^2-t-1} = 2 \int \left(1 + \frac{t+1}{t^2-t+1}\right) dt.$$

Интеграл  $\int \frac{t+1}{t^2-t-1}$  можем найти разложением дроби на сумму элементарных дробей. Однако, проще сделать подстановку

$$\frac{1}{2}(t^2-t-1)' = z, \text{ откуда } t = z + \frac{1}{2} \text{ и } dt = dz.$$

Дальнейший ход решения следующий:

$$\begin{aligned}
I &= 2t + 2 \int \frac{z + \frac{3}{2}}{z^2 - \frac{5}{4}} dz = 2t + \int \frac{d(z^2 - \frac{5}{4})}{z^2 - \frac{5}{4}} + 3 \int \frac{dz}{z^2 - \frac{5}{4}} = \\
&= t + \ln \left| z^2 - \frac{5}{4} \right| + \frac{3}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{z - \frac{\sqrt{5}}{2}}{z + \frac{\sqrt{5}}{2}} \right| + C = t + \ln |t^2 - t - 1| + \\
&+ \frac{3}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{t - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}}{t - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} \right| + C = \\
&= \sqrt{x+1} + \ln |x - \sqrt{x+1}| + \frac{3}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2\sqrt{x+1} - 1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{x+1} - 1 + \sqrt{5}} \right| + C.
\end{aligned}$$

#### 46.2. Интегралы вида $\int R\left(x; \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$

Эти интегралы приводятся к интегралам от рациональной функции подстановкой:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n. \quad (46.2)$$

**ПРИМЕР 46.2.** Вычислить интеграл:  $I = \int x \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} dx$ .

**Решение:** Пусть

$$\frac{x-1}{x+2} = t^2, \text{ тогда } \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} = t, \quad x = \frac{1+2t^2}{1-t^2} \text{ и } dx = \frac{6t}{(1-t^2)^2} dt.$$

Поэтому

$$I = \int \frac{1+2t^2}{1-t^2} t \frac{6t}{(1-t^2)^2} dt = -6 \int \frac{2t^4 + t^2 dt}{(t^2 - 1)^3}.$$

Раскладываем подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\begin{aligned}
\frac{2t^4 + t^2}{(t^2 - 1)^3} &= \frac{2t^4 + t^2}{(t-1)^3(t+1)^3} = \\
&= \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{(t-1)^3} + \frac{D}{t+1} + \frac{E}{(t+1)^2} + \frac{F}{(t+1)^3}.
\end{aligned}$$

Приведа выражение справа к общему знаменателю, получим:

$$\frac{2t^4 + t^2}{(t-1)^3(t+1)^3} = \left( A(t-1)^2(t+1)^3 + B(t-1)(t+1)^3 + C(t+1)^3 + \right. \\ \left. + D(t-1)^3(t+1)^2 + E(t-1)^3(t+1) + F(t-1)^3 \right) / ((t-1)^3(t+1)^3).$$

Откуда, приравняв числители, имеем:

$$\text{при } t = 1 : 3 = 8C \Rightarrow C = 3/8,$$

$$\text{при } t = -1 : 3 = -8F \Rightarrow F = -3/8.$$

Преобразовав для дальнейшего использования выражение с неизвестными коэффициентами, запишем равенство:

$$2t^4 + t^2 = A(t^2 - 1)(t + 1) + B(t^2 - 1)(t + 1)^2 + C(t + 1)^3 + \\ + D(t^2 - 1)^2(t - 1) + E(t^2 - 1)(t - 1)^2 + F(t - 1)^3 = \\ = A(t^4 - 2t^2 + 1)(t + 1) + B(t^2 - 1)(t^2 + 2t + 1) + C(t^3 + 3t^2 + 3t + 1) + \\ + D(t^4 - 2t^2 + 1)(t - 1) + E(t^2 - 1)(t^2 - 2t + 1) + F(t^3 - 3t^2 + 3t - 1).$$

Или, окончательно:

$$2t^4 + t^2 = A(t^5 + t^4 - 2t^3 - 2t^2 + t + 1) + B(t^4 + 2t^3 - 2t - 1) + \\ + C(t^3 + 3t^2 + 3t + 1) + D(t^5 - t^4 - 2t^3 + 2t^2 - t - 1) + \\ + E(t^4 - 2t^3 + 2t - 1) + F(t^3 - 3t^2 + 3t - 1).$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях в многочленах справа и слева, получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} t^5 : A + D = 0, \\ t^4 : A + B - D + E = 2, \\ t^3 : -2A + 2B + C - 2D - 2E + F = 0, \\ t : A - B + C - D - E - F = 0. \end{array} \right.$$

Подставляя в эту систему найденные значения  $C = \frac{3}{8}$  и  $F = -\frac{3}{8}$ , получим систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} A + D = 0, \\ A + B - D + E = 2, \\ -A + B - D - E = 0, \\ A - B - D - E = -\frac{3}{4}. \end{array} \right.$$

Решив которую, имеем:  $A = \frac{5}{16}$ ;  $B = \frac{11}{16}$ ;  $D = -\frac{5}{16}$ ;  $E = \frac{11}{16}$  и, следовательно

$$\begin{aligned}
I &= -6 \int \frac{2t^4 + t^2}{(t^2 - 1)^3} dt = -\frac{15}{8} \int \frac{dt}{t-1} - \frac{33}{8} \int \frac{dt}{(t-1)^2} - \frac{9}{4} \int \frac{dt}{(t-1)^3} + \\
&+ \frac{15}{8} \int \frac{dt}{t+1} - \frac{33}{8} \int \frac{dt}{(t+1)^2} + \frac{9}{4} \int \frac{dt}{(t+1)^3} = \frac{15}{8} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| + \\
&+ \frac{33}{8} \left( \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) + \frac{9}{8} \left( \frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{(t+1)^2} \right) + C.
\end{aligned}$$

После некоторых алгебраических преобразований и возвращению к первоначальной переменной  $x$  получим:

$$\begin{aligned}
I &= \int x \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} dx = \frac{15}{8} \ln \left| \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+2}} \right| - \frac{11}{4} (x+2) + \\
&+ \frac{1}{2} (x+2) \sqrt{(x-1)(x+2)} + C.
\end{aligned}$$

Если в подынтегральное выражение входят корни из одного и того же выражения разных степеней, т.е. для интегралов вида

$$\int R \left( x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx$$

применяется подстановка, рационализирующая подынтегральную функцию:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^p, \quad (46.3)$$

где  $p$  – наименьшее общее кратное показателей корней  $m, n, \dots, k$ .

**ПРИМЕР 46.3.** Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[4]{x+1}}.$$

**Решение:**

Так как выражение  $x+1$  входит в корни 3 и 4 степеней, а наименьшим общим кратным этих чисел является 12, то положим:

$$x+1 = t^{12} \implies x = t^{12} - 1, \quad dx = 12t^{11} dt, \quad \sqrt[3]{x+1} = t^4, \quad \sqrt[4]{x+1} = t^3.$$

Тогда интеграл примет вид:

$$12 \int \frac{t^{11} dt}{t^4 - t^3} = 12 \int \frac{t^8 dt}{t-1}.$$



Это – интеграл от рациональной дроби. Так как дробь неправильная, разделим числитель на знаменатель, находим:

$$12 \int \frac{t^8 dt}{t-1} = 12 \int \left( t^7 + t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = \\ = 12 \left( \frac{t^8}{8} + \frac{t^7}{7} + \frac{t^6}{6} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + \ln |t-1| \right) + C.$$

Сделав обратную подстановку  $t = \sqrt[12]{x+1}$  окончательно получим:

$$I = 12 \left( \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{8} + \frac{\sqrt[12]{(x+1)^7}}{7} + \frac{\sqrt{x+1}}{6} + \frac{\sqrt[12]{(x+1)^5}}{5} + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt[3]{x+1}}{4} + \frac{\sqrt[4]{x+1}}{3} + \frac{\sqrt[6]{x+1}}{2} + \sqrt[12]{x+1} + \ln |\sqrt[12]{x+1} - 1| \right) + C.$$

### 46.3. Интегралы вида $\int R(x; \sqrt{Ax^2 + Bx + C}) dx$

После подстановки  $\frac{1}{2}(Ax^2 + Bx + C)' = t$  такие интегралы сводятся к интегралам, содержащим корни вида:

$$\sqrt{a^2 - t^2}, \sqrt{t^2 - a^2}, \sqrt{a^2 + t^2}. \quad (46.4)$$

Если интеграл не является табличным, то интегралы, содержащие корни вида (46.4), рационализируются подстановками:

$$\sqrt{a^2 - t^2} \implies t = a \sin z \text{ или } t = a \cos z,$$

$$\sqrt{t^2 - a^2} \implies t = \frac{a}{\sin z} \text{ или } t = \frac{a}{\cos z},$$

$$\sqrt{a^2 + t^2} \implies t = a \operatorname{tg} z \text{ или } t = a \operatorname{ctg} z.$$

**ПРИМЕР 46.4.** Вычислить интеграл:  $I = \int \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{(x+1)^3} dx$ .

**Решение:** После подстановки:

$$\frac{1}{2}(x^2 + 2x - 3)' = t \text{ или } x + 1 = t, \quad x = t - 1, \quad dx = dt$$

интеграл запишется в виде:

$$I = \int \frac{\sqrt{(t-1)^2 + 2(t-1) - 3}}{t^3} dt = \int \frac{\sqrt{t^2 - 4}}{t^3} dt.$$

Далее положим

$$t = \frac{2}{\cos z}, \text{ тогда } \sqrt{t^2 - 4} = 2 \operatorname{tg} z, \quad dt = \frac{2 \sin z}{\cos^2 z} dz.$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sqrt{t^2 - 4}}{t^3} dt = \int \frac{2 \operatorname{tg} z}{\left(\frac{2}{\cos z}\right)^3} \frac{2 \sin z}{\cos^2 z} dz = \frac{1}{2} \int \sin^2 z dz = \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2z) dz = \frac{1}{4} \left( z - \frac{\sin 2z}{2} \right) + C = \frac{1}{4} (z - \sin z \cos z) + C. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} t &= \frac{2}{\cos z}, \text{ то } \cos z = \frac{2}{t}, \quad z = \arccos \frac{2}{t}, \\ \sin z &= \sqrt{1 - \cos^2 z} = \frac{\sqrt{t^2 - 4}}{t}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} \left( \arccos \frac{2}{t} - \frac{2\sqrt{t^2 - 4}}{t^2} \right) + C = \\ &= \frac{1}{4} \left( \arccos \frac{2}{x+1} - \frac{2\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{(x+1)^2} \right) + C. \end{aligned}$$

Отметим, что интегралы с корнями вида (46.4) иногда можно взять по частям (см. пример 43.15).

**ПРИМЕР 46.5.** Вычислить интеграл:  $I = \int \frac{dx}{(\sqrt{5+2x+x^2})^3};$

**Решение:**

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\sqrt{(5+2x+x^2)^3}} = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2}(x^2+2x+5)' = t \\ x+2 = t \end{array} \right| \frac{dx = dt}{x = t-2} = \\ &= \int \frac{dt}{\sqrt{(t^2+4)^3}} = \left| \begin{array}{l} t = 2 \operatorname{tg} z \\ \sqrt{t^2+4} = \frac{2}{\cos z} \end{array} \right| \frac{dt = \frac{dz}{\cos^2 z}}{=} = \frac{1}{4} \int \cos z dz = \\ &= \frac{1}{4} \sin z + C = \frac{1}{4} \sin \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \frac{1}{4} \frac{\frac{z}{2}}{\sqrt{\frac{z^2}{4} + 1}} + C = \\ &= \frac{x+1}{4\sqrt{5+2x+x^2}} + C. \end{aligned}$$

#### 46.4. Интегралы вида $\int \frac{dx}{(x-m)\sqrt{ax^2+bx+c}}, x > m$

К таким интегралам можно было бы применить методику п. 46.3, но однако целесообразнее оказывается подстановка

$$x - m = \frac{1}{t}, \quad dx = -\frac{dt}{t^2}. \quad (46.5)$$

ПРИМЕР 46.6. Найти интеграл:  $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2 - 2x + 1}}$ .

Решение: Применив подстановку (46.5) получим:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{5}{t^2} - \frac{2}{t} + 1}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 2t + 5}} = - \int \frac{d(t-1)}{\sqrt{(t-1)^2 + 4}} = \\ &= -\ln|t-1 + \sqrt{t^2 - 2t + 5}| + C = -\ln\left|\frac{1}{x} - 1 + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + 5}\right| + C. \end{aligned}$$

#### 46.5. Интегралы от дифференциальных биномов

Так называются интегралы вида:

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx, \quad (46.6)$$

где  $m, n$  и  $p$  – любые рациональные числа.

Доказано, что только в трёх случаях этот интеграл может быть выражен через элементарные функции.

1)  $p$  – натуральное число. В этом случае двухчлен  $a + bx^n$  возводится в степень  $p$  и после умножения на  $x^m$  почленно интегрируется.

2)  $\frac{m+1}{n}$  – целое число. В этом случае применяется подстановка  $a + bx^n = t^s$ , где  $s$  – знаменатель дроби  $p$ .

3)  $\frac{m+1}{n} + p$  – целое число. В этом случае применяется подстановка  $ax^{-n} + b = t^s$ , где  $s$  – знаменатель дроби  $p$ .

ПРИМЕР 46.7. Найти интеграл

$$\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

Р е ш е н и е: Перепишем интеграл в виде:

$$I = \int x^{-1/2} (1 + x^{1/4})^{1/3} dx.$$

Здесь

$$m = -\frac{1}{2}, \quad n = \frac{1}{4}, \quad p = \frac{1}{3} \implies \frac{m+1}{n} = 2 - \text{целое число.}$$

Делаем подстановку:

$$\begin{aligned} 1 + x^{1/4} = t^3 &\implies t = \sqrt[3]{1 + x^{1/4}} \implies \\ x^{1/4} = t^3 - 1 &\implies x = (t^3 - 1)^4 \implies x^{-1/2} = ((t^3 - 1)^4)^{-1/2} = \\ = \frac{1}{(t^3 - 1)^2} &\implies dx = 4(t^3 - 1)^3 3t^2 dt = 12(t^3 - 1)^3 t^2 dt \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{t \cdot 12(t^3 - 1)^3 t^2 dt}{(t^3 - 1)^2} = 12 \int t^3 (t^3 - 1) dt = \\ &= 12 \int (t^6 - t^3) dt = 12t^4 \left( \frac{t^3}{7} - \frac{1}{4} \right) + C. \end{aligned}$$

Для возвращения к исходной переменной, воспользовавшись равенством

$$t = \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}},$$

получим

$$I = 12(1 + \sqrt[4]{x}) \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}} \left( \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{7} - \frac{1}{4} \right) + C.$$

#### 46.6. Определение аналитической функции по её действительной или мнимой части

В лекции 42 было установлено, что для того, чтобы функция двух переменных была бы действительной или мнимой частью аналитической функции, она должна быть гармонической, т.е. удовлетворять уравнению Лапласа (42.3), (42.4).

Пусть функция  $u = u(x; y)$  удовлетворяет этим условиям и является действительной частью аналитической функции  $u = \operatorname{Re} f(z)$ , где  $f(z) = u(x; y) + iv(x; y)$ . Требуется найти мнимую часть этой функции  $v = v(x; y) = \operatorname{Im} f(z)$ , следовательно, и функцию  $f(z)$ .

Из 1<sup>ого</sup> условия Коши-Римана (42.1)  $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow v = \int \frac{\partial u}{\partial x} dy + \varphi(x)$ ,

где  $\varphi(x)$  произвольная функция  $x$ .

2<sup>ое</sup> условие Коши-Римана даёт нам соответствие

$\frac{\partial v}{\partial x} = \left( \int \frac{\partial u}{\partial x} dx \right)'_x + \varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y}$ , из которого находится  $\varphi'(x)$ , а затем

$$\varphi(x) = - \int \left( \left( \int \frac{\partial u}{\partial x} dx \right)'_x + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx + C.$$

Подставляя полученное выражение  $\varphi(x)$  в  $v(x)$  найдем, что

$$v = \operatorname{Im} f(z) = \int \frac{\partial u}{\partial x} dx + \varphi(x).$$

Аналогично может быть рассмотрена задача об определении аналитической функции при задании её мнимой части.

**ПРИМЕР 46.8.** По функции  $u(x; y) = x^3 - 3xy^2$ , являющейся действительной частью аналитической функции  $f(z)$  найти её мнимую часть и функцию  $f(z)$  при условии, что  $f(0) = 0$ .

**Решение:** В примере 42.5 было показано, что функция  $u(x; y) = x^3 - 3xy^2$  является гармонической, поэтому она может быть действительной частью аналитической функции  $u(x; y) = x^3 - 3xy^2 = \operatorname{Re} f(z) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \Rightarrow v(x; y) = 3 \int (x^2 - y^2) dy + \varphi(x) = 3x^2y - y^3 + \varphi(x)$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + \varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy \Rightarrow \varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = C$ .

Итак  $v(x; y) = \operatorname{Im} f(z) = 3x^2y - y^3 + C$ , а  $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3 + C)$ . Константу  $C$  находим из начального условия  $f(0) = 0$ , так как  $z = x + iy = 0 \Rightarrow x = y = 0$  и  $f(0) = 0 + iC = 0 \Rightarrow C = 0$ . Окончательно имеем  $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$ .

#### 46.7. Заключительные замечания об интегрировании

Интегрирование – операция не только сложнее, в общем случае, чем дифференцирование, но в отличие от неё не имеет чёткого алгоритма.

Вся трудность интегрального исчисления заключается в невозможности сразу сказать, выражается ли первообразная через элементарные функции или нет

Какими бы простыми не казались на первый взгляд интегралы, например,

$$\int e^{x^2} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \sqrt{x} \cos x dx$$

выразить их через элементарные функции невозможно.

Для нахождения ряда интегралов существуют различные способы.

**ПРИМЕР 46.9.** Найти интеграл  $I = \int \sin x \cos x dx$ .

**Решение:** Найдем этот интеграл тремя способами, внося под знак дифференциала сначала  $\sin x$ , затем  $\cos x$ , и, наконец число 2.

$$I = \int \sin x d(\sin x) = \frac{1}{2} \sin^2 x + C,$$

$$I = - \int \cos x d(\cos x) = -\frac{1}{2} \cos^2 x + C,$$

$$I = \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{4} \int \sin 2x d(2x) = -\frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 46.1.** Может показаться, что решение последнего примера противоречит теореме 43.2. Но из тригонометрических формул следует, что функции

$$\frac{1}{2} \sin^2 x, \quad -\frac{1}{2} \cos^2 x \quad \text{и} \quad -\frac{1}{4} \cos 2x$$

отличаются друг от друга на постоянные величины.

Мы ознакомились только с небольшим числом приемов интегрирования функций. Тем не менее, они позволяют интегрировать довольно широкие классы элементарных функций.

Но и к нахождению таких интегралов необходимо подходить творчески. Так для нахождения, например, интеграла

$$\int \frac{-6x^2 - 5x + 8}{x^3 + 2x^2 - 1} dx$$

из примера 44.4 требуется произвести большой объем вычислений.

Интеграл же

$$\int \frac{3x^2 + 4x}{x^3 + 2x^2 - 1} dx = \ln |x^3 + 2x^2 - 1| + C$$

на первый взгляд такой же трудоемкий берется значительно проще, так как числитель подынтегральной функции равен производной знаменателя. Внося числитель под знак дифференциала, применяем формулу 2 таблицы интегралов (п.43.4).

В нашей таблице интегралов 11 формул. А в таблицах интегралов, сумм, рядов и произведений (авторы И.С.Рыжик и И.М.Градштейн, Наука, 1971) около пяти тысяч интегралов.

На практике достаточно сложные интегралы не вычисляют, а ищут в более или менее подробной таблице интегралов, или в соответствующей программе на компьютере.

## Практическое занятие 46. Интегрирование иррациональных функций

ПРИМЕР 46.1. Найти интеграл  $I = \int \frac{\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt{x-2}} dx$ .

Решение:

$$\begin{aligned} I &= |x-2 = t^6, \quad dx = 6t^5 dt| = \int \frac{t^2}{t^4 - t^3} 6t^5 dt = \\ &= 6 \int \frac{t^4}{t-1} dt = 6 \int \left( t^3 + t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = \\ &= 6 \left( \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + \ln |t-1| \right) + C = \\ &= 6 \left( \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{4} + \frac{\sqrt{x-2}}{3} + \frac{\sqrt[3]{x-2}}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt[6]{x-2} + \ln |\sqrt[6]{x-2} - 1| \right) + C. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 46.1. Если в последнем интеграле поменять местами числитель и знаменатель, то кроме аналогичного, можно рекомендовать более простой способ вычисления интеграла. Достаточно почленно разделить числитель на знаменатель:

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x-2}} dx = \int ((x-2)^{1/3} - (x-2)^{1/6}) d(x-2) = \frac{3}{4}(x-2)^{4/3} - \frac{6}{7}(x-2)^{7/6} + C.$$

Такой же прием для рационализации подынтегральной функции применяется, если последняя содержит дробь  $\frac{ax+b}{cx+d}$  в разных степенях.

ПРИМЕР 46.2. Найти интеграл  $I = \int \sqrt{\frac{5-3x}{4+7x}} dx$ .

Р е ш е н и е: Подстановка  $\frac{5-3x}{4+7x} = t^2$  приводит к интегрированию рациональной функции. Из указанной подстановки определим  $x$  и  $dx$ :

$$\begin{aligned} 5-3x &= t^2(4+7x) \Rightarrow x = \frac{5-4t^2}{7t^2+3} \Rightarrow \\ \Rightarrow dx &= \frac{-8t(7t^2+3) - 14t(5-4t^2)}{(7t^2+3)^2} dt = \frac{-94t}{(7t^2+3)^2} dt. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I &= \int t \frac{-94t}{(7t^2+3)^2} dt = -94 \int \frac{t^2 dt}{(7t^2+3)^2} = \\ &= -94 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^2 \int \frac{t^2 + \frac{3}{7} - \frac{3}{7}}{(t^2 + \frac{3}{7})^2} dt = -94 \cdot \frac{1}{49} \left( \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{7}} - \frac{3}{7} \int \frac{dt}{(t^2 + \frac{3}{7})^2} \right). \end{aligned}$$

Первый интеграл табличный, второй – от дроби 4-ого типа:

$$I = \int \frac{dt}{(t^2 + \frac{3}{7})^2} = \frac{7}{3} \left( \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{7}} + \frac{t}{2(t^2 + \frac{3}{7})} \right).$$

Взяв этот, а значит и предыдущий, после возвращения к исходной переменной, получим окончательно

$$I = \frac{\sqrt{(5-3x)(4+7x)}}{7} - \frac{47\sqrt{21}}{147} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{7}{3}} \sqrt{\frac{5-3x}{4+7x}} \right) + C.$$

ПРИМЕР 46.3. Найти интеграл  $I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}}.$



**Решение:** Этот интеграл можно свести к рассматриваемому типу, например:

$$\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)} = \sqrt{\frac{(x-1)^2}{(x+2)^2}(x+2)^3} = (x+2)\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{(x+2)^2}}.$$

Поэтому

$$I = \int \frac{dx}{(x+2)\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{(x+2)^2}}} = \left| \frac{x-1}{x+2} = t^3, \right.$$

$$x = \frac{2t^3+1}{1-t^3}, \quad dx = \frac{9t^2 dt}{(1-t^3)^2} \Big| = 3 \int \frac{dt}{1-t^3}.$$

Так как

$$\frac{1}{1-t^3} = \frac{1}{(1-t)(t^2+t+1)} = \frac{A}{1-t} + \frac{Bt+C}{t^2+t+1},$$

где  $A = B = \frac{1}{3}$ ,  $C = \frac{2}{3}$ , то

$$I = -\ln|1-t| + \frac{1}{2} \ln(t^2+t+1) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Вернувшись к исходной переменной, окончательно получим

$$I = -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x-1}}{3} \right)^3 + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+2}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x+2}} + C.$$

В следующих примерах мы не рационализируем подынтегральные функции, а сводим интегралы к табличным.

**ПРИМЕР 46.4.** Найти интеграл  $I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x+7}}.$

**Решение:**

$$I = \left| \frac{1}{2}(2x^2+3x+7)' = t, \quad 2x + \frac{3}{2} = t, \quad x = \frac{t - \frac{3}{2}}{2}, \quad dx = \frac{1}{2} dt \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \frac{47}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| t + \sqrt{t^2 + \frac{47}{4}} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| 4x + 3 + 2\sqrt{4x^2 + 6x + 14} \right| + C.$$

ПРИМЕР 46.5. Найти интеграл  $I = \int \frac{3x - 7}{\sqrt{5x^2 + 8x + 1}} dx$ .

Решение:

$$\begin{aligned} I &= \left| \frac{1}{2}(5x^2 + 8x + 1)' = t, \quad 5x + 4 = t, \quad x = \frac{t - 4}{5}, \quad dx = \frac{dt}{5} \right| = \\ &= \int \frac{\frac{3}{5}(t - 4) - 7}{5\sqrt{5\left(\frac{t-4}{5}\right)^2 + \frac{8}{5}(t-4) + 1}} dt = \\ &= \frac{3}{10\sqrt{5}} \int \frac{d(t^2 - 11)}{\sqrt{t^2 - 11}} - \frac{47}{5\sqrt{5}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 11}} = \\ &= \frac{3}{5\sqrt{5}} \sqrt{t^2 - 11} - \frac{47}{5\sqrt{5}} \ln |t + \sqrt{t^2 - 11}| + C = \\ &= \frac{3}{5} \sqrt{5x^2 + 8x + 1} - \frac{47}{5\sqrt{5}} \ln |5x + 4 + \sqrt{5(5x^2 + 8x + 1)}| + C. \end{aligned}$$

Интегралы  $\int \frac{dx}{(x+d)\sqrt{ax^2+bx+c}}$  сводятся к рассмотренным выше подстановкой  $x+d = \frac{1}{t}$ .

ПРИМЕР 46.6. Найти интеграл  $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+3}}$ .

Решение:

$$\begin{aligned} I &= \left| x = \frac{1}{t}, \quad dx = -\frac{dt}{t^2} \right| = \int \frac{-dt/t^2}{\sqrt{3t^2+1}/t^2} = \\ &= - \int \frac{dt}{\sqrt{3t^2+1}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\sqrt{3}t)}{\sqrt{(\sqrt{3}t)^2+1}} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \ln |\sqrt{3}t + \sqrt{3t^2+1}| + C = -\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3}}{x} + \frac{\sqrt{x^2+3}}{x} \right| + C. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 46.7. Найти интеграл  $I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{7-x^2}}$ .

Р е ш е н и е:

$$\begin{aligned} I &= \left| x = \frac{1}{t}, \quad dx = -\frac{dt}{t^2} \right| = \int \frac{-dt/t^2}{\sqrt{7t^2-1}/t^3} = - \int \frac{t \, dt}{\sqrt{7t^2-1}} = \\ &= -\frac{1}{14} \int \frac{d(7t^2-1)}{\sqrt{7t^2-1}} = -\frac{1}{14} 2\sqrt{7t^2-1} + C = -\frac{1}{7} \sqrt{\frac{7}{x^2}-1} + C. \end{aligned}$$

В заключение данного занятия найдем интеграл с помощью тригонометрической подстановки.

ПРИМЕР 46.8. *Найти интеграл*  $I = \int \frac{dx}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}.$

Р е ш е н и е: Положим  $x = 3 \operatorname{tg} t$ , тогда

$$dx = \frac{3dt}{\cos^2 t} \text{ и } x^2 + 9 = 9(\operatorname{tg}^2 t + 1) = \frac{9}{\cos^2 t}.$$

Поэтому

$$I = \int \frac{3 \, dt / \cos^2 t}{27 / \cos^3 t} = \frac{1}{9} \int \cos t \, dt = \frac{1}{9} \sin t + C.$$

Найдем  $\sin t$  через  $x$ :

$$\begin{aligned} x = 3 \operatorname{tg} t &\Rightarrow \operatorname{tg} t = \frac{x}{3} \Rightarrow \sin t = \operatorname{tg} t \cdot \cos t = \\ &= \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}} = \frac{x/3}{\sqrt{1 + (x/3)^2}} = \frac{x}{\sqrt{9 + x^2}}. \end{aligned}$$

Поэтому окончательно:  $I = \frac{x}{9\sqrt{9+x^2}} + C.$

### Самостоятельная работа

ПРИМЕР 46.9. *Найти интеграл*  $I = \int \frac{\sqrt[6]{x} \, dx}{x(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})}.$

ПРИМЕР 46.10. *Найти интеграл*  $I = \int \sqrt{\frac{3-4x}{9-5x}} \, dx.$

ПРИМЕР 46.11. *Найти интеграл*  $I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)^4}}.$

ПРИМЕР 46.12. Найти интеграл  $I = \int \frac{dx}{\sqrt{11 + 5x + 6x^2}}$ .

ПРИМЕР 46.13. Найти интеграл  $I = \int \frac{2x + 5}{\sqrt{7 + 8x - 11x^2}} dx$ .

ПРИМЕР 46.14. Найти интеграл  $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2 - 1}}$ .

ПРИМЕР 46.15. Найти интеграл  $I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{15 + 3x^2}}$ .

ПРИМЕР 46.16. Найти интеграл  $I = \int \frac{dx}{(x^2 - 5)\sqrt{x^2 - 5}}$ .

ПРИМЕР 46.17. Найти интеграл  $I = \int \sqrt{x(3 + 4x^3)} dx$ .

## Лекция 47. Определённый интеграл

Определённый интеграл. Свойства, теорема существования. Производная по переменной верхней границе. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям в определённом интеграле. Физический и геометрический смысл определённого интеграла.

### 47.1. Определённый интеграл

Пусть на отрезке  $[a; b]$  дана непрерывная функция  $y = f(x)$ .

Прделаем следующие действия:

1. Отрезок  $[a; b]$  разобьём на  $n$  частей произвольным образом. Каждый такой отрезок назовем частичным. Если обозначить точки деления отрезка

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b,$$

то длина частичного отрезка  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Обозначим через  $\lambda$  длину наибольшего из введённых  $n$  частичных отрезков:

$$\lambda = \max_{i=1,2,\dots,n} \Delta x_i.$$

Параметр  $\lambda$  называется *диаметром разбиения*.

2. На каждом частичном отрезке выберем произвольную точку  $\xi_i$ , т.е.  $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

3. Вычислим значение функции  $f(x)$  в этой произвольно выбранной точке  $f(\xi_i)$ , умножим полученное значение на длину соответствующего частичного отрезка  $f(\xi_i)\Delta x_i$  и составим сумму всех таких произведений, которую обозначим

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i. \quad (47.1)$$

Эта сумма называется интегральной суммой для функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$ . Очевидно, что для функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  можно составить бесчисленное множество интегральных сумм.

4. Найдем предел интегральной суммы (47.1) при условии, что число частичных отрезков неограниченно возрастает и длина каждого из них стремиться к нулю. Очевидно, что при этом и диаметр разбиения  $\lambda \rightarrow 0$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 47.1.** *Предел интегральной суммы (47.1)*

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow +\infty)}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

при условии, что  $\lambda \rightarrow 0$  (и, следовательно, при  $n \rightarrow +\infty$ ), если он существует и не зависит ни от способа деления отрезка  $[a; b]$ , ни от способа выбора внутренних точек  $\xi_i$ , называется определённым интегралом функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  и обозначается символом  $\int_a^b f(x) dx$ .

Таким образом,

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow +\infty)}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x) dx. \quad (47.2)$$

Функция  $f(x)$  в этом случае называется интегрируемой на отрезке  $[a; b]$ .

Возникает естественный вопрос: при каких условиях существует предел (47.1). Отвечает на него следующая теорема, которую мы принимаем без доказательства.

**ТЕОРЕМА 47.1.** *(Существования определённого интеграла.) Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$ , то существует определённый интеграл  $\int_a^b f(x) dx$ , т.е. существует предел (47.1), не зависящий ни от способа разбиения отрезка, ни от способа выбора внутренних точек.*

В символе  $\int_a^b f(x) dx$ :

$a, b$  – нижний и верхний пределы (границы) интегрирования,

$f(x)$  – подынтегральная функция,

$f(x) dx$  – подынтегральное выражение.

Отрезок  $[a; b]$  называется отрезком (областью) интегрирования.

Отметим, что каждое слагаемое  $f(\xi_i)\Delta x_i$  есть величина бесконечно малая. Так как их число неограниченно возрастает можем сказать, что определённый интеграл есть *предел бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых*.

## 47.2. Свойства определённого интеграла

Исходя из определения интеграла (47.1), рассмотрим его простейшие свойства.

1. Постоянный множитель можно вынести за знак определённого интеграла, т.е. если  $k \neq 0$ , то

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \int_a^b k f(x) dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k f(\xi_i) \Delta x_i = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left( k \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right) = k \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = k \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

При доказательстве этого свойства мы воспользовались тем, что постоянный множитель можно выносить как за знак суммы, так и за знак предела.

2. Определённый интеграл от суммы двух функций равен сумме определённых интегралов от слагаемых:

$$\int_a^b (f(x) \pm \varphi(x)) dx.$$

Доказательство аналогично предыдущему.

Это свойство легко обобщается на случай не двух, а любого конечного числа слагаемых.

3. Если в определённом интеграле поменять местами пределы интегрирования, то он изменит знак, т.е.

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx. \quad (47.3)$$

Справедливость этого свойства вытекает из того очевидного факта, что если точки деления брать одни и те же, то в интегральных суммах, соответствующих интегралам в обеих частях равенства (47.3)  $\Delta x_i$  будут равны по величине и противоположны по знаку.

Возьмём интеграл, у которого пределы одинаковы и поменяем их местами:

$$\int_a^a f(x) dx = - \int_a^a f(x) dx.$$

Числа, отличающиеся знаком равны, если они равны нулю. Поэтому

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

4. Если отрезок интегрирования  $[a; b]$  точкой  $c$  разбить на две части  $[a; c]$  и  $[c; b]$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (47.4)$$

Предположим сначала, что  $c \in (a; b)$ .

Предел интегральной суммы не зависит от способа разбиения отрезка  $[a; b]$  на частичные отрезки.

Это позволяет при составлении каждой интегральной суммы включать точку  $c$  в число точек разбиения. Пусть  $c = x_m$ . Тогда интегральная сумма может быть разбита на две:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^m f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{i=m+1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при  $\lambda \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow +\infty$ ), получим формулу (47.4).

Положим теперь, что  $c \notin (a; b)$ , например  $c > b$ . Но тогда мы можем считать, что точка  $b$  делит внутренним образом отрезок  $[a; c]$  на отрезки  $[a; b]$  и  $[b; c]$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx, \text{ откуда} \\ \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx. \end{aligned}$$

Но на основании формулы (47.3)

$$\int_b^c f(x) dx = - \int_c^b f(x) dx.$$

Поэтому и при «внешнем» делении отрезка  $[a; b]$  получим формулу (47.4).

Это свойство легко распространить на случай и большего числа точек деления отрезка  $[a; b]$ .

5. Если на отрезке  $[a; b]$

$$f(x) \geq 0, \tag{47.5}$$

то

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Действительно, так как  $f(\xi_i) \geq 0$  и  $\Delta x_i > 0$  для любых  $i$ , то интегральная сумма  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \geq 0$ .



Поэтому и предел интегральной суммы при  $\lambda \rightarrow 0$ , т.е.  $\int_a^b f(x) dx$  также неотрицателен.

Если же при условии (47.5) непрерывная функция  $f(x) > 0$  хотя бы в одной точке отрезка  $[a; b]$ , то

$$\int_a^b f(x) dx > 0.$$

Действительно, пусть непрерывная функция  $f(x) \geq 0$  везде на  $[a; b]$ , но в какой-то точке  $d \in (a; b)$   $f(x) > 0$ . Но в силу непрерывности она положительна на каком-то отрезке  $[\alpha; \beta]$ , содержащем  $d$ .

Разобьём отрезок  $[a; b]$  двумя точками  $\alpha$  и  $\beta$  ( $\alpha < d < \beta$ ) на три отрезка. Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^\alpha f(x) dx + \int_\alpha^\beta f(x) dx + \int_\beta^b f(x) dx.$$

Очевидно в правой части последнего равенства первый и третий интегралы неотрицательны, а второй положителен.

Имеет место аналогичное свойство для случая, когда на отрезке  $[a; b]$   $f(x) \leq 0$ .

6. Если на отрезке  $[a; b]$  две функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  удовлетворяют неравенству  $f(x) \geq \varphi(x)$ , то

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Иными словами, неравенство можно почленно интегрировать.

В самом деле, разность  $f(x) - \varphi(x) \geq 0$ , поэтому согласно свойству 5

$$\int_a^b (f(x) - \varphi(x)) dx \geq 0.$$

Откуда

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \geq 0 \quad \text{и}$$

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b \varphi(x) dx.$$

7. Если  $f(x)$  – непрерывная на отрезке  $[a; b]$  функция, то на отрезке  $[a; b]$  существует хотя бы одна такая точка  $\xi$ , что

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a).$$

Обозначим через  $m$  и  $M$  соответственно наименьшее и наибольшее значения функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$ , т.е. для любого  $x \in [a; b]$  справедливо неравенство

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Применяя свойство 6, получим

$$m \int_a^b dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \int_a^b dx.$$

Но  $\int_a^b dx = b - a$ , т.к. для  $f(x) = 1$

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta x_i = b - a.$$

Поэтому

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} \leq M.$$

Введя обозначение  $\frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} = \mu$ , получим  $m \leq \mu \leq M$ .

Число  $\mu$  лежит между  $m$  и  $M$ . Так как непрерывная на отрезке  $[a; b]$  функция  $f(x)$  принимает все промежуточные значения между наименьшим  $m$  и наибольшим  $M$  значениями, то найдется такое число  $\xi \in [a; b]$ , для которого  $f(\xi) = \mu$ , откуда

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} = f(\xi)$$

и

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a).$$

Итак, определённый интеграл от непрерывной функции равен значению подынтегральной функции в некоторой внутренней точке, умноженному на длину отрезка интегрирования. Это значение называется *средним интегральным значением функции на отрезке*  $[a; b]$ .

Вычисление определённого интеграла как предела интегральной суммы имеет только теоретическое значение, почти никогда на деле не применяемое.

Получить правило вычисления определённого интеграла, имеющее практическую ценность, мы сможем очень скоро после ознакомления с двумя теоремами.

### 47.3. Производная интеграла по переменной верхней границе

Пусть  $f(x)$  – непрерывная на отрезке  $[a; b]$  функция. Рассмотрим интеграл

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Закрепим нижнюю границу  $a$  и будем изменять верхнюю границу, тогда интеграл будет функцией своей верхней границы. Чтобы подчеркнуть, что верхняя граница переменная, обозначим её через  $x$  вместо  $b$ .

Переменную интегрирования, чтобы не смешивать её с верхней границей обозначим через  $t$ . Таким образом интеграл с переменной верхней границей является функцией  $x$ :

$$I(x) = \int_a^x f(t) dt. \quad (47.6)$$

Для этой функции имеет место следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 47.2.** Производная интеграла по переменной верхней границе равна подынтегральной функции, в которой переменная интегрирования заменена верхней границей, т.е.

$$\left( \int_a^x f(t) dt \right)' = f(x). \quad (47.7)$$

Доказательство. Найдем производную функции (47.6), исходя из определения (см. часть 1, стр. 175, п. 13.2).

Дадим  $x$  приращение  $\Delta x$ , тогда:

$$I(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

Следовательно, приращение функции  $I(x)$  равно:

$$\Delta I = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt. \quad (47.8)$$

Разделим отрезок  $[a; x + \Delta x]$  точкой  $x$  на два отрезка  $[a; x]$  и  $[x; x + \Delta x]$ .

Поэтому на основании свойства 4 определённого интеграла:

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt. \quad (47.9)$$

Тогда на основании формулы (47.9) соотношение (47.8) примет вид

$$\Delta I = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt. \quad (47.10)$$

Применим к интегралу в правой части (47.10) теорему о среднем значении, тогда

$$\Delta I = f(\xi) \Delta x, \text{ где } \xi \in [x; x + \Delta x].$$

Разделим обе части последнего равенства на  $\Delta x$ :

$$\frac{\Delta I}{\Delta x} = f(\xi), \quad \xi \in [x; x + \Delta x]. \quad (47.11)$$

Перейдя в равенстве (47.11) к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ , получим искомую формулу (47.7).

Доказанная теорема является одной из основных теорем математического анализа. Её смысл в том, что *интеграл с переменной верхней границей есть одна из первообразных подынтегральной функции*.

#### 47.4. Формула Ньютона-Лейбница

В предыдущем пункте мы установили, что функция

$$I(x) = \int_a^x f(t) dt$$

является первообразной для непрерывной подынтегральной функции  $f(x)$ .

Известно, что все первообразные функции отличаются друг от друга постоянным слагаемым. Поэтому, если  $F(x)$  – другая первообразная для  $f(x)$ , то  $I(x) = F(x) + C$  или

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C. \quad (47.12)$$

Подставим в эту формулу  $x = a$  и учитывая, что

$$\int_a^a f(t) dt = 0, \text{ получим}$$

$$F(a) + C = 0 \text{ или } C = -F(a).$$

Подставив это значение  $C$  в (47.12) и положив  $x = b$ , найдем

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a). \quad (47.13)$$

Эта формула Ньютона-Лейбница. Из неё следует, что

*Определённый интеграл – это приращение первообразной функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$ .*

Вследствие этой формулы, определённый интеграл и вычисляется как приращение первообразной, а не как предел интегральной суммы.

ПРИМЕР 47.1. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx.$$

Р е ш е н и е:  $I = -\cos x|_0^{\pi/2} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos 0 = 1.$

#### 47.5. Замена переменной в определённом интеграле

Предположим, что нужно вычислить определённый интеграл

$$\int_a^b f(x) \, dx, \text{ где}$$

$f(x)$  – непрерывная на отрезке  $[a; b]$  функция. Перейдем от переменной  $x$  к переменной  $t$ , положив:

$$x = \varphi(t). \quad (47.14)$$

Пусть:

$$\varphi(\alpha) = a,$$

$$\varphi(\beta) = b.$$

Предположим, кроме того, что

1. Функция  $\varphi(t)$  и её производная  $\varphi'(t)$  непрерывны на отрезке  $[\alpha; \beta]$ ;
2. При изменении  $t$  от  $\alpha$  до  $\beta$  значения функции  $\varphi(t)$  не выходят за пределы отрезка  $a \leq x \leq b$ .

При выполнении этих условий имеет место следующая формула замены переменной в определённом интеграле:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt. \quad (47.15)$$

В самом деле, пусть  $F(x)$  – первообразная для функции  $f(x)$ , т.е.  $F'(x) = f(x)$ . Тогда по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a). \quad (47.16)$$

Если в первообразной  $F(x)$  положить  $x = \varphi(t)$ , то функция  $F(\varphi(t))$  будет первообразной для подынтегральной функции преобразованного интеграла

$$f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

В самом деле, применяя правило дифференцирования сложной функции, получим:

$$(\varphi'(t))_t = (F(x))'_t = F'_x \cdot x'_t = f(x) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Поэтому по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a). \quad (47.17)$$

Равенство правых частей формул (47.16) и (47.17) и доказывает справедливость формулы (47.15).

Рассмотрим два примера.

ПРИМЕР 47.2. Вычислить интеграл  $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 20}}.$

Р е ш е н и е:  $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 20}} =$   
 $= \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 20)' = t, \quad x + 2 = t, \\ \alpha = a + 2 = 2, \quad \beta = b + 2 = 3 \end{array} \right| =$   
 $= \int_2^3 \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 16}} = \ln \left| t + \sqrt{t^2 + 16} \right| \Big|_2^3 = \ln 8 - \ln(2 + \sqrt{20}) = \ln \frac{8}{2 + \sqrt{20}}.$

ПРИМЕР 47.3. Вычислить интеграл  $I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx.$

Р е ш е н и е:  $I = \left| \begin{array}{l} x = a \sin t, \quad x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ dx = a \cos t dt, \quad x = a \Rightarrow t = \pi/2 \end{array} \right| =$   
 $= \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt =$   
 $= \frac{a^2}{2} \left( t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4}.$

### 47.6. Интегрирование по частям в определённом интеграле

Пусть  $u(x)$  и  $v(x)$  – функции, непрерывные вместе со своими производными на отрезке  $[a; b]$ .

Очевидно:

$$d(uv) = v du + u dv.$$

Интегрируя это соотношение в пределах от  $a$  до  $b$ , получим

$$\begin{aligned} \int_a^b duv &= uv|_a^b = \int_a^b v du + \int_a^b u dv, \text{ откуда} \\ \int_a^b u dv &= uv|_a^b - \int_a^b v du. \end{aligned} \quad (47.18)$$

Формула (47.18) называется формулой интегрирования по частям в определённом интеграле.

ПРИМЕР 47.4. Найдите  $I = \int_0^{\pi} x \sin x dx$ .

Р е ш е н и е:  $I = \left| \begin{array}{l} u = x, \\ dv = \sin x dx, \end{array} \quad \begin{array}{l} du = dx \\ v = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x|_0^{\pi} +$   
 $+ \int_0^{\pi} \cos x dx = \pi + \sin x|_0^{\pi} = \pi.$



## 47.7. Геометрический смысл определённого интеграла

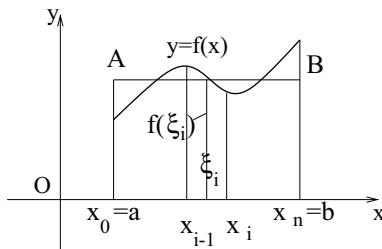


Рис. 40. Криволинейная трапеция

Пусть  $f(x) \geq 0$  на  $[a; b]$ . Фигура, ограниченная отрезком  $[a; b]$  оси  $Ox$ , частью графика функции  $y = f(x)$  и двумя прямыми  $x = a$  и  $x = b$ , называется криволинейной трапецией.

Для нахождения её площади поступим следующим образом.

1. Произвольным образом точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

разобьём отрезок  $[a; b]$  на частичные (элементарные) отрезки

$$[x_0; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_{n-1}; x_n], \quad \lambda = \max_{i=1,2,\dots,(n-1)} |x_{i+1} - x_i|.$$

2. На каждом элементарном отрезке выберем по одной произвольной точке  $\xi_i$ .

3. С небольшой погрешностью можем принять, что на протяжении каждого элементарного отрезка функция  $f(x)$  постоянна и равна её значению  $f(\xi_i)$  в произвольно выбранной точке. Фактически мы заменяем площадь элементарной криволинейной трапеции с основанием  $[x_i; x_{i-1}]$  на площадь прямоугольника с тем же основанием и высотой  $f(\xi_i)$  (рис. 40).

Тогда

$$S \approx f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

4. За точное значение площади примем предел этой интегральной суммы при  $\lambda \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow +\infty$ ):

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad \text{т.е.} \quad S = \int_a^b f(x) dx. \quad (47.19)$$

Последнее равенство выражает геометрический смысл определённого интеграла: *интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции  $y = f(x) \geq 0$ , осью  $Ox$  и вертикальными прямыми  $x = a$  и  $x = b$ .*

#### 47.8. Физический смысл определённого интеграла

Пусть материальная точка совершает прямолинейное движение, причём её скорость является функцией времени:  $V = V(t) > 0$ . Найдём путь, пройденный точкой за промежуток времени  $t = \alpha$  до  $t = \beta$ .

Поскольку движение не является равномерным, мы не можем вычислить путь по формуле

$$S = V \cdot t. \quad (47.20)$$

Поэтому для подсчёта пути поступим следующим образом.

1. Разобьём отрезок  $[\alpha; \beta]$  оси  $Ot$  произвольным образом на частичные отрезки точками  $t_0 = \alpha < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$  с длинами  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ .

2. На каждом частичном отрезке выберем по одной произвольной точке  $\tau_i$ .

3. Если эти отрезки достаточно малы, то без большой погрешности движение на каждом отрезке можно считать равномерным со скоростью, равной значению функции  $V(t)$  в произвольно выбранной точке. Тогда

$$S \approx V(\tau_1) \Delta t_1 + V(\tau_2) \Delta t_2 + \dots + V(\tau_n) \Delta t_n = \sum_{i=1}^n V(\tau_i) \Delta t_i. \quad (47.21)$$

4. За точное значение пройденного пути примем предел интегральной суммы (47.21) при условии, что число частичных отрезков неограниченно возрастает и каждый из них стягивается в точку:

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n V(\tau_i) \Delta t_i, \quad \text{т.е.} \quad S = \int_{\alpha}^{\beta} V(t) dt. \quad (47.22)$$

Последнее равенство выражает физический смысл определённого интеграла: *пройденный путь равен определённому интегралу от скорости по времени.*

ЗАМЕЧАНИЕ 47.1. Если скорость материальной точки  $V(t)$  может менять знак (направление её движения меняется), то пройденный путь равен определённому интегралу от модуля скорости:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} |V(t)| dt. \quad (47.23)$$

## Практическое занятие 47. Определённый интеграл

Вспомним определение интеграла как предела интегральных сумм и применим его при решении следующих двух задач.

ПРИМЕР 47.1. Составить формулу для вычисления интегральных сумм для функции  $f(x)$ , непрерывной на отрезке  $[a; b]$ , разделяя этот отрезок на  $n$  равных элементарных отрезков и взяв в качестве внутренней точки  $\xi_i$  правый конец каждого отрезка.

Решение: Обозначим длину каждого частичного отрезка через  $h$ :

$$h = \frac{b - a}{n}.$$

Координаты точек деления:

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h \dots, \quad x_i = a + ih.$$

Значения функции  $f(x)$  в правых концах частичных отрезков:

$$f(a + h), \quad f(a + 2h), \quad \dots, \quad f(a + nh).$$

Умножая каждое из этих значений на длину частичного отрезка  $h$  и составив сумму таких произведений, получим интегральную сумму

$$\begin{aligned} S_n &= f(a + h) \cdot h + f(a + 2h) \cdot h + \dots + f(a + nh) \cdot h = \\ &= h \sum_{i=1}^n f(a + ih). \end{aligned}$$

ПРИМЕР 47.2. Вычислить интеграл  $\int_a^b x dx$  ( $a < b$ ), как предел интегральной суммы.

**Р е ш е н и е:** Предпримем такое разбиение отрезка интегрирования  $[a; b]$  на части, чтобы абсциссы точек деления образовали геометрическую прогрессию (иными словами – длины отрезков образовывали геометрическую прогрессию).

Если знаменатель прогрессии обозначить  $q$  ( $q > 1$ ), то абсциссы точек деления будут такими:

$$x_0 = a, \quad x_1 = aq, \quad x_2 = aq^2, \quad \dots, \quad x_n = aq^n = b.$$

Заметим на будущее, что  $q^n = \frac{b}{a}$ .

Длины частичных отрезков равны

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0 = a(q - 1), \quad \Delta x_2 = x_2 - x_1 = aq(q - 1), \quad \dots$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = aq^{i-1}(q - 1).$$

Значения функции  $f(x) = x$  в левом конце каждого отрезка равны

$$a, \quad aq, \quad aq^2, \quad \dots, \quad aq^{n-1}.$$

Умножим эти значения на соответствующие длины отрезков и составим суммы таких произведений:

$$\begin{aligned} S_n &= a^2(q - 1) + (aq)^2(q - 1) + \dots + (aq^{n-1})^2(q - 1) = \\ &= a^2(q - 1) \sum_{i=0}^{n-1} q^{2i}. \end{aligned}$$

Сумма геометрической прогрессии

$$S = \frac{q^{2n} - 1}{q^2 - 1} = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1}{q^2 - 1} \text{ и } q \rightarrow 1 \text{ при } n \rightarrow +\infty.$$

Поэтому

$$\int_a^b x \, dx = a^2 \lim_{\substack{q \rightarrow 1 \\ n \rightarrow +\infty}} (q - 1) \frac{\frac{b^2}{a^2} - 1}{q^2 - 1} = a^2 \left( \frac{b^2}{a^2} - 1 \right) \lim_{q \rightarrow 1} \frac{q - 1}{q^2 - 1} = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Видно, что составление интегральных сумм и нахождение их пределов – дело весьма сложное.

К счастью существует и второе определение определённого интеграла – как приращение первообразной для функции  $f(x)$  на отрезке

$[a; b]$ . С помощью такого определения решение последнего примера уместится в одной строке:

$$\int_a^b x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Найдем ещё несколько интегралов с помощью формулы Ньютона-Лейбница.

ПРИМЕР 47.3. *Найти*  $I = \int_0^1 (x-2)^3 dx$ .

Р е ш е н и е:  $I = \frac{(x-2)^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} - 4 = -3,75$ .

ПРИМЕР 47.4. *Найти*  $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 + 1}$ .

Р е ш е н и е:  $I = \arctg x \Big|_1^{\sqrt{3}} = \arctg \sqrt{3} - \arctg 1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ .

ПРИМЕР 47.5. *Найти*  $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 4}$ .

Р е ш е н и е:  $I = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| \Big|_0^1 = \frac{1}{4} (\ln \frac{1}{3} - \ln 1) = \frac{1}{4} \ln \frac{1}{3} = -\frac{1}{4} \ln 3$ .

Напомним, что при замене переменной  $x = \varphi(t)$  в определённом интеграле  $\int_a^b f(x) dx$  после нахождения первообразной не следует возвращаться к переменной  $x$ , если найдены значения  $t = \alpha$  и  $t = \beta$  соответствующие значениям  $x = a$  и  $x = b$ .

ПРИМЕР 47.6. *Вычислить интеграл*  $I = \int_1^9 \frac{\sqrt{x} dx}{x + 2\sqrt{x}}$ .

Р е ш е н и е: Сделаем подстановку  $x = t^2$ , откуда  $dx = 2t dt$ . Найдем пределы изменения  $t$ :

$$1 = t^2 \Rightarrow t = 1, \quad 9 = t^2 \Rightarrow t = 3.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 \frac{2t^2 dt}{t^2 + 2t} = 2 \int_1^3 \frac{t dt}{t + 2} = 2 \int_1^3 \frac{t + 2 - 2}{t + 2} dt = \\ &= 2 \int_1^3 \left( 1 - \frac{2}{t + 2} \right) dt = 2 (t - 2 \ln |t + 2|) \Big|_1^3 = 4 \left( 1 - \ln \frac{5}{3} \right). \end{aligned}$$

ПРИМЕР 47.7. Вычислить интеграл  $I = \int_3^{10} \frac{dx}{(x-4)\sqrt{x+6}}$ .

Р е ш е н и е: Сделав подстановку  $x + 6 = t^2$ ,  $dx = 2t dt$ , найдем пределы изменения  $t$ :

$$\text{при } x = 3 \quad t = 3,$$

$$\text{при } x = 10 \quad t = 4.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I &= \int_3^4 \frac{2t dt}{(t^2 - 10)t} = 2 \frac{1}{2\sqrt{10}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{10}}{t + \sqrt{10}} \right| \Big|_3^4 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{10}} \left( \ln \left| \frac{4 - \sqrt{10}}{4 + \sqrt{10}} \right| - \ln \left| \frac{3 - \sqrt{10}}{3 + \sqrt{10}} \right| \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{10}} \ln \left| \frac{(4 - \sqrt{10})(3 + \sqrt{10})}{(4 + \sqrt{10})(3 - \sqrt{10})} \right| = \frac{1}{\sqrt{10}} \ln \frac{7 + 2\sqrt{10}}{3}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 47.8. Вычислить интеграл  $I = \int_0^{2a} \sqrt{2ax - x^2} dx$ .

Р е ш е н и е: Сделаем первую подстановку:  $\frac{1}{2}(2ax - x^2)' = t$  или  $a - x = t$ , откуда  $x = a - t$ ,  $dx = -dt$ ,  $2ax - x^2 = a^2 - t^2$ ,  $x = 0 \Rightarrow t = a$ ,  $x = 2a \Rightarrow t = -a$ .

Следовательно,  $I = \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - t^2} dt$ .

Сделаем вторую подстановку:  $t = a \sin z$ ,  $dt = a \cos z \, dz$ ,  $\sqrt{a^2 - t^2} = a \cos z$ ,  $t = -a \Rightarrow z = -\frac{\pi}{2}$ ,  $t = a \Rightarrow z = \frac{\pi}{2}$ . Поэтому

$$\begin{aligned} I &= a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 z \, dz = a^2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2z) \, dz = \\ &= a^2 \left( z + \frac{\sin 2z}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{2}. \end{aligned}$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 47.1.** При нахождении пределов изменения  $z$  мы брали отрезок  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ , так как он удовлетворяет условиям 1,2.

**ЗАМЕЧАНИЕ 47.2.** При вычислении интеграла от чётной функции в пределах, симметричных относительно нуля мы воспользовались соотношением

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 z \, dz = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 z \, dz.$$

В заключение этого практического занятия найдем интегралы с помощью формулы интегрирования по частям.

**ПРИМЕР 47.9.** Вычислить интеграл  $I = \int_0^1 x e^x \, dx$ .

**Р е ш е н и е:**

$$I = \left| \begin{array}{l} u = x; \\ dv = e^x \, dx; \end{array} \quad \begin{array}{l} du = dx \\ v = e^x \end{array} \right| = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = e - e^x \Big|_0^1 = 1.$$

**ПРИМЕР 47.10.** Вычислить интеграл  $I = \int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx$ .

**Р е ш е н и е:**

$$I = \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x; \\ dv = x \, dx; \end{array} \quad \begin{array}{l} du = \frac{dx}{x^2+1} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1}\right) dx = \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} (x - \operatorname{arctg} x) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

### Самостоятельная работа

ПРИМЕР 47.11. Составить формулу для вычисления интегральных сумм для функции  $f(x)$ , непрерывной на отрезке  $[a; b]$ , разделяя этот отрезок на  $n$  равных элементарных отрезков и взяв в качестве внутренней точки  $\xi_i$  левый конец каждого отрезка.

ПРИМЕР 47.12. Составить формулу для вычисления интегральных сумм для функции  $y = e^x$  на отрезке  $[a; b]$  разделяя его на  $n$  равных отрезков и взяв в качестве внутренней точки  $\xi_i$  правый конец каждого отрезка.

ПРИМЕР 47.13. Вычислить  $\int_a^b x dx$ , составив интегральную сумму для функции  $f(x) = x$ . Отрезок  $[a; b]$  разделить на  $n$  частей произвольным образом. В качестве внутренней точки  $\xi_i$  взять середину каждого частичного отрезка.

Найти интегралы, пользуясь формулой Ньютона-Лейбница.

ПРИМЕР 47.14.  $I = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

ПРИМЕР 47.15.  $I = \int_2^3 e^x dx.$

ПРИМЕР 47.16.  $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}.$

ПРИМЕР 47.17. Вычислить интеграл  $I = \int_1^4 \frac{\sqrt{x} dx}{1+\sqrt{x}}.$



ПРИМЕР 47.18. Вычислить интеграл  $I = \int_0^{1/4} \frac{dx}{(4x+1)\sqrt{x}}$ .

ПРИМЕР 47.19. Вычислить интеграл  $I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ .

ПРИМЕР 47.20. Вычислить интеграл  $I = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$ .

Указание. Сделать подстановку  $x = \cos t$ .

ПРИМЕР 47.21. Вычислить интеграл  $I = \int_0^1 \arcsin x dx$ .

ПРИМЕР 47.22. Вычислить интеграл  $I = \int_0^\pi x \cos x dx$ .

## Лекция 48. Приложения определённого интеграла

Площадь, длина дуги, поверхность вращения. Объём тела по известным поперечным сечениям. Объём тела вращения. Длина дуги плоской кривой. Криволинейный интеграл по длине дуги. Поверхность тела вращения. Физические приложения определённого интеграла.

### 48.1. Площадь фигуры в декартовой системе координат

Воспользуемся известной нам формулой (47.19) нахождения площади криволинейной трапеции в декартовых координатах.

ПРИМЕР 48.1. Найти площадь эллипса, определяемого уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Решение: Найдем площадь четверти эллипса, изображенного на рис. 41. Он ограничен кривой

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad x \in [0; a].$$

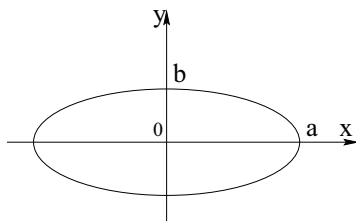


Рис. 41. К вычислению площади эллипса

Поэтому

$$\frac{1}{4}S = \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Воспользуемся подстановкой указанной в п. 45.2.3:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}S &= |x = a \sin t, x = 0 \Rightarrow t = 0, x = a \Rightarrow t = \pi/2| = \\ &= \frac{b}{a} \cdot a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = ab \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = ab \left( \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi ab}{4}. \end{aligned}$$

Площадь же всего эллипса в четыре раза больше.

$$S = \pi ab.$$

При  $a = b = R$  получаем известную формулу площади круга  $S = \pi R^2$ .

Пусть теперь плоская фигура такова, что любая вертикальная прямая пересекает её границу не более, чем в двух точках (рис. 42).

Следовательно, в области выполняются условия такого типа:

$$\begin{aligned} a &\leq x \leq b, \\ y_{\text{н}}(x) &\geq y_{\text{в}}(x). \end{aligned}$$

Тогда согласно геометрическому смыслу определённого интеграла

$$S_{ABCD} = \int_a^b (y_{\text{в}}(x) - y_{\text{н}}(x)) dx. \quad (48.1)$$

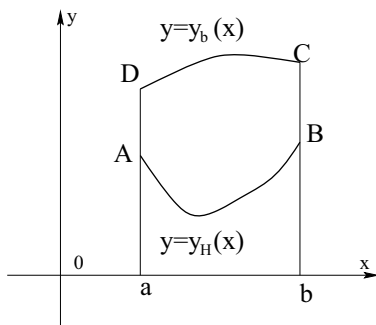


Рис. 42. К вычислению площади плоской фигуры

Эта формула справедлива для любого расположения кривых (в верхней или в нижней полуплоскостях), лишь бы выполнялось условие

$$y_b(x) \geq y_n(x) \text{ для } x \in [a; b].$$

Если же кривая задана в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

то

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt. \quad (48.2)$$

Эта формула получается из формулы (47.19) формальной подстановкой  $y = f(x) = y(t)$ ,  $dx = x'(t) dt$ . Значения параметра  $t_1$  соответствуют нижней границе  $a$ ,  $t_2$  – верхней границе  $b$ .

**ПРИМЕР 48.2.** Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

и осью абсцисс.

**Решение:** Границам первой арки циклоиды соответствуют значения  $t_1 = 0$  и  $t_2 = 2\pi$  (рис. 43).

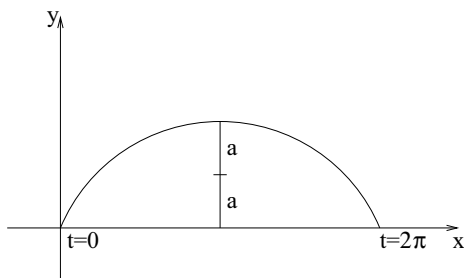


Рис. 43. К решению примера 48.2.

Поэтому

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)(a(t - \sin t))' dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = \\
 & = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left( 1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt = \\
 & = a^2 \left( \frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.
 \end{aligned}$$

Выведем теперь формулу для нахождения площади, если одна из границ дана в полярных координатах  $r = r(\varphi)$ . Найдем вначале площадь криволинейного сектора  $OAB$  (рис. 44).

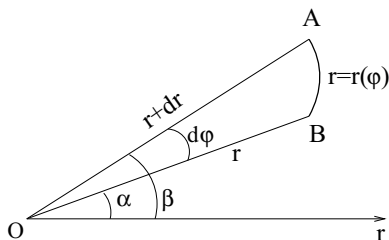


Рис. 44. К выводу формулы площади в полярных координатах

С точностью до бесконечно малых высших порядков по сравнению  $d\varphi$  мы можем вычислить площадь этой фигуры, как площадь кругового сектора. Поэтому  $dS = \frac{1}{2}r^2 d\varphi$ , откуда

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi. \quad (48.3)$$

**ПРИМЕР 48.3.** Найти площадь одного лепестка кривой  $r = \cos 3\varphi$  (рис. 45).

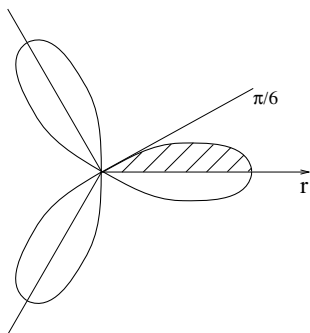


Рис. 45. К решению примера 48.3

**Решение:**

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} \cos^2 3\varphi d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} (1 + \cos 6\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \left( \varphi + \frac{\sin 6\varphi}{6} \right) \Big|_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

#### 48.2. Вычисление объёма тела по известным поперечным сечениям

Пусть мы хотим определить объём  $V$  некоторого тела. Предположим, что нам известны площади сечений этого тела плоскостями,

перпендикулярными оси  $Ox$ . Назовем эти сечения поперечными. Очевидно, что они являются функциями переменной  $x$ :  $S = S(x)$ . Обозначим через  $a$  и  $b$  абсциссы самой левой и самой правой точек тела.

Разобьем отрезок  $[a, b]$  на  $n$  частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Проведем через эти точки плоскости, перпендикулярные оси  $Ox$ . Эти плоскости разрежут тело на  $n$  слоев. Обозначим объём слоя, заключенного между двумя плоскостями, проведенными через точки  $x_{i-1}$  и  $x_i$  через  $\Delta v_i$ . Тогда

$$V = \Delta v_1 + \Delta v_2 + \dots + \Delta v_n = \sum_{i=1}^n \Delta v_i.$$

Рассмотрим один из слоев, заключенный между плоскостями, проведенными через точки  $x_{i-1}$  и  $x_i$ . Его объём приближённо равен объёму прямого цилиндра, высота которого равна  $[x_1 - x_{i-1}]$ , а основание совпадает с поперечным сечением в какой-то точке  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ .

Объём такого цилиндра равен произведению площади основания на высоту:  $s(\xi_i)\Delta x_i$ .

Поэтому объём тела приближённо будет равен:

$$V \approx \sum_{i=1}^n s(\xi_i)\Delta x_i. \quad (48.4)$$

За точное значение объёма примем предел интегральной суммы (48.4) при условии, что диаметр разбиения отрезка стремится к нулю:

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n s(\xi_i)\Delta x_i. \quad (48.5)$$

Окончательно получаем:

$$V = \int_a^b s(x) dx. \quad (48.6)$$

**ПРИМЕР 48.4.** Найти объём эллипсоида  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

**Решение:** Найдем площадь сечения эллипсоида плоскостью, перпендикулярной оси  $Ox$ . Её уравнение  $x = d$  ( $d \in [-a; a]$ ). Подставив в уравнение эллипсоида  $x = d$ , найдем, что в сечении получится

ЭЛЛИПС

$$\frac{y^2}{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - d^2)} + \frac{z^2}{\frac{c^2}{a^2}(a^2 - d^2)} = 1$$

с полуосями  $a_1 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - d^2}$  и  $b_1 = \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - d^2}$ .

Его площадь (см. пример 48.2)

$$S = \pi a_1 b_1 = \frac{\pi bc}{a^2}(a^2 - d^2).$$

А теперь положим  $d = x$  ( $-a \leq x \leq a$ ). Тогда площадь поперечного сечения эллипсоида станет функцией:

$$S(x) = \frac{\pi bc}{a^2}(a^2 - x^2).$$

И объём эллипсоида найдем по формуле (48.6):

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^a S(x) dx = 2\pi \int_0^a \frac{bc}{a^2}(a^2 - x^2) dx = \\ &= 2\pi \frac{bc}{a^2} \left( a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{4}{3} \pi abc. \end{aligned}$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 48.1.** Очевидно шар является эллипсоидом с одинаковыми полуосями  $a = b = c = R$ .

Поставив это значение  $R$  в формулу объёма эллипсоида вместо  $a$ ,  $b$  и  $c$  получим известную формулу объёма шара  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ .

### 48.3. Объём тела вращения

Пусть криволинейная трапеция (рис. 46) вращается вокруг оси  $Ox$ .

Очевидно, что поперечные сечения образующегося тела представляют собой круги, площадь которых  $S$  зависит от  $x$  и определяется ординатой вращающейся кривой

$$S(x) = \pi y^2.$$

Подставив это значение в формулу (48.6), получим

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx. \quad (48.7)$$

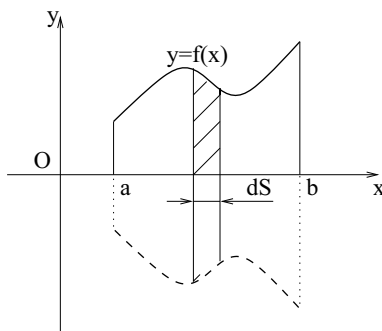


Рис. 46. Объём тела вращения

**ПРИМЕР 48.5.** Найти объём тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями  $y = (x - 1)^2$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$  вокруг

- а) оси абсцисс,  
б) оси ординат.

**Р е ш е н и е:** Пользуемся формулой (48.7) и такой же с заменой  $x$  на  $y$  и  $y$  на  $x$ .

$$\text{а) } V_x = \pi \int_0^1 (x-1)^4 dx = \pi \frac{(x-1)^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{5};$$

$$\text{б) } V_y = \pi \int_0^1 (\sqrt{y} + 1)^2 dy = \pi \left( \frac{y^2}{2} + \frac{4}{3} y^{3/2} + y \right) \Big|_0^1 = \frac{17\pi}{6}.$$

#### 48.4. Длина дуги плоской кривой

Пусть дана кривая  $L$  с начальной точкой  $A$  и конечной  $B$  (рис. 47). Разделим её на ряд элементарных дуг точками  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ . Положив  $A = A_0$ ,  $B = A_n$  и соединив соседние точки деления отрезками, получим ломаную  $A_0 A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 48.1.** Длиной дуги плоской кривой  $L$  называется предел, к которому стремится периметр вписанной в эту дугу ломаной при условии, что число звеньев неограниченно возрастает и длина каждого из звеньев стремится к нулю.

Впишем в дугу  $\overset{\frown}{AB}$  ломаную  $A_0 A_1 \dots A_n$ .



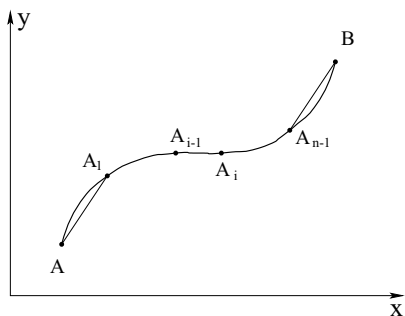


Рис. 47. К выводу формулы для длины дуги

Тогда периметр этой ломаной будет

$$\sum_{i=1}^n \Delta l_i,$$

где  $\Delta l_i$  — длина звена  $A_{i-1}A_i$ . По теореме Пифагора:

$$\Delta l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}.$$

Применим к отрезку  $[x_{i-1}; x_i]$  теорему Лагранжа:

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \text{ или}$$

$$y_i - y_{i-1} = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \text{ или}$$

$$\Delta y_i = f'(\xi_i)\Delta x_i \text{ и}$$

$$\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{\Delta x_i^2 + f'^2(\xi_i)\Delta x_i^2} = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i.$$

В последнем равенстве  $\xi_i$  принадлежит отрезку  $[x_{i-1}; x_i]$ , но где точно она лежит неизвестно.

Вспомним, что в определении интеграла как предела интегральных сумм присутствуют произвольно выбранные точки  $\xi_i$ . Так вот, в качестве «произвольных» точек выберем точки  $\xi_i$ , о существовании которых говорится в теореме в Лагранжа.

Тогда периметр ломаной

$$\sum_{i=1}^n \Delta l_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i. \quad (48.8)$$

Но (48.8) есть интегральная сумма для функции  $1 + f'^2(x)$  на отрезке  $[a; b]$ . Поэтому

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (48.9)$$

Выражение

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (48.10)$$

называется дифференциалом дуги в декартовых координатах.

Если плоская дуга задана в параметрическом виде  $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$  то

$$dl = \sqrt{x'^2 dt^2 + y'^2 dt^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

и длина дуги в параметрическом виде может быть найдена по формуле

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

Если же в формуле (48.10) перейти к полярным координатам по формулам

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases}$$

то надо найти

$$dx = (r \cos \varphi)'_{\varphi} d\varphi = (r' \cos \varphi - r \sin \varphi) d\varphi,$$

$$dy = (r \sin \varphi)'_{\varphi} d\varphi = (r' \sin \varphi + r \cos \varphi) d\varphi.$$

Подставив найденные дифференциалы в формулу (48.10), получим

$$dl = \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi, \text{ откуда}$$

длина дуги в полярных координатах равна

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi. \quad (48.11)$$

**ПРИМЕР 48.6.** Вычислить длину дуги кривой  $y = \ln x$  от точки с абсциссой 1 до точки с абсциссой  $\sqrt{3}$ .

**Решение:**

$$L = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx.$$

Применив подстановку

$$x = \operatorname{tg} t \implies dx = \frac{dt}{\cos^2 t},$$

получим

$$\begin{aligned} L &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dt}{\sin t \cos^2 t} = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin t \cos^2 t} dt = \left( \frac{1}{\cos t} + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| \right) \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \\ &= 2 - \sqrt{2} - \ln \left( \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \right) = 0,92. \end{aligned}$$

**ПРИМЕР 48.7.** Найти длину одной арки циклоиды (см. пример 48.2).

**Решение:**

$$\begin{aligned} l &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{(t - \sin t)^2 + (1 - \cos t)^2} dt = \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = \\ &= -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = -4a(-1 - 1) = 8a. \end{aligned}$$

#### 48.5. Криволинейный интеграл по длине дуги

Пусть кривая  $L$  (рис 47) находится в скалярном поле, определяемом функцией  $u = f(x; y)$ . По аналогии с пунктом 45.2.3 для кривой  $L$ , определяемой уравнением  $y = y(x)$  введем интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i; y(\xi_i)) \Delta l_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i; y(\xi_i)) \sqrt{1 + y'^2(\xi_i)} \Delta x_i. \quad (48.12)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 48.2.** Предел интегральной суммы (48.12) при условии, что все  $\Delta l_i \rightarrow 0$ , и, следовательно,  $n \rightarrow +\infty$ , называется криволинейным интегралом по длине дуги в скалярном поле  $u = f(x; y)$ , или криволинейным интегралом 1-го рода, и обозначается

$$\int_L f(x; y(x)) dl = \int_{AB} f(x; y(x)) dl = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ (\max \Delta l_i \rightarrow 0)}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i; y(\xi_i)) \Delta l_i, \quad (48.13)$$

где дифференциал дуги  $dl = \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$ .

Если кривая  $L$  задана в параметрическом виде  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  или в полярных координатах  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , то криволинейный интеграл по длине дуги будет вычисляться в соответствие с выражением дифференциала дуги (см. п. 45.2.3) по формулам:

$$\int_{AB} f(x; y) dl = \int_{t_A}^{t_B} f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt \quad \text{или} \quad (48.14)$$

$$\int_{AB} f(x; y) dl = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} f(r \cos \varphi; r \sin \varphi) \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} d\varphi, \quad (48.15)$$

где  $t_A$ ,  $t_B$ ,  $\varphi_A$ ,  $\varphi_B$  - значение параметра  $t$  или полярного угла  $\varphi$  в точках  $A$  и  $B$ .

**ПРИМЕР 48.8.** Вычислить криволинейный интеграл по дуге окружности  $x = R \cos t$ ,  $y = R \sin t$  от точки  $A(0; R)$  до точки  $B(R; 0)$  от функции  $f(x; y) = x \cdot y$

**Решение:** По формуле (48.14)

$$\int_{AB} f(x; y) dl = \int_{t_A}^{t_B} xy \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

Из условия  $0 = R \cos t$  определяем  $t_B = \frac{\pi}{2}$ , из условия  $R = R \cos t$  находим  $t_A = 0$ . Поскольку  $x'_t = -R \sin t$ ,  $y'_t = R \cos t$  получаем:

$$\begin{aligned} \int_{AB} f(x; y) dl &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cos t \cdot R \sin t \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} dt = \\ &= R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt = R^3 \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^2}{2}. \end{aligned}$$

Следует обратить внимание на то, что точки  $A$  и  $B$  выбирались таким образом, чтобы выполнялось условие  $t_A < t_B$ .

Установим физический смысл криволинейного интеграла по длине дуги. Пусть вдоль кривой  $AB$  распределена масса с линейной плотностью  $\gamma = f(x; y)$ . Напомним, что линейной плотностью массы  $f(x; y)$  в точке  $P(x; y)$  называется предел отношения массы участка дуги  $AB$ , содержащего точку  $P$  к его длине, когда длина стремится к нулю (т.е. участок стягивается в точку  $P$ ). Тогда приближённое значение массы  $\Delta m_i$  участка  $A_{i-1}A_i$  (см. рис. 47) будет равно  $\Delta m_i \approx f(x_i; y_i) \Delta l_i$ . Суммируя, найдем приближённое значение массы всей дуги  $AB$   $m \approx \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i) \Delta l_i$ . Точное значение массы получится предельным переходом и, в соответствии с определением 48.2, будет равно криволинейному интегралу:

$$m = \int_{AB} f(x; y) dl. \quad (48.16)$$

Если  $f(x; y) = 1$  формула 48.16 переходит в формулу 48.9 для вычисления дуги  $AB$ .

**ПРИМЕР 48.9.** Найти массу проволоки, имеющей форму параболы  $y = x^2$  на участке  $x \in [0; \sqrt{2}]$ , если плотность определяется формулой  $\gamma = 3x$ .

**Решение:** По формуле 48.16, учитывая, что  $y' = 2x$ , получаем:

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{\sqrt{2}} 3x \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{3}{8} \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4x^2} d(1 + 4x^2) = \\ &= \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} (1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{4} (9^{3/2} - 1) = 6,5. \end{aligned}$$

Позже мы рассмотрим криволинейные интегралы 2-ого рода, которые имеют более широкие приложения.

#### 48.6. Площадь поверхности вращения

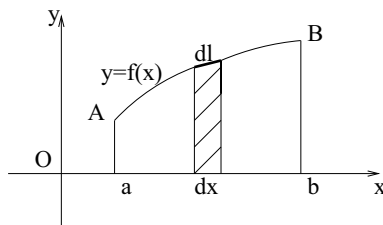


Рис. 48. К выводу формулы площади поверхности вращения

При вращении вокруг оси  $Ox$  элементарной трапеции с основанием  $dx$  получится усечённый конус, боковая поверхность которого равна произведению длины средней линии на апофему (рис. 48):

$$d\sigma = 2\pi y dl, \text{ откуда}$$

$$\sigma = 2\pi \int_a^b y dl = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (48.17)$$

**ПРИМЕР 48.10.** Вычислить объём и поверхность шара, рассматривая его как тело вращения.

**Решение:** Будем считать, что сфера образована вращением окружности  $x^2 + y^2 = R^2$  вокруг оси  $Ox$ . Чтобы найти объём шара по формуле 48.7, найдем из уравнения окружности

$$y^2 = R^2 - x^2.$$

Переменная интегрирования изменяется от  $-R$  до  $R$ . Поэтому

$$V = \pi \int_{-R}^R y^2 dx = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Вычислим теперь площадь сферы по формуле (48.17). Из уравнения окружности

$$y' = -\frac{x}{y}, \quad \sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} = \frac{R}{y}.$$

Подставляя это значение корня в (48.17), найдем

$$\begin{aligned} \sigma &= 2\pi \int_{-R}^R y \sqrt{1 + y'^2} dx = 2\pi \int_{-R}^R y \frac{R}{y} dx = \\ &= 2\pi R x \Big|_{-R}^R = 4\pi R^2. \end{aligned}$$

#### 48.7. Приложение определённого интеграла к решению физических задач

Рассмотрим два примера приложения определённого интеграла к решению физических задач.

**ПРИМЕР 48.11.** Сила тока  $I$  является заданной непрерывной функцией времени  $t$ :  $I = I(t)$ . Определить количество электричества  $Q$ , протекающего через поперечное сечение проводника за время  $T$  от момента начала эксперимента.

**Решение:** 1. Разделим отрезок времени  $[0; T]$  точками  $t_0 = 0$ ,  $t_1$ ,  $t_2$ , ...,  $t_n = T$  на  $n$  элементарных отрезков

$$[t_0; t_1], [t_1; t_2], \dots, [t_{n-1}; t_n].$$

Обозначим  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ .

2. На каждом отрезке выберем по одной произвольной точке  $\tau_i$ .

3. Будем считать, что за время  $\Delta t_i$  сила тока не изменяется и равна значению функции  $I(t)$  в произвольно выбранной внутренней точке  $\tau_i$ , т.е.  $I(\tau_i)$ .

Так как для постоянного тока количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника равно произведению силы тока на время, то на каждом элементарном отрезке

$$\Delta Q_i \approx I(\tau_i) \Delta \tau_i,$$

а на всем проводнике

$$Q \approx \sum_{i=1}^n I(\tau_i) \Delta \tau_i.$$

4. За точное значение  $Q$  примем предел этой интегральной суммы при условии, что число элементарных отрезков неограниченно возрастает и каждый из них стягивается в точку:

$$Q = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n I(\tau_i) \Delta \tau_i.$$

В последней формуле  $\lambda$  – длина наибольшего частичного отрезка. На основании формулы (47.1) окончательно получаем

$$Q = \int_0^T I(t) dt.$$

**ПРИМЕР 48.12.** Тяжёлая цепь длиной  $L = 100$  м поднимается, нависая на ворот. Определить работу силы веса при подъеме цепи, если погонный метр весит 50 кг. Размерами ворота пренебречь.

**Решение:** Пусть к некоторому моменту времени на ворот нависнул отрезок цепи длиной  $x$ . Тогда свешивается часть цепи длиной  $L - x$ . Весит эта часть  $(L - x)50$ .

Элементарная работа силы веса на перемещении  $dx$  будет равна

$$dA = -(L - x)50 dx.$$

Полную работу найдем по формуле:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^L -(L - x)50 dx = 50 \frac{(L - x)^2}{2} \Big|_0^L = \\ &= -25L^2 = -25 \cdot 100^2 = -250000. \end{aligned}$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 48.2.** Знак минус поставлен потому, что сила веса направлена противоположно перемещению.

**ПРИМЕР 48.13.** Скорость движения материальной точки выражается формулой  $V = t^2$ . Какой путь пройдет эта точка за первые 2 с движения.

**Решение:**

$$S = \int_0^2 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8}{3}.$$



## Практическое занятие 48. Приложения определённого интеграла

ПРИМЕР 48.1. Найти площадь, ограниченную графиками функций  $y = 2\sqrt{x}$  и  $y = 2x$  (см. рис. 49).

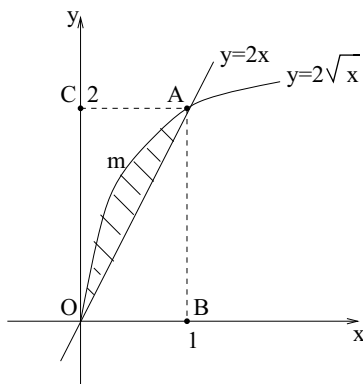


Рис. 49. К решению примера 48.1

**Решение:** Найдём площадь двумя способами.

а) Как разность площадей криволинейных трапеций с основаниями на оси  $Ox$  —  $OмAB$  и  $OAB$ :

$$S = \int_a^b (y_{\text{в}} - y_{\text{н}}) dx = \int_0^1 2\sqrt{x} dx - \int_0^1 2x dx = \frac{4}{3} x^{3/2} \Big|_0^1 - x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

б) Как разность площадей криволинейных трапеций с основаниями на оси  $Oy$  —  $OAC$  и  $OмAC$ . В этом случае вместо ординат из уравнений верхней и нижней границ области используются абсциссы из уравнений правой и левой границ области.

$$S = \int_0^2 (x_{\text{п}} - x_{\text{л}}) dy = \int_0^2 \frac{y}{2} dy - \int_0^2 \frac{y^2}{4} dy = \frac{y^2}{4} \Big|_0^2 - \frac{y^3}{12} \Big|_0^2 = \frac{1}{3}.$$

ПРИМЕР 48.2. Найти площадь, ограниченную эллипсом (рис. 50)

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$$

Решение: Воспользуемся формулой (48.2) для вычисления площади, ограниченной кривой, заданной в параметрическом виде:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t) dt.$$

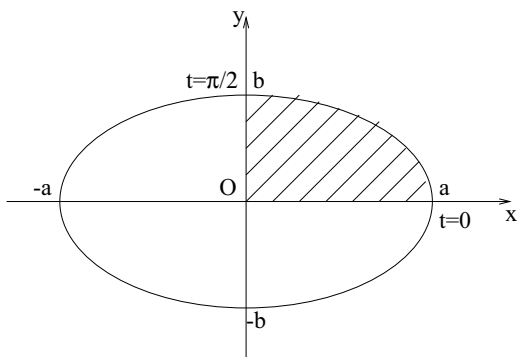


Рис. 50. К решению примера 48.2

Найдем всю площадь, как учетверённую площадь четверти эллипса. Так как  $y = b \sin t$ ,  $dx = d(a \cos t) = -a \sin t dt$  и  $t \in [\frac{\pi}{2}; 0]$ , то

$$\begin{aligned} S &= -4ab \int_{\pi/2}^0 \sin^2 t dt = -2ab \int_{\pi/2}^0 (1 - \cos 2t) dt = \\ &= -2ab \left( t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{\pi/2}^0 = \pi ab. \end{aligned}$$

Напомним, что ранее (см. упр. 48.1) мы нашли площадь того же эллипса в декартовых координатах.

ПРИМЕР 48.3. Найти площадь одного лепестка четырёхлепестковой розы  $r = a \sin 2\varphi$  (рис. 51).

**Решение:** Один лепесток ограничен кривой  $r = a \sin 2\varphi$  и двумя лучами  $\alpha = 0$  и  $\beta = \frac{\pi}{2}$ . Поэтому

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2\varphi d\varphi = \\ &= \frac{a^2}{4} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4\varphi) d\varphi = \frac{a^2}{4} \left( \varphi - \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{8}. \end{aligned}$$

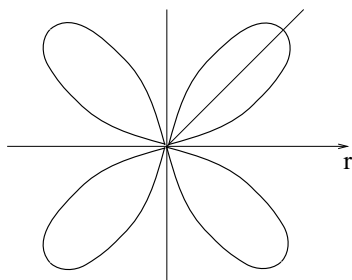


Рис. 51. К решению примера 48.3

**ПРИМЕР 48.4.** Найти объём тела вращения фигуры, ограниченной линиями  $y = 2\sqrt{x}$  и  $y = 2x$  вокруг осей  $Ox$  и  $Oy$ .

**Решение:** Этот объём равен разности двух объёмов (см. рис. 49)  $V_1$  и  $V_2$ . Здесь  $V_1$  – объём тела вращения трапеции  $OaAB$ , а  $V_2$  – треугольника  $OAB$  вокруг оси  $Ox$ .

Следовательно,

$$V_x = V_1 - V_2 = \pi \int_0^1 4x dx - \pi \int_0^1 4x^2 dx = \pi \left( 2x^2 \Big|_0^1 - 4 \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 \right) = \frac{2}{3}\pi.$$

Объём тела вращения вокруг оси  $Oy$  найдем по формуле аналогичной (48.7) с заменой  $x$  на  $y$  и  $y$  на  $x$ :

$$V_y = \pi \int_a^b x^2 dy.$$

В нашем случае

$$V_y = \pi \int_0^2 \frac{y^2}{4} dy - \pi \int_0^2 \frac{y^4}{16} dy = \pi \left( \frac{y^3}{12} \Big|_0^2 - \frac{y^5}{80} \Big|_0^2 \right) = \frac{4\pi}{15}.$$

**ПРИМЕР 48.5.** Вычислить поверхность сферы, радиуса  $R$ , рассматривая её как тело вращения.

**Решение:** Будем считать, что сфера образована вращением окружности  $x^2 + y^2 = R^2$  вокруг оси  $Ox$ . Найдем из этого соотношения

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad y' = -\frac{x}{y},$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{y^2}} = \frac{R}{y}.$$

Подставляя эти значения в формулу

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

найдем

$$S = 2\pi \int_{-R}^R y \frac{R}{y} dx = 2\pi Rx \Big|_{-R}^R = 4\pi R^2.$$

**ПРИМЕР 48.6.** Найти длину дуги кривой  $y = \ln x$  ( $x \in [1; \sqrt{3}]$ ).

**Решение:** Длина дуги в декартовых координатах находится по формуле (48.9). В нашем случае

$$l = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} dx = \left| \begin{array}{ll} x = \operatorname{tg} t & x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t} & x = \sqrt{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3} \end{array} \right| =$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dt}{\sin t \cos^2 t} = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin t \cos^2 t} dt =$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin t dt}{\cos^2 t} + \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dt}{\sin^2 t} = \left( \frac{1}{\cos t} + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| \right) \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} =$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 - \sqrt{2} - \frac{1}{2} \ln 3 - \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = 2 - \sqrt{2} - \frac{1}{2} \left( \ln 3 + \ln \frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{1 + \cos \frac{\pi}{4}} \right) = \\
 &= 2 - \sqrt{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{3(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2} + 1} \approx 0,91.
 \end{aligned}$$

ПРИМЕР 48.7. Найти длину окружности радиуса  $R$ , заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t, \end{cases}$$

Решение:  $l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt =$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(R \cos t)'^2 + (R \sin t)'^2} dt = R \int_0^{2\pi} dt = 2\pi R.$$

ПРИМЕР 48.8. Найти длину кривой  $r = 1 - \sin \varphi$ .

Решение: Длина дуги в полярных координатах находится по формуле (48.11).

Находим:  $r' = -\cos \varphi$ ,

$$\begin{aligned}
 \sqrt{r^2 + r'^2} &= \sqrt{(1 - \sin \varphi)^2 + \cos^2 \varphi} = \sqrt{2(1 - \sin \varphi)} = \\
 &= \sqrt{2 \left( 1 + \cos \left( \frac{\pi}{2} + \varphi \right) \right)} = \sqrt{4 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)} = 2 \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$l = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2 \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = 8 \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 8.$$

В заключение этого занятия решим задачу на физическое приложение определённого интеграла.

ПРИМЕР 48.9. К телу прикрепена пружина, другой конец которой закреплён неподвижно в точке  $O$ .

Упругая сила, с которой действует пружина на тело, подчиняется закону Гука, согласно которому  $F = -kx$ , где  $k$  – коэффициент пропорциональности, а  $x$  – удлинение пружины. Найти работу упругой силы при прямолинейном перемещении по линии действия силы от  $x = a$  до  $x = b$ .

**Р е ш е н и е:** Элементарная работа  $dA$  силы упругости при перемещении  $dx$  равна

$$dA = -kx dx.$$

Следовательно, вся работа при перемещении от  $a$  до  $b$  определится по формуле:

$$A = \int_a^b F(x) dx = - \int_a^b kx dx = -k \frac{x^2}{2} = \frac{k}{2}(a^2 - b^2).$$

### Самостоятельная работа

**ПРИМЕР 48.10.** Найти площадь, ограниченную линиями  $y = 0$ ,  $y = (x + 2)^2$  и  $y = 4 - x$ .

**ПРИМЕР 48.11.** Найти площадь, ограниченную астроидами 
$$\begin{cases} x = R \cos^3 \frac{t}{4}, \\ y = R \sin^3 \frac{t}{4}. \end{cases}$$

**ПРИМЕР 48.12.** Найти площадь, ограниченную кардиоидой  $r = a(1 + \cos \varphi)$ .

**ПРИМЕР 48.13.** Найти объём, ограниченный поверхностями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x + y + z = 1$ . Указание. Найти площадь сечения фигуры плоскостью  $x = \text{const}$  и воспользоваться формулой объёма тела по известным поперечным сечениям.

**ПРИМЕР 48.14.** Найти объём, тела ограниченного поверхностью вращения параболы  $y^2 = x$  вокруг оси  $Ox$  и плоскостью  $x = C$ .

**ПРИМЕР 48.15.** Найти объём прямого кругового конуса, рассматривая его как тело, полученное от вращения отрезка  $y = x$  ( $y \in [0; 1]$ ) вокруг оси  $Oy$ .

**ПРИМЕР 48.16.** Найти боковую поверхность прямого кругового конуса, рассматривая его как тело, полученное вращением отрезка  $y = 2x$  ( $x \in [0; 1]$ ) вокруг оси  $Ox$ .

**ПРИМЕР 48.17.** Найти длину дуги параболы  $y = ax^2$  ( $a > 0$ ) от вершины до произвольной точки с абсциссой  $x$ .

**ПРИМЕР 48.18.** Найти длину астройды 
$$\begin{cases} x = R \cos^3 \frac{t}{4}, \\ y = R \sin^3 \frac{t}{4}. \end{cases}$$

**ПРИМЕР 48.19.** Найти длину дуги спирали Архимеда  $r = a\varphi$  от начала координат до точки  $(r; \varphi)$ .

**ПРИМЕР 48.20.** Вычислить путь, пройденный свободно падающим в пустоте телом за  $tc$ , если известно, что скорость падения определяется формулой  $V = gt$ , ( $V_0 = 0$ ).

## Лекция 49. Несобственные интегралы

Интегралы с бесконечными пределами. Интегралы от разрывных функций. Признаки сходимости несобственных интегралов. Интегральный признак сходимости знакоположительных рядов.

Определение интеграла (47.1) основано на следующих условиях:

- областью интегрирования является отрезок  $[a; b]$ ;
- подынтегральная функция  $f(x)$  непрерывна на этом отрезке.

Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то обычное определение интеграла становится неприемлемым. Поэтому обобщим понятие определённого интеграла на случаи, когда эти условия не выполняются.

### 49.1. Интегралы с бесконечными пределами

Пусть в интеграле верхний предел бесконечный:  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ .

Поступим следующим образом:

1. Заменим бесконечный предел на конечный, например,  $b$ .
2. Вычислим  $\int_a^b f(x) dx$ . Очевидно он будет функцией переменной  $b$ .
3. Найдем предел этого интеграла при условии, что  $b \rightarrow +\infty$ .

Этот предел называют несобственным интегралом с бесконечным пределом и обозначают  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ .

Таким образом,

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (49.1)$$

Если предел существует, то несобственный интеграл называется сходящимся (существует), в противном случае – расходящимся (не существует).

ПРИМЕР 49.1. Исследовать на сходимость интеграл  $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ .

Р е ш е н и е: Заменяем бесконечный предел на конечный:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-\alpha} dx.$$

Находим интеграл, а затем его предел.

Если  $\alpha = 1$ , то первообразная равна  $\ln x$  и при  $b \rightarrow +\infty$  логарифм неограниченно возрастает – интеграл расходится.

При  $\alpha \neq -1$ :

$$I = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} \Big|_1^{+\infty}. \quad (49.2)$$

При  $\alpha < 1$  предел равен бесконечности – интеграл расходится.

При  $\alpha > 1$  предел равен  $\frac{1}{\alpha-1}$  – интеграл сходится.

Рис. 52 иллюстрирует этот пример.

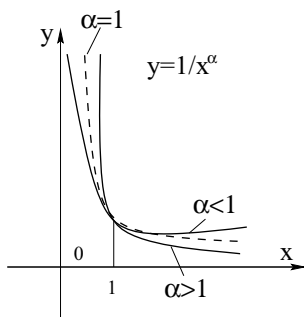


Рис. 52. К решению примера 49.1

Обратите внимание на то, что фигура, неограниченная справа может иметь площадь, имеющую предел (если соответствующая кривая при  $x > 1$  лежит ниже пунктирной).

ПРИМЕР 49.2. Вычислить интеграл  $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ .



Р е ш е н и е:

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_1^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Следовательно, интеграл существует (сходится) и равен  $\frac{\pi}{4}$ .

ПРИМЕР 49.3. Найти интеграл  $I = \int_4^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ .

Р е ш е н и е:

$$I = \int_4^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_4^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \Big|_4^b = 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} (\sqrt{b} - 2) = +\infty.$$

Таким образом, интеграл не существует (расходится).

Аналогично определяется интеграл с бесконечным нижним пределом:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (49.3)$$

Интеграл, у которого оба предела бесконечны определяется формулой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx, \quad (49.4)$$

где  $c$  — любая фиксированная точка.

Интеграл в левой части (49.4) существует (сходится), если существуют оба интеграла в его правой части.

ПРИМЕР 49.4. Исследовать на сходимостъ интеграл  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{1+x^2}$ .

Р е ш е н и е:

$$I = \int_{-\infty}^0 \frac{\operatorname{arctg} x dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{1+x^2}.$$

Вычислим первый интеграл:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 \frac{\arctg x \, dx}{1+x^2} &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{\arctg x \, dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg^2 x \Big|_a^0 = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg^2 a = -\frac{\pi^2}{8}.\end{aligned}$$

Вычислим второй интеграл:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\arctg x \, dx}{1+x^2} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{\arctg x \, dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg^2 x \Big|_0^b = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg^2 b = \frac{\pi^2}{8}.\end{aligned}$$

Поэтому

$$I = -\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{8} = 0.$$

Следовательно, интеграл существует (сходится) и равен 0.

**ЗАМЕЧАНИЕ 49.1.** Иногда замена переменной может превратить несобственный интеграл в определённый.

**ПРИМЕР 49.5.** Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

**Р е ш е н и е:** Введем новую переменную и найдем соответствующие пределы интегрирования.

$$\begin{aligned}t = \arctg x &\implies dt = \frac{dx}{1+x^2}, \quad x = -\infty \implies \\ &\implies t = -\pi/2, \quad x = +\infty \implies t = \pi/2.\end{aligned}$$

Тогда:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt = t \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 49.2. При решении примеров, связанных с несобственными интегралами допускается следующая формальная запись:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(x) \Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a),$$

где понимается, что  $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ .

## 49.2. Интегралы от разрывных функций

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на промежутке  $[a, b)$  и в точке  $b$  имеет разрыв. Что же в таком случае понимать под выражением

$$\int_a^b f(x) dx?$$

Поступим следующим образом

1. Заменим верхний предел  $b$  точкой  $b - \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ). По определению функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b - \varepsilon]$ .

2. Вычислим определённый интеграл  $\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$ .

3. Найдем предел этого определённого интеграла при  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx \quad (49.5)$$

Этот предел называют несобственным интегралом от разрывной функции. Если предел существует, то говорят, что интеграл сходится (существует). В противном случае интеграл расходится (не существует).

ПРИМЕР 49.6. Вычислить интеграл  $I = \int_0^1 \frac{dx}{x-1}$ .

Решение: Подынтегральная функция  $\frac{1}{x-1}$  имеет разрыв в точке  $x = 1$  – правой границе области интегрирования. Поэтому

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x-1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln |x-1| \Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \varepsilon = -\infty.$$

Следовательно, интеграл расходится (не существует).

Если же подынтегральная функция  $f(x)$  непрерывна на  $(a; b]$ , то интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  определяется так:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx \quad (49.6)$$

Если же точка разрыва  $x = c$  лежит внутри отрезка  $[a; b]$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (49.7)$$

Интеграл в левой части равенства называется сходящимся, если существуют оба интеграла в правой части.

**ПРИМЕР 49.7.** Исследовать на сходимость интеграл  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ .

**Решение:** Подынтегральная функция разрывная в точке  $x = 0$ . Поэтому рассмотрим отдельно интегралы  $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2}$  и  $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ . Легко убедиться, что оба интеграла не существуют. Так

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^2} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x} \Big|_{\varepsilon}^1 = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) = +\infty.$$

Следовательно, по определению не существует интеграл  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 49.3.** Если действовать формально, применяя формулу Ньютона-Лейбница, то получили бы заведомо неверный результат  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -2$ .

Эта ошибка вызвана неправильным применением формулы Ньютона-Лейбница.

**ЗАМЕЧАНИЕ 49.4.** Все виды несобственных интегралов можно определить как пределы определённых интегралов (а не пределы интегральных сумм).

### 49.3. Признаки сходимости несобственных интегралов

Иногда нет необходимости вычислять несобственный интеграл, а достаточно лишь знать сходится ли он или нет.

В таких случаях бывает полезно сравнить данный несобственный интеграл с другим, сходимость или расхождение которого заранее известна. Приведем без вывода теоремы, устанавливающие признаки сходимости или расходимости, основанные на сравнении несобственных интегралов.

**ТЕОРЕМА 49.1.** Пусть на промежутке  $[a; +\infty)$  функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  непрерывны и удовлетворяют условиям

$$0 \leq \varphi(x) \leq f(x).$$

Тогда

а) если интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  сходится, то сходится и интеграл

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx.$$

б) если интеграл  $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$  расходится, то расходится и инте-

$$\text{грал } \int_a^{+\infty} f(x) dx;$$

**ПРИМЕР 49.8.** Исследовать на сходимость интеграл:  $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}$ .

**Решение:** Ранее (см. пример 49.2) было найдено, что интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$  сходится. Так как на  $[1; +\infty)$   $\frac{1}{x^3+1} \leq \frac{1}{x^2+1}$ , то интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}$  также сходится.

**ТЕОРЕМА 49.2.** Пусть функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  на промежутке  $[a; b)$  непрерывны и удовлетворяют условиям

$$0 \leq \varphi(x) \leq f(x), \quad a$$

в точке  $x = b$  имеют разрыв.

Тогда

а) если интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  сходится, то сходится и интеграл

$$\int_a^b \varphi(x) dx.$$

б) если расходится интеграл  $\int_0^b \varphi(x) dx$ , то расходится и интеграл

$$\int_a^b f(x) dx.$$

ПРИМЕР 49.9. Исследовать на сходимость интеграл:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}.$$

Р е ш е н и е: Подынтегральная функция непрерывна на  $[0; 1)$  и имеет бесконечный разрыв в точке  $x = 1$ . Сравним её с функцией  $\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$  также непрерывной на  $[0; 1)$  и имеющей бесконечный разрыв в точке  $x = 1$ .

Для всех  $0 \leq x < 1$  имеет место неравенство  $x^5 \leq x$  и  $1 - x^5 \geq 1 - x$ .

Но тогда  $\sqrt[3]{1-x^5} \geq \sqrt[3]{1-x}$  и  $\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^5}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$ .

Таким образом, подынтегральная функция  $\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^5}}$  в промежутке  $[0; 1)$  меньше функции  $\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$ .

Вычислим интеграл  $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$ :

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} = -\frac{3}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon^{2/3} - 1) = \frac{3}{2}.$$

Так как он сходится, то сходится и исходный интеграл.

#### 49.4. Интегральный признак сходимости знакоположительных рядов

В 11 лекции первой части были рассмотрены признаки сходимости знакоположительных рядов – сравнения, Даламбера, Коши (радикальный).

Познакомимся еще с одним – интегральным признаком Коши.

ТЕОРЕМА 49.3. Пусть члены знакоположительного ряда

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \quad (49.8)$$

являются значениями при

$$x = 1, 2, \dots, n, \dots$$

некоторой функции  $f(x)$ , положительной, непрерывной, убывающей на промежутке  $[1; +\infty)$ , так что

$$u_1 = f(1), u_2 = f(2), \dots, u_n = f(n), \dots.$$

Рассмотрим несобственный интеграл

$$I = \int_1^{+\infty} f(x) dx. \quad (49.9)$$

Тогда на основании интегрального признака Коши, принимаемого нами без доказательства:

1. Если сходится интеграл (49.9), то сходится ряд (49.8).

2. Если расходится интеграл (49.9), то расходится ряд (49.8).

ПРИМЕР 49.10. Исследовать на сходимость обобщенный гармонический ряд

$$\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots, \quad (49.10)$$

Р е ш е н и е: Согласно (49.2) интеграл  $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ .

Сходится при  $\alpha > 1$  и расходится при  $\alpha \leq 1$ .

Следовательно, и ряд (49.10) сходится при  $\alpha > 1$  и расходится при  $\alpha \leq 1$ .

## Практическое занятие 49. Несобственные интегралы

При решении примеров этого занятия необходимо вспомнить определения несобственных интегралов, а также признаки их сходимости (расходимости).

ПРИМЕР 49.1. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx.$$

Р е ш е н и е:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-\alpha x} dx = \\ &= -\frac{1}{\alpha} \lim_{b \rightarrow +\infty} (e^{-bx} - 1) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}, & \text{если } \alpha > 0, \\ +\infty, & \text{если } \alpha < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

При  $\alpha > 0$   $\lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-ab} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{b\alpha}} = 0$ , так как  $e^{b\alpha} \rightarrow +\infty$  при  $b \rightarrow +\infty$ .

Ясно, что при  $\alpha = 0$  несобственный интеграл расходится.

Поэтому заключаем, что исходный интеграл сходится при  $\alpha > 0$  и равен в этом случае  $\frac{1}{\alpha}$ . При  $\alpha \leq 0$  интеграл расходится и суммы не имеет.

ПРИМЕР 49.2. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \cos x dx.$$

Р е ш е н и е: Решение оформим с учётом замечания 49.2:

$$I = \sin x \Big|_0^{+\infty} = \sin(+\infty) - \sin 0.$$

Но  $\sin x$  при  $x \rightarrow +\infty$  не стремится ни к какому пределу, совершая колебания от  $-1$  до  $1$ . Следовательно, интеграл расходится.

ПРИМЕР 49.3. Вычислить интеграл

$$I = \int_{-\infty}^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

Р е ш е н и е:

$$I = \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-\infty) = \pi/4 + \pi/2 = 3\pi/4.$$

Мы воспользовались тем, что  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2$ .

Следовательно, интеграл сходится и равен  $3\pi/4$ .

ПРИМЕР 49.4. Вычислить интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x dx}{1+x^2}.$$



**Решение:** У данного несобственного интеграла оба предела бесконечны. Разобьем его на два, например, точкой 0:

$$I = I_1 + I_2 = \int_{-\infty}^0 \frac{\arctg^2 x dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{\arctg^2 x dx}{1+x^2}.$$

Вычислим их:

$$I_1 = \int_{-\infty}^0 \arctg^2 x d(\arctg x) = \frac{1}{3} \arctg^3 x \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{3} (0 - (-\pi/2)^3) = \pi^3/24,$$

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \arctg^2 x d(\arctg x) = \frac{1}{3} \arctg^3 x \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{3} ((\pi/2)^3 - 0) = \pi^3/24.$$

Так как оба интеграла сходятся, то исходный интеграл сходится и равен:

$$I = I_1 + I_2 = \pi^3/24 + \pi^3/24 = \pi^3/12.$$

Напомним, что иногда достаточно не вычисляя интеграла только выяснить сходится он или нет. В таких случаях необходимо пользоваться признаками сходимости интегралов.

**ПРИМЕР 49.5.** *Исследовать на сходимость интеграл*

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$$

**Решение:**

На промежутке  $[1; +\infty)$  подынтегральная функция данного интеграла не больше, чем у сходящегося интеграла примера 49.3:

$$\frac{1}{1+x^3} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

Поэтому данный интеграл сходится (заметим, что сумма его не найдена, но в данном примере она нас не интересует).

**ПРИМЕР 49.6.** *Исследовать на сходимость интеграл*

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

**Р е ш е н и е:** Используем для доказательства сходимости интеграла признак сравнения.

Проведем элементарные преобразования:

$$(x-1)^2 \geq 0 \implies x^2 - 2x + 1 \geq 0 \implies -x^2 \leq -2x + 1.$$

Так как функция  $e^x$  монотонная, то

$$e^{-x^2} \leq e^{-2x+1} \text{ или } e^{-x^2} \leq e \cdot e^{-2x}.$$

Из примера 49.1 следует, что интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx$$

сходится. Поэтому сходится и исходный интеграл.

Он называется интегралом вероятностей. Для него составлены подробные таблицы.

**ПРИМЕР 49.7.** Исследовать на сходимость интеграл

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\arctg x dx}{x}.$$

**Р е ш е н и е:**

Рассмотрим несобственный интеграл:

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}.$$

Покажем, что он расходится:

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{+\infty} = \ln(+\infty) = +\infty.$$

Так как начиная с некоторого числа  $a$   $\frac{\arctg x}{x} > \frac{1}{x}$ , то на основании признака сравнения исходный интеграл расходится.

Решим физическую задачу, приводящую к несобственному интегралу.

**ПРИМЕР 49.8.** В начале координат  $O$  находится масса  $m$ , которая притягивает по закону Ньютона с силой, модуль которой  $F = \frac{m}{x^2}$ ,

материальную точку  $M$  единичной массы, находящуюся на оси  $Ox$  на расстоянии  $x$  от начала координат.

Вычислить работу  $A$ , которую произведет эта сила при перемещении точки  $M$  в бесконечность из положения  $x = a$ .

**Решение:**

Так как сила притяжения направлена к началу координат, т.е. против движения, то работа будет отрицательной.

На основании закона Ньютона:

$$A = \int_a^{+\infty} -\frac{mdx}{x^2} = \frac{m}{x} \Big|_a^{+\infty} = -\frac{m}{a}.$$

Перейдем теперь к интегралам от разрывных функций.

**ПРИМЕР 49.9.** Вычислить интеграл

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

**Решение:** Очевидно, при  $x \rightarrow 0$  подынтегральная функция  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  неограниченно возрастает. Ясно, что она непрерывна на отрезке  $[\epsilon; 1]$ .

По определению несобственного интеграла от разрывных функций имеем:

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sqrt{x} \Big|_{\epsilon}^1 = 2(1 - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sqrt{\epsilon}) = 2.$$

Следовательно, интеграл сходится и равен двум.

**ПРИМЕР 49.10.** Вычислить интеграл

$$I = \int_0^2 \frac{dx}{x-1}.$$

**Решение:** Особая точка лежит внутри отрезка интегрирования. Поэтому разобьем интеграл на два:

$$I = I_1 + I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^2 \frac{dx}{x-1}.$$

У первого интеграла особой точкой является верхняя граница интегрирования, у второго – нижняя.

Исследуем на сходимость  $I_1$  :

$$I_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{x-1} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln |x-1| \Big|_0^{1-\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln \epsilon = -\infty.$$

Так как  $I_1$  расходится, то независимо от того, сходится или расходится  $I_2$ , исходный интеграл расходится.

**ПРИМЕР 49.11.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$  с помощью интегрального признака сходимости рядов.

**Р е ш е н и е:** Согласно п. 49.4 имеем  $U_n = f(n) = \frac{1}{n\sqrt{n}}$  и, следовательно, соответствующий несобственный интеграл

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$$

(49.2) интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$  сходится, а, следовательно, на основании инте-

грального признака Коши сходится и ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ .

## Самостоятельная работа

Вычислить интегралы или показать их расходимость.

**ПРИМЕР 49.12.**  $\int_0^{+\infty} \sin x dx.$

**ПРИМЕР 49.15.**  $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}.$

**ПРИМЕР 49.13.**  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2}.$

**ПРИМЕР 49.14.**  $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{c^2 + x^2}.$

**ПРИМЕР 49.16.**  $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}.$

ПРИМЕР 49.17.  $\int_{-8}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$

ПРИМЕР 49.19.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}.$

ПРИМЕР 49.18.  $\int_0^1 \frac{\arcsin x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

Исследовать сходимость интегралов.

ПРИМЕР 49.20.  $\int_1^{+\infty} \frac{x^3 + 1}{x^4} \, dx.$

ПРИМЕР 49.22.  $\int_0^1 \frac{x^2 \, dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}.$

ПРИМЕР 49.21.  $\int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-x} \, dx.$

ПРИМЕР 49.23.  $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1}.$

Исследовать на сходимость ряды.

ПРИМЕР 49.24.  $\frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \frac{1}{4 \ln 4} + \dots, + \frac{1}{n \ln n} + \dots.$

## Лекция 50. Приближенное вычисление определённых интегралов

Методы прямоугольников, трапеций и Симпсона. Оценка ошибок. Вычисление интегралов с помощью рядов.

### 50.1. Постановка задачи

Пусть требуется найти определённый интеграл  $\int_a^b f(x) \, dx$ . Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$  и может быть найдена её первообразная  $F(x)$ , то по формуле Ньютона-Лейбница (47.13)

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

Если же первообразная не может быть найдена или функция  $f(x)$  задана графически или таблично, то для вычисления интеграла прибегают к приближенным формулам, точность которых может быть сколь угодно большой.

Чаще всего формулы приближенного интегрирования вытекают из геометрического смысла определённого интеграла как площади криволинейной трапеции. Следовательно, задача о приближенном вычислении интеграла заменяется другой, равносильной ей – задачей о нахождении площади криволинейной трапеции. При этом кривая  $f(x)$  заменяется другой достаточно «близкой» к ней.

В качестве этой новой кривой выбирают такую, для которой площадь криволинейной трапеции подсчитывается просто, т.е. для которой мы легко можем найти первообразную. В зависимости от выбора этой кривой, и различаются формулы приближенного интегрирования.

Предположим сначала, что

$$f(x) \geq 0 \text{ для } x \in [a; b]. \quad (50.1)$$

Разобьем отрезок  $[a; b]$  на  $n$  равных частей точками

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Длина  $h$  каждого малого отрезка  $h = \frac{b-a}{n}$ .

Через точки деления проведем вертикальные прямые. Пусть они пересекают кривую  $y = f(x)$  в точках  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{i-1}, A_i, \dots, A_{n-1}, A_n$ .

## 50.2. Формулы прямоугольников

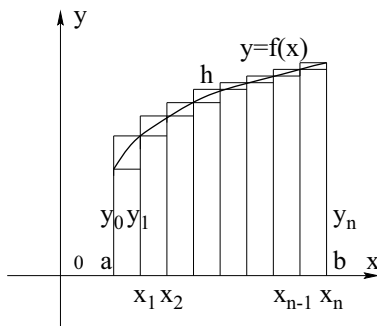


Рис. 53. К выводу формул прямоугольников

Заменяем кривую  $y = f(x)$  ломаной, расположенной выше её. Тогда определённый интеграл будет приблизительно равен площади  $n$

прямоугольников (рис. 53)

$$\int_a^b f(x)dx \approx y_1h + y_2h + \cdots y_nh = h \sum_{i=1}^n y_i. \quad (50.2)$$

Если же кривую  $y = f(x)$  заменить ломаной, расположенной ниже её, то получится формула

$$\int_a^b f(x)dx \approx y_0h + y_1h + \cdots y_{n-1}h = h \sum_{i=0}^{n-1} y_i. \quad (50.3)$$

Формулы 50.2 и 50.3 называются формулами прямоугольников.

### 50.3. Формула трапеций

Соединив каждые две соседние точки деления отрезками прямых, заменим кривую  $y = f(x)$  вписанной в неё ломаной. Площадь элементарной криволинейной трапеции с основанием  $[x_{i-1}; x_i]$  заменим площадью трапеции, ограниченной сверху прямой  $A_{i-1}A_i$  (рис. 54).

$$\Delta S_i = \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \cdot \Delta x_i.$$

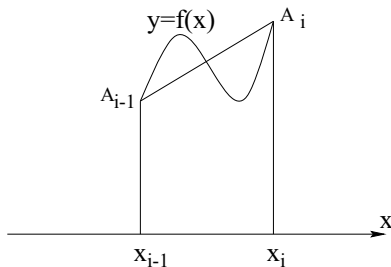


Рис. 54. К выводу формулы трапеций

Тогда площадь криволинейной трапеции, ограниченной ломаной  $A_0A_1A_2 \cdots A_n$  будет приблизительно равна площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой  $f(x)$ , т.е. интегралу  $\int_a^b f(x) dx$ .

По свойству аддитивности площадь фигуры, ограниченной ломаной равна сумме площадей прямолинейных трапеций, ограниченных сверху звеньями этой ломаной.

Площадь каждой такой трапеции легко подсчитать. Надо только понять, что в отличие от привычного расположения трапеции (основания горизонтальны) эти трапеции расположены так, что их основания вертикальны.

Длины этих оснований – ординаты смежных точек деления. Высота каждой малой трапеции равна  $h$ .

Следовательно, площадь всех таких трапеций

$$S_n = \frac{y_0 + y_1}{2}h + \frac{y_1 + y_2}{2}h + \dots + \frac{y_{i-1} + y_i}{2}h + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}h.$$

После очевидных преобразований получим

$$S_n = h \left( \frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right).$$

Таким образом, имеем приближённую формулу вычисления определённого интеграла

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left( \frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right), \text{ где } h = \frac{b-a}{n}, \quad (50.4)$$

называемую формулой трапеций.

#### 50.4. Формула параболических трапеций (Симпсона)

Предположим, что число делений чётное  $n = 2m$ . Возьмём две примыкающие друг к другу малые трапеции (рис. 55)

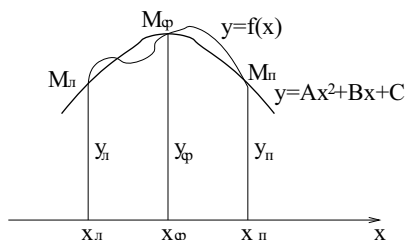


Рис. 55. К выводу формулы Симпсона

Абсциссы левой и правой точек основания обозначим  $x_{\text{л}}$  и  $x_{\text{п}}$ , середины отрезка –  $x_{\text{ср}}$ .

Пусть на кривой  $f(x)$  им соответствуют точки  $M_{\text{л}}$ ,  $M_{\text{ср}}$  и  $M_{\text{п}}$ .



Уравнение такой параболы:

$$y = Ax^2 + Bx + C.$$

Можно показать справедливость формулы

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} (Ax^2 + Bx + C) dx = \frac{x_{n+1} - x_n}{6} (y_n + 4y_{cp} + y_{n+1}).$$

Для того, чтобы убедиться в справедливости формулы достаточно вычислить её левую и правую части.

Поэтому

$$\begin{aligned} S_n &= (y_0 + 4y_1 + y_2) \frac{b-a}{6m} + (y_1 + 4y_2 + y_3) \frac{b-a}{6m} + \dots + \\ &+ (y_{m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}) \frac{b-a}{6m} = \\ &= \frac{b-a}{6m} \left( (y_0 + y_{2m}) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} y_{2i} + 4 \sum_{i=1}^m y_{2i-1} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left( y_0 + y_{2m} + 2 \sum_{i=1}^{m-1} y_{2i} + 4 \sum_{i=1}^m y_{2i-1} \right), \quad (50.5)$$

где  $h = \frac{b-a}{2m}$ .

Эта формула называется формулой параболических трапеций.

ЗАМЕЧАНИЕ 50.1. По определению (47.2)

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow +\infty)}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Заменяя предел приближённым равенством, получим

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \approx h \sum_{i=1}^n f(\xi_i), \\ \text{где } h &= \Delta x_i = \frac{b-a}{n}. \end{aligned} \quad (50.6)$$

Все формулы численного интегрирования, рассмотренные выше, вытекают из (50.6) и отличаются друг от друга только выбором точек  $\xi_i$ .

Можно показать справедливость формул прямоугольников, трапеций и Симпсона и в случае, если условие 50.1 не выполняются.

### 50.5. Оценка ошибок

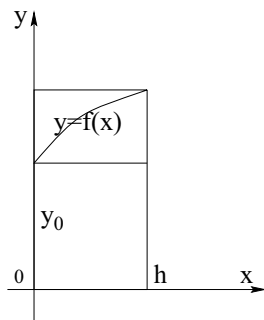


Рис. 56. К выводу погрешности формул прямоугольников

Рассмотрим одну элементарную криволинейную трапецию (рис. 56). Ошибка при замене её площади площадью прямоугольника равна

$$\delta_h = \int_0^h |y - y_0| dx.$$

По формуле Лагранжа приращение функции на отрезке равно длине этого отрезка, умноженной на значение производной функции в некоторой точке:

$$y = y_0 + y'(\xi)x.$$

Поэтому

$$\delta_h = \int_0^h |y'(\xi)|x dx \leq \frac{M_1 h^2}{2},$$

где  $M_1$  – наибольшее значение производной функции  $y = f(x)$  на отрезке  $[a; b]$ .

Так как всего отрезков деления

$$n = \frac{b-a}{h}, \quad (50.7)$$

то оценка абсолютной погрешности увеличится в  $n$  раз:

$$\delta \leq \delta_h \cdot n \leq \frac{M_1 n h^2}{2},$$

а с учётом формулы (50.7):

$$\delta \leq \frac{b-a}{2} M_1 h. \quad (50.8)$$

Аналогично можно вывести оценки ошибок для методов трапеций и Симпсона:

$$\delta_{\text{тр}} \leq \frac{b-a}{12} M_2 h^2, \quad (50.9)$$

$$\delta_{\text{сим}} \leq \frac{b-a}{180} M_4 h^4. \quad (50.10)$$

В этих формулах  $M_k = \max |f^{(k)}(x)|$  на отрезке  $[a; b]$ .

Для оценки погрешностей вычислений по формулам трапеций и Симпсона существуют ещё и формулы, которые мы приводим без доказательств:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - I_{2n} \right| \leq \frac{|I_{2n} - I_n|}{15}. \quad (50.11)$$

При вычисление интегралов с помощью этих формул обычно поступают так:

- вычисляют интеграл при числе точек деления  $n$  и  $2n$
- сравнивают результаты вычислений и оставляют все первые совпадающие знаки.

**ПРИМЕР 50.1.** Вычислить интеграл  $I = \int_0^1 3x^2 dx$  с помощью формул прямоугольников (50.2; 50.3), трапеций (50.4) и Симпсона (50.5) с шагом  $h = \frac{1}{n} = 0, 1$ . Оценить ошибки вычислений.

**Р е ш е н и е:** Очевидно, что точное значение заданного интеграла может быть легко получено  $I = \int_0^1 3x^2 dx = x^3|_0^1 = 1$ . С использованием формулы прямоугольников, соответственно, по (50.2)  $I = 0,3(0,01 +$

$+0,04+0,09+0,16+0,25+0,36+0,49+0,64+0,81+1) = 1,155$ , по (50.3)  $I = 0,3(0+0,01+0,04+0,09+0,16+0,25+0,36+0,49+0,64+0,81) = 0,855$ , по формуле трапеций (50.4)  $I = 0,3(\frac{0+1}{2} + 0,01+0,04+0,09+0,16+0,25+0,36+0,49+0,64+0,81+1) = 1,005$  и, наконец, использование формулы Симпсона (50.5) даёт точный результат  $I = 0,1(0+1+2(0,04+0,16+0,36+0,64)+4(0,01+0,09+0,025+0,049+0,081)) = 1$ .

Вычислим значения производных от подынтегральной функции  $f(x) = 3x^2$ ,  $f'(x) = 6x$ ,  $f''(x) = 6$ ,  $f'''(x) = f^{IV}(x) = 0$ . Следовательно, на отрезке  $[0,1]$  имеем  $M_1 = 6$ ,  $M_2 = 6$ ,  $M_4 = 0$  и производная по формулам (50.8)–(50.10) оценка ошибки вычислений с использованием, соответственно, формул прямоугольников, трапеций и Симпсона оказывается:

$$\text{по (50.8)} \quad \delta \leq \frac{b-a}{2} M_1 h = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 0,1 = 0,3;$$

$$\text{по (50.9)} \quad \delta \leq \frac{b-a}{12} M_2 h^2 = \frac{1}{12} \cdot 6 \cdot 0,01 = 0,005;$$

$$\text{по (50.10)} \quad \delta \leq \frac{b-a}{180} M_4 h^4 = 0.$$

Как видно реальная ошибка формул прямоугольников (50.2)  $0,155 < 0,3$  и (50.3)  $0,145 < 0,3$ . Полученная по формуле трапеций реальная ошибка совпадает с оценкой, а по формуле Симпсона реальная и оценочная ошибки равны нулю. Это вызвано тем, что для нашей подынтегральной функции вторая производная постоянна, а четвертая равна нулю.

**ЗАМЕЧАНИЕ 50.2.** Из формулы оценки ошибки (50.10) формулы Симпсона (50.5) следует, что если подынтегральная функция является многочленом степени не ниже  $3^{eй}$ , то формула Симпсона даёт точный результат при любом чётном количестве шагов.

**ПРИМЕР 50.2.** На сколько частей надо разделить отрезок интегрирования  $[0;1]$ , чтобы вычислить по формулам численного интегрирования интеграл  $I = \int_0^1 \cos x \, dx$  с точностью  $\delta \leq 0,0001$ ?

**Р е ш е н и е:** Длина отрезка интегрирования  $b-a=1$  учитывая, что наибольшее значение всех производных:

$$M_1 = M_2 = M_4 = 1,$$

для того, чтобы реальная ошибка не превышала  $10^{-4}$

1) Формул прямоугольников (50.8).

$$h \leq 0,0002 \implies n \geq \frac{1}{0,0002} = 5000.$$

2) Формулы трапеций (50.9).

$$h \leq \sqrt{0,0012} \implies n \geq \frac{1}{\sqrt{0,0012}} \approx 29.$$

3) Формулы Симпсона (50.10).

$$h \leq \sqrt[4]{0,0180} \implies n \geq \frac{1}{\sqrt[4]{0,0180}} \approx 2.$$

### 50.6. Вычисление интегралов с помощью рядов

Этот метод приближённого нахождения определённых интегралов основан на разложении подынтегральной функции в ряд Тейлора с последующим интегрированием каждого слагаемого этого ряда. При нахождении определённого интеграла сумма ряда заменяется его частичной суммой с последующей оценкой ошибки.

$$\begin{aligned} \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n dx &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

**ПРИМЕР 50.3.** Вычислить интеграл  $\Phi(x) = \int_0^x e^{-x^2} dx$  с точностью  $\delta = 0,005$ .

**Решение:** Это – известный «интеграл вероятностей». Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена:

$$\int_0^x e^{-x^2} dx = \int_0^x \left( 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \dots \right) dx.$$

Интеграл от каждого слагаемого легко находится. Поэтому при  $x = 1$  получим:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &= \int_0^1 \left( 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} + \dots \right) dx = \\ &= x \Big|_0^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \frac{x^5}{10} \Big|_0^1 - \frac{x^7}{42} \Big|_0^1 + \frac{x^9}{216} \Big|_0^1 - \dots = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \dots \end{aligned}$$

Полученный ряд знакочередующийся.

Для него очень проста оценка ошибки – надо взять столько членов ряда, чтобы первый отброшенный по абсолютной величине не превышал погрешности. Так как  $\frac{1}{216} < 0,005$ , то с точностью до 0,005

$$I = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} = \frac{78}{105}.$$

## Практическое занятие 50. Контрольная работа по материалам лекций 43–49

Рассмотрим один из вариантов контрольной работы

ПРИМЕР 50.1.  $\int \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x + 8} dx.$

ПРИМЕР 50.2.  $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx.$

ПРИМЕР 50.3.  $\int \frac{x dx}{\sqrt{3x^2 - 11x + 2}}.$

ПРИМЕР 50.4.  $\int \frac{x^3 + 5}{x^3 - x^2 + 4x - 4} dx.$

ПРИМЕР 50.5.  $\int \operatorname{tg}^5 x dx.$

ПРИМЕР 50.6. Вычислить определённый интеграл

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sqrt{x}+1}} dx.$$

ПРИМЕР 50.7. Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n(1 + \ln^4 n)}.$

**ПРИМЕР 50.8.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $x = -2$ ,  $y = -x$ ,  $y = \frac{1}{x^2}$ .

**ПРИМЕР 50.9.** Найти работу, затрачиваемую на выкачивание воды из полностью заполненного полусферического котлована радиусом  $R = 10$  м. Откачка проводится с поверхности воды.

### Решение примеров типового варианта контрольной работы

**ПРИМЕР 50.1.**

**Решение:** Этот пример на внесение подынтегральной функции под знак дифференциала:

$$\begin{aligned} \int \frac{(3x^2 + 1)dx}{x^3 + x + 8} &= \int \frac{d(x^3 + x + 8)}{x^3 + x + 8} = \\ &= \int d \ln |x^3 + x + 8| = \ln |x^3 + x + 8| + C. \end{aligned}$$

**ПРИМЕР 50.2.**

**Решение:** Для решения данного примера используем формулу интегрирования по частям (43.13):

$$\begin{aligned} \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx &= \left| \begin{array}{l} u = \arcsin x, du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ dv = \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = d(2\sqrt{x+1}) \rightarrow v = 2\sqrt{x+1} \end{array} \right| = \\ &= 2\sqrt{x+1} \arcsin x - 2 \int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2\sqrt{x+1} \arcsin x - \\ &- 2 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2\sqrt{x+1} \arcsin x + 4\sqrt{1-x} + C. \end{aligned}$$

**ПРИМЕР 50.3.**

**Решение:** В данном примере подынтегральная функция содержит квадратный трёхчлен и в соответствии с п. 39.1 и 46.3 используем подстановку  $t = \frac{1}{2}(3x^2 - 11x + 2)' = 3x - \frac{11}{2}$ , положив затем  $z = \frac{t}{3} = x - \frac{11}{6}$ , откуда  $x = z + \frac{11}{6}$ ,  $dx = dz$ . Далее, выделив полный квадрат в квадратном трёхчлене  $3x^2 - 11x + 2 = 3(x^2 - \frac{11}{3}x + \frac{2}{3}) =$

$= 3 \left( (x - \frac{11}{6})^2 + \frac{2}{3} - \frac{121}{36} \right) = 3 \left( z^2 - \frac{97}{36} \right)$  и заменив  $x$  на  $z + \frac{11}{6}$ , а  $dx$  на  $dz$ , получим

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{3x^2 - 11x + 2}} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{z dz}{\sqrt{z^2 - 97/36}} + \frac{11}{6\sqrt{3}} \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 97/36}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{z^2 - 97/36} + \frac{11}{6\sqrt{3}} \ln |z + \sqrt{z^2 - 97/36}| + C = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \sqrt{x^2 - \frac{11}{3}x + \frac{2}{3}} + \frac{11}{6} \ln \left| x - \frac{11}{6} + \sqrt{x^2 - \frac{11}{3}x + \frac{2}{3}} + \frac{2}{3} \right| \right) + C. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 50.4.

**Решение:** Подынтегральное выражение в нашем случае является неправильной рациональной дробью. Разделив числитель на знаменатель и разложив знаменатель на множители  $x^3 - x^2 + 4x - 4 = x^2(x-1) + 4(x-1) = (x-1)(x^2+4)$  согласно методике, изложенной в лекции 34 и 44 получаем:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 5}{x^3 - x^2 + 4x - 4} dx &= \int \left( 1 + \frac{x^2 - 4x + 9}{(x-1)(x^2+4)} \right) dx. \\ \frac{x^2 - 4x + 9}{(x-1)(x^2+4)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \\ &= \frac{A(x^2+4) + (x-1)(Bx+C)}{(x-1)(x^2+4)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow A(x^2+4) + (x-1)(Bx+C) = x^2 - 4x + 9. \end{aligned}$$

Положив в данном тождестве  $x = 1$ , получим  $5A = 6 \rightarrow A = 6/5$ . При  $x = 0$  имеем:  $4A - C = 9 \rightarrow C = 4A - 9 = -21/5$ . И, наконец, приравняв коэффициенты при  $x^2$  получаем  $A + B = 1 \rightarrow B = 1 - A = -\frac{1}{5}$ .

Таким образом искомый интеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 5}{x^3 - x^2 + 4x - 4} dx &= \int \left( 1 + \frac{6}{5(x-1)} - \frac{1}{5} \frac{x+21}{x^2+4} \right) dx = \\ &= x + \frac{6}{5} \ln |x-1| - \frac{1}{10} \ln(x^2+4) - \frac{21}{10} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 50.5.



**Решение:** В данном примере подынтегральная функция является рациональной функцией  $\operatorname{tg} x$  и в соответствии с п. 45.3 сделав замену  $\operatorname{tg} x = z$ ,  $x = \operatorname{arctg} z$ ,  $dx = \frac{dz}{1+z^2}$ , получим

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^5 x dx &= \int \frac{z^5}{z^2+1} dz = \int \left( z^3 - z + \frac{z}{z^2+1} \right) dz = \frac{z^4}{4} - \frac{z^2}{2} + \\ &+ \frac{1}{2} \ln(z^2+1) + C = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \frac{1}{2} \ln(\operatorname{tg}^2 x + 1) + C = \\ &= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln |\cos x| + C,\end{aligned}$$

в последнем преобразовании учтено, что  $\ln(\operatorname{tg}^2 x + 1) = \ln \frac{1}{\cos^2 x} = -2 \ln |\cos x|$ .

**ПРИМЕР 50.6.**

**Решение:** В заданном примере подынтегральная функция является дифференциальным биномом

$$x^m(a+bx^n)^p = x^{1/2}(x^{1/2}+1)^{-\frac{1}{2}} \rightarrow m = \frac{1}{2}; \quad n = \frac{1}{2}; \quad p = -\frac{1}{2}, a = b = 1.$$

В соответствии со вторым случаем п. 46.5 имеем  $\frac{m+1}{n} = \frac{\frac{1}{2}+1}{1/2} = 3$  и рекомендуемая замена в данном примере

$$\sqrt{x} + 1 = z^2 \rightarrow \sqrt{x} = z^2 - 1,$$

$$\frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2zdz, \quad \sqrt{x}dx = 4xzdz = 4z(z^2-1)^2dz.$$

Исключив из подынтегрального выражения  $x$  и заменив пределы интегрирования, получим

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sqrt{x}+1}} dx &= 4 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} (z^4 - 2z^2 + 1) dz = 4 \left( \frac{z^5}{5} - \frac{2}{3}z^3 + z \right) \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \\ &= 4\sqrt{3} \left( \frac{9}{5} - 2 + 1 \right) - 4\sqrt{2} \left( \frac{4}{5} - \frac{4}{3} + 1 \right) = \frac{16\sqrt{3}}{5} - \frac{28\sqrt{2}}{15} = \\ &= \frac{4}{5} \left( 4\sqrt{3} - \frac{7\sqrt{2}}{3} \right) \approx 2,903.\end{aligned}$$

**ПРИМЕР 50.7.**

**Решение:** В соответствии с интегральным признаком Коши (п. 49.4) рассмотрим несобственный интеграл

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x(1+\ln^4 x)} dx &= \int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{1+\ln^4 x} d \ln x = \frac{1}{2} \int_2^{+\infty} \frac{d \ln^2 x}{1+\ln^4 x} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \ln^2 x \Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \ln^2 2 \right). \end{aligned}$$

Итак, интеграл сходится и, следовательно, ряд  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n(1+\ln^4 n)}$  также сходится.

**ПРИМЕР 50.8.**

**Решение:** Изобразим заданный криволинейный треугольник ABC на рис. 57. По формуле (48.1), определив предварительно координату  $x_B = -1$ , найдем искомую площадь

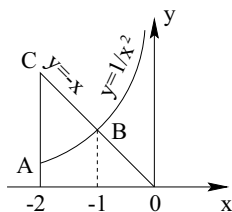


Рис. 57. К примеру 50.8

$$S_{ABC} = \int_{-2}^{-1} \left( -x - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left( -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} \right) \Big|_{-2}^{-1} = -\frac{1}{2} - 1 + \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

**ПРИМЕР 50.9.**

**Решение:** Изобразим диаметрально сечение котлована на рис. 58. Элементарная работа по поднятию слоя воды размером  $\Delta x$  на высоту  $x$  равна

$$\Delta A = gx \Delta m = gx \rho \Delta V \approx \gamma x \pi y^2 \Delta x = \left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = R^2 \\ y^2 = R^2 - x^2 \end{array} \right| =$$

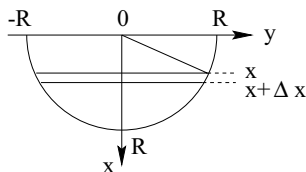


Рис. 58. К примеру 50.9

$$= \pi \gamma x (R^2 - x^2) \Delta x.$$

Таким образом искомая работа

$$\begin{aligned} A &= \int_0^R \pi \gamma (R^2 x - x^3) dx = \pi \gamma \left( R^2 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^R = \\ &= \pi \gamma \left( \frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{\pi \gamma R^4}{4} = \frac{\pi}{4} 10^7 \text{ кгм} \approx 7854000 \text{ кгм}. \end{aligned}$$

При расчёте, удельный вес воды взят  $\gamma = 1 \frac{\text{т}}{\text{м}^3} = 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ .

В качестве домашнего задания студентам рекомендуется решить какой либо из других вариантов контрольной работы.

## Самостоятельная работа

ПРИМЕР 50.10.  $\int \frac{dx}{3 \cos^2 x + 4 \sin^2 x}.$

ПРИМЕР 50.11.  $\int (x+1)e^x dx.$       ПРИМЕР 50.13.  $\int \frac{dx}{x^4 - 1}.$

ПРИМЕР 50.12.  $\int \frac{4-3x}{5x^2+6x+18} dx.$  ПРИМЕР 50.14.  $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx.$

ПРИМЕР 50.15. *Вычислить определённый интеграл*

$$\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3}.$$

ПРИМЕР 50.16. *Исследовать на сходимость ряд*  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^{n^2}}.$

ПРИМЕР 50.17. *Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией*  
 $r = 2(1 - \sin \varphi).$

ПРИМЕР 50.18. *Найти момент инерции кругового цилиндра, радиус основания которого  $R$ , высота  $H$ , относительно его оси. Плотность цилиндра  $\gamma$  постоянна.*

# ГЛАВА IX

## Кратные и криволинейные интегралы Элементы теории векторного поля

### Лекция 51. Двойной интеграл

Определение, геометрическая интерпретация и свойства двойного интеграла. Переход от двойного интеграла к двукратному интегралу в декартовой системе координат. Вычисление двойных интегралов в декартовых координатах.

#### 51.1. Понятие двойного интеграла

В лекции 47 мы ввели понятие определённого интеграла как предела интегральной суммы, образованной для функции одной переменной  $y = f(x)$  на отрезке  $[a; b]$ . Проведем теперь аналогичные рассуждения для функции двух переменных  $z = f(x, y)$ , заданной и непрерывной в замкнутой области  $S$  (см. лекцию 35), ограниченной линией  $C$  (рис. 59). Площадь области  $S$  обозначим той же буквой.

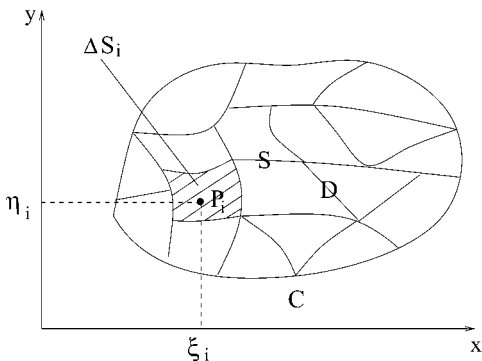


Рис. 59. Область  $S$  задания функции  $z = f(x, y)$  и её разбиение

Разобьем область  $S$  произвольным образом на непересекающихся  $n$  частей (элементарных площадок), которые, а также их площади,

будем обозначать  $\Delta S_i$ ; таким образом,  $S = \sum_{i=1}^n \Delta S_i$ . Под размером  $\lambda_i$  площадки  $\Delta S_i$  будем понимать наибольшую длину отрезка, концы которого принадлежат элементарной площадке  $\Delta S_i$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 51.1.** *Диаметром разбиения  $\lambda$  называется наибольший из размеров площадок  $\Delta S_i$ :  $\lambda = \max_{i=1,2,\dots,n} \lambda_i$ .*

Очевидно, что если  $\lambda \rightarrow 0$ , то и все  $\lambda_i \rightarrow 0$ .

В каждой элементарной площадке возьмём произвольную точку  $P_i \in \Delta S_i$ , координаты этой точки  $\xi_i, \eta_i$  (рис. 59). Вычислим  $f(P_i) = f(\xi_i; \eta_i)$ . Образует произведение  $f(\xi_i; \eta_i) \Delta S_i$  и составим сумму  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i; \eta_i) \Delta S_i$  по всем элементарным площадкам  $\Delta S_i$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 51.2.** *Сумма  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i; \eta_i) \Delta S_i$  называется  $n$ -ой интегральной суммой, образованной для функции  $z = f(x, y)$  по области  $S$ .*

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 51.3.** *Двойным интегралом от функции  $f(x, y)$  по области  $S$  называется предел, к которому стремится  $n$ -ая интегральная сумма  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i; \eta_i) \Delta S_i$  при неограниченном увеличении числа малых площадок  $\Delta S_i$  и при условии, что диаметр разбиения  $\lambda$  стремится к нулю.*

Этот предел обозначается  $\iint_S f(x, y) ds$ , он не должен зависеть от способа разбиения области  $S$  на площадки  $\Delta S_i$  и выбора точек  $P_i \in \Delta S_i$ . Таким образом,

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty, \\ \lambda \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i; \eta_i) \Delta S_i = \iint_S f(x, y) ds. \quad (51.1)$$

Здесь знак  $\iint$  называется знаком двойного интеграла,  $S$  – областью интегрирования,  $f(x, y)$  – подынтегральной функцией,  $ds$  – элементом площади,  $f(x, y) ds$  – подынтегральным выражением. Очевидно, что в силу условия разбиения  $\sum_{i=1}^n \Delta S_i = S$ , и, следовательно,

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty, \\ \lambda \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \Delta S_i = \iint_S ds = S, \quad (51.2)$$

т.е. площади области  $S$ .

Сформулируем без доказательства теорему существования двойного интеграла.

**ТЕОРЕМА 51.1.** *Для всякой непрерывной в замкнутой области  $S$  функции  $z = f(x, y)$  двойной интеграл  $\iint_S f(x, y) ds$  существует.*

Поэтому, как правило, будем в дальнейшем считать функцию  $z = f(x, y)$  непрерывной в области интегрирования  $S$ .

### 51.2. Геометрическая интерпретация двойного интеграла

Как мы знаем (см. лекцию 35)  $z = f(x, y)$  является уравнением поверхности. Пусть теперь  $z = f(x, y) \geq 0$  в области  $S$ . Обозначим буквой  $\sigma$  часть поверхности определяемой уравнением  $z = f(x, y)$ , проекция которой на плоскость  $Oxy$  равна  $S$  (рис. 60). А точка  $P_i \in \Delta S_i$  будет являться проекцией точки  $M_i \in \sigma$  на плоскость  $Oxy$ .

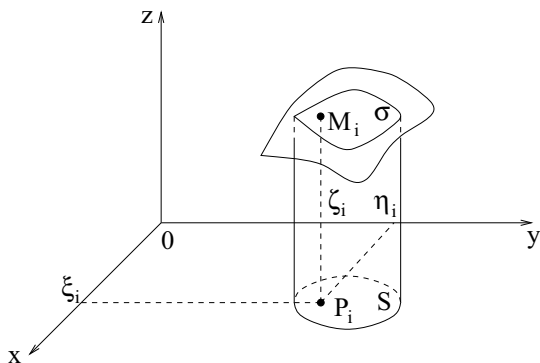


Рис. 60. Геометрическая интерпретация двойного интеграла

Так как  $\zeta_i = f(\xi_i; \eta_i) = P_i M_i$ , то произведение  $f(\xi_i; \eta_i) \Delta S_i = \zeta_i \Delta S_i$  есть объём малого цилиндра с основанием  $\Delta S_i$  и высотой  $P_i M_i = \zeta_i$ . Интегральная сумма  $\sum_{n=1}^n f(\xi_i; \eta_i) \Delta S_i = \sum_{n=1}^n \zeta_i \Delta S_i$  будет равна объёму некоторого «ступенчатого» тела  $V_n$ , состоящего из этих цилиндров.

В соответствие с формулой 51.1 имеем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i; \eta_i) \Delta S_i = \iint_S f(x, y) ds = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = V,$$

где  $V$ , очевидно, является объёмом цилиндрического тела (рис. 60) с образующей, параллельной оси  $Oz$ , нижним основанием  $S$  и верхним основанием  $\sigma$ . В этом и заключается геометрический смысл (или интерпретация) двойного интеграла при  $f(x, y) \geq 0$  в  $S$ .

### 51.3. Свойства двойного интеграла

Понятие двойного интеграла, как мы видим, вводится аналогично понятию определённого интеграла, следовательно, двойной интеграл обладает теми же свойствами, что и определённый. Приведем их без доказательства.

- Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла:

$$\iint_S k f(x, y) ds = k \iint_S f(x, y) ds, \quad k \neq 0.$$

- Двойной интеграл от суммы функций равен сумме двойных интегралов от этих функций:

$$\iint_S (f(x, y) + \varphi(x, y)) ds = \iint_S f(x, y) ds + \iint_S \varphi(x, y) ds.$$

- Если в области интегрирования  $f(x, y) \geq 0$ , то и  $\iint_S f(x, y) ds \geq 0$ .
- Если в области интегрирования  $m$  и  $M$  являются соответственно наименьшим и наибольшим значениями функции  $f(x, y)$ , т.е.  $m \leq f(x, y) \leq M$ , то  $mS \leq \iint_S f(x, y) ds \leq MS$ .

Это свойство даёт нам оценку двойного интеграла.

- Если область интегрирования  $S = \sum_{j=1}^m S_j$ , то

$$\iint_S f(x, y) ds = \sum_{j=1}^m \iint_{S_j} f(x, y) ds.$$



- **Теорема о среднем.** Если функция  $f(x, y)$  непрерывна в замкнутой области  $S$ , то в области  $S$  существует, по крайней мере, одна точка  $P(\xi; \eta)$ , в которой значение функции  $f(\xi, \eta) = \frac{1}{S} \iint_S f(x, y) ds$ . Это значение называется средним интегральным значением функции  $f(x; y; z)$  в области  $S$ .

#### 51.4. Переход от двойного интеграла к двукратному (повторному) в декартовой системе координат

Под двукратным интегрированием понимается последовательное вычисление двух определённых интегралов. Вывод формул перехода от двойного интеграла к двукратному мы проведем для подынтегральной функции  $f(x, y) \geq 0$ , хотя полученный результат справедлив и в общем случае. Предположение о том, что  $f(x, y) \geq 0$  в  $S$  позволяет использовать геометрическую интерпретацию двойного интеграла.

Пусть область интегрирования  $S$  ограничена снизу кривой  $y = y_n(x)$ , сверху —  $y = y_b(x)$ , а слева и справа соответственно прямыми  $x = a$  и  $x = b$  (рис. 61) так, что любая прямая  $x = \text{const}$ , параллельная оси  $Oy$ , при условии, что  $a < x < b$ , имеет одну точку входа в область на пересечении её с нижней границей области  $y = y_n(x)$  и одну точку выхода из области на пересечении её с верхней границей  $y = y_b(x)$ . Соответственно на рис. 61 эти точки обозначены кружком «о» и крестиком «х».

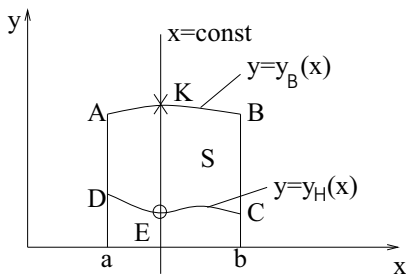


Рис. 61. Область, правильная в направлении оси  $Oy$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 51.4.** Область  $S$ , обладающая тем свойством, что при  $a < x < b$  её границы по  $y$  ( $y = y_n(x)$  и  $y = y_b(x)$ ) пересекаются любой параллельной оси  $OY$  прямой  $x = \text{const}$  лишь один раз, называется правильной в направлении оси  $Oy$ .

Точки  $A$  и  $D$  (а также точки  $B$  и  $C$ ) могут совпадать и являться точками пересечения кривых  $y = y_n(x)$  и  $y = y_n(x)$ .

Так как мы предположили, что  $f(x, y) \geq 0$  в области  $S$ , двойной интеграл от функции  $f(x, y)$  по области  $S$  будет равен объёму цилиндрического тела с нижним основанием, равным  $S$ , и верхним  $\sigma$  (рис. 62).

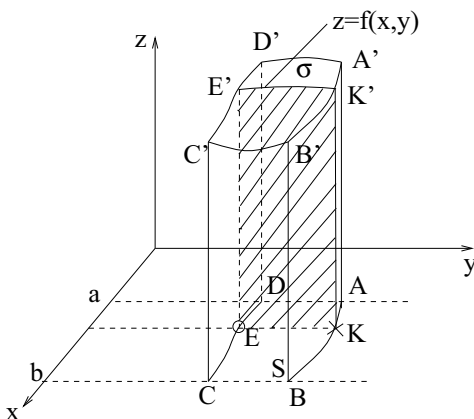
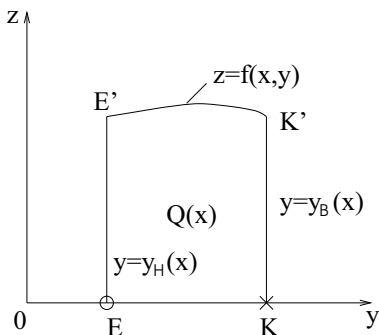


Рис. 62. Сечение цилиндрического тела плоскостью  $x = \text{const}$

Сечением этого тела плоскостью  $x = \text{const}$  является криволинейная трапеция  $EE'K'K$ , заштрихованная на рис. 62 и изображенная отдельно на рис. 63.

Площадь этого сечения равна  $Q(x) = \int_{y_n(x)}^{y_n(x)} f(x, y) dy$ , при этом  $x$  считается постоянным. Объём тела  $ABCD A' B' C' D'$  с заданной площадью поперечного сечения определяется по формуле (48.6):

$$V = \int_a^b Q(x) dx = \int_a^b \left( \int_{y_n(x)}^{y_n(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Рис. 63. Плоскость  $x = \text{const}$ 

Принято последний интеграл писать в виде:

$$V = \int_a^b dx \int_{y_H(x)}^{y_B(x)} f(x, y) dy.$$

С другой стороны, мы знаем, что при  $f(x, y) \geq 0$ :

$$V = \iiint_S f(x, y) ds.$$

Сравнивая два последних выражения для  $V$ , получаем формулу перехода от двойного интеграла к двукратному с последовательным интегрированием сначала по  $y$ , затем по  $x$ :

$$\iint_S f(x, y) ds = \int_a^b dx \int_{y_H(x)}^{y_B(x)} f(x, y) dy. \quad (51.3)$$

Внешние пределы в двукратном интеграле всегда постоянны, а внутренние постоянны лишь тогда, когда границы области являются координатными линиями  $x = \text{const}$  и  $y = \text{const}$ , т.е. сама область  $S$  представляет собой прямоугольник (рис. 64).

В этом случае формула (51.3) упрощается и

$$\iint_S f(x, y) ds = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (51.4)$$

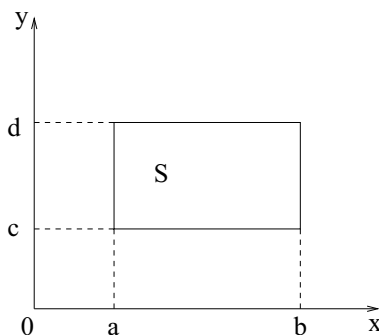


Рис. 64. Область интегрирования – прямоугольник

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 51.5. Произведение дифференциалов декартовых координат  $dx dy = ds$  называется элементом площади в декартовых координатах.

Если мы сможем найти первообразную для функции  $f(x, y)$  при  $x = \text{const}$ , т.е. такую функцию  $F(x, y)$ , для которой  $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = f(x, y)$ , проведем интегрирование по  $y$  во внутреннем интеграле ( $x$  при этом считается постоянным):

$$\begin{aligned} \int_a^b dx \int_{y_n(x)}^{y_n(x)} f(x, y) dy &= \int_a^b F(x, y) \Big|_{y_n}^{y_n} dx = \\ &= \int_a^b (F(x, y_b(x)) - F(x, y_n(x))) dx. \end{aligned} \quad (51.5)$$

И, следовательно, мы сведем наш двойной интеграл к определённому интегралу по переменной  $x$ , методы решения которых рассмотрены в седьмой главе.

Если нижняя или верхняя граница области  $S$  состоит из участков, определяемых различными уравнениями, то  $S$  необходимо разбить прямыми, параллельными оси  $Oy$ , на отдельные составные части  $S_i$ , в которых нижняя и верхняя границы определяются каждая одним уравнением. Так, например, поскольку для изображенной на рис. 65 области  $S$  её нижняя граница при  $a \leq x \leq c$  определяется одним уравнением  $y = y_{n1}(x)$ , при  $c \leq x \leq b$  другим уравнением  $y = y_{n2}(x)$ ,

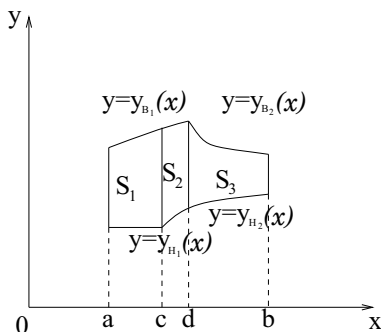


Рис. 65. Разбиение области интегрирования на части

а верхняя граница соответственно при  $a \leq x \leq d$  —  $y = y_{B1}(x)$  и при  $d \leq x \leq b$  —  $y = y_{B2}(x)$ , нам необходимо разбить область  $S$  на три  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ .

В результате

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y) ds &= \iint_{S_1} f(x, y) ds + \iint_{S_2} f(x, y) ds + \iint_{S_3} f(x, y) ds = \\ &= \int_a^c dx \int_{y_{H1}(x)}^{y_{H1}(x)} f(x, y) dy + \int_c^d dx \int_{y_{H2}(x)}^{y_{H1}(x)} f(x, y) dy + \int_d^b dx \int_{y_{H2}(x)}^{y_{B2}(x)} f(x, y) dy. \end{aligned}$$

**ПРИМЕР 51.1.** Вычислить двойной интеграл  $\iint_S (x+y) ds$ , где  $S$  — треугольник с вершинами  $O(0;0)$ ,  $A(1;1)$ ,  $B(1;0)$ .

**Р е ш е н и е:** Границами области интегрирования являются прямые  $y=0$ ,  $x=1$ ,  $y=x$ . Проведем любую прямую  $x = \text{const}$ ,  $0 < x < 1$ . Она пересекает нижнюю границу области интегрирования в точке «о», в которой  $y = y_n(x) = 0$ , и верхнюю границу области в точке «х», в которой  $y = y_v(x) = x$ . Слева и справа область  $S$  ограничена значениями  $x$ , равными 0 и 1 (рис. 66).

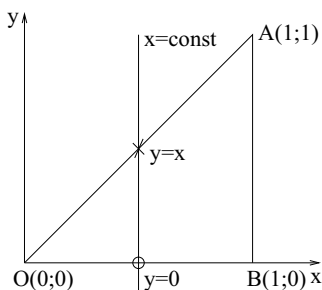


Рис. 66. К примеру 51.1

Таким образом,

$$\begin{aligned} \iint_S (x+y) ds &= \int_0^1 dx \int_0^x (x+y) dy = \int_0^1 (xy + y^2/2) \Big|_0^x dx = \\ &= \int_0^1 (x^2 + x^2/2) dx = \frac{3}{2} \int_0^1 x^2 dx = \frac{3}{2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

## Практическое занятие 51. Вычисление двойных интегралов

В начале этого практического занятия рассмотрим примеры на вычисление двукратных интегралов с заданными пределами интегрирования.

**ПРИМЕР 51.1.** Вычислить  $\int_0^2 dx \int_0^1 (x^2 + 3y^2) dy$ .

**Решение:** Прежде всего проведем интегрирование внутреннего интеграла  $\int_0^1 (x^2 + 3y^2) dy$ , считая  $x$  постоянным, затем подставляем вместо  $y$  пределы 1 и 0 и полученную функцию от  $x$  интегрируем в

пределах от 0 до 2.

$$\begin{aligned} \int_0^2 dx \int_0^1 (x^2 + 3y^2) dy &= \int_0^2 (x^2 y + y^3) \Big|_0^1 dx = \\ &= \int_0^2 (x^2 + 1) dx = \left( \frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 51.2. Вычислить  $\int_1^2 dx \int_{1/x}^x \frac{x^2 dy}{y^2}$ .

Р е ш е н и е: Прежде всего отметим, что поскольку внутренний интеграл берется при  $x = \text{const}$ ,  $x^2$  может быть вынесен из под знака внутреннего интеграла, а затем проводятся действия, подобные тем, какие проводились в примере 51.1:

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^2 dx \int_{1/x}^x \frac{dy}{y^2} &= \int_1^2 x^2 \left( -\frac{1}{y} \right) \Big|_{1/x}^x dx = \int_1^2 x^2 \left( x - \frac{1}{x} \right) dx = \\ &= \int_1^2 (x^3 - x) dx = \left( \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = 4 - 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь примеры 51.3, 51.4, в которых надо найти и построить области интегрирования  $S$  по заданным пределам двукратного интеграла.

ПРИМЕР 51.3. Вычислить  $\int_1^3 dx \int_{x^2}^{x+9} f(x, y) dy$ .

Р е ш е н и е: Внутренний интеграл  $\int_{x^2}^{x+9} f(x, y) dy$  берется вдоль прямой  $x = \text{const}$  от точки «о» пересечения её с параболой  $y = x^2$ , ограничивающей область интегрирования  $S$  снизу, до точки пересечения «х» с прямой  $y = x + 9$ , ограничивающей область  $S$  сверху. Границы области интегрирования  $S$  по  $x$  определяются прямыми  $x = 1$  и  $x = 3$ . Следовательно, область интегрирования ограничена линиями:

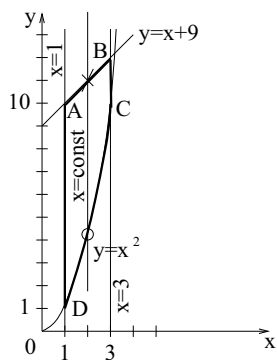


Рис. 67. К примеру 51.3

$y = x^2$ ,  $y = x + 9$ ,  $x = 1$  и  $x = 3$ . Построим их и изобразим область интегрирования  $S$  на рис. 67.

Точки пересечения координатных линий  $x = 1$  и  $x = 3$  с прямой  $y = x + 9$  равны  $A(1;10)$  и  $B(3;12)$ . Соответственно с параболой  $y = x^2$   $D(1;1)$  и  $C(3;9)$ .

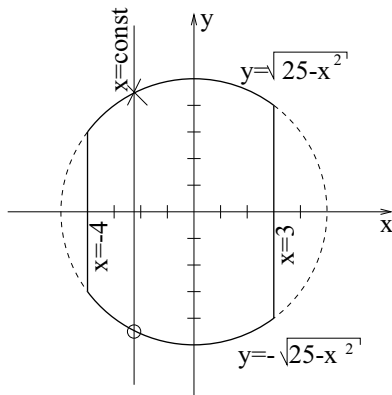


Рис. 68. К примеру 51.4

ПРИМЕР 51.4. 
$$\int_{-4}^3 dx \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x; y) dy.$$



**Решение:** Внутренний интеграл  $\int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x; y) dy$  берется вдоль прямой  $x = \text{const}$  в пределах от точки «о» пересечения её с частью окружности  $y = -\sqrt{25-x^2} \rightarrow x^2 + y^2 = 25$ , расположенной ниже оси  $x$  и ограничивающей область интегрирования  $S$  снизу, до точки пересечения «х» с частью этой окружности  $y = \sqrt{25-x^2} \rightarrow x^2 + y^2 = 25$ , ограничивающей область  $S$  сверху. Границы области интегрирования  $S$  по  $x$  определяются прямыми  $x = -4$  и  $x = 3$ . Следовательно, область интегрирования ограничена окружностью  $x^2 + y^2 = 25$  и прямыми  $x = -4$  и  $x = 3$ . Построим их и изобразим область интегрирования  $S$  на рис. 68

Точки пересечения окружности  $x^2 + y^2 = 25$  с прямыми  $x = -4$  и  $x = 3$  имеют координаты  $A(-4; 3)$ ,  $B(3; 4)$ ,  $C(3; -4)$  и  $D(-4; -3)$ .

### Самостоятельная работа

ПРИМЕР 51.5. Вычислить  $\int_2^4 dy \int_0^y \frac{y^3}{x^2 + y^2} dx$  и построить область интегрирования.

ПРИМЕР 51.6. Вычислить  $\int_3^4 dx \int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}$  и построить область интегрирования.

ПРИМЕР 51.7. Вычислить  $\int_1^2 dx \int_x^{2x} (2x-y) dy$  и построить область интегрирования.

В примерах (51.8) и (51.9) написать уравнения кривых, ограничивающих область интегрирования и изобразить эти области.

ПРИМЕР 51.8.  $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4x}} f(x, y) dy.$

ПРИМЕР 51.9.  $\int_0^1 dy \int_{y/2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y) dx.$

## Лекция 52. Изменение порядка интегрирования

Вычисление двойных интегралов в декартовых координатах (продолжение). Изменение порядка интегрирования. Другое обоснование формул перехода от двойного интеграла к двукратному в декартовых координатах.

### 52.1. Вычисление двойных интегралов в декартовых координатах (продолжение)

Продолжим рассмотрение примеров вычисления двойных интегралов в декартовых координатах, начатое в предыдущей лекции.

**ПРИМЕР 52.1.** Вычислить двойной интеграл  $\iint_S (x+y)ds$ , где  $S$  – треугольник с вершинами  $O(0;0)$ ,  $A(1;1)$ ,  $B(0;2)$ .

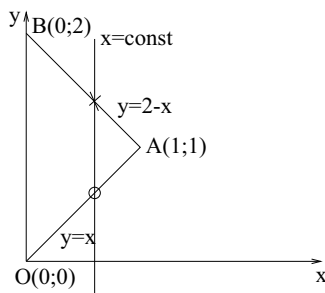


Рис. 69. К примеру 52.1

**Решение:** Границами области интегрирования являются прямые  $x = 0$ ,  $y = x$ ,  $y = 2 - x$  (рис. 69).

Повторяя рассуждения, проведённые при решении примера 51.1 из предыдущей лекции, получаем

$$\begin{aligned} \iint_S (x+y)ds &= \int_0^1 dx \int_x^{2-x} (x+y)dy = \int_0^1 (xy + \\ &+ y^2/2)|_x^{2-x} dx = \int_0^1 (x(2-x) + \frac{(2-x)^2}{2} - x^2 - \frac{x^2}{2})dx = \int_0^1 (2x - x^2 + 2 - 2x + \frac{x^2}{2} - \\ &- x^2 - \frac{x^2}{2})dx = 2 \int_0^1 (1 - x^2)dx = 2(x - \frac{x^3}{3})|_0^1 = 2(1 - \frac{1}{3}) = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 52.2. Вычислить двойной интеграл  $\iint_S (x+y)ds$ , где  $S$  – треугольник с вершинами  $O(0;0)$ ,  $A(1;1)$ ,  $B(2;0)$ .

Р е ш е н и е: Границами области интегрирования являются прямые  $x=0$ ,  $y=x$ ,  $y=2-x$  (рис. 70).

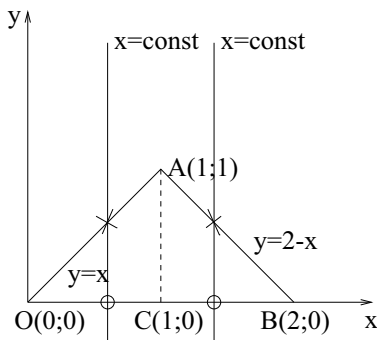


Рис. 70. К примеру 52.2

Отличие этого примера от предыдущих заключается в том, что граница области интегрирования сверху ограничена двумя различными кривыми, а следовательно, область интегрирования необходимо разбить прямой, параллельной оси  $OY$ , на два треугольника  $OAC$  и  $ACB$ . На основании свойств двойного интеграла  $\iint_S (x+y)ds =$

$$= \iint_{OAC} (x+y)ds + \iint_{ACB} (x+y)ds.$$

Расставляя пределы интегрирования в интегралах по треугольникам  $OAC$  и  $ACB$  в соответствии с рис. 70 и проведя затем интегрирование, получим

$$\begin{aligned} \iint_S (x+y)ds &= \int_0^1 dx \int_0^x (x+y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} (x+y)dy = \\ &= \int_0^1 (xy + \frac{y^2}{2}) \Big|_0^x dx + \int_1^2 (xy + \frac{y^2}{2}) \Big|_0^{2-x} dx = \int_0^1 (x^2 + \frac{x^2}{2})dx + \int_1^2 (x(2-x) + \\ &+ \frac{(2-x)^2}{2})dx = \frac{3}{2} \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2 - \frac{x^2}{2})dx = \frac{3}{2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + (2x - \frac{x^3}{6}) \Big|_1^2 = \\ &= \frac{1}{2} + 4 - \frac{4}{3} - 2 + \frac{1}{6} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

### 52.2. Изменение порядка интегрирования

Пусть теперь область  $S$  ограничена слева кривой  $x = x_{\text{л}}(y)$ , справа –  $x = x_{\text{пр}}(y)$ , снизу прямой  $y = c$ , сверху –  $y = d$  (рис. 71).

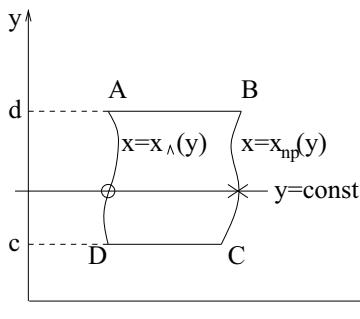


Рис. 71. Область, правильная в направлении оси  $Ox$

Любая прямая  $y = \text{const}$ , параллельная оси  $Ox$ , при условии  $c < y < d$ , имеет одну точку входа в область на пересечении её с левой границей области  $x = x_{\text{л}}(y)$  и одну точку выхода из области, на пересечении её с правой границей  $x = x_{\text{пр}}(y)$ . Соответственно на рис. 71 эти точки обозначены кружком «о» и крестиком «х».

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 52.1.** Область  $S$ , обладающая тем свойством, что при  $c < y < d$  её границы по  $x$  ( $x = x_{\text{л}}(y)$  и  $x = x_{\text{пр}}(y)$ ) пересекаются любой параллельной оси  $Ox$  прямой  $y = \text{const}$  лишь один раз, называется правильной в направлении оси  $Ox$ .

Точки  $A$  и  $B$  (а также  $D$  и  $C$ ) могут совпадать и являться точками пересечения кривых  $x = x_{\text{л}}(y)$  и  $x = x_{\text{пр}}(y)$ .

Для выбранного первоначального направления интегрирования по  $x$  можно получить формулу аналогичную формуле (51.3), полученной нами в предыдущей лекции для первоначального направления интегрирования по  $y$ :

$$\iint_S f(x, y) ds = \int_c^d dy \int_{x_{\text{л}}(y)}^{x_{\text{пр}}(y)} f(x, y) dx. \quad (52.1)$$

Для области, являющейся прямоугольником (рис. 64) имеем

$$\iint_S f(x, y) ds = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad (52.2)$$

Очевидно, что если все пределы постоянны, порядок интегрирования (формулы (51.4), (52.2)) не имеет значения. Если к тому же  $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ , то двойной интеграл равен произведению двух определённых интегралов:

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_a^b \varphi(x) dx \int_c^d \psi(y) dy. \quad (52.3)$$

Если мы найдем первообразную для  $f(x, y)$  при  $y = \text{const}$ , т.е. такую функцию  $\Phi(x, y)$ , для которой  $\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} = f(x, y)$ , то сможем провести интегрирование по  $x$  во внутреннем интеграле двойного интеграла (52.1):

$$\begin{aligned} \int_c^d dy \int_{x_{\text{л}}(y)}^{x_{\text{п}}(y)} f(x, y) dx &= \int_c^d \Phi(x, y) \Big|_{x_{\text{л}}(y)}^{x_{\text{п}}(y)} dy = \\ &= \int_c^d (\Phi(x_{\text{п}}(y), y) - \Phi(x_{\text{л}}(y), y)) dy, \end{aligned}$$

и, следовательно, сведем наш двойной интеграл вновь к определённому интегралу, только переменной теперь является  $y$ .

**ПРИМЕР 52.3.** Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле из примера 51.1.

**Р е ш е н и е:** Проведем любую прямую  $y = \text{const}$ ,  $0 < y < 1$ . Она пересекает левую границу области интегрирования в точке «о», в которой  $x = x_{\text{л}}(y) = y$ , и правую границу области в точке «х», в которой  $x = x_{\text{п}}(y) = 1$ . Снизу и сверху область  $S$  ограничена значениями  $y$ , равными 0 и 1 (рис. 72).

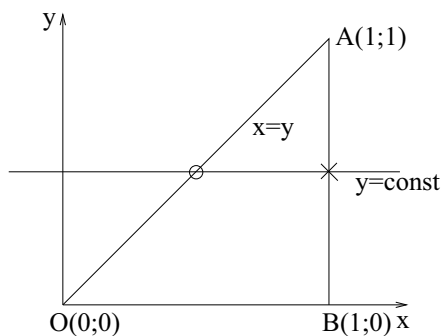


Рис. 72. К примеру 52.3

Следовательно,

$$\begin{aligned} \iint_S (x+y) ds &= \int_0^1 dy \int_y^1 (x+y) dx = \int_0^1 \left( \frac{x^2}{2} + yx \right) \Big|_y^1 dy = \\ &= \int_0^1 \left( \frac{1}{2} + y - \frac{3}{2}y^2 \right) dy = \left( \frac{y}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**ПРИМЕР 52.4.** Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле из примера 52.1.

**Решение:** Проведем любую прямую  $y = \text{const}$   $0 < y < 1$ . В точке входа её в область интегрирования «о»  $x = x_{\text{л}}(y) = 0$ , однако, поскольку справа при  $0 < y < 1$  границей области интегрирования является прямая  $x = x_{\text{пр}}(y) = y$ , а при  $1 < y < 2$   $-x = x_{\text{пр}}(y) = 2 - y$ , область  $S$  следует разбить на два треугольника  $OAC$  и  $CAB$  (рис. 73).

Таким образом  $\iint_S (x+y) ds = \iint_{OAC} (x+y) ds + \iint_{CAB} (x+y) ds$ .

Расставляя пределы интегрирования в интегралах по треугольникам  $OAC$  и  $CAB$  в соответствие с рис. 73, и, проведя затем интегрирование, получим:

$$\iint_S (x+y) ds = \int_0^1 dy \int_0^y (x+y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} (x+y) dx = \frac{4}{3}.$$

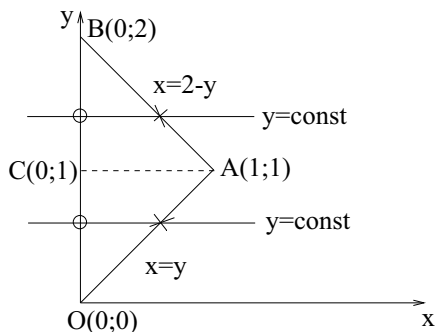


Рис. 73. К примеру 52.4

**ПРИМЕР 52.5.** Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле из примера 52.2 (рис. 74).

**Решение:** Рассуждая подобным образом, как и в предыдущих примерах, получаем  $\iint_S (x+y) ds = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} (x+y) dx = \frac{4}{3}$ .

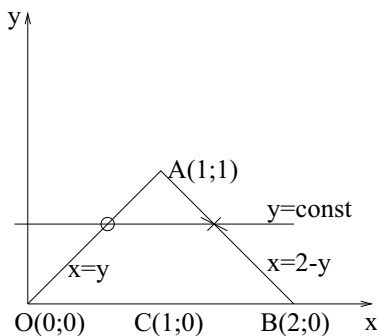


Рис. 74. К примеру 52.5

Из приведённых примеров (51.1 – 52.5) видно, что выбор порядка интегрирования имеет существенное значение при вычислении двойного интеграла, так как изменив порядок интегрирования мы можем быть вынуждены вместо одного двукратного интеграла вычислять два, а может и более интегралов.

### 52.3. Другое обоснование формул перехода от двойного интеграла к двукратному в декартовых координатах

Вначале предположим, что непрерывная функция  $f(x, y)$  задана в области  $S$ , являющейся прямоугольником, для которого  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$  (рис. 75). Наиболее естественно в данном случае разбить  $S$  координатными прямыми  $x = \text{const}$  и  $y = \text{const}$ , соответственно параллельным координатным осям. Пусть отрезок  $[a; b]$  разбит на  $k$  частей, а  $[c; d]$  на  $m$ . Тогда  $b - a = \sum_{l=1}^k \Delta x_l$ ,  $c - d = \sum_{j=1}^m \Delta y_j$ , где  $\Delta x_l = x_l - x_{l-1}$ ,  $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ .

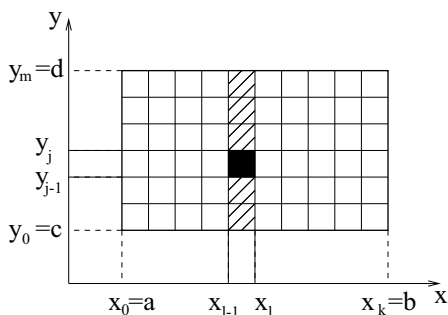


Рис. 75. Разбиение прямоугольной области координатными линиями в декартовых координатах

При введении понятия двойного интеграла в предыдущей лекции мы разбили область интегрирования на  $n$  площадок. Очевидно, что в рассматриваемом теперь случае  $S = (b - a)(c - d)$ ,  $n = km$ , а  $\Delta S_i = \Delta x_l \cdot \Delta y_j$ . Вычислим теперь значение  $f(x, y)$  в точке  $(\xi_l; \eta_j)$ , принадлежащей зачернённому на рис. 75 прямоугольнику и образуем произведение  $f(\xi_l; \eta_j) \Delta x_l \Delta y_j$ .

Просуммировав эти произведения по  $j$ , т.е. по вертикали (заштрихованный столбец на рис 75), получим  $m$ -ю интегральную сумму

$$\sum_{j=1}^m f(\xi_l; \eta_j) \Delta x_l \Delta y_j,$$



где суммирование проведено по переменной  $y$  при постоянном  $x$ . Просуммировав теперь полученные для каждого вертикального столбца суммы по  $l$  и перейдя к пределу при  $\Delta x_l \rightarrow 0$  и  $\Delta y_j \rightarrow 0$ , получим

$$\lim_{\substack{\Delta x_l \rightarrow 0 \\ \Delta y_j \rightarrow 0}} \sum_{l=1}^k \left( \sum_{j=1}^m f(\xi_l; \eta_j) \Delta x_l \Delta y_j \right) = \lim_{\substack{\Delta x_l \rightarrow 0 \\ \Delta y_j \rightarrow 0}} \sum_{l=1}^k \left( \sum_{j=1}^m f(\xi_l; \eta_j) \Delta y_j \right) \Delta x_l = \\ = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \iint_S f(x, y) ds.$$

Рассмотрим теперь более общий пример области  $ABCD$ , правильной в направлении оси  $Oy$  (рис. 61 и рис. 76).

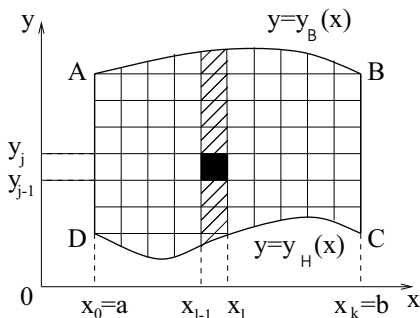


Рис. 76. Разбиение правильной в направлении оси  $Oy$  области координатными линиями в декартовой системе координат

Отличия разбиения этой области координатными линиями  $x = \text{const}$  и  $y = \text{const}$  от разбиения прямоугольной области и процесса суммирования имеют место лишь вблизи границы  $y = y_n(x)$  и  $y = y_n(x)$ . Однако при стремлении  $\Delta x_l$  и  $\Delta y_j$  к нулю эти отличия исчезают и вертикальная полоска стягивается в линию  $x = \text{const}$  (бесконечно тонкую полоску) с точкой входа в область «о» и выхода «х» из неё и суммирование по  $y$  проводится от  $y = y_n(x)$  до  $y = y_n(x)$ . Просуммировав затем полученные для каждой такой бесконечно тонкой полоски суммы по  $l$  и устремив  $\Delta x_l$  к нулю, получим формулу (51.3). Аналогично можно обосновать и формулу (52.1) для области, правильной в направлении оси  $Ox$  (рис. 71).

## Практическое занятие 52. Изменение порядка интегрирования

На этом практическом занятии мы продолжим рассматривать примеры на вычисление двойных интегралов в декартовых координатах. Прежде всего изменим порядок интегрирования в рассматриваемых на предыдущем занятии примерах 51.3 и 51.4.

**ПРИМЕР 52.1.** Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int_1^3 dx \int_{x^2}^{x+9} f(x, y) dy.$$

**Р е ш е н и е:** Область интегрирования найдена в примере 51.3 и изображена на рис. 67 и 77. Поскольку отдельные участки границы области интегрирования как слева, так и справа заданы различными аналитическими выражениями при первоначальном интегрировании в направлении оси  $x$  мы вынуждены разбить область интегрирования на три части прямыми  $y = 9$  и  $y = 10$  (отрезки этих прямых ЕС и АК изображены на рис. 77 пунктирными линиями). Таким образом,  $S = DEC + EAKC + ABK$  и

$$\iint_S f(x, y) ds = \iint_{DEC} f(x, y) ds + \iint_{EAKC} f(x, y) ds + \iint_{ABK} f(x, y) ds.$$

Рассмотрим три этих интеграла отдельно:

1) Область DEC ограничена слева прямой  $x = 1$ , справа  $x = \sqrt{y}$ , снизу и сверху соответственно значениями  $x$ , равными 1 и 9 (рис. 77).

Следовательно, в точке входа «о» любой прямой  $y = \text{const}$  ( $1 \leq y \leq 9$ ) в область DEC  $x = 1$ , в точке выхода «х» —  $x = \sqrt{y}$  и

$$\iint_{DEC} f(x, y) ds = \int_1^9 dy \int_1^{\sqrt{y}} f(x, y) dx.$$

2) Прямоугольник EAKC ограничен слева прямой  $x = 1$ , справа —  $x = 3$ , снизу —  $y = 9$ , сверху  $y = 10$ . Следовательно, в точке входа «о» любой прямой  $y = \text{const}$  ( $9 \leq y \leq 10$ ) в область EAKC  $x = 1$ , в точке выхода «х» —

$$x = 3 \text{ и } \iint_{EAKC} f(x, y) ds = \int_9^{10} dy \int_1^3 f(x, y) dx.$$

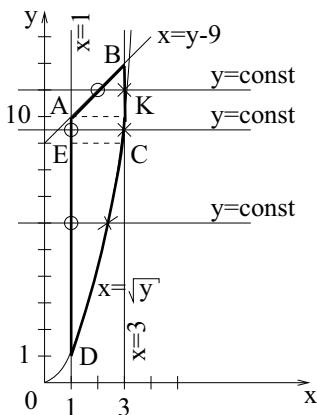


Рис. 77. К примеру 52.1

3) Треугольник АВК ограничен слева прямой  $x = y - 9$ , справа —  $x = 3$ , снизу и сверху значениями  $y$ , равными 10 и 12. Следовательно, в точке входа «о» любой прямой  $y = \text{const}$  ( $10 \leq y \leq 12$ ) в область АВК

$$x = y - 9 \text{ выходе — } x = 3 \text{ и } \iint_{ABK} f(x, y) ds = \int_{10}^{12} dy \int_{y-9}^3 f(x, y) dx.$$

Таким образом, окончательный ответ будет:

$$\begin{aligned} & \int_1^3 dx \int_{x^2}^{x+9} f(x, y) dy = \\ & = \int_1^9 dy \int_1^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_9^{10} dy \int_1^3 f(x, y) dx + \int_{10}^{12} dy \int_{y-9}^3 f(x, y) dx. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 52.2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int_{-4}^3 dx \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x; y) dy.$$

Р е ш е н и е: Область интегрирования найдена в примере 51.4 и изображена на рис. 68 и 78.

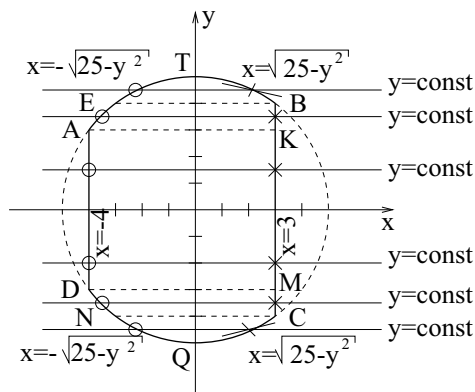


Рис. 78. К примеру 52.2

Поскольку отдельные участки границы области интегрирования  $S$  как слева, так и справа заданы различными аналитическими выражениями при первоначальном интегрировании в направлении оси  $x$  мы вынуждены, как и в предыдущем примере разбить область  $S$  на несколько частей, в данном случае на 5. Это делается линиями  $y = -4$ ,  $y = -3$ ,  $y = 3$ ,  $y = 4$  (отрезки этих прямых  $NC$ ,  $DM$ ,  $AK$  и  $EB$  приведены на рис. 78 пунктирными линиями).

Таким образом,  $S = NQC + DNCM + ADMK + EAKB + ETB$  и

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y) ds &= \iint_{NQC} f(x, y) ds + \\ &+ \iint_{DNCM} f(x, y) ds + \iint_{ADMK} f(x, y) ds + \iint_{EAKB} f(x, y) ds + \iint_{ETB} f(x, y) ds. \end{aligned}$$

Рассмотрим эти пять интегралов отдельно:

1) Область NQC является сегментом окружности  $x^2 + y^2 = 5$ , отсекаемым прямой  $y = -4$ . Любая прямая  $y = \text{const}$  ( $-5 \leq y \leq -4$ ) входит в эту область в точке «о», в которой  $x = -\sqrt{25 - y^2}$  и выходит из нее в точке «х», в которой  $x = \sqrt{25 - y^2}$ . Следовательно,

$$\iint_{NQC} f(x, y) ds = \int_{-5}^{-4} dy \int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx.$$

2) Область DNCM ограничена слева дугой окружности  $x = -\sqrt{25 - y^2}$ , справа прямой  $x = 3$ , снизу и сверху соответственно значениями  $y$ , равными  $-4$  и  $-3$ . Следовательно, в точке входа «о» любой прямой  $y = \text{const}$  ( $-4 \leq y \leq -3$ ) в область DNCM  $x = -\sqrt{25 - y^2}$ , в точке выхода «х» —

$$x = 3 \text{ и } \iint_{DNCM} f(x, y) ds = \int_{-4}^{-3} dy \int_{-\sqrt{25-y^2}}^3 f(x, y) dx.$$

3) Прямоугольник ADMK ограничен слева прямой  $x = -4$ , справа —  $x = 3$ , снизу —  $y = -3$ , сверху —  $y = 3$ . Следовательно, в точке входа «о» любой прямой  $y = \text{const}$  ( $-3 \leq y \leq 3$ ) в область ADMK  $x = -4$ , в точке выхода «х» —

$$x = 3 \text{ и } \iint_{ADMK} f(x, y) ds = \int_{-3}^3 dy \int_{-4}^3 f(x, y) dx.$$

4) Область ЕАКВ симметрична относительно оси  $x$  области DNCM и, следовательно,

$$\iint_{ЕАКВ} f(x, y) ds = \int_3^4 dy \int_{-\sqrt{25-y^2}}^3 f(x, y) dx.$$

5) Сегмент ЕТВ симметричен относительно  $x$  сегменту NQC. Аналогично:

$$\iint_{ETB} f(x, y) ds = \int_4^5 dy \int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx.$$

Таким образом суммируя рассмотренные результаты, получим

$$\begin{aligned} \int_{-4}^3 dx \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy &= \int_{-5}^{-4} dy \int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx + \\ &+ \int_{-4}^{-3} dy \int_{-\sqrt{25-y^2}}^3 f(x, y) dx + \int_{-3}^3 dy \int_{-4}^3 f(x, y) dx + \\ &+ \int_3^4 dy \int_{-\sqrt{25-y^2}}^3 f(x, y) dx + \int_4^5 dy \int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx. \end{aligned}$$

### Самостоятельная работа

В примерах 52.3 и 52.4 написать уравнения кривых, ограничивающих область интегрирования, изобразить эти области и изменить порядок интегрирования.

ПРИМЕР 52.3.  $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4x}} f(x, y) dy.$

ПРИМЕР 52.4.  $\int_0^1 dy \int_{y/2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y) dx.$

## Лекция 53. Двойной интеграл в криволинейных координатах

Вычисление двойного интеграла в полярных координатах. Замена переменных в двойном интеграле в общем случае. Якобиан преобразования.

### 53.1. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

В лекциях, посвященных вычислению определённого интеграла, мы видели, что замена переменных часто помогает легче и быстрее провести эти вычисления. То же самое имеет место и при вычислении двойного интеграла. Рассмотрим прежде всего наиболее часто встречающиеся на практике полярные координаты  $r$  и  $\varphi$ . Они были введены нами в лекции 2.

Как мы видели в начале данной лекции наиболее простой областью, для которой в декартовой системе координат пределы внешнего и внутреннего интеграла постоянны, является прямоугольник – фигура, границами которой служат координатные прямые  $x = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$ .

В полярной системе координат координатными линиями являются лучи  $\varphi = \text{const}$  и окружности  $r = \text{const}$ . Возьмём вначале область  $S$ , границами которой служат координатные линии  $DC$ ,  $AB$  и  $AD$ ,  $BC$ , для которых соответственно  $\varphi = \alpha$ ,  $\varphi = \beta$  и  $r = r_0$ ,  $r = R$  (рис. 79).

Пусть нам необходимо вычислить интеграл от функции  $f(x, y)$  по этой области  $S$ . Разобьём  $S$  на  $n$  малых площадок  $\Delta S_i$  с помощью координатных лучей  $\varphi = \varphi_l$  и окружностей  $r = r_i$ . При этом пусть

$$\Delta\varphi_l = \varphi_l - \varphi_{l-1}, \Delta r_j = r_j - r_{j-1}, \text{ тогда } \beta - \alpha = \sum_{l=1}^k \Delta\varphi_l, \text{ а } R - r_0 = \sum_{j=1}^m \Delta r_j.$$

Рассмотрим элементарную площадку  $\Delta S_i$ , которая зачернена на рис. 79. Её площадь равна разности площадей двух секторов  $\Delta S_i = \frac{1}{2}r_j^2\Delta\varphi_l - \frac{1}{2}r_{j-1}^2\Delta\varphi_l = \frac{r_j^2 - r_{j-1}^2}{2}\Delta\varphi_l = \frac{r_j + r_{j-1}}{2}(r_j - r_{j-1})\Delta\varphi_l = \frac{r_j + r_{j-1}}{2}\Delta r_j\Delta\varphi_l$ .

$$\text{По определению 51.3 } \iint_S f(x, y)ds = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \frac{r_j + r_{j-1}}{2} \Delta r_j \Delta\varphi_l. \text{ В этом определении оговаривалось, что при } n \rightarrow +\infty \text{ каждая элементарная площадка } \Delta S_i \text{ должна стягиваться в точку, а, следовательно, } \Delta r_j \rightarrow 0, \Delta\varphi_l \rightarrow 0 \text{ и } r_{j-1} \rightarrow r_j.$$

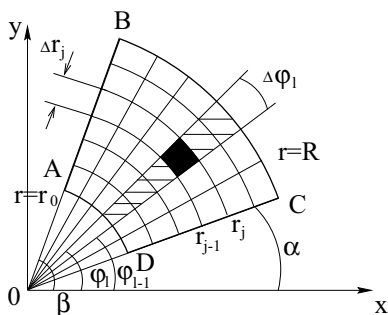


Рис. 79. К выводу представления двойного интеграла в полярных координатах

А тогда  $\iint_S f(x, y) ds = \iint_S f(x, y) r dr d\varphi$  и, учитывая, что  $x = r \cos \varphi$ , а  $y = r \sin \varphi$ , получаем выражение для двойного интеграла по области  $S$  в полярных координатах:

$$\iint_S f(x, y) ds = \iint_S f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi. \quad (53.1)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 53.1.** Выражение  $r dr d\varphi$  называется элементом площади в полярных координатах.

Как мы видим, элемент площади в полярных координатах уже не является произведением дифференциалов независимых переменных  $r$  и  $\varphi$ .

Перейдем теперь к преобразованию двойного интеграла в двукратный (повторный) в полярных координатах. Рассмотрим вновь рис. 79. Произведем сначала суммирование в направлении  $r$  (заштрихованная область на рис. 79), а затем по  $\varphi$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \frac{r_j + r_{j-1}}{2} \Delta r_j \Delta \varphi_l = \lim_{\substack{\Delta r_j \rightarrow 0 \\ \Delta \varphi_l \rightarrow 0}} \sum_{l=1}^k \left( \sum_{j=1}^m f(\xi_i, \eta_i) \frac{r_j + r_{j-1}}{2} \Delta r_j \right) \Delta \varphi_l.$$

Переходя к пределу при  $k \rightarrow +\infty$  и  $m \rightarrow +\infty$  и учитывая все сказанное при выводе формулы (53.1), получим:



$$\iint_S f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_0}^R f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr. \quad (53.2)$$

Рассмотрим теперь более общий пример области  $ABCD$ , правильной в направлении переменной  $r$ , но границы которой по  $r$  не являются координатными линиями.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 53.2.** Область  $S$  называется *правильной в направлении переменной  $r$*  (луча  $\varphi = \text{const}$ ), если любой луч  $\varphi = \text{const}$  при  $\alpha < \varphi < \beta$ , пересекает каждую из её границ  $r = r_{\delta}(\varphi)$  и  $r = r_g(\varphi)$  один раз (80).

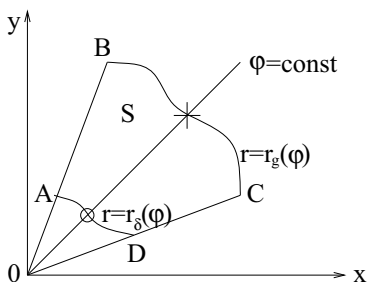


Рис. 80. Область, правильная в направлении луча  $\varphi = \text{const}$

Точку входа луча  $\varphi = \text{const}$  в область (пересечение с границей  $r = r_{\delta}(\varphi)$ ) обозначим так же, как и в декартовой системе координат значком «о», точку выхода (пересечение с границей  $r = r_g(\varphi)$ ) — «х». Индексы « $\delta$ » и « $g$ » соответствуют расположенным ближе и дальше по отношению к началу координат границам области.

Проведя рассуждения аналогичные тем, что были сделаны в пункте 45.2.3 для декартовой системы координат, получим

$$\iint_S f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_{\delta}(\varphi)}^{r_g(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr. \quad (53.3)$$

Очевидно, что в том случае, когда границы по переменной  $r$  не являются координатными линиями  $r = \text{const}$ , пределы во внутреннем интеграле (53.3) зависят от  $\varphi$ , а не являются постоянными, как в формуле (53.2).

Совершенно аналогично, рассматривая область  $S$ , правильную в направлении переменной  $\varphi$  (рис. 81), имеем

$$\iint_S f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi = \int_{r_0}^R r dr \int_{\varphi_1(r)}^{\varphi_2(r)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi. \quad (53.4)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 53.3.** Область  $S$  называется *правильной в направлении переменной  $\varphi$* , если любая окружность  $r = \text{const}$ , при  $r_0 < r < R$  пересекает каждую из её границ  $\varphi = \varphi_1(r)$  и  $\varphi = \varphi_2(r)$  в одной точке.

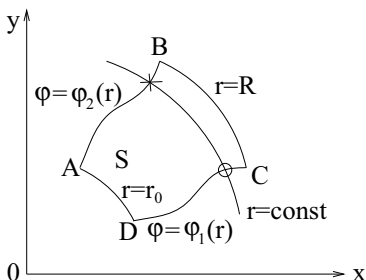


Рис. 81. Область  $S$ , правильная в направлении переменной  $\varphi$

Так же как и ранее точку входа в область  $S$  обозначим кружком «о», выхода – крестиком «х». Точка входа в область определяется, как точка пересечения окружности  $r = \text{const}$  с границей  $\varphi = \varphi_1(r)$ , точка выхода – с  $\varphi = \varphi_2(r)$ , в точке входа, очевидно, значение  $\varphi$  меньше, чем в точке выхода. В формуле (53.4)  $r$  вынесено за знак внутреннего интеграла, так как он берется при постоянном  $r$ . Отметим, что в случае, если границы по  $\varphi$  будут координатными линиями:  $\varphi_1(r) = \alpha$ ,  $\varphi_2(r) = \beta$ , (рис. 81), тогда внутренние пределы в формуле (53.4) будут постоянными и

$$\iint_S f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi = \int_{r_0}^R r dr \int_{\alpha}^{\beta} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi. \quad (53.5)$$

Конечно, как и в декартовой системе координат, выбор направления первоначального интегрирования имеет существенное значение для вычисления двойного интеграла в полярных координатах.

**ПРИМЕР 53.1.** Вычислить двойной интеграл  $\iint_S \sqrt{4 - x^2 - y^2} ds$  по области, являющейся кругом радиуса  $R = 2$  (рис. 82).

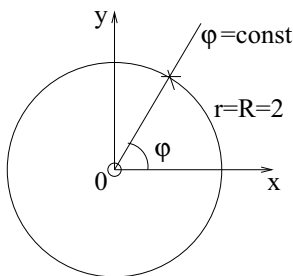


Рис. 82. К примеру 53.1

**Решение:** Так как в полярных координатах

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad ds = r dr d\varphi,$$

имеем

$$\iint_S \sqrt{4 - x^2 - y^2} ds = \iint_S \sqrt{4 - r^2} r dr d\varphi.$$

Область интегрирования ограничена следующим значением  $r$  и  $\varphi$ :  $r = 0, r = 2, \varphi = 0, \varphi = 2\pi$ . Следовательно, по формуле (53.2):

$$\iint_S \sqrt{4 - r^2} r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \sqrt{4 - r^2} r dr.$$

Так как внутренний интеграл и его пределы не зависят от  $\varphi$ , значение двойного интеграла будет равно произведению определённых

интегралов

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = \varphi \Big|_0^{2\pi} = 2\pi \text{ и } \int_0^2 \sqrt{4-r^2} r dr = - \left( \frac{\sqrt{(4-r^2)^3}}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Следовательно, окончательный ответ

$$\iint_S \sqrt{4-x^2-y^2} ds = \frac{16\pi}{3}.$$

Вычислить этот интеграл в декартовых координатах было бы значительно сложнее.

**ПРИМЕР 53.2.** *Переходя к полярным координатам, вычислить  $\iint_S y ds$  по области  $S$ , ограниченной окружностью  $x^2 + y^2 = 2x$  и осью  $Ox$ .*

**Решение:** Уравнение  $x^2 + y^2 = 2x$  является уравнением окружности с центром в точке  $(1;0)$  радиусом, равным 1. Действительно,  $x^2 + y^2 = 2x \rightarrow x^2 - 2x + y^2 = 0 \rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$ . Изобразим область интегрирования на рис. 83.

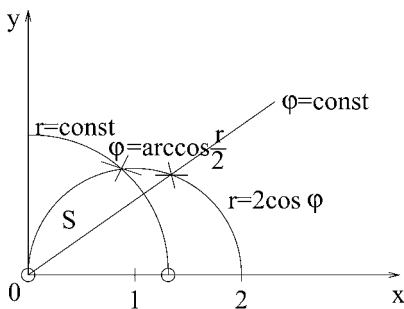


Рис. 83. К примеру 53.2

Подставив  $x = r \cos \varphi$  и  $y = r \sin \varphi$  в уравнение  $x^2 + y^2 = 2x$ , получим  $r^2 = 2r \cos \varphi$ , откуда  $r = 2 \cos \varphi$ . Это уравнение является уравнением нашей окружности в полярных координатах. Выберем направление первоначального интегрирования по  $r$  вдоль луча  $\varphi = \text{const}$

(рис. 83). В точке входа «о» в область  $r = 0$ , выхода  $r = 2 \cos \varphi$ ,  $\varphi$  изменяется в пределах от 0 до  $\pi/2$ . Таким образом, по формуле (53.4):

$$\begin{aligned} \iint_S y ds &= \iint_S (r \sin \varphi) r dr d\varphi = \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r^2 dr = \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{r^3}{3} \sin \varphi \Big|_0^{2 \cos \varphi} d\varphi = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} 8 \cos^3 \varphi \cdot \sin \varphi d\varphi = \\ &= -\frac{8 \cos^4 \varphi}{3 \cdot 4} \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3} (\cos^4 \frac{\pi}{2} - \cos^4 0) = -\frac{2}{3} (0 - 1) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Если мы выберем направление первоначального интегрирования по  $\varphi$  вдоль окружности  $r = \text{const}$  от точки входа её «о» в область  $S$ , в которой  $\varphi = 0$ , до точки выхода «х», в которой  $\varphi = \arccos \frac{r}{2}$ , получим:

$$\begin{aligned} \iint_S y ds &= \iint_S r^2 \sin \varphi ds d\varphi = \int_0^2 r^2 dr \int_0^{\arccos \frac{r}{2}} \sin \varphi d\varphi = \\ &= \int_0^2 r^2 (-\cos \varphi) \Big|_0^{\arccos \frac{r}{2}} dr = \int_0^2 r^2 (-\cos \arccos \frac{r}{2} + \cos 0) dr = \\ &= \int_0^2 r^2 \left(1 - \frac{r}{2}\right) dr = \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{8}\right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

### 53.2. Замена переменных в двойном интеграле в общем случае криволинейных координат

Предположим, что при вычислении двойного интеграла  $\iint_S f(x, y) ds$  мы вводим новые переменные  $u$  и  $v$  такие, что

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \quad (53.6)$$

являются функциями, имеющими непрерывные частные производные по  $u$  и  $v$  в области  $S$ . Пусть также каждому значению  $x$  и  $y$  в области  $S$  соответствуют единственные значения  $u$  и  $v$ , определяемые дифференцируемыми функциями

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y). \quad (53.7)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 53.4. Числа  $u$  и  $v$ , определяемые по (53.7) для каждой точки с декартовыми координатами  $x$  и  $y$ , принадлежащей области интегрирования  $S$ , называются криволинейными координатами этой точки.

Подобно тому, как мы это делали в декартовой и полярной системах координат, разобьём область  $S$  координатными линиями  $u = \text{const}$  и  $v = \text{const}$  на элементарные площадки  $\Delta S_i$  (рис. 84).

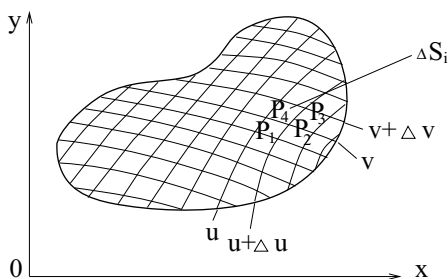


Рис. 84. Разбиение области интегрирования  $S$  криволинейными координатными линиями  $u = \text{const}$   $v = \text{const}$

Вычислим площадь  $\Delta S_i$ , или в соответствие с обозначениями, приведёнными на рис. 84, площадь криволинейного четырёхугольника с вершинами в точках  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  и  $P_4$ , являющимися точками пересечения координатных линий со значениями криволинейных координат, равными  $u$ ,  $v$ ,  $u + \Delta u$ ,  $v + \Delta v$ . Координаты этих вершин  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$ ,  $P_3(x_3, y_3)$  и  $P_4(x_4, y_4)$  определяются по (53.6):

$$\begin{aligned} x_1 &= x(u, v), & y_1 &= y(u, v), \\ x_2 &= x(u + \Delta u, v), & y_2 &= y(u + \Delta u, v), \\ x_3 &= x(u + \Delta u, v + \Delta v), & y_3 &= y(u + \Delta u, v + \Delta v), \\ x_4 &= x(u, v + \Delta v), & y_4 &= y(u, v + \Delta v). \end{aligned} \quad (53.8)$$

Представим теперь значения координат в точках  $P_2$ ,  $P_3$  и  $P_4$  через соответствующие значения координат в точке  $P_1$  с помощью формулы Тейлора для функции двух переменных (лекция 41), при этом будем учитывать лишь приращения  $\Delta u$  и  $\Delta v$  первого порядка малости.

$$\begin{aligned}
x_1 &= x(u, v), \\
y_1 &= y(u, v), \\
x_2 &= x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u = x_1 + \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u, \\
y_2 &= y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u = y_1 + \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u, \\
x_3 &= x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v = x_1 + \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v, \\
y_3 &= y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v = y_1 + \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v, \\
x_4 &= x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v = x_1 + \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v, \\
y_4 &= y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v = y_1 + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v.
\end{aligned} \tag{53.9}$$

При этом ограничении криволинейный четырёхугольник  $P_1P_2P_3P_4$  превращается в параллелограмм, площадь которого (см. лекцию 29) равна абсолютной величине векторного произведения  $\vec{P_1P_2}$  и  $\vec{P_1P_4}$ . Учитывая (53.9) находим  $\vec{P_1P_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; 0) = (\frac{\partial x}{\partial u} \Delta u; \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u; 0)$  и  $\vec{P_1P_4} = (x_4 - x_1; y_4 - y_1; 0) = (\frac{\partial x}{\partial v} \Delta v; \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v; 0)$ .

По формуле (32.4):  $\vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_4} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u & \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v & \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v & 0 \end{vmatrix} =$   
 $= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \Delta u \Delta v \vec{k}$  и  $\Delta S_i = |\vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_4}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}_i \Delta u \Delta v =$   
 $= |J|_i \Delta u \Delta v$ , в определителе для удобства строки и столбцы поменяли местами, от этого его абсолютная величина не меняется.

Подставляя полученное значение  $\Delta S_i$  в (51.1), заменив декартовы координаты  $x$  и  $y$  на  $u$  и  $v$  по (53.6), и учитывая, что предел интегральной суммы не зависит от разбиения  $S$  на элементарные площадки, получаем:

$$\iint_S f(x, y) ds = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv. \tag{53.10}$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 53.5.** Формула (53.10) называется формулой преобразования координат в двойном интеграле, входящий в неё определитель

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{53.11}$$

называется определителем Якоби, или якобианом, а произведение  $|J| du dv$  – элементом площади в криволинейных координатах  $u$  и  $v$ .

Для рассмотренных нами в предыдущем пункте полярных координат  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  и, следовательно, якобиан будет равен

$J = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r$ , а элемент площади  $-rdrd\varphi$ , как и было ранее в определении 53.1.

Приведем один пример на преобразование координат.

**ПРИМЕР 53.3.** Вычислить  $\iint_S (y-x)ds$ , где  $S$  – параллелограмм, ограниченный прямыми  $y = x+1$ ,  $y = x+4$ ,  $y = -2x+9$  и  $y = -2x+5$ .

**Решение:** Изобразим заданную область  $S$  на рис. 85.

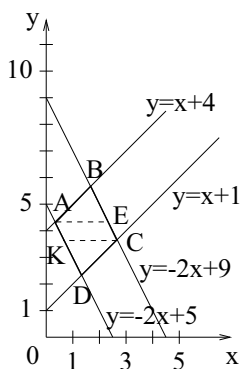


Рис. 85. К примеру 53.3

Очевидно, что для вычисления интеграла по данной области в декартовых координатах мы должны будем разбить её на три части прямыми параллельными оси  $x$  (или оси  $y$ ), которые и изображены на рис. 85 пунктирными линиями и, следовательно,

$$\iint_S (x-y)dx dy = \iint_{S_{DCK}} (x-y)dx dy + \iint_{S_{KCEA}} (x-y)dx dy + \iint_{S_{AEB}} (x-y)dx dy.$$

Это, очевидно, потребует значительного количества труда и времени.

Введем новые переменные  $u = y - x$ ,  $v = y + 2x$ . В этих переменных на границах области интегрирования  $DC$ ,  $AB$ ,  $AD$  и  $BC$  будут соответственно:  $u = 1$ ,  $u = 4$ ,  $v = 5$  и  $v = 9$ . Выразив  $x$  и  $y$  через  $u$  и  $v$  получим  $x = \frac{1}{3}(v - u)$ ,  $y = \frac{1}{3}(v + 2u)$ , и следовательно якобиан по



формуле (53.11):

$$J = \left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right| = \left| \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} \right| = \frac{1}{3^2} \left| \begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{array} \right| = \frac{1}{3^2}(-1-2) = -\frac{1}{3}.$$

В соответствие с формулой (53.10)

$$\begin{aligned} \iint_S (y-x) ds &= \frac{1}{3} \iint_S u du dv = \frac{1}{3} \int_1^4 u du \int_5^9 dv = \\ &= \frac{1}{3} \frac{u^2}{2} \Big|_1^4 v \Big|_5^9 = \frac{1}{6}(16-1)(9-5) = 10. \end{aligned}$$

### Практическое занятие 53. Двойной интеграл в криволинейных координатах

На данном практическом занятии мы рассмотрим в основном вычисление двойного интеграла в полярных координатах и лишь в конце один пример на другие криволинейные координаты.

**ПРИМЕР 53.1.** Вычислить  $\iint_S \ln(x^2 + y^2) ds$ , если область интегрирования  $S$  – кольцо между окружностями  $x^2 + y^2 = e^2$  и  $x^2 + y^2 = e^4$ .

**Решение:** В полярных координатах область  $S$  ограничена координатными линиями  $r = r_0 = e$ ,  $r = R = e^2$ ,  $\varphi = \alpha = 0$ ,  $\varphi = \beta = 2\pi$  и, следовательно, по формуле (53.2), используя затем формулу интегрирования по частям, получим 
$$\begin{aligned} \iint_S \ln(x^2 + y^2) ds &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_e^{e^2} r \ln r^2 dr = \\ &= 2\varphi \Big|_0^{2\pi} \int_e^{e^2} r \ln r dr = 4\pi \int_e^{e^2} r \ln r dr = 4\pi \left( \frac{r^2}{2} \ln r \right) \Big|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \frac{r^2}{2} \frac{1}{r} dr = \\ &= 2\pi \left( r^2 \ln r - \frac{r^2}{2} \right) \Big|_e^{e^2} = 2\pi \left( e^4 \ln e^2 - \frac{e^4}{4} - e^2 \ln e + \frac{e^2}{2} \right) = \pi e^2 (3e^2 - 1). \end{aligned}$$

**ПРИМЕР 53.2.** Вычислить  $\iint_S r \sin \varphi dr d\varphi$ ,  $S: r \leq a$ ,  $\varphi \geq \frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi \leq \pi$ .

**Решение:** Здесь мы также можем воспользоваться формулой (53.2) положив  $r_0 = 0$ ,  $R = a$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\beta = \pi$ .

$$\begin{aligned} \iint_S r \sin \varphi dr d\varphi &= \int_{\pi/2}^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^a r dr = (-\cos \varphi) \Big|_{\pi/2}^{\pi} \frac{r^2}{2} \Big|_0^a = \\ &= (-\cos \pi + \cos \pi/2) \times (a^2/2 - 0) = a^2/2. \end{aligned}$$

**ПРИМЕР 53.3.** Вычислить интеграл из примера 53.2, если  $S$ :  $r \geq 1$ ,  $r \leq 2 + \cos \varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ .

**Решение:** Изобразим область  $S$  на рис. 86.

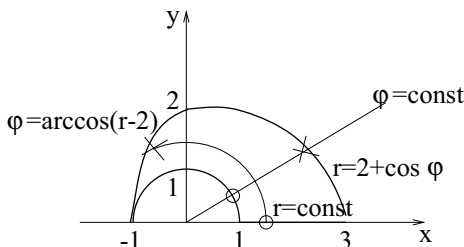


Рис. 86. К примеру 53.3

Луч  $\varphi = \text{const}$  входит в область  $S$  в точке «о», в которой  $r = 1$ , и выходит из области в точке «х», в которой  $r$  определяется уравнением  $r = 2 + \cos \varphi$ , по  $\varphi$  область ограничена значениями  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .

$$\begin{aligned} \iint_S \sin \varphi dr d\varphi &= \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_1^{2+\cos \varphi} r dr = \int_0^{\pi} \frac{r^2}{2} \Big|_1^{2+\cos \varphi} \sin \varphi d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} ((2 + \cos \varphi)^2 - 1) \sin \varphi d\varphi = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi} (3 + 4 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d \cos \varphi = \\ &= -\frac{1}{2} \left( 3 \cos \varphi + 2 \cos^2 \varphi + \frac{\cos^3 \varphi}{3} \right) \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2} \left( 3 \cos \pi + 2 \cos^2 \pi + \frac{1}{3} \cos^3 \pi - 3 \cos 0 - \right. \\ &\quad \left. - 2 \cos^2 0 - \frac{1}{3} \cos^3 0 \right) = \frac{1}{2} (6 + 2/3) = \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

Если изменить порядок интегрирования, то внутренний интеграл надо взять вдоль окружности  $r = \text{const}$  от точки входа «о» в область  $S$ , в которой  $\varphi = 0$ , до точки выхода «х» из области  $S$ , в которой  $\varphi$  определяется из уравнения  $r = 2 + \cos \varphi \rightarrow \varphi = \arccos(r - 2)$ , а по  $r$  пределы изменяются от 1 до 3.

$$\begin{aligned} \iint_S r \sin \varphi dr d\varphi &= \int_1^3 r dr \int_0^{\arccos(r-2)} \sin \varphi d\varphi = - \int_1^3 r \cos \varphi \Big|_0^{\arccos(r-2)} dr = \\ &= - \int_1^3 r(r - 2 - 1) dr = \int_1^3 (3r - r^2) dr = \left( \frac{3r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right) \Big|_1^3 = \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

**ПРИМЕР 53.4.** Рассмотрим предыдущий пример для области  $S$ :  $r \geq 1$ ,  $r \leq 2 + \cos \varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  (рис. 87).

**Решение:** При выборе первоначального направления вдоль луча  $\varphi = \text{const}$  изменится один верхний предел с  $\pi$  на  $\pi/2$ , а остальное

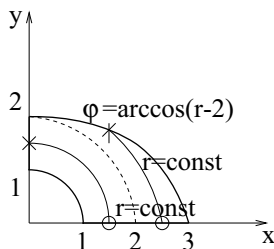


Рис. 87. К примеру 53.4

все будет также, как в предыдущем примере. Следовательно,

$$\iint_S r \sin \varphi \, dr \, d\varphi = -\frac{1}{2} \left( 3 \cos \varphi + 2 \cos^2 \varphi + \frac{\cos^3 \varphi}{3} \right) \Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= -\frac{1}{2} (3 \cos \frac{\pi}{2} + 2 \cos^2 \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \cos^3 \frac{\pi}{2} - 3 \cos 0 - 2 \cos^2 0 - \frac{1}{3} \cos^3 0) = \frac{8}{3}.$$

При выборе же первоначального направления интегрирования вдоль линии  $r = \text{const}$  оказывается необходимым область  $S$  разбивать на две (рис. 87), для первой из которых  $1 \leq r \leq 2$ , для второй  $2 \leq r \leq 3$ , в первой  $\varphi$  меняется от 0 до  $\frac{\pi}{2}$ , во второй от 0 до  $\varphi = \arccos(r-2)$ .

$$\iint_S r \sin \varphi \, dr \, d\varphi = \int_1^2 r \, dr \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \, d\varphi + \int_2^3 r \, dr \int_0^{\arccos(r-2)} \sin \varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{r^2}{2} \Big|_1^2 (-\cos \varphi) \Big|_0^{\pi/2} + \left( \frac{3r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right) \Big|_2^3 = 2 - \frac{1}{2} + \frac{27}{2} - 9 - 6 + \frac{8}{3} = \frac{8}{3}.$$

Как правило, при использовании полярных координат оказывается целесообразным внутренний интеграл вычислять вдоль луча  $\varphi = \text{const}$ .

Рассмотрим теперь один пример, в котором оказывается целесообразным введение не полярных, а других криволинейных координат.

**ПРИМЕР 53.5.** Вычислить  $\iint_S y(x+y) \, dx \, dy$ , где  $S: xy \geq 1, xy \leq 2, y \geq x, y \leq 3x$ .

**Решение:** Построим область интегрирования на плоскости  $Oxy$  (рис. 88).

Очевидно, чтобы вычислить этот интеграл в декартовых координатах необходимо область  $S$  разбить на три части. В то же время, если сделать замену переменных  $u = xy$  и  $v = \frac{y}{x}$ , мы увидим, что границы области в этих переменных будут их координатными линиями  $u = 1$ ,  $u = 2$ ,  $v = 1$  и  $v = 3$  и, следовательно, наш двойной интеграл преобразуется в этих координатах в двукратный с постоянными пределами.

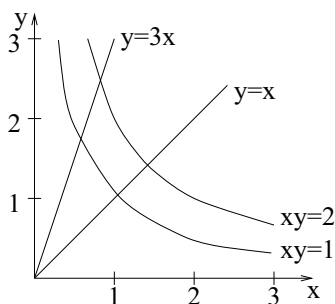


Рис. 88. К примеру 53.5

Выразим  $x$  и  $y$  через  $u$  и  $v$ :  $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$ ,  $y = \sqrt{uv}$ . Найдем якобиан по формуле (53.11).

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{uv}} \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} + \frac{\sqrt{u}}{v\sqrt{v}} \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} \right) = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{v} + \frac{1}{v} \right) = \frac{1}{2v}.$$

На основании формулы (53.10) сделав замену переменных, расставив пределы интегрирования и проводя интегрирование по  $u$  и  $v$ , получим

$$\begin{aligned} \iint_S y(x+y) dx dy &= \iint_S \sqrt{uv} \left( \sqrt{\frac{u}{v}} + \sqrt{uv} \right) \frac{1}{2v} du dv = \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 du \int_1^3 \left( \frac{u}{v} + u \right) dv = \frac{1}{2} \int_1^2 u (\ln v + v) \Big|_1^3 du = \\ &= \frac{1}{2} (\ln 3 + 2) \frac{u^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{3}{4} (\ln 3 + 2). \end{aligned}$$

### Самостоятельная работа

В примерах 53.6, 53.7 перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования.

ПРИМЕР 53.6.  $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy.$

ПРИМЕР 53.7.  $\iint_S f(x, y) dx dy$ ,  $S$ :  $y \geq x$ ,  $y \geq -x$ ,  $y \leq 1$ .

ПРИМЕР 53.8. Вычислить  $\iint_S r^2 dr d\varphi$ , если  $S$  ограничена первым завитком спирали  $r = a\varphi$  и осью  $Ox$ .

ПРИМЕР 53.9. Преобразовать к полярным координатам и вычислить  $\iint_S e^{-x^2-y^2} dx dy$ ,  $S$ :  $x^2 + y^2 \leq a^2$ .

ПРИМЕР 53.10. Вычислить  $\iint_S (x+y)^3(x-y)^2 ds$ , если область  $S$  – квадрат, ограниченный прямыми  $x+y=1$ ,  $x-y=1$ ,  $x+y=3$ ,  $x-y=-1$ . Ввести новые переменные:  $u = x+y$ ;  $v = x-y$ .

## Лекция 54. Приложения двойных интегралов

Объём тел. Площадь поверхности. Масса, статические моменты, координаты центра тяжести и моменты инерции пластин.

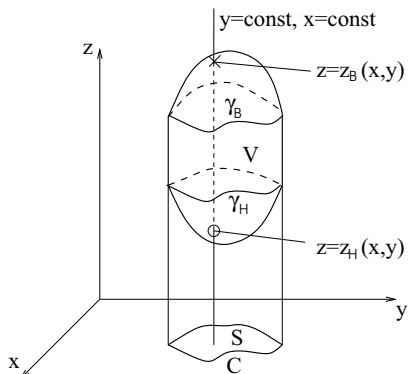
### 54.1. Объём тел

Пусть рассматривается тело, объём которого равен  $V$ , ограниченное замкнутой поверхностью  $\sigma$ , состоящей из трёх частей: сбоку – цилиндрической поверхности  $F(x, y) = 0$ , снизу – поверхности  $\sigma_n$ , сверху –  $\sigma_v$ , являющимися графиками функций двух переменных  $z = z_n(x, y)$  и  $z = z_v(x, y)$ . Пусть эти функции  $z = z_n(x, y)$  и  $z = z_v(x, y)$  непрерывны в области  $S$ , которая определяется как проекция рассматриваемого тела на плоскость  $Oxy$  (рис. 89).

Границей области  $S$  будет проекция линий пересечения  $\gamma_n$  и  $\gamma_v$  поверхностей  $z_n$  и  $z_v$  с цилиндрической поверхностью  $F(x, y)$ .

В частном случае линии пересечения поверхностей  $\sigma_n$  и  $\sigma_v$  с цилиндрической поверхностью  $F(x, y) = 0$  могут совпадать. Тогда  $\gamma_n = \gamma_v = \gamma$  и поверхность  $\sigma$  состоит только из двух частей  $\sigma_n$  и  $\sigma_v$ , пересекающихся по линии  $\gamma$ . Изображенная на рис. 89 прямая  $x = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$  в этом пункте не будет использована, а потребуются нам в следующей лекции.

Предположим вначале, что  $z_n(x, y) \geq 0$  и  $z_v(x, y) \geq 0$  в  $S$ . Тогда в соответствие с геометрическим смыслом двойного интеграла (см. лекцию 51)  $\iint_S z_v(x, y) ds$  и  $\iint_S z_n(x, y) ds$  равны объёмам цилиндрических тел с образующей параллельной оси  $oz$ , направляющей  $C$ , нижним

Рис. 89. К вычислению объёма  $V$ 

основанием  $S$ , ограниченным сверху соответственно поверхностями  $z = z_B(x, y)$  и  $z = z_H(x, y)$ . Разность этих объёмов и будет равна  $V$ .

$$V = \iint_S z_B(x, y) ds - \iint_S z_H(x, y) ds = \iint_S (z_B(x, y) - z_H(x, y)) ds \quad (54.1)$$

Полученная формула справедлива при любом расположении  $\sigma_H$  и  $\sigma_B$  относительно плоскости  $XOY$ , только всегда для заданных  $x$  и  $y$  координата  $z_B \geq z_H$ .

Вычисление объёмов тел более сложной формы сводится к вычислению алгебраической суммы нескольких тел рассмотренного нами типа.

**ПРИМЕР 54.1.** Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:  $y = x^2$ ,  $y = 1$ ,  $x + y + z = 4$  и  $2x + y + z = 3$ .

**Решение:** Данное тело (рис. 90,а) ограничено сбоку частью цилиндрической поверхностью  $y = x^2$  ( $AECKD$ ), частью плоскости  $y = 1$  ( $ACD$ ), сверху – частью плоскости  $z_B = 4 - x - y$  ( $DKC$ ), снизу – частью плоскости  $z_H = 3 - 2x - y$  ( $AEC$ ). Его проекцией на плоскость  $XOY$  является область  $S$  ( $AOB$ ), ограниченная прямой  $y = 1$  и параболой  $y = x^2$ .

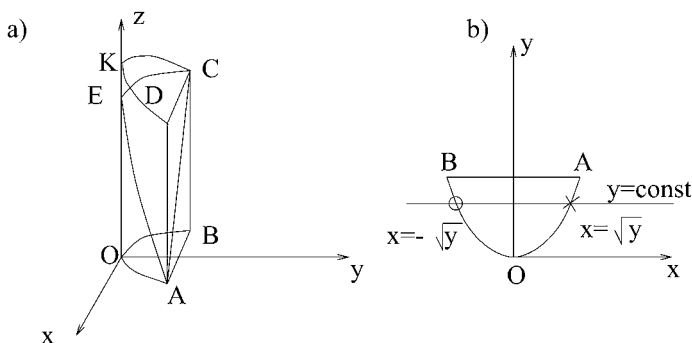


Рис. 90. К решению примера 54.1

Объём рассматриваемого тела находим по формуле (54.1)

$$V = \iint_S (4 - x - y - (3 - 2x - y)) ds = \iint_S (1 + x) ds.$$

Данный двойной интеграл первоначально будем интегрировать вдоль линии  $y = \text{const}$  от точки «о» входа её в область  $S$ , в которой  $x = -\sqrt{y}$ , до точки выхода «х», в которой  $x = \sqrt{y}$  (рис. 90,б), а затем по  $y$ , в пределах от 0 до 1, следовательно,

$$V = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (1 + x) dx = 2 \int_0^1 \sqrt{y} dy = \frac{4}{3} y^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

**ПРИМЕР 54.2.** Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями  $z = 4 - x^2 - y^2$  и  $z = 1 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ .

**Решение:** Рассматриваемое тело ограничено сверху параболоидом вращения  $z_{\text{в}} = 4 - x^2 - y^2$  и снизу также параболоидом вращения  $z_{\text{н}} = 1 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ , которые пересекаются в плоскости  $z = 2$  по окружности  $x^2 + y^2 = 2$  (рис. 91).

Таким образом, по формуле (54.1) находим объём рассматриваемого тела

$$V = \iint_S (4 - x^2 - y^2 - (1 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2))) ds = \iint_S (3 - \frac{3}{2}(x^2 + y^2)) ds = \\ = \frac{3}{2} \iint_S (2 - x^2 - y^2) ds, \text{ где } S \text{ является кругом } x^2 + y^2 = 2 \text{ с радиусом,}$$

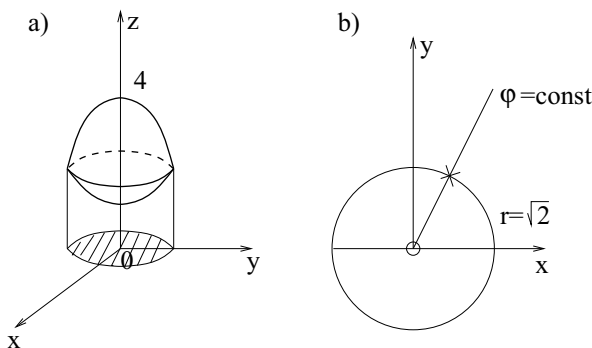


Рис. 91. К решению примера 54.2

равным  $\sqrt{2}$  (заштрихованная область на рис. 91,а и изображенная в плоскости  $XOY$  на рис. 91,б). Естественно, что вычисление полученного двойного интеграла целесообразно проводить в полярной системе координат по  $r$  от  $r = 0$  до  $r = \sqrt{2}$  и по  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$  (см. формулу 53.2). Напомним, что в полярных координатах  $x^2 + y^2 = r^2$ , а  $ds = r dr d\varphi$  (см. лекцию 53). Итак

$$V = \frac{3}{2} \iint_S (2 - r^2) r dr d\varphi = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} (2r - r^3) dr = \\ = \frac{3}{2} \varphi \Big|_0^{2\pi} (r^2 - r^4/4) \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{3}{2} 2\pi (2 - 1) = 3\pi.$$

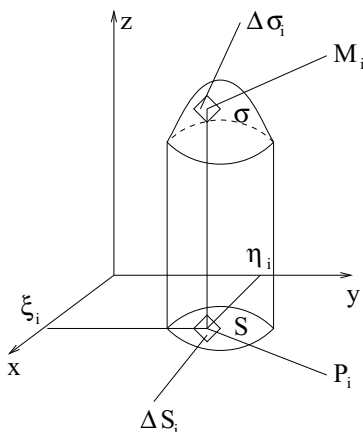
#### 54.2. Площадь поверхности

Пусть часть поверхности  $\sigma$ , являющейся графиком функции  $z = z(x, y)$ , проецируется на плоскость  $Oxy$  в область  $S$  (рис. 92).

Разобьем  $S$  на  $n$  частей подобно тому, как мы это делали при выводе понятия двойного интеграла в лекции 51. Возьмём  $i$ -ый элемент площади  $\Delta S_i$  (рис. 92), выберем точку  $P_i \in \Delta S_i$ , обозначим декартовы координаты этой точки  $\xi_i, \eta_i$ . Найдём значение  $\zeta_i = z(\xi_i, \eta_i)$ , которое равно аппликате точки  $M_i \in \sigma$ , проецирующейся на плоскость  $Oxy$  в точку  $P_i$  и проведем в точке  $M_i$  плоскость касательную к поверхности  $\sigma$ .

Обозначим  $\Delta \sigma_i$  элемент этой касательной плоскости, проекция которого на плоскость  $XOY$  равна  $\Delta S_i = \Delta \sigma_i \cos \gamma_i$ , где  $\cos \gamma_i$  – угол,



Рис. 92. К выводу формулы вычисления площади поверхности  $\sigma$ 

образованный в точке  $M_i$  вектором  $\vec{N}_i$ , нормальным к поверхности  $\sigma$ , орт которого обозначим  $\vec{n}_i$ .

Выражение для  $\cos \gamma$  было получено в лекции 40:

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}.$$

$$\text{Следовательно, } \Delta \sigma_i = \frac{\Delta S_i}{\cos \gamma_i} = \left( \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} \right)_i \Delta S_i.$$

Составив  $n$ -ую интегральную сумму и перейдя к пределу при  $n \rightarrow +\infty$ , при условии что все  $\Delta S_i$  стягиваются в точки, получим

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n (\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2})_i \Delta S_i = \iint_S \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} ds. \quad (54.2)$$

Если поверхность  $\sigma$  будет задана неявным выражением  $F(x, y, z) = 0$ , то согласно формуле 54.2:

$$\sigma = \iint_S \sqrt{\frac{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}{F_z'^2}} ds = \iint_S \frac{1}{|F_z'|} \sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2} ds. \quad (54.3)$$

**ПРИМЕР 54.3.** Найти площадь части цилиндра  $x^2 + z^2 = a^2$ , вырезанной из него цилиндром  $x^2 + y^2 = a^2$ .

Решение: Цилиндр  $x^2 + z^2 = a^2$  имеет своей осью ось  $OY$ , а цилиндр  $x^2 + y^2 = a^2$  — ось  $OZ$ . На рис. 93а заштрихована расположенная в 1-м октанте часть поверхности, вырезанной цилиндром  $x^2 + y^2 = a^2$  из цилиндра  $x^2 + z^2 = a^2$ .

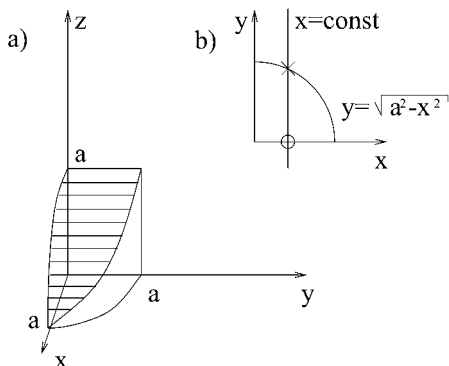


Рис. 93. К примеру 54.3

Её площадь составляет  $\frac{1}{8}$  часть искомой площади. Учитывая, что  $z = \sqrt{a^2 - x^2}$  и  $z'_x = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ , а  $z'_y = 0$  и, следовательно,  $\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ , по формуле (54.2) находим искомую площадь

$$\sigma = 8a \iint_S \frac{ds}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 8a \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dy = 8a \int_0^a \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Big|_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dx =$$

$$= 8a \int_0^a dx = 8a^2.$$

Хотя область интегрирования здесь является  $\frac{1}{4}$  частью круга, интегрировать оказывается целесообразнее в декартовых координатах согласно схеме, изображенной на рис. 93,б.

### 54.3. Масса, статические моменты, координаты центра тяжести и моменты инерции пластин

Пусть  $S$  является тонкой материальной пластинкой с поверхностной плотностью  $\gamma = \gamma(x, y)$ . Разобьем  $S$  на  $n$  частей  $\Delta S_i$ , как мы это делали в п. 45.2.3 при введении понятия двойного интеграла. Пусть точка  $P_i$  с координатами  $\xi_i, \eta_i$  принадлежит  $\Delta S_i$  (рис. 59). Вычислим

плотность в этой точке  $\gamma(\xi_i, \eta_i)$  и будем считать её постоянной для всего элемента площади  $\Delta S_i$ . Тогда масса этого элемента пластинки будет  $\Delta m_i = \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i$ .

Составим  $n$ -ую интегральную сумму и устремив её к пределу в соответствие с формулой (51.1) найдем, что *масса материальной пластинки  $S$  с поверхностной плотностью  $\gamma = \gamma(x, y)$  равна*

$$M = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i = \iint_S \gamma(x, y) ds. \quad (54.4)$$

Очевидно, что если плотность  $\gamma$  постоянна для всей пластинки

$$M = \gamma \iint_S ds = \gamma S. \quad (54.5)$$

Перейдем теперь к нахождению статических моментов, координат центра тяжести и моментов инерции материальной пластинки  $S$ . Их нахождение в случае произвольной материальной пластинки  $S$  проводится по аналогии с выводом формулы (54.4) для массы пластинки  $S$ .

$$M_x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \eta_i \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i = \iint_S \gamma(x, y) y ds, \quad (54.6)$$

$$M_y = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \xi_i \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i = \iint_S \gamma(x, y) x ds, \quad (54.7)$$

$$x_{\text{ц}} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_S \gamma(x, y) x ds}{\iint_S \gamma(x, y) ds}, \quad (54.8)$$

$$y_{\text{ц}} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_S \gamma(x, y) y ds}{\iint_S \gamma(x, y) ds}, \quad (54.9)$$

$$I_x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i = \iint_S \gamma(x, y) y^2 ds, \quad (54.10)$$

$$I_y = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i = \iint_S \gamma(x, y) x^2 ds. \quad (54.11)$$

Введем также понятие полярного момента инерции материальной точки, определённого как произведение массы материальной точки на квадрат её расстояния до начала координат.

$$I_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n (\eta_i^2 + \xi_i^2) \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i = \iint_S r^2 \gamma(x, y) ds = I_x + I_y. \quad (54.12)$$

В случае постоянной поверхностной плотности  $\gamma = \text{const}$  приведенные формулы преобразуются в следующие:

$$M_x = \gamma \iint_S y ds, \quad (54.13)$$

$$M_y = \gamma \iint_S x ds, \quad (54.14)$$

$$x_{\text{ц}} = \frac{\iint_S x ds}{\iint_S ds} = \frac{1}{S} \iint_S x ds, \quad (54.15)$$

$$y_{\text{ц}} = \frac{\iint_S y ds}{\iint_S ds} = \frac{1}{S} \iint_S y ds, \quad (54.16)$$

$$I_x = \gamma \iint_S y^2 ds, \quad (54.17)$$

$$I_y = \gamma \iint_S x^2 ds, \quad (54.18)$$

$$I_0 = \gamma \iint_S r^2 ds = I_x + I_y. \quad (54.19)$$

**ПРИМЕР 54.4.** Найти массу круглой пластинки, если её плотность пропорциональна расстоянию точки от центра и равна  $\delta$  на краю пластинки.

**Решение:** Очевидно, что, исходя из условия задачи, плотность пластинки  $\gamma = \frac{r}{R}\delta$ .

Массу пластинки определим по формуле (54.4)  $M = \iint_S \frac{r}{R}\delta ds$ . Этот интеграл, очевидно, целесообразно вычислять в полярных координатах  $r$ , меняющейся от 0 до  $R$ , и  $\varphi$ , меняющейся от 0 до  $2\pi$ . Напомним, что в полярных координатах элемент площади  $ds = r dr d\varphi$ . Следовательно,

$$M = \frac{\delta}{R} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 dr = \frac{\delta}{R} \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^R = \frac{2\pi\delta R^2}{3}.$$

**ПРИМЕР 54.5.** Найти координаты центра тяжести полукруга радиуса  $R$ . Плотность пластинки постоянна.

**Решение:** В силу симметрии очевидно, что  $x_{\text{ц}} = 0$ .  $S = \frac{1}{2}\pi R^2$ . По формуле (54.16)  $y_{\text{ц}} = \frac{1}{S} \iint_S y ds = \frac{2}{\pi R^2} \iint_S y ds$ . Для вычисления данного интеграла по области  $S$  разумно воспользоваться полярной системой координат (рис. 94), в которой  $y = r \sin \varphi$ ,  $ds = r dr d\varphi$ .

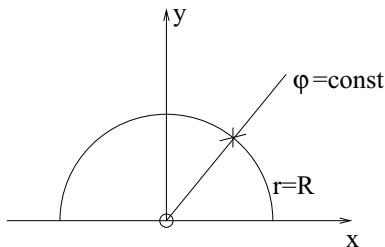


Рис. 94. К примеру 54.5

Таким образом

$$y_{\text{ц}} = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^R r^2 dr = \frac{2}{\pi R^2} (-\cos \varphi) \Big|_0^{\pi} \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^R = \frac{2}{\pi R^2} (\cos 0 - \cos \pi) \frac{R^3}{3} = \frac{4}{3\pi} R.$$

**ПРИМЕР 54.6.** В условиях примера 54.4 определить момент инерции  $I$  круга относительно диаметра, а также при  $\gamma = \text{const}$ .

**Решение:** В случае круга в силу симметрии  $I_x = I_y = I$ . Из формулы (54.12) имеем  $I = \frac{1}{2}I_0 = \frac{1}{2} \iint_S r^2 \gamma(x, y) ds = \frac{\delta}{2R} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^4 dr =$   
 $= \frac{\delta}{2R} \varphi \Big|_0^{2\pi} \frac{r^5}{5} \Big|_0^R = \frac{\pi \delta}{5} R^4$ .

При  $\gamma = \text{const}$

$$I = \frac{1}{2}I_0 = \frac{\gamma}{2} \iint_S r^2 ds = \frac{\gamma}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr = \frac{\gamma}{2} \varphi \Big|_0^{2\pi} \frac{r^4}{4} \Big|_0^R =$$

$$= \frac{\gamma}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\gamma \pi R^4}{4}.$$

## Практическое занятие 54. Приложения двойных интегралов

Прежде всего рассмотрим примеры на геометрические приложения двойного интеграла – вычисление площади плоских фигур, объёма тел и площади поверхностей.

**ПРИМЕР 54.1.** Найти площадь  $S$ , ограниченную линиями  $y = e^x$ ,  $y = e^{-2x}$ ,  $y = e^2$ .

**Решение:** Проведем кривые  $y = e^x$ ,  $y = e^{-2x}$  и прямую  $y = e^2$  (рис. 95).

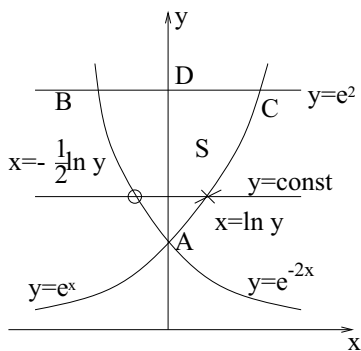


Рис. 95. К примеру 54.1

Область  $S$ , ограниченная этими кривыми будет криволинейным треугольником с вершинами в точках  $A(0; 1)$ ,  $B(-1; e^2)$  и  $C(2; e^2)$ . Площадь плоской фигуры вычисляется по формуле (51.2)  $S = \iint_S ds$ . Вычисление проведем в декартовой системе координат, первоначально интегрируя вдоль линии  $y = \text{const}$  от точки входа «о» в область  $S$ , в которой  $x = -\frac{1}{2} \ln y$ , до точки выхода «х», в которой  $x = \ln y$ , а затем по  $y$  в пределах от 1 до  $e^2$ .

$$S = \int_1^{e^2} dy \int_{-1/2 \ln y}^{\ln y} dx = \int_1^{e^2} x \Big|_{-1/2 \ln y}^{\ln y} dy = \frac{3}{2} \int_1^{e^2} \ln y dy.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$S = \frac{3}{2} (y \ln y) \Big|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} dy = \frac{3}{2} (e^2 \ln e^2 - \ln 1 - e^2 + 1) = \frac{3}{2} (e^2 + 1).$$

Если бы мы выбрали направление первоначального интегрирования вдоль линии  $x = \text{const}$ , то нам пришлось бы вычислять два интеграла отдельно для площади  $ABD$  и  $ADC$ . Отметим, что площади плоских фигур можно вычислять и по формуле (48.1) с помощью определённого интеграла.

**ПРИМЕР 54.2.** *Найти объём части шара радиуса  $R$ , вырезанной из него прямым круговым цилиндром диаметра  $R$ , образующая которого проходит через центр шара.*

**Решение:** Совместим начало координат с центром шара, ось  $Oz$  направим по образующей цилиндра, а ось  $Ox$  – вдоль диаметра цилиндра. На рис. 96,а изображена часть полученного тела, расположенная в I октанте; очевидно, что в силу симметрии её объём будет составлять  $\frac{1}{4}$  часть искомого объёма.

Таким образом, по формуле (54.1)  $V = 4 \iint_S (z_v - z_n) ds$ , где  $z_n = 0$ , а  $z_v = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ , область интегрирования  $S$  изображена на рис. 96,б. Вычисление  $\iint_S \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} ds$  целесообразно провести в полярных координатах  $r$  и  $\varphi$ . Запишем уравнение окружности  $(x - \frac{R}{2})^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$ , ограничивающей область  $S$  в полярных координатах, учитывая, что  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $x^2 + y^2 = r^2$ :  $x^2 - xR + \frac{R^2}{4} + y^2 = \frac{R^2}{4} \rightarrow x^2 + y^2 = xR \rightarrow r^2 = rR \cos \varphi \rightarrow r = R \cos \varphi$ . Интегрирование проведем первоначально вдоль луча  $\varphi = \text{const}$  в пределах от 0 до  $R \cos \varphi$ , а затем по  $\varphi$  – от 0 до  $\pi/2$ .

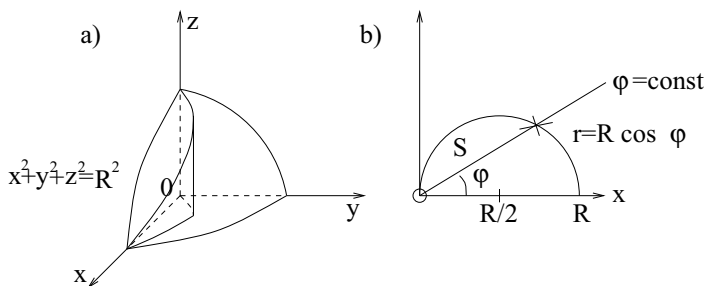


Рис. 96. К примеру 54.2

$$\begin{aligned}
 V &= 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{R \cos \varphi} r \sqrt{R^2 - r^2} dr = 4 \int_0^{\pi/2} \left( -\frac{(R^2 - r^2)^{3/2}}{3} \right) \Big|_0^{R \cos \varphi} d\varphi = \\
 &= \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} (-(R^2 - R^2 \cos^2 \varphi)^{3/2} + R^3) d\varphi = \\
 &= \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} R^3 (1 - \sin^2 \varphi) d\varphi = \frac{4R^3}{3} \left( \varphi \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d \cos \varphi \right) = \\
 &= \frac{4R^3}{3} \left( \frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 \varphi) d \cos \varphi \right) = \\
 &= \frac{4R^3}{3} \left( \frac{\pi}{2} + (\cos \varphi - \frac{\cos^3 \varphi}{3}) \Big|_0^{\pi/2} \right) = \frac{4R^3}{3} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right).
 \end{aligned}$$

**ПРИМЕР 54.3.** Вычислить площадь части параболоида вращения  $z = x^2 + y^2$ , вырезаемую цилиндром  $x^2 + y^2 = 4$  (рис. 97).

**Решение:** Вычисление площади поверхности проведем по формуле (54.2), где  $z'_x = 2x$ ,  $z'_y = 2y$  и область  $S$  – круг радиусом 2 с центром в начале координат, следовательно,  $\sigma = \iint_S \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} ds$ . Интегрирование удобнее проводить в полярных координатах, изменяющихся в пределах по  $r$  от 0 до 2, по  $\varphi$  – от 0 до  $2\pi$ .



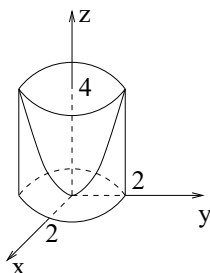


Рис. 97. К примеру 54.3

$$\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r \sqrt{1+4r^2} dr = \varphi \Big|_0^{2\pi} \frac{(1+4r^2)^{3/2}}{12} \Big|_0^2 = \frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 1).$$

Перейдем к примерам на вычисление массы, статических моментов, координат центра тяжести и моментов инерции пластин.

**ПРИМЕР 54.4.** Найти массу кругового кольца, если поверхностная плотность  $\gamma$  в каждой точке кольца обратно пропорциональна квадрату расстояния её от центра кольца.

**Решение:** Обозначим радиусы окружностей, являющихся границами кольца  $R_1$  и  $R_2$  (рис. 98).

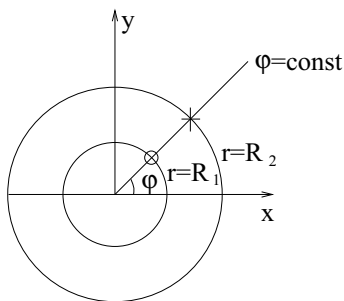


Рис. 98. К примеру 54.4

Согласно условию задачи плотность в любой точке кольца  $\gamma = \frac{k}{r^2}$ , где  $k$  – коэффициент пропорциональности, а  $r$  – расстояние рассматриваемой точки от центра кольца, в который мы поместим полюс полярной системы координат. Интегрирование естественно провести в

указанной системе полярных координат при изменении  $r$  в пределах от  $r = R_1$  до  $r = R_2$ , а  $\varphi$  – в пределах от 0 до  $2\pi$ . По формуле (54.4)

$$M = \iint_S \gamma(x, y) ds = k \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R_1}^{R_2} \frac{r dr}{r^2} = k \varphi \Big|_0^{2\pi} \ln r \Big|_{R_1}^{R_2} = \\ = 2k\pi (\ln R_2 - \ln R_1) = 2k\pi \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

**ПРИМЕР 54.5.** Найти координаты центра тяжести пластины, ограниченной линиями  $y^2 = 4x + 4$ ,  $y^2 = -2x + 4$ . Поверхностная плотность  $\gamma$  постоянна.

**Решение:** Границами пластинки будут параболы, пересекающиеся в точках  $y = -2$  и  $y = 2$  (рис. 99).

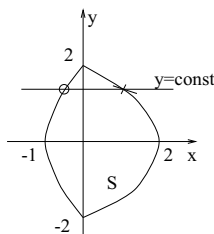


Рис. 99. К примеру 54.5

В силу того, что пластинка симметрична относительно оси  $x$ ,  $x_{ц} = 0$ .  $x_{ц}$  найдем по формуле (54.15). Интегрировать целесообразно в декартовой системе координат первоначально вдоль линии  $y = \text{const}$  от точки входа «о» её в область  $S$ , в которой  $x = \frac{y^2-4}{4}$ , до точки выхода «х» из области, в которой  $x = -\frac{y^2-4}{2}$ . Сначала найдем площадь пластинки

$$S = \iint_S ds = 2 \int_0^2 dy \int_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{-\frac{1}{2}(y^2-4)} dx = 2 \int_0^2 x \Big|_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{-\frac{1}{2}(y^2-4)} dy = \\ = 2 \int_0^2 \left( -\frac{y^2}{2} + 2 - \frac{y^2}{4} + 1 \right) dy = 2 \int_0^2 \left( 3 - \frac{3}{4}y^2 \right) dy = 2 \left( 3y - \frac{1}{4}y^3 \right) \Big|_0^2 = 8.$$

Затем

$$\begin{aligned}
 x_{\text{ц}} &= \frac{M_y}{M} = \frac{1}{S} \iint_S x ds = \frac{1}{8} \cdot 2 \int_0^2 dy \int_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{-\frac{1}{2}(y^2-4)} x dx = \frac{1}{8} \int_0^2 x^2 \Big|_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{-\frac{1}{2}(y^2-4)} dy = \\
 &= \frac{1}{8} \int_0^2 \left( \frac{(y^2-4)^2}{4} - \frac{(y^2-4)^2}{16} \right) dy = \frac{3}{8 \cdot 16} \int_0^2 (y^2-4)^2 dy = \\
 &= \frac{3}{8 \cdot 16} \int_0^2 (y^4 - 8y^2 + 16) dy = \frac{3}{8 \cdot 16} \left( \frac{y^5}{5} - \frac{8y^3}{3} + 16y \right) \Big|_0^2 = \\
 &= \frac{3}{8 \cdot 16} \left( \frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32 \right) = \frac{2}{5}.
 \end{aligned}$$

**ПРИМЕР 54.6.** Вычислить моменты инерции относительно осей координат пластины, определяемой условиями предыдущего примера.

**Решение:** Для вычисления  $I_x$  воспользуемся формулой (54.17),  $I_y$  – формулой (54.18). Вычисления интегралов проводим по той же схеме, что и в предыдущей задаче.

$$\begin{aligned}
 I_x &= \gamma \iint_S y^2 ds = 2\gamma \int_0^2 y^2 dy \int_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{-\frac{1}{2}(y^2-4)} dx = \\
 &= 2\gamma \int_0^2 y^2 \left( 3 - \frac{3}{4}y^2 \right) dy = 2\gamma \left( y^3 - \frac{3}{20}y^5 \right) \Big|_0^2 = 2\gamma \left( 8 - \frac{3 \cdot 32}{20} \right) = \frac{32}{5}\gamma. \\
 I_y &= \gamma \iint_S x^2 ds = 2\gamma \int_0^2 dy \int_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{-\frac{1}{2}(y^2-4)} x^2 dx = \frac{2}{3}\gamma \int_0^2 x^3 \Big|_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{-\frac{1}{2}(y^2-4)} dy = \\
 &= \frac{2}{3}\gamma \int_0^2 \left( -\frac{(y^2-4)^3}{8} - \frac{(y^2-4)^3}{64} \right) dy = \frac{3\gamma}{32} \int_0^2 (4-y^2)^3 dy = \\
 &= \frac{3\gamma}{32} \int_0^2 (64 - 48y^2 + 12y^4 - y^6) dy = \frac{3\gamma}{32} \left( 64y - 16y^3 + \frac{12}{5}y^5 - \frac{y^7}{7} \right) \Big|_0^2 =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{3\gamma}{16} \left( 64 - 64 + \frac{12 \cdot 16}{5} - \frac{64}{7} \right) = \frac{192}{35} \gamma.$$

### Самостоятельная работа

ПРИМЕР 54.7. Переходя к полярным координатам, найти площадь  $S$ , ограниченную линиями  $x^2 + y^2 = 2x$ ,  $x^2 + y^2 = 4x$ ,  $y = x$ ,  $y = 0$ .

ПРИМЕР 54.8. Тело ограничено гиперболическим параболоидом  $z = x^2 - y^2$  и плоскостями  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x = 1$ . Вычислить его объём.

ПРИМЕР 54.9. Вычислить объём тела, ограниченного цилиндром  $x^2 + y^2 = 2x$ , конусом  $x^2 + y^2 = z^2$  и плоскостью  $z = 0$ .

ПРИМЕР 54.10. Найти площадь части плоскости  $2x + 3y + 2z = 1$ , заключенной между координатными плоскостями.

ПРИМЕР 54.11. Найти площадь части конуса  $z^2 = x^2 + y^2$ , вырезанной из него цилиндром  $x^2 + y^2 = 2x$ .

ПРИМЕР 54.12. Найти координаты центра тяжести пластинки, ограниченной кардиоидой  $r = a(1 + \cos \varphi)$ . Плотность  $\gamma$  постоянна.

ПРИМЕР 54.13. Найти моменты инерции  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_0$  пластинки, ограниченной кардиоидой  $r = a(1 + \cos \varphi)$ . Плотность  $\gamma$  постоянна.

## Лекция 55. Тройной интеграл

Определение и свойства тройного интеграла. Переход от тройного интеграла к трёхкратному в декартовой системе координат. Замена переменных в тройном интеграле. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах.

### 55.1. Понятие тройного интеграла

Пусть функция  $U = f(x, y, z)$  задана в трёхмерной области  $V$ , ограниченной замкнутой поверхностью  $\sigma$ . Объём области  $V$  обозначим той же буквой.

Проведем теперь действия, подобные тем, какие мы делали при введении понятия двойного интеграла, а именно:

1. Разобьём область  $V$  на  $n$  элементарных непересекающихся объёмов  $\Delta V_i$ :  $\sum_{i=1}^n \Delta V_i = V$ .

2. Диаметр разбиения  $\lambda$  есть наибольший из размеров  $\lambda_i$  элементарных объёмов  $\Delta V_i$ , которые равны наибольшей длине отрезка, чьи концы принадлежат элементарному объёму  $\Delta V_i$ :  $\lambda = \max_{i=1,2,\dots,n} \lambda_i$ .

3. В каждом элементарном объёме  $\Delta V_i$  выберем произвольную точку  $P_i(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)$ . Вычислим значение функции  $U = f(x, y, z)$  в этой точке  $f(P_i) = f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ .

4. Составим произведение  $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  на  $\Delta V_i$  для всех  $\Delta V_i$  и образуем сумму всех таких произведений  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 55.1.** Сумма  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$  называется *n-ой интегральной суммой*, образованной для функции  $U = f(x, y, z)$  по области  $V$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 55.2.** Тройным интегралом от функции  $f(x, y, z)$  по области  $V$  называется предел, к которому стремится *n-я интегральная сумма*  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$  при неограниченном увеличении числа элементов разбиения  $\Delta V_i$  и условии стремления диаметра разбиения  $\lambda$  к нулю.

Этот предел обозначается  $\iiint_V f(x, y, z) dv$ , он не должен зависеть от способа разбиения области  $V$  на элементы  $\Delta V_i$  и выбора точек  $P_i \in \Delta V_i$ . Таким образом,

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i = \iiint_V f(x, y, z) dV. \quad (55.1)$$

Здесь знак  $\iiint$  называется знаком тройного интеграла,  $V$  – областью интегрирования,  $f(x, y, z)$  – подынтегральной функцией,  $dV$  – элементом объёма,  $f(x, y, z) dV$  – подынтегральным выражением.

Очевидно, что в силу условия разбиения  $\sum_{i=1}^n \Delta V_i = V$ , а следовательно, и

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \Delta V_i = \iiint_V dV = V, \quad (55.2)$$

т.е. объёму области  $V$ .

Так же, как и для двойного интеграла, сформулируем без доказательства теорему существования тройного интеграла.

**ТЕОРЕМА 55.1.** *Для всякой непрерывной в замкнутой области  $V$  функции  $U = f(x, y, z)$  тройной интеграл  $\iiint_V f(x, y, z) dV$  существует.*

Поэтому в дальнейшем будем считать функцию  $U = f(x, y, z)$ , как правило, непрерывной в области интегрирования  $V$ .

### 55.2. Свойства тройного интеграла

Поскольку п. 45.2.3, определяющий понятие тройного интеграла по области  $V$  от функции  $f(x, y, z)$ , почти дословно повторяет п. 45.2.3 для двойного интеграла от  $f(x, y)$  по области  $S$ , очевидно, что свойства тройного интеграла идентичны свойствам двойного интеграла.

Перечислим их.

- Постоянный множитель  $k$  ( $k \neq 0$ ) можно выносить за знак тройного интеграла:

$$\iiint_V k f(x, y, z) dV = k \iiint_V f(x, y, z) dV.$$

- Тройной интеграл от суммы функций равен сумме тройных интегралов от этих функций

$$\iiint_V (f(x, y, z) + \varphi(x, y, z)) dV = \iiint_V f(x, y, z) dV + \iiint_V \varphi(x, y, z) dV.$$

- Если в области интегрирования

$$f(x, y, z) \geq 0, \quad \text{то и} \quad \iiint_V f(x, y, z) dV \geq 0.$$

- Если в области интегрирования

$$f(x, y, z) \geq \varphi(x, y, z), \quad \text{то и} \quad \iiint_V f(x, y, z) dV \geq \iiint_V \varphi(x, y, z) dV.$$

- Если в области интегрирования  $m$  и  $M$  являются соответственно наименьшим и наибольшим значением функции  $f(x, y, z)$ , т.е.

$$m \leq f(x, y, z) \leq M, \quad \text{то} \quad mV \leq \iiint_V f(x, y, z) dV \leq MV.$$

Это свойство даёт нам оценку тройного интеграла.

- Если область интегрирования  $V = \sum_{j=1}^m V_j$ , то

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \sum_{j=1}^m \iiint_{V_j} f(x, y, z) dV.$$

• *Теорема о среднем.* Если функция  $f(x, y, z)$  непрерывна в замкнутой области  $V$ , то в области  $V$  существует, по крайней мере, одна точка  $P(\xi; \eta; \zeta)$ , в которой значение функции

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{V} \iiint_V f(x, y, z) dV.$$

Это значение называется средним интегральным значением функции  $f(x, y, z)$  по области  $V$ .

### 55.3. Переход от тройного интеграла к трёхкратному (повторному) в декартовой системе координат

Рассмотрим лишь область  $V$  такого типа, объём  $V$  которой мы нашли в лекции 54 (п. 45.2.3) и которая представлена на рис. 89.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 55.3.** *Трёхмерная область  $V$  называется правильной в направлении оси  $OZ$ , если любая прямая  $x = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$ , параллельная этой оси и проходящая через её внутреннюю точку, пересекает ограничивающую её поверхность  $\sigma$  в двух точках.*

Точку входа её в область  $V$ , она является точкой пересечения этой прямой с поверхностью  $z = z_n(x, y)$ , обозначим кружком «о», точку выхода, она является точкой пересечения с поверхностью  $z = z_v(x, y)$  — крестиком «х».

Указанная в определении 55.3 прямая  $x = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$  должна, очевидно, проходить через соответствующую внутреннюю точку области  $S$ , являющейся проекцией области  $V$  на плоскость  $XOY$ .

Если область  $V$  не удовлетворяет определению 55.3, её надо разбить на составные части, каждая из которых будет правильной в направлении оси  $Oz$ , и интеграл по области  $V$  находить как сумму интегралов по указанным частям.

Введем ещё одно определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 55.4. Элементом объёма в декартовой системе координат, также как и элементом площади (см. определение 51.5), называется произведение дифференциалов переменных  $dV = dxdydz$ .

При переходе от двойного интеграла к двукратному мы получали формулы, в которых первоначально интегрирование проводилось по одной переменной вдоль прямой, на которой вторая переменная была постоянна. В тройном интеграле три переменные, поэтому первоначально интегрирование проводится по одной из переменных, а две другие при этом считаются постоянными. Для области, правильной в направлении оси  $OZ$  первоначально интегрирование проводится по переменной  $z$  вдоль прямой  $x = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$  от точки входа «о» в область  $V$ , в которой  $z = z_n(x, y)$  до точки выхода «х», в которой  $z = z_n(x, y)$ . Затем мы должны проинтегрировать полученный результат по области  $S$ . Следовательно

$$\iiint_V f(x, y, z) dxdydz = \iint_S dxdy \int_{z_n(x, y)}^{z_n(x, y)} f(x, y, z) dz \quad (55.3)$$

Очевидно, что внутренний интеграл  $\int_{z_n(x, y)}^{z_n(x, y)} f(x, y, z) dz$  является функцией двух переменных. Обозначим её  $\Phi(x, y)$ , тогда тройной интеграл  $\iiint_V f(x, y, z) dxdydz$  сводится к двойному интегралу  $\iint_S \Phi(x, y) dxdy$ , который в зависимости от типа вычисляется по формуле (51.3) или (52.1).

Таким образом, если проекция области  $V$ , правильной в направлении оси  $OZ$ , на плоскость  $XOY$  является областью  $S$ , правильной в направлении оси  $OY$  (определение 51.4, рис. 61), тройной интеграл преобразуется в трёхкратный по следующей формуле:

$$\iiint_V f(x, y, z) dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_n(x)}^{y_n(x)} dy \int_{z_n(x, y)}^{z_n(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (55.4)$$



Если же область  $S$  является правильной в направлении оси  $OX$  (определение 52.1, рис. 71), то

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_c^d dy \int_{x_n(y)}^{x_{np}(y)} dx \int_{z_n(x, y)}^{z_n(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (55.5)$$

Все пределы в формулах (55.4) и (55.5) оказываются постоянными лишь в случае, если границами области являются координатные поверхности. В рассматриваемых декартовых координатах – это поверхности  $x = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$ ,  $z = \text{const}$ , перпендикулярные соответственно осям  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$ . Область  $V$  в данном случае, очевидно, является прямоугольным параллелепипедом, для которого  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$ ,  $k \leq z \leq l$ , и

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_k^l f(x, y, z) dz. \quad (55.6)$$

При постоянных пределах порядок интегрирования в формуле (55.6) не имеет значения. Если к тому же  $f(x, y, z) = \varphi(x)\psi(y)\chi(z)$ , то тройной интеграл равен произведению трёх определённых интегралов

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \varphi(x) dx \int_c^d \psi(y) dy \int_k^l \chi(z) dz. \quad (55.7)$$

**ПРИМЕР 55.1.** Вычислить  $\iiint_V z dx dy dz$ , где  $V$ :  $1 \leq x \leq 2$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ ,  $2 \leq z \leq 3$ .

**Решение:** Для решения данного примера воспользуемся формулой (55.7), в которой положим  $f(x, y, z) = z$ ,  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $c = -1$ ,  $d = 1$ ,  $k = 2$ ,  $l = 3$ . Тогда

$$\iiint_V z dx dy dz = \int_1^2 dx \int_{-1}^1 dy \int_2^3 z dz = x|_1^2 y|_{-1}^1 \frac{z^2}{2} \Big|_2^3 = (2-1)(1+1)\frac{9-4}{2} = 5.$$

**ПРИМЕР 55.2.** Вычислить интеграл из примера 55.1 для области  $V$ , ограниченной координатными плоскостями и плоскостью  $x + y + z = 1$  (рис. 100).

**Решение:** Для вычисления заданного интеграла воспользуемся формулой (55.3), в которой положим  $f(x, y, z) = z$ ,  $z_n(x, y) = 0$ ,  $z_n(x, y) = 1 - x - y$ ,  $y_n(x) = 0$ ,  $y_n(x) = 1 - x$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1$ . Тогда

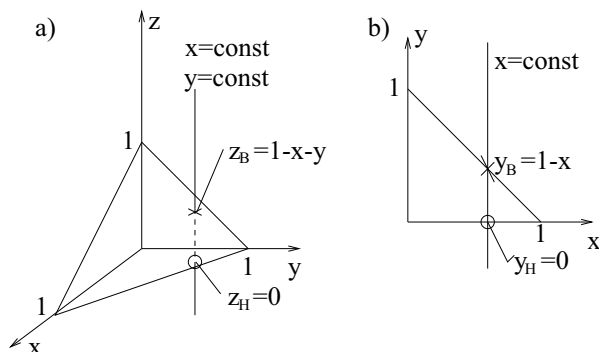


Рис. 100. К примеру 55.2

$$\begin{aligned}
 \iiint_V z dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} z dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{z^2}{2} \Big|_0^{1-x-y} dy = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1+x^2+y^2-2x-2y+2xy) dy = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left( y + x^2 y + \frac{y^3}{3} - 2xy - y^2 + xy^2 \right) \Big|_0^{1-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x+x^2-x^3 + \\
 &+ (1-3x+3x^2-x^3)/3 - 2x+2x^2-1+2x-x^2+x-2x^2+x^3) dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{1}{3} - x + x^2 - \frac{x^3}{3} \right) dx = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12} \right) \Big|_0^1 = \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{24}.
 \end{aligned}$$

**ПРИМЕР 55.3.** Вычислить интеграл из примера 55.1 для области  $V$ , ограниченной конусом  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  и плоскостью  $z = 4$  (рис. 101а).

**Решение:** Воспользуемся формулой (55.3), положив в которой  $f(x, y, z) = z$ ,  $z_n(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $z_v(x, y) = 4$ , получим  $\iiint_V z dx dy dz =$

$$= \iint_S \frac{z^2}{2} \Big|_{\sqrt{x^2+y^2}}^4 dx dy = \frac{1}{2} \iint_S (16 - x^2 - y^2) dx dy.$$

Полученный двойной интеграл должен быть вычислен по области  $S$ , являющейся кругом, радиус которого равен 2 (рис. 101, б). Его вычисление целесообразно провести в полярных координатах, заменив  $x^2 + y^2$  на  $r^2$ , элемент площади в декартовой системе координат  $dx dy$

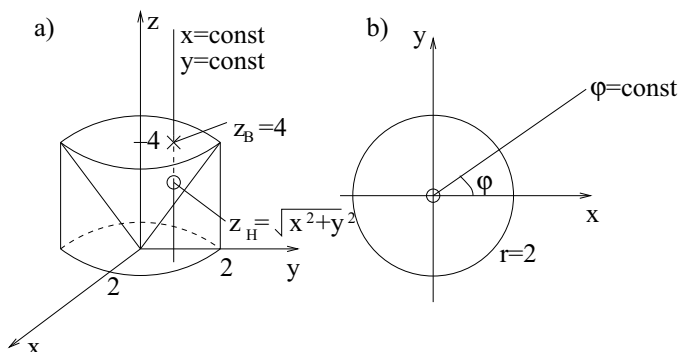


Рис. 101. К примеру 55.3

на соответствующий элемент площади в полярных координатах, проведя первоначально интегрирование вдоль луча  $\varphi = \text{const}$  от точки «о» до точки «х», т.е. по  $r$  в пределах от 0 до 2, а затем по  $\varphi$  в пределах от 0 до  $2\pi$ . В результате получим

$$\begin{aligned} \iiint_V z dx dy dz &= \frac{1}{2} \iint_S (16 - x^2 - y^2) dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (16 - r^2) r dr = \frac{1}{2} \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \left( 8r^2 - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^2 = \pi(32 - 4) = 28\pi. \end{aligned}$$

#### 55.4. Замена переменных в тройном интеграле

Вспомним, что замена переменных в двойном интеграле проводится с помощью формулы (53.10). Аналогичным образом замена переменных  $x, y, z$  в тройном интеграле на новые переменные  $u, v, w$ , через которые  $x, y$  и  $z$  выражаются как  $x = x(u, v, w)$ ,  $y = y(u, v, w)$ ,  $z = z(u, v, w)$ , проводится по формуле

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_V f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| du dv dw. \end{aligned} \quad (55.8)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 55.5. Формула (55.8) называется формулой преобразования координат в тройном интеграле, входящий в неё определитель

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \quad (55.9)$$

называется определителем Якоби или якобианом, а произведение  $|J|du dv dw$  – элементом объёма в криволинейных координатах  $u, v, w$ .

### 55.5. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах

Цилиндрические координаты точки в пространстве обозначаются  $r, \varphi, z$ .

Координатными поверхностями в этой системе координат служат цилиндры (поверхности  $r = \text{const}$ ), меридиональные полуплоскости ( $\varphi = \text{const}$ ) и плоскости, перпендикулярные оси  $Oz$  ( $z = \text{const}$ ).

Через эти координаты декартовы переменные  $x, y, z$  выражаются следующим образом

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases} \quad (55.10)$$

И, следовательно, якобиан преобразования (55.9), в котором надо положить  $u = r, v = \varphi, w = z$ , будет

$$J = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} = r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r. \quad (55.11)$$

В цилиндрических переменных координата  $z$  сохраняется, а вместо  $x$  и  $y$  вводятся полярные координаты  $r$  и  $\varphi$ ; естественно, что якобиан остается таким же, что и в полярной системе координат.

Заменяв  $x, y, z$  по формуле (55.10) и подставив  $J = r$  в (55.8), получим формулу преобразования координат в тройном интеграле для цилиндрической системы координат

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz. \quad (55.12)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 55.6.** Элементом объёма в цилиндрической системе координат называется величина  $dV = r dr d\varphi dz$ .

Для области, правильной в направлении оси  $z$  (рис. 89)

$$\begin{aligned} \iiint_V f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz &= \\ &= \iint_S r dr d\varphi \int_{z_u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)}^{z_n(r \cos \varphi, r \sin \varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dz. \end{aligned} \quad (55.13)$$

Проинтегрировав по  $z$  в (55.13) и подставив соответствующие пределы, получим двойной интеграл по области  $S$  в полярных координатах. Пример на применение цилиндрических координат мы уже привели. Это пример 55.3.

### 55.6. Вычисление тройного интеграла в сферических координатах

Сферические координаты точки в пространстве обозначаются  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$ . Координатными поверхностями в этой системе координат служат сферы (поверхности  $\rho = \text{const}$ ), меридиональные полуплоскости (поверхности  $\varphi = \text{const}$ ) и конусы (поверхности  $\theta = \text{const}$ ).

Через эти координаты декартовые переменные выражаются следующим образом

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \sin \theta, \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \\ z = \rho \cos \theta, \end{cases} \quad (55.14)$$

и, следовательно, якобиан преобразования (55.9), в котором надо положить  $u = \rho$ ,  $v = \varphi$ ,  $w = \theta$ , будет равен

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\rho \sin \theta \end{vmatrix} = \\ &= \cos \theta \begin{vmatrix} -\rho \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta \\ \rho \cos \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta \end{vmatrix} - \rho \sin \theta \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta \end{vmatrix} = \\ &= \rho^2 \cos^2 \theta \sin \theta \begin{vmatrix} -\sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix} - \rho^2 \sin^3 \theta \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} = \\ &= -\rho^2 \sin \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = -\rho^2 \sin \theta. \end{aligned} \quad (55.15)$$

При выводе выражения для  $J$  мы раскрыли определитель третьего порядка по третьей строке, вынесли общие для столбцов множители за знак определителей 2-ого порядка и учли, что определитель

$$\begin{vmatrix} -\sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} = -(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = -1.$$

Заменив  $x, y, z$  по формуле (58.14) и подставив  $|J| = \rho^2 \sin \theta$  в (55.8) получим формулу преобразования координат в тройном интеграле для сферической системы координат

$$\begin{aligned} & \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \\ & = \iiint_V f(\rho \cos \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta. \end{aligned} \quad (55.16)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 55.7.** Элементом объёма в сферической системе координат называется величина  $dV = \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta$ .

Естественно, что сферические координаты удобно использовать тогда, когда уравнение границы области  $V$  и подынтегральная функция в этих переменных имеют более простой вид, чем в декартовых. В частности, если границей области  $V$  является сфера.

**ПРИМЕР 55.4.** Вычислить  $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$ , если  $V$  — шар  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ .

**Решение:** Очевидно, что вычисление данного интеграла целесообразно провести в сферических координатах (рис. 102). По формуле (55.16)

$$\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz = \iiint_V \rho^4 \sin^3 \theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Расставим пределы интегрирования: вначале проинтегрируем по  $r$  вдоль луча  $\theta = \text{const}$ ,  $\varphi = \text{const}$  от точки входа в область «о» в которой  $r = 0$ , до точки выхода «х», в которой  $r = R$ , затем в меридиональной полуплоскости  $\varphi = \text{const}$  по  $\theta$  от 0 до  $\pi$  и, наконец, в плоскости  $S =$

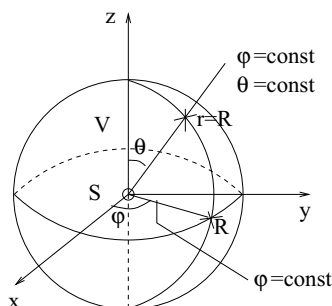


Рис. 102. К примеру 55.4

$\text{пр}_{XOY} V$  по  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$ :

$$\begin{aligned} \iiint_V \rho^4 \sin^3 \theta \, d\varphi \, d\rho \, d\theta &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta \int_0^R \rho^4 \, d\rho = \\ &= \varphi|_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi (\cos^2 \theta - 1) d\cos \theta \right) \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^R = \frac{2\pi}{5} R^5 \left( \frac{\cos^3 \theta}{3} - \cos \theta \right) \Big|_0^\pi = \frac{8\pi}{15} R^5. \end{aligned}$$

Поскольку в данном интеграле все пределы являются постоянными и подынтегральная функция распадается на произведение функций одной переменной, тройной интеграл равен произведению трёх определённых интегралов и порядок интегрирования не имеет значения.

## Практическое занятие 55. Вычисление тройных интегралов

Начнём с примеров вычисления тройного интеграла в декартовых координатах.

**ПРИМЕР 55.1.** Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V \frac{dx \, dy \, dz}{1-x-y}$ , если  $V$  – тетраэдр с вершинами  $O(0; 0; 0)$ ,  $A(1; 0; 0)$ ,  $B(0; 1; 0)$  и  $C(0; 0; 1)$ .

**Решение:** Изобразим заданный тетраэдр (рис. 103). Уравнение плоскости  $ABC$  будет  $x+y+z=1$ . Проинтегрируем вначале заданный интеграл по  $z$  от  $z=0$  до  $z=1-x-y$  вдоль любой линии  $x=\text{const}$ ,

$y = \text{const}$ , проходящей через внутреннюю точку области:

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{dxdydz}{1-x-y} &= \iint_S \frac{dxdy}{1-x-y} \int_0^{1-x-y} dz = \iint_S \frac{1}{1-x-y} z \Big|_0^{1-x-y} dxdy = \\ &= \iint_S dxdy = S = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

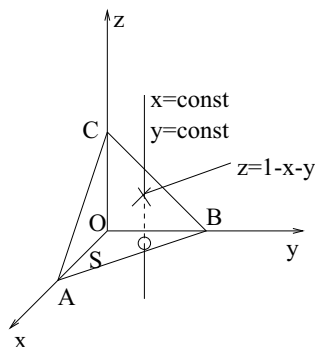


Рис. 103. К примеру 55.1

Отметим, что точно построить область  $V$  часто оказывается сложно. Для этого целесообразно использовать метод параллельных сечений и правильно, желательно на отдельном рисунке, построить проекцию  $S$  заданной области  $V$  на плоскость  $XOY$ .

**ПРИМЕР 55.2.** Вычислить  $\iiint_V x^3 y^2 z dx dy dz$ , где  $V$  определяется неравенствами  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq x$ ,  $0 \leq z \leq xy$  (рис. 104,а).

**Решение:** Для эскизного построения области  $V$  используем метод параллельных сечений. В частности, в плоскости  $x = 1$  мы получаем треугольник с вершинами в точках  $A(1; 0; 0)$ ,  $B(1; 1; 0)$  и  $C(1; 1; 1)$ , в плоскости  $y = x$  — криволинейный треугольник  $OBC$ , у которого стороны  $OB$  и  $BC$  — отрезки прямых, а сторона  $OC$  — параболы  $z = x^2$ . Участок поверхности  $AOC$  определяется уравнением  $z = xy$ . Проинтегрировав первоначально по  $z$  вдоль прямой  $x = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$  от  $z = 0$  до  $z = xy$  (рис. 104,а), затем в плоскости  $XOY$  по



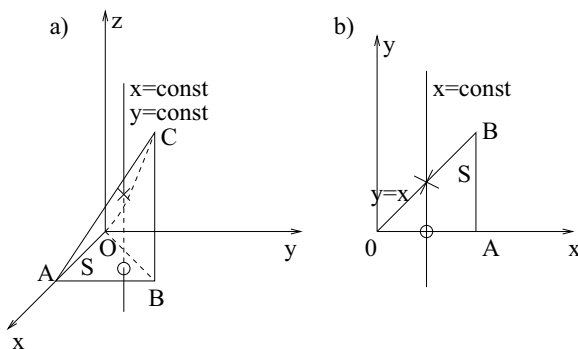


Рис. 104. К примеру 55.2

$y$  от  $y = 0$  до  $y = x$  (рис. 104,b) и, наконец по  $x$  от 0 до 1, получим

$$\begin{aligned}
 \iiint_V x^3 y^2 z dx dy dz &= \int_0^1 x^3 dx \int_0^x y^2 dy \int_0^{xy} z dz = \\
 &= \int_0^1 x^3 dx \int_0^x y^2 \frac{z^2}{2} \Big|_0^{xy} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 x^5 dx \int_0^x y^4 dy = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^5 \frac{y^5}{5} \Big|_0^x dx = \frac{1}{10} \int_0^1 x^{10} dx = \frac{x^{11}}{110} \Big|_0^1 = \frac{1}{110}.
 \end{aligned}$$

Перейдем к рассмотрению примеров на использование цилиндрической системы координат. Как мы видели в лекции, если область правильная в направлении оси  $z$ , можно провести сначала интегрирование по  $z$ , а затем в полученном двойном интеграле перейти к полярным координатам. Это то же самое, что сразу в тройном интеграле провести замену декартовых координат цилиндрическими, а затем проводить интегрирование.

**ПРИМЕР 55.3.** Вычислить  $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ ,  $V$  ограничена плоскостями  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $z = 2$  и цилиндром  $x^2 + y^2 = 2x$ .

**Р е ш е н и е:** Проведем вначале интегрирование по  $z$  от  $z = 0$  до  $z = 2$ :

$$\begin{aligned} \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz &= \iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \int_0^2 dz = \\ &= \iint_S z|_0^2 \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = 2 \iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \end{aligned}$$

где  $S = \text{пр}_{Oxy} V$  является полукругом (рис. 105) радиуса 1 с центром в точке  $(1; 0)$ , границей которого является окружность  $x^2 + y^2 = 2x$  или в полярных координатах  $r = 2 \cos \varphi$  (см. пример 53.2 в лекции 53).

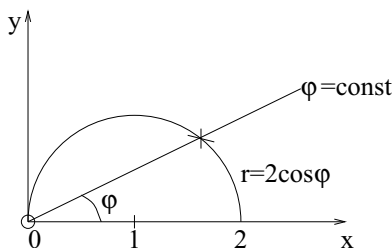


Рис. 105. К примеру 55.3

В полярных координатах, учитывая, что  $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ , а элемент площади равен  $r dr d\varphi$ , и, проводя вначале интегрирование по  $r$  от  $r = 0$  до  $r = 2 \cos \varphi$ , а затем по  $\varphi$  от 0 до  $\frac{\pi}{2}$ , получим

$$\begin{aligned} 2 \iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r^2 dr = 2 \int_0^{\pi/2} \left. \frac{r^3}{3} \right|_0^{2 \cos \varphi} d\varphi = \\ &= \frac{16}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{16}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \varphi) \cos \varphi d\varphi = \\ &= \frac{16}{3} \left( \sin \varphi - \frac{\sin^3 \varphi}{3} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{16}{3} \left( 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{32}{9}. \end{aligned}$$

**ПРИМЕР 55.4.** Вычислить  $\iiint_V (x^2 + y^2 + 2z) dx dy dz$ ,  $V: x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $z \geq 1 - x^2 - y^2$ ,  $z \leq 1$ .

**Решение:** Область интегрирования  $V$  расположена внутри цилиндра  $x^2 + y^2 = 1$ , ниже плоскости  $z = 1$  и выше параболоида

вращения  $z = 1 - x^2 - y^2$ , который пересекается с цилиндром  $x^2 + y^2 = 1$  в плоскости  $XOY$  и имеет вершину на оси  $OZ$  в точке  $z = 1$ .  $\frac{1}{4}$  часть  $V$ , расположенная в I октанте представлена на рис. 106.

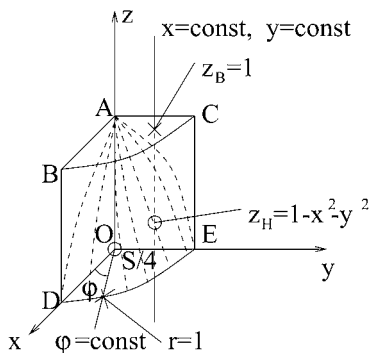


Рис. 106. К примеру 55.4

$ABC$  – часть плоскости  $z = 1$ ,  $BCDE$  – часть цилиндра  $x^2 + y^2 = 1$ , и пунктиром обозначена  $ADE$  – часть параболоида  $z = 1 - x^2 - y^2$ .

Перейдем в данном интеграле к цилиндрическим координатам по формуле (55.13) и, вычислив затем двойной интеграл по кругу  $S$  радиуса 1, получим

$$\begin{aligned} \iiint_V (x^2 + y^2 + 2z) dx dy dz &= \int_S \int_{1-r^2}^1 r dr d\varphi \int_{1-r^2}^1 (r^2 + 2z) dz = \\ &= \int_S \int_{1-r^2}^1 (r^2 z + z^2) \Big|_{1-r^2}^1 r dr d\varphi = \int_S \int_{1-r^2}^1 (r^2 + 1 - r^2 + r^4 - 1 + 2r^2 - r^4) r dr d\varphi = \\ &= 2 \int_S \int_{1-r^2}^1 r^3 dr d\varphi = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 dr = 2\varphi \Big|_0^{2\pi} \frac{r^4}{4} \Big|_0^1 = \pi. \end{aligned}$$

Рассмотрим два примера на вычисление тройного интеграла в сферической системе координат.

**ПРИМЕР 55.5.** Вычислить  $\iiint_V xyz dx dy dz$ , где  $V$  является  $\frac{1}{8}$  частью шара  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ , расположенной в I октанте.

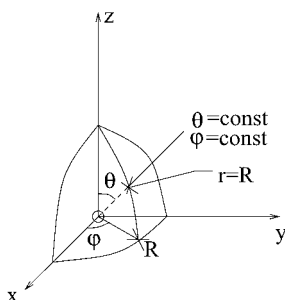


Рис. 107. К примеру 55.5

**Решение:** Перейдем к сферическим координатам, в которых  $x = \rho \cos \varphi \sin \theta$ ,  $y = \rho \sin \varphi \sin \theta$ ,  $z = \rho \cos \theta$  и элемент площади равен  $\rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta$ , затем расставим пределы в соответствии с рис. 107 и проведем вычисление заданного интеграла

$$\begin{aligned} \iiint_V xyz dx dy dz &= \iiint_V \rho^5 \cos \varphi \sin^3 \theta \sin \varphi \cos \theta d\rho d\varphi d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta \int_0^R \rho^5 d\rho = \frac{1}{2} \left( -\frac{\cos 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 \theta}{4} \Big|_0^{\pi/2} \frac{\rho^6}{6} \Big|_0^R = \\ &= \frac{1}{96} (\cos 0 - \cos \pi) \left( \sin^4 \frac{\pi}{2} - \sin^4 0 \right) R^6 = \frac{R^6}{48}. \end{aligned}$$

**ПРИМЕР 55.6.** Вычислить  $\iiint_V \sqrt{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx dy dz$ , где  $V$  - шар  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ .

**Решение:** Как и в предыдущем примере, переходим к сферическим координатам и, расставив пределы в соответствии с рис. 102, вычислим заданный интеграл

$$\begin{aligned} \iiint_V \sqrt{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx dy dz &= \\ &= \iiint_V \sqrt{1 + \rho^3} \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^R \sqrt{1 + \rho^3} \rho^2 d\rho = \end{aligned}$$

$$= \varphi|_0^{2\pi} (-\cos \theta)|_0^\pi \frac{2}{9} (1 + \rho^3)^{3/2} \Big|_0^R = \frac{8\pi}{9} ((1 + R^3)^{3/2} - 1).$$

### Самостоятельная работа

Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz.$$

ПРИМЕР 55.7.  $V: x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ .

ПРИМЕР 55.8.  $V: x^2 + y^2 \leq R^2, z \geq 0, z \leq H$ .

Вычислить следующие интегралы:

ПРИМЕР 55.9.  $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}}.$

ПРИМЕР 55.10.  $\int_0^2 x dx \int_0^{2\sqrt{x}} dy \int_0^{\sqrt{(4x-y^2)/2}} dz.$

ПРИМЕР 55.11.  $\iiint_V (x + y + z)^2 dx dy dz,$

$V: 2az \geq x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2.$

ПРИМЕР 55.12.  $\int_0^{2R} dx \int_{-\sqrt{2Rx-x^2}}^{\sqrt{2Rx-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{4R^2-x^2-y^2}} dz.$

ПРИМЕР 55.13.  $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz, V: x^2 + y^2 + z^2 \leq x.$

## Лекция 56. Приложения тройного интеграла

Вычисление объёма, массы, статических моментов, координат центра тяжести, моментов инерции тел. Заключительные замечания о кратных интегралах.

### 56.1. Вычисление объёма тел

Вычисление объёма с помощью тройного интеграла проводится по формуле (55.2), которая в случае области, правильной в направлении оси  $OZ$  (рис. 89), после интегрирования по  $z$  сводится к формуле

(54.1), позволяющей вычислять объём такого тела с помощью двойного интеграла. Однако, иногда оказывается более целесообразным использование непосредственно формул (55.2), не сводя её к (54.1), как, например, в случае вычисления тройного интеграла в сферических координатах.

**ПРИМЕР 56.1.** Вычислить объём шара радиуса  $R$  (рис. 108).

**Решение:** В сферических координатах все переменные в данном случае разделяются и

$$\begin{aligned} V &= \iiint_V dV = \iiint_V \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta \int_0^R \rho^2 d\rho = \\ &= \varphi \Big|_0^{2\pi} (-\cos \theta) \Big|_0^\pi \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^R = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

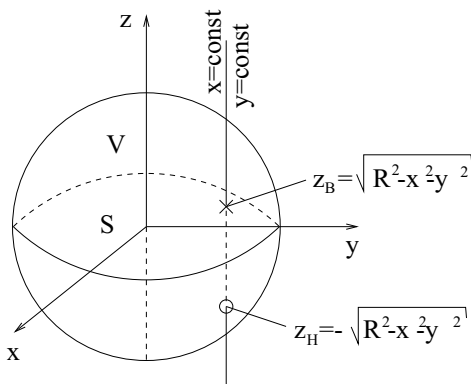


Рис. 108. К примеру 56.1

Конечно, нахождение объёма шара не вызывает и особых сложностей при использовании формулы (54.1) с последующим введением полярных координат в области  $S = \text{пр}_{xOy} V$ , представляющей собой окружность радиуса  $R$  (рис. 108):

$$V = \iint_S (z_B - z_H) ds = 2 \iint_S \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} ds = 2 \iint_S r \sqrt{R^2 - r^2} dr d\varphi =$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r \sqrt{R^2 - r^2} dr = 2\varphi|_0^{2\pi} \left( -\frac{2(R^2 - r^2)^{3/2}}{3 \cdot 2} \right) \Big|_0^R = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

### 56.2. Вычисление массы тел

Если объёмная плотность тела является переменной величиной  $\gamma = \gamma(x, y, z)$ , то масса элементарного объёма  $dV$  будет равна  $dm = \gamma(x, y, z)dv$ , а следовательно, масса всего тела с объёмом  $V$ .

$$M = \iiint_V dm = \iiint_V \gamma(x, y, z) dV. \quad (56.1)$$

В случае постоянной плотности  $\gamma = \text{const}$

$$M = \gamma \iiint_V dV = \gamma V. \quad (56.2)$$

**ПРИМЕР 56.2.** *Вычислить массу шара радиуса  $R$  (рис. 108), если плотность изменяется пропорционально расстоянию точки шара от центра.*

**Решение:** Согласно условиям данного примера плотность  $\gamma = k\rho$ , где  $k$  – коэффициент пропорциональности. Тогда по формуле (56.1) в сферических координатах

$$\begin{aligned} M &= \iiint_V k\rho^3 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta = k \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho = \\ &= k\varphi|_0^{2\pi} (-\cos \theta)|_0^\pi \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^R = k\pi R^4. \end{aligned}$$

### 56.3. Статические моменты и координаты центра тяжести тел

В пространственном случае статические моменты определяются относительно координатных плоскостей  $Oxy$ ,  $Oxz$  и  $Oyz$  и для материальной точки с массой  $\Delta m$  соответственно равны  $\Delta M_{xy} = \Delta m\zeta$ ,  $\Delta M_{xz} = \Delta m\eta$ ,  $\Delta M_{yz} = \Delta m\xi$ , где  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  – координаты рассматриваемой точки в пространстве. Следовательно, для тела объёмом  $V$

получим

$$M_{xy} = \iiint_V \gamma(x, y, z) z dV, \quad (56.3)$$

$$M_{xz} = \iiint_V \gamma(x, y, z) y dV, \quad (56.4)$$

$$M_{yz} = \iiint_V \gamma(x, y, z) x dV. \quad (56.5)$$

В случае постоянной плотности  $\gamma = \text{const}$ :

$$M_{xy} = \gamma \iiint_V z dV, \quad (56.6)$$

$$M_{xz} = \gamma \iiint_V y dV, \quad (56.7)$$

$$M_{yz} = \gamma \iiint_V x dV. \quad (56.8)$$

Координаты центра тяжести тела определяются с использованием соотношений (56.3) – (56.5) и (56.1) по следующим формулам:

$$x_{\text{ц}} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\iiint_V \gamma(x, y, z) x dV}{\iiint_V \gamma(x, y, z) dV}, \quad (56.9)$$

$$y_{\text{ц}} = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{\iiint_V \gamma(x, y, z) y dV}{\iiint_V \gamma(x, y, z) dV}, \quad (56.10)$$

$$z_{\text{ц}} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\iiint_V \gamma(x, y, z) z dV}{\iiint_V \gamma(x, y, z) dV}. \quad (56.11)$$



В случае постоянной плотности  $\gamma = \text{const}$  эти формулы примут вид:

$$x_{\text{ц}} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{1}{V} \iiint_V x dV, \quad (56.12)$$

$$y_{\text{ц}} = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{1}{V} \iiint_V y dV, \quad (56.13)$$

$$z_{\text{ц}} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{1}{V} \iiint_V z dV. \quad (56.14)$$

**ПРИМЕР 56.3.** Вычислить координаты центра тяжести полушара радиуса  $R$ , если плотность  $\gamma$  пропорциональна расстоянию точки шара от центра шара  $\gamma = k\rho$ .

**Решение:** Совместим центр шара с началом координат и рассмотрим верхнюю половину шара (рис. 109), для которой  $z \geq 0$ .

В силу симметрии полушара по  $x$  и  $y$  две координаты центра тяжести  $x_{\text{ц}} = y_{\text{ц}} = 0$ . По формуле (56.11) находим, используя сферическую систему координат:

$$\begin{aligned} z_{\text{ц}} &= \frac{\iiint_V k\rho z dV}{\iiint_V k\rho dV} = \frac{\iiint_V \rho^4 \cos \theta \sin \theta d\rho d\varphi d\theta}{\iiint_V \rho^3 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta d\theta \int_0^R \rho^4 d\rho}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho} = \frac{\frac{1}{2} \varphi|_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} \cos 2\theta\right)|_0^{\pi/2} \frac{\rho^5}{5}|_0^R}{\varphi|_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} \cos \theta\right)|_0^{\pi/2} \frac{\rho^4}{4}|_0^R} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} 2\pi \frac{1}{2} (\cos 0 - \cos \pi) \frac{R^5}{5}}{2\pi (\cos 0 - \cos \frac{\pi}{2}) \frac{R^4}{4}} = \frac{2R}{5}. \end{aligned}$$

**ПРИМЕР 56.4.** Рассмотреть пример 56.3 при условии постоянства плотности  $\gamma = \text{const}$ .

**Решение:** Очевидно, что вновь  $x_{\text{ц}} = y_{\text{ц}} = 0$ .  $z_{\text{ц}}$  в данном случае определяется по формуле (56.14), где  $V = \frac{2}{3}\pi R^3$ .

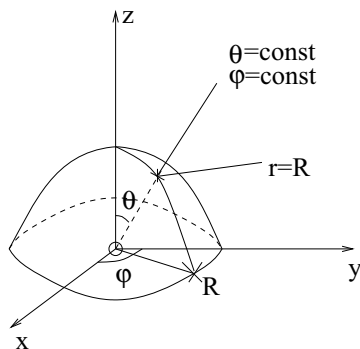


Рис. 109. К примеру 56.3

$$\begin{aligned}
 z_{\text{ц}} &= \frac{3}{2\pi R^3} \iiint_V z dv = \frac{3}{2\pi R^3} \iiint_V \rho^3 \cos \theta \sin \theta d\rho d\varphi d\theta = \\
 &= \frac{3}{4\pi R^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{3}{8\pi R^3} \varphi \Big|_0^{2\pi} (-\cos 2\theta) \Big|_0^{\pi/2} \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^R = \\
 &= \frac{3}{8\pi R^3} 2\pi 2 \frac{R^4}{4} = \frac{3}{8} R.
 \end{aligned}$$

#### 56.4. Моменты инерции тел

Моменты инерции материальной точки с координатами  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  и массой  $\Delta m$  относительно координатных осей  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  определяются как произведение массы  $\Delta m$  на квадрат расстояния до этих осей, который соответственно равен  $\eta^2 + \zeta^2$ ,  $\xi^2 + \zeta^2$ ,  $\xi^2 + \eta^2$ . Для тела объёма  $V$ , проведя разбиение его на  $n$  частей, суммируя моменты инерции этих частей и переходя к пределу при  $n \rightarrow +\infty$  аналогично тому, как мы делали при введении понятия тройного интеграла, получим формулы для вычисления моментов инерции тела относительно

осей координат

$$I_x = \iiint_V \gamma(x, y, z)(y^2 + z^2)dV, \quad (56.15)$$

$$I_y = \iiint_V \gamma(x, y, z)(x^2 + z^2)dV, \quad (56.16)$$

$$I_z = \iiint_V \gamma(x, y, z)(x^2 + y^2)dV. \quad (56.17)$$

Введем также полярный момент инерции  $I_0$ , определяемый по формуле

$$I_0 = \iiint_V \gamma(x, y, z)\rho^2 dV = \iiint_S \gamma(x, y, z)(x^2 + y^2 + z^2)dV. \quad (56.18)$$

Из сравнения формул (56.16) – (56.18) получим связь между  $I_0$  и  $I_x, I_y, I_z$ :

$$I_0 = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z). \quad (56.19)$$

В случае постоянной плотности  $\gamma = \text{const}$  формулы (56.16) – (56.18) примут вид:

$$I_x = \gamma \iiint_V (y^2 + z^2)dV, \quad (56.20)$$

$$I_y = \gamma \iiint_V (x^2 + z^2)dV, \quad (56.21)$$

$$I_z = \gamma \iiint_V (x^2 + y^2)dV. \quad (56.22)$$

$$I_0 = \gamma \iiint_V \rho^2 dV = \gamma \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)dV. \quad (56.23)$$

**ПРИМЕР 56.5.** Найти момент инерции  $I$  шара радиуса  $R$  относительно диаметра, если плотность в любой точке шара пропорциональна её расстоянию от центра шара  $\gamma = kr$ .

**Р е ш е н и е:** Совместим центр шара с началом координат (рис. 102). В силу симметрии моменты инерции относительно любого диаметра равны, следовательно,  $I_x = I_y = I_z = I$ . Используя сферические

координаты и формулу связи (56.19), найдем формулу для полярного момента инерции  $I_0$  (56.18):

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{3}I_0 = \frac{2}{3} \iiint_V k \rho^5 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta = \frac{2k}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^R \rho^5 d\rho = \\ &= \frac{2k}{3} \varphi|_0^{2\pi} (-\cos \theta)|_0^\pi \frac{\rho^6}{6} \Big|_0^R = \frac{4\pi k}{9} R^6. \end{aligned}$$

**ПРИМЕР 56.6.** Решить пример 56.5 для постоянной плотности  $\gamma$ .

**Р е ш е н и е:** Используя для вычисления полярного момента инерции  $I_0$  формулу (56.23) вместо (56.18), получим

$$I = \frac{2}{3}I_0 = \frac{2}{3}\gamma \iiint_V \rho^4 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta = \frac{2\gamma}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^R \rho^4 d\rho = \frac{8\pi}{15}\gamma R^5.$$

Получим теперь формулу, связывающую момент инерции тела относительно какой-либо оси, например оси  $Oy$ , с моментом инерции этого тела относительно параллельной оси, проходящей через центр тяжести тела  $C$ . Эта формула называется формулой Штейнера. Плотность  $\gamma$  будем считать постоянной, хотя полученная формула справедлива и при непостоянной плотности.

По формуле (56.17) момент инерции  $I_y = \gamma \iiint_V (x^2 + z^2) dv$ . Момент инерции относительно оси, проходящей через точку  $C$  и параллельной оси  $Oy$  (рис. 110), будет  $I_c = \gamma \iiint_V ((x - x_{\text{ц}})^2 + (z - z_{\text{ц}})^2) dv$ . Раскрыв скобки в подынтегральной функции и учитывая, что  $x_{\text{ц}}$  и  $z_{\text{ц}}$  для данного тела являются постоянными величинами, а также формулы

(56.1), (56.3), получим (56.5):

$$\begin{aligned}
 I_c &= \gamma \iiint_V (x^2 - 2xx_{\text{ц}} + x_{\text{ц}}^2 + z^2 - 2zz_{\text{ц}} + z_{\text{ц}}^2) dv = \\
 &= \gamma \iiint_V (x^2 + z^2) dv + \gamma(x_{\text{ц}}^2 + z_{\text{ц}}^2) \iiint_V dv - \\
 &\quad - 2x_{\text{ц}}\gamma \iiint_V x dv - 2z_{\text{ц}}\gamma \iiint_V z dv = \\
 &= I_y + (x_{\text{ц}}^2 + z_{\text{ц}}^2)M - 2x_{\text{ц}}M_{yz} - 2z_{\text{ц}}M_{xy}.
 \end{aligned}$$

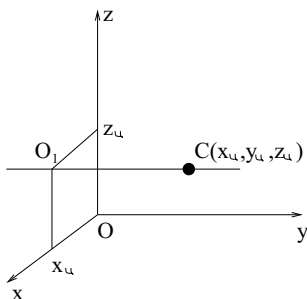


Рис. 110. К выводу формулы Штейнера

Далее, так как из формул (56.10) и (56.11) следует, что  $M_{yz} = x_{\text{ц}}M$ , а  $M_{xy} = z_{\text{ц}}M$ , получаем  $I_c = I_y - (x_{\text{ц}}^2 + z_{\text{ц}}^2)M$  или окончательно

$$I_y = I_c + (x_{\text{ц}}^2 + z_{\text{ц}}^2)M. \quad (56.24)$$

Так как любая ось может быть принята за ось  $Oy$ , а  $x_{\text{ц}}^2 + z_{\text{ц}}^2$  равно квадрату расстояния от центра тяжести по этой оси, из формулы (56.24) следует *правило Штейнера*:

*Момент инерции твердого тела относительно любой оси равен моменту инерции этого тела относительно параллельной ей оси, проходящей через центр тяжести тела, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между этими осями.*

**ПРИМЕР 56.7.** Найти момент инерции  $I_T$  шара радиуса  $R$  относительно оси, касательной к сфере, являющейся его границей. Плотность  $\gamma$  постоянна.

**Решение:** В примере 56.6 найден момент инерции шара относительно диаметра, а так как любой диаметр проходит через центр тяжести шара, то в формуле (56.24)  $I_c = \frac{8\pi}{15}\gamma R^5$ . Поскольку расстояние между диаметром и параллельной ему касательной  $T$  равно  $R$ , а масса шара  $M = \frac{4}{3}\gamma\pi R^3$  из формулы Штейнера (56.24), приняв касательную  $T$  за ось  $Oy$ , имеем  $I_T = I_c + (x_{\text{ц}}^2 + z_{\text{ц}}^2)M = \frac{8\pi}{15}\gamma R^5 + R^2\frac{4}{3}\gamma\pi R^3 = \frac{28\pi}{15}\gamma R^5$ .

### 56.5. Заключительные замечания о кратных интегралах

В данной главе мы рассмотрели вопросы, связанные с вычислением двойных и тройных интегралов, и примеры вычисления таких интегралов, когда первообразная по любой из переменных может быть найдена в элементарных функциях по известным нам методам, рассмотренным в лекциях, посвящённых интегральному исчислению функций одной переменной.

Однако мы знаем, что для множества функций найти первообразную не представляется возможным, и тогда определённый интеграл заменяется конечной суммой и вычисляется по известным методам, некоторые из которых рассмотрены нами в лекции 50.

То же самое, естественно имеет место при вычислении кратных интегралов. Здесь вместо суммы по одной переменной необходимо вычислить суммы по двум (в случае двойного интеграла) и трем (в случае тройного интеграла) переменным. Наиболее распространенным способом численного интегрирования кратных интегралов является метод повторного применения квадратурных формул, то есть формул, позволяющих находить однократный (определённый) интеграл (лекция 50).

Мы также познакомились в одной из лекций со случаями так называемых несобственных интегралов, когда или область интегрирования является бесконечной, или подынтегральная функция обращается в бесконечность в точке принадлежащей области интегрирования, или её границе.

Подобным же образом, как и для одной переменной определяют несобственные кратные интегралы. Здесь также имеют место два случая. Например, для двойных интегралов, первый – если функция  $f(x, y)$  непрерывна в неограниченной области  $S$ , то полагают:

$$\iint_S f(x, y) ds = \lim_{S_* \rightarrow S} \iint_{S_*} f(x, y) ds,$$

где  $S_*$  – конечная область, целиком лежащая в  $S$ , при этом  $S_* \rightarrow S$  означает, что мы расширяем область  $S_*$  по произвольному закону.

Если указанный предел существует и не зависит от выбора  $S_*$ , то  $\iint_S f(x, y) ds$  называется несобственным сходящимся двойным интегралом, в противном случае – расходящимся.

В качестве примера использования несобственного двойного интеграла по бесконечной области  $S$  рассмотрим задачу вычисления так называемого интеграла Пуассона  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ <sup>4</sup>.

Мы уже отмечали в п. 43.2, что имеющий важное значение в теории вероятностей интеграл  $\int e^{-x^2} dx$  не выражается в элементарных функциях. Однако, как мы покажем в следующем примере, интеграл Пуассона может быть достаточно просто найден.

**ПРИМЕР 56.8.** Найти интеграл Пуассона  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ .

**Решение:** Рассмотрим двойной интеграл  $\iint_S e^{-x^2-y^2} dx dy$  по неограниченной области  $S$ . С учётом замечания (49.14) можно записать

$$\iint_S e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi \right)^2.$$

С другой стороны в полярных координатах

$$\begin{aligned} \iint_S e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = \\ &= -2\pi \frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^{+\infty} = -\pi(e^{-\infty} - e^0) = \pi. \end{aligned}$$

Следовательно, искомый интеграл Пуассона  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ .

---

<sup>4</sup>С.Пуассон (1781–1840) – выдающийся французский математик и физик.

Второй случай. Если функция  $f(x, y)$  непрерывна всюду в ограниченной замкнутой области  $S$ , за исключением точки  $P(\xi; \eta)$ , то полагают

$$\iint_S f(x, y) ds = \lim_{\delta \rightarrow 0} \iint_{S_\delta} f(x, y) ds,$$

где  $S_\delta$  – область, получаемая из  $S$  удалением из неё  $\delta$ -окрестности точки  $P(\xi; \eta)$  (лекция 38). В случае существования предела при  $\delta$  окрестности, стягивающейся в точку, рассматриваемый  $\iint_S f(x, y) ds$  называется несобственным сходящимся двойным интегралом от разрывной функции. Точек разрыва может быть несколько и могут существовать линии разрыва.

Аналогичным образом вводится понятие несобственных тройных интегралов. Отметим, что также как и в случае несобственных интегралов одной переменной, кратные несобственные интегралы при замене переменных могут переходить в собственные.

И, наконец, несколько слов об определении интегралов большей кратности. Определённый  $\int_a^b f(x) dx$ , двойной  $\iint_S f(x, y) ds$  и тройной  $\iiint_V f(x, y, z) dv$  интегралы определяются совершенно одинаково, если ввести понятие меры  $\Delta\Omega$ , под которой понимается соответственно отрезок, элемент площади, или объёма. Тогда для любой области  $\Omega$  любой из этих интегралов может быть записан в виде

$$\int_{\Omega} U d\Omega = \lim \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta\Omega_k,$$

где  $M_k \in \Delta\Omega_k$ ,  $U = f(M)$ , а предел берется при стягивании любого из  $\Delta\Omega_k$  в точку.

Если функция  $U = f(M)$  является функцией более, чем трёх переменных, например  $n$ , то для неё также вводится понятие  $n$ -мерного интеграла. В частности, для наиболее распространённого случая четырёх переменных (функция  $U = f(x, y, z, t)$  зависит кроме пространственных переменных  $x, y, z$ , ещё и от времени) вводятся четырёхмерные интегралы по пространству и времени.

## Практическое занятие 56. Приложения тройных интегралов



Вначале решим один пример на нахождение массы тела переменной плотности.

**ПРИМЕР 56.1.** Найти массу тела, ограниченного цилиндрической поверхностью  $y = x^2$ , плоскостями  $z = 0$  и  $y + z = 1$ , если в каждой его точке плотность численно равна ординате этой точки  $y$ .

**Р е ш е н и е:** Данное тело изображено на рис. 111,а.

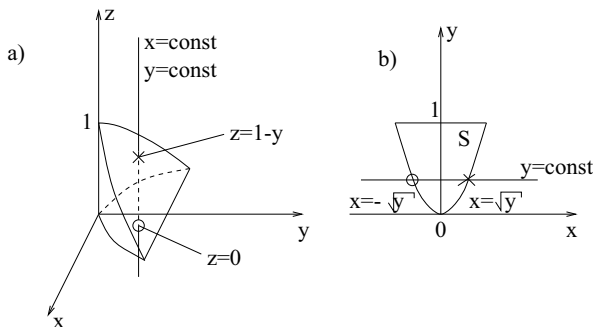


Рис. 111. К решению примера 56.1

Запишем выражение массы тела через тройной интеграл по формуле (56.1) и проинтегрируем его по  $z$  от  $z = 0$  до  $z = 1 - y$ . Находим

$$M = \iiint_V y dv = \iint_S y dx dy \int_0^{1-y} dz = \iint_S yz|_0^{1-y} dx dy = \iint_S y(1-y) dx dy.$$

Мы получили выражение для массы тела через двойной интеграл по области  $S = \text{пр}_{XOY} V$ . Проинтегрируем его первоначально по  $x$  от точки входа «0» прямой  $y = \text{const}$  в область  $S$  (рис. 111б), в которой  $x = -\sqrt{y}$ , до точки выхода «х», где  $x = \sqrt{y}$ , а затем по  $y$  от 0 до 1:

$$\begin{aligned} M &= \int_0^1 y(1-y) dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx = \int_0^1 (y-y^2) x|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dy = 2 \int_0^1 (y\sqrt{y} - y^2\sqrt{y}) dy = \\ &= 2 \left( \frac{2}{5} y^{5/2} - \frac{2}{7} y^{7/2} \right) \Big|_0^1 = 2 \left( \frac{2}{5} - \frac{2}{7} \right) = \frac{8}{35}. \end{aligned}$$

В дальнейших примерах будем считать плотность тела постоянной  $\gamma = \text{const}$ .

**ПРИМЕР 56.2.** Найти объём тела из примера 56.1.

Решение:  $V = \iiint_V dV = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx \int_0^{1-y} dz = \int_0^1 x|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} z|_0^{1-y} dy =$   
 $= 2 \int_0^1 \sqrt{y}(1-y)dy = 2 \left( \frac{2}{3}y^{3/2} - \frac{2}{5}y^{5/2} \right) \Big|_0^1 = 2 \left( \frac{2}{3} - \frac{2}{5} \right) = \frac{8}{15}.$

ПРИМЕР 56.3. Найти центр тяжести тела из примера 56.1.

Решение: Поскольку тело симметрично относительно оси  $OY$   $x_{ц} = 0$ ,  $y_{ц}$  и  $z_{ц}$  находим соответственно по формулам (56.14) и (56.14):

$$y_{ц} = \frac{1}{V} \iiint_V y dV = \frac{15}{8} \int_0^1 y dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx \int_0^{1-y} dz = \frac{15}{8} \cdot \frac{8}{35} = \frac{3}{7},$$

$$z_{ц} = \frac{1}{V} \iiint_V z dV = \frac{15}{8} \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx \int_0^{1-y} z dz =$$

$$= \frac{15}{8} \int_0^1 x|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{z^2}{2} \Big|_0^{1-y} dy = \frac{15}{8} \int_0^1 \sqrt{y}(1-2y+y^2)dy =$$

$$= \frac{15}{8} \left( \frac{2}{3}y^{3/2} - 2\frac{2}{5}y^{5/2} + \frac{2}{7}y^{7/2} \right) \Big|_0^1 = \frac{15}{8} \left( \frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{2}{7} \right) = \frac{2}{7}.$$

При вычислениях  $y_{ц}$  мы воспользовались результатами вычисления интеграла из примера 56.1.

ПРИМЕР 56.4. Найти моменты инерции относительно координатных осей тела из примера 56.1.

Решение:  $I_x$ ,  $I_y$  и  $I_z$  находим соответственно по формулам (56.21), (56.22) и (56.22):

$$I_x = \gamma \iiint_V (y^2 + z^2) dV = \gamma \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx \int_0^{1-y} (y^2 + z^2) dz =$$

$$= \gamma \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \left( y^2 z + \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^{1-y} dx = \gamma \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (y^2 - y^3 +$$

$$+ \frac{1-3y+3y^2+y^3}{3}) dx = \gamma \int_0^1 \left( \frac{1}{3} - y + 2y^2 - \frac{2}{3}y^3 \right) dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx =$$

$$= 2\gamma \int_0^1 \left( \frac{\sqrt{y}}{3} - y^{\frac{3}{2}} + 2y^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}y^{\frac{7}{2}} \right) dy =$$

$$\begin{aligned}
&= 2\gamma \left( \frac{2}{9}y^{3/2} - \frac{2}{5}y^{5/2} + \frac{4}{7}y^{7/2} - \frac{4}{27}y^{9/2} \right) \Big|_0^1 = \\
&= 4\gamma \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{5} + \frac{2}{7} - \frac{2}{27} \right) = \frac{464}{8505}\gamma,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_y &= \gamma \iiint_V (x^2 + z^2) dV = \gamma \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx \int_0^{1-y} (x^2 + z^2) dz = \\
&= \gamma \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \left( x^2 z + \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^{1-y} dx = \gamma \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \left( x^2 - x^2 y + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1 - 3y + 3y^2 + y^3}{3} \right) dx =
\end{aligned}$$

$$= \gamma \int_0^1 \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^3 y}{3} + \frac{1}{3}x - yx + y^2 x + \frac{1}{3}y^3 x \right) \Big|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx =$$

$$= 2\gamma \int_0^1 \left( \frac{1}{3}y^{3/2} - \frac{1}{3}y^{5/2} + \frac{1}{3}y^{1/2} - y^{3/2} + y^{5/2} + \frac{1}{3}y^{7/2} \right) dy =$$

$$\begin{aligned}
&= 2\gamma \left( \frac{2}{9}y^{3/2} - \frac{4}{15}y^{5/2} + \frac{4}{21}y^{7/2} + \frac{2}{27}y^{9/2} \right) \Big|_0^1 = \\
&= \frac{4}{3}\gamma \left( \frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \frac{1}{9} \right) = \frac{416}{945}\gamma,
\end{aligned}$$

$$I_z = \gamma \iiint_V (x^2 + y^2) dV = \gamma \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2) dx \int_0^{1-y} dz =$$

$$= \gamma \int_0^1 \left( \frac{x^3}{3} + y^2 x \right) \Big|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} z \Big|_0^{1-y} dy =$$

$$= 2\gamma \int_0^1 \left( \frac{1}{3}y^{3/2} + y^{5/2} \right) (1 - y) dy = 2\gamma \int_0^1 \left( \frac{1}{3}y^{3/2} + \frac{2}{3}y^{5/2} - y^{7/2} \right) dy =$$

$$= 2\gamma \left( \frac{2}{15}y^{5/2} + \frac{4}{21}y^{7/2} - \frac{2}{9}y^{9/2} \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3}\gamma \left( \frac{1}{5} + \frac{2}{7} - \frac{1}{3} \right) = \frac{64}{315}\gamma.$$

**ПРИМЕР 56.5.** *Определить момент инерции цилиндра радиуса  $R$  и высотой  $H$  относительно образующей.*

**Решение:** Направим ось  $Oz$  по образующей цилиндра, ось  $Ox$  по касательной к окружности, лежащей в основании цилиндра, тогда центр основания цилиндра будет лежать на оси  $Oy$  (рис. 112).

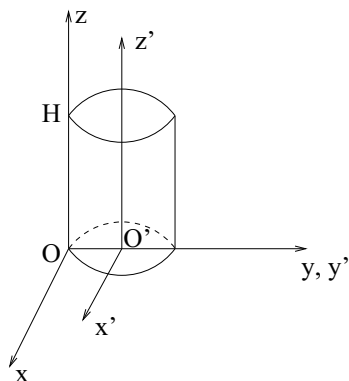


Рис. 112. К примеру 56.5

В данной задаче целесообразнее вначале вычислить момент инерции  $I_{z'}$ , относительно оси, совпадающей с осью цилиндра, а, следовательно, проходящей через его центр тяжести, а затем  $I_z$  найти по правилу Штейнера.  $I_{z'}$  находим по формуле (56.22), перейдя в ней к цилиндрическим координатам, связанным с полюсом  $O'$ , в которых  $x'^2 + y'^2 = r^2$ ,  $dV = r dr d\varphi dz$ :

$$\begin{aligned} I_{z'} &= \gamma \iiint_V (x'^2 + y'^2) dV = \gamma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr \int_0^H dz = \\ &= \gamma \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} \frac{r^4}{4} \Big|_0^R z \Big|_0^H = \frac{\gamma \pi R^4 H}{2}. \end{aligned}$$

По правилу Штейнера (56.24) определим момент инерции цилиндра относительно оси  $Oz$  (образующей), учитывая, что масса цилиндра  $M = \gamma \pi R^2 H$ , а расстояние между осями  $Oz$  и  $O'z'$  равно  $R$ :

$$I_z = \frac{\gamma \pi R^4 H}{2} + \gamma \pi R^4 H = \frac{3}{2} \gamma \pi R^4 H.$$

**ПРИМЕР 56.6.** Определить центр тяжести  $\frac{1}{8}$  части шара, радиуса  $R$  (рис. 107).

**Решение:** Очевидно, что в силу симметрии  $x_{\text{ц}} = y_{\text{ц}} = z_{\text{ц}}$ . Объём  $\frac{1}{8}$  части шара равен  $V = \frac{1}{6}\pi R^3$ . Естественно вычисления провести в сферических координатах. Найдем  $z_{\text{ц}}$ , по формуле (56.14), положив  $z = \rho \cos \theta$ ,  $dV = \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta$ :

$$\begin{aligned} z_{\text{ц}} &= \frac{6}{\pi R^3} \iiint_V z dv = \frac{6}{\pi R^3} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho = \\ &= \frac{6}{\pi R^3} \varphi \Big|_0^{\pi/2} \left( -\frac{\cos 2\theta}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^R = \frac{3}{8} R. \end{aligned}$$

**ПРИМЕР 56.7.** Найти кинетическую энергию  $\frac{1}{8}$  части шара радиуса  $R$ , вращающегося вокруг одной из осей  $Ox$ ,  $Oy$ , или  $Oz$  (рис. 107) с угловой скоростью  $\omega$ .

**Решение:** Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг некоторой оси с угловой скоростью  $\omega$  равна  $W = \frac{I\omega^2}{2}$ , где  $I$  — есть момент инерции тела относительно этой оси. Для вычисления момента инерции в нашем примере естественно использовать сферические координаты.

Учитывая симметрию и формулы (56.14) и (56.19), вычислим значение

$$\begin{aligned} I = I_x = I_y = I_z &= \frac{2}{3} I_0 = \frac{2}{3} \gamma \iiint_V \rho^2 dV = \frac{2}{3} \gamma \iiint_V \rho^4 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta = \\ &= \frac{2}{3} \gamma \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^R \rho^4 d\rho = \frac{2}{3} \gamma \varphi \Big|_0^{\pi/2} (-\cos \theta) \Big|_0^{\pi/2} \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^R = \frac{\gamma \pi}{15} R^5, \end{aligned}$$

а затем и кинетическую энергию

$$W = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{\gamma \pi}{30} \omega^2 R^5.$$

### Самостоятельная работа

**ПРИМЕР 56.8.** Вычислить с помощью тройного интеграла объём тела, ограниченного поверхностями  $y^2 = 4-3x$ ,  $y^2 = x$ ,  $z = 1$ ,  $z = -1$ .

**ПРИМЕР 56.9.** Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного параболоидом  $y^2 + 2x^2 = 4z$  и плоскостью  $z = 2$ .

ПРИМЕР 56.10. Найти центр тяжести полого цилиндра высотой  $H$  и внутренним и внешним радиусами, равными соответственно  $R_1$  и  $R_2$ , если плотность численно равна расстоянию точки цилиндра от его нижнего основания.

ПРИМЕР 56.11. Найти момент инерции цилиндра из примера 56.10 относительно его оси.

ПРИМЕР 56.12. Найти моменты инерции цилиндра из примера 56.10 относительно его внутренней и внешней образующих.

## Лекция 57. Криволинейные интегралы на плоскости

Плоское векторное поле. Криволинейные интегралы в векторном поле (интегралы по координатам). Теорема Грина. Вычисление площади пластины с помощью криволинейного интеграла по её границе. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования. Восстановление функции по её полному дифференциалу.

### 57.1. Плоское векторное поле

В лекции 40 было введено понятие скалярного поля, а в лекции 48 – интеграла от функции, определяющей поле вдоль кривой  $L$ , расположенной в этом поле. Это так называемый криволинейный интеграл по длине дуги или криволинейный интеграл 1-го рода. Пусть теперь задана область  $S$  на плоскости  $Oxy$ , в каждой точке которой определен вектор  $\vec{F}$  с проекциями  $F_x = P = P(x; y)$  и  $F_y = Q = Q(x; y)$

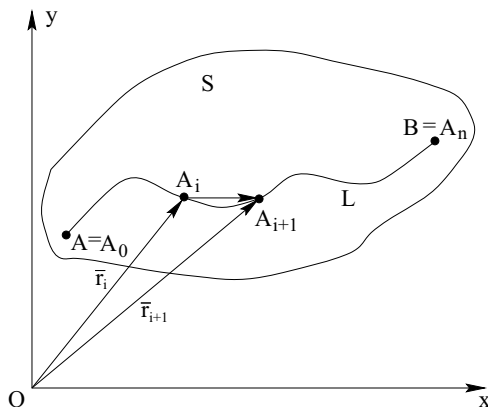


Рис. 113. К определению криволинейного интеграла по координатам вдоль дуги  $L$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 57.1.** Область  $S$ , в каждой точке которой задан вектор  $\vec{F} = \vec{F}(x; y) = P(x; y)\vec{i} + Q(x; y)\vec{j}$ , называется плоским векторным полем.

Пусть дуга линии  $L$ , начинающаяся в точке  $A$  и заканчивающаяся в точке  $B$ , целиком расположена в области  $S$ . Разобьём эту дугу на  $n$  частей с точками разбиения  $A_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , при этом  $A_0 = A$ ,  $A_n = B$ . Соединив соседние точки  $A_i$  отрезками прямых, мы получим ломаную линию, вписанную в дугу  $AB$ , длину звена которой обозначим  $\Delta l_i = A_i A_{i+1}$ . Если  $\vec{r}_i$  и  $\vec{r}_{i+1}$  есть радиус-векторы точек  $A_i$  и  $A_{i+1}$  соответственно, то из 113 видно, что

$$\overline{\Delta l_i} = \vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i = (x_{i+1} - x_i)\vec{i} + (y_{i+1} - y_i)\vec{j} = \Delta x_i \vec{i} + \Delta y_i \vec{j}.$$

Определим вектор  $\vec{F}$  в некоторой точке с координатами  $\xi_i, \eta_i$ , принадлежащей элементу дуги  $A_i, A_{i+1}$ . Будем считать, что во всех точках звена  $\Delta l_i$  вектор  $\vec{F}$  постоянен и равен  $\vec{F}(\xi_i; \eta_i)$ . Возьмём скалярное произведение  $\vec{F}(\xi_i; \eta_i) \cdot \overline{\Delta l_i} = P(\xi_i; \eta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i; \eta_i) \Delta y_i$ . Составим  $n$ -ую интегральную сумму  $\sum_{i=1}^n \vec{F}(\xi_i; \eta_i) \overline{\Delta l_i} = \sum_{i=1}^n P(\xi_i; \eta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i; \eta_i) \Delta y_i$  и перейдем к пределу при стремлении длин всех звеньев ломаной  $A_i A_{i+1}$  к нулю, и, следовательно, при  $n \rightarrow +\infty$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 57.2.** Предел, к которому стремится  $n$ -ая интегральная сумма  $\sum_{i=1}^n \vec{F}(\xi_i; \eta_i) \overline{\Delta l_i}$  при стремлении к нулю длин всех звеньев ломаной линии  $A_i A_{i+1}$ , называется криволинейным интегралом вдоль линии  $L$  по координатам или криволинейным интегралом второго рода и обозначается:

$$\begin{aligned} \int_L \vec{F}(x; y) d\vec{l} &= \int_L P(x; y) dx + Q(x; y) dy \quad \text{или} \\ \int_{AB} \vec{F}(x; y) d\vec{l} &= \int_{AB} P(x; y) dx + Q(x; y) dy. \end{aligned} \quad (57.1)$$

При известном уравнении кривой  $L$  этот интеграл сводится к определённым интегралам и вычисляется по формулам:

$$\int_{AB} P(x; y) dx + Q(x; y) dy = \int_{x_A}^{x_B} (P(x; y(x)) + Q(x; y(x)) y'(x)) dx \quad (57.2)$$

– для кривой  $L$ , заданной уравнением  $y = y(x)$ ;

$$\int_{AB} P(x; y) dx + Q(x; y) dy = \int_{y_A}^{y_B} (P(x(y); y) x'(y) + Q(x(y); y)) dy \quad (57.3)$$



– для кривой  $L$ , заданной уравнением  $x = x(y)$ ;

$$\int_{AB} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \int_{t_A}^{t_B} (P(x(t); y(t))x'(t) + Q(x(t); y(t))y'(t)) dt \quad (57.4)$$

для кривой, заданной в параметрическом виде  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ .

В формулах (57.2)–(57.4)  $x_A$ ,  $y_A$ ,  $t_A$ ,  $x_B$ ,  $y_B$ ,  $t_B$  – значения координат  $x$ ,  $y$  и параметра  $t$  в точках  $A$  и  $B$  соответственно.

Очевидно, что поскольку криволинейный интеграл сводится к определённым интегралам, он обладает их свойствами и, в частности,

$$\int_{AC} Pdx + Qdy = \int_{AB} Pdx + Qdy + \int_{BC} Pdx + Qdy$$

и

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = - \int_{BA} Pdx + Qdy.$$

Если контур  $L$  – замкнутый, то криволинейный интеграл по этому контуру обозначается  $\oint_L Pdx + Qdy$ , если он берётся против часовой стрелки (так, чтобы область  $S$ , лежащая внутри контура  $L$  при обходе находилась слева) и  $\oint_L Pdx + Qdy$  – если против.

$$\text{Очевидно, что } \oint_L Pdx + Qdy = - \oint_{-L} Pdx + Qdy.$$

**ПРИМЕР 57.1.** Вычислить криволинейный интеграл  $\oint_L ydx + xdy$  и  $\oint_L ydx - xdy$  вдоль границ прямоугольного треугольника  $OABO$  (рис. 114)

**Решение:** Вычисление криволинейного интеграла по замкнутому контуру  $OABO$  сводится к сумме интегралов по отрезкам  $OA$ ,  $AB$  и  $BO$

- уравнение прямой  $OA$  :  $y = 0$  и, следовательно,  $dy = 0$ ,

$$\int_{OA} ydx + xdy = 0 \quad \text{и} \quad \int_{OA} ydx - xdy = 0;$$

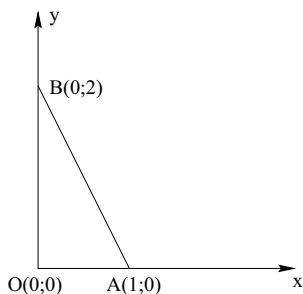


Рис. 114. К примеру 57.1

- уравнение прямой  $AB$  :  $y = -2x + 2$ , поэтому  $dy = -2dx$ ,

$$\int_{AB} ydx + xdy = \int_1^0 (-2x + 2)dx - 2xdx = \left( -4\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_1^0 = 0,$$

$$\int_{AB} ydx - xdy = \int_1^0 (-2x + 2)dx + 2xdx = 2 \int_1^0 dx = 2x \Big|_1^0 = -2;$$

- уравнение прямой  $OB$  :  $x = 0$  и, следовательно,  $dx = 0$ ,

$$\int_{BO} ydx + xdy = 0 \quad \text{и} \quad \int_{BO} ydx - xdy = 0.$$

Таким образом,  $\oint_L ydx + xdy = 0$ , а  $\oint_L ydx - xdy = -2$ .

ПРИМЕР 57.2. Вычислить интегралы из примера 57.1 вдоль эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (рис. 115).

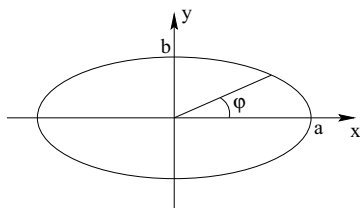


Рис. 115. К примеру 57.2

**Решение:** Уравнение эллипса в параметрическом виде  $x = a \cos \varphi$ ,  $y = b \sin \varphi$  и, следовательно  $dx = -a \sin \varphi d\varphi$ ,  $dy = b \cos \varphi d\varphi$  меняется в пределах от 0 до  $2\pi$ . Последовательно имеем:

$$\begin{aligned} \bullet \oint_L ydx + xdy &= \int_0^{2\pi} -ab \sin^2 \varphi d\varphi + ab \cos^2 \varphi d\varphi = \\ &= ab \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi = \frac{ab}{2} \sin 2\varphi \Big|_0^{2\pi} = 0; \\ \bullet \oint_L ydx - xdy &= \int_0^{2\pi} -ab \sin^2 \varphi d\varphi - ab \cos^2 \varphi d\varphi = \\ &= -ab \int_0^{2\pi} d\varphi = -ab\varphi \Big|_0^{2\pi} = -2\pi ab. \end{aligned}$$

Отметим, что первый интеграл, как и в примере 57.1 равен 0, а второй имеет различные значения.

Криволинейный интеграл в векторном поле имеет важное приложение в физике. Так, если  $\vec{F}$  есть вектор силы, то его скалярное произведение на вектор перемещения  $d\vec{l}$  есть элементарная работа силы  $\vec{F}$  на пути  $d\vec{l}$ . Очевидно, что работа, совершаемая в силовом поле  $\vec{F} = \vec{F}(x; y) = (F_x(x; y); F_y(x; y))$  при перемещении какого-либо объекта из точки  $A$  в точку  $B$  вдоль пути  $L$  будет равна:

$$A = \int_{AB} \vec{F}(x; y) d\vec{l} = \int_{AB} F_x(x; y) dx + F_y(x; y) dy. \quad (57.5)$$

## 57.2. Теорема Грина

Связь между криволинейным интегралом по замкнутому контуру  $L$ , и двойным интегралом по области  $S$ , ограниченной этим контуром, устанавливается теоремой Грина, которую мы приведем без доказательства.

**ТЕОРЕМА 57.1. Теорема Грина<sup>5</sup>.** Если функции  $P = P(x; y)$  и  $Q = Q(x; y)$  непрерывны вместе со своими частными производными в некоторой области  $S$ , ограниченной кривой  $L$ , то

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (57.6)$$

Если в формуле Грина (57.6) взять  $P$  и  $Q$  такими, чтобы выполнялось равенство  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ , получим, что двойной интеграл в правой части формулы (57.5) будет равен площади области  $S$ . Это можно сделать различными способами и, в частности, положив  $P = 0$ ,  $Q = x$  или  $P = -y$ ,  $Q = 0$  или  $P = -\frac{1}{2}y$ ,  $Q = \frac{1}{2}x$ . Таким образом, площадь  $S$  можно, в частности, определить по одной из следующих трёх формул

$$S = \oint_L x dy = - \oint_L y dx = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx. \quad (57.7)$$

**ПРИМЕР 57.3.** Найти площади треугольника  $OAB$  (рис. 114) и эллипса (рис. 115) с помощью криволинейных интегралов по их границе.

**Решение:** Воспользуемся третьей формулой (57.7)

$$S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx.$$

В примерах 57.1 и 57.2 был вычислен  $\oint_L y dx - x dy$ , используя его значения для указанных контуров получим:

- площадь треугольника  $OAB$ :

$$S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx = -\frac{1}{2} \oint_L y dx - x dy = -\frac{1}{2} \cdot (-2) = 1, \text{ что очевидно.}$$

- площадь эллипса:

---

<sup>5</sup>Д. Грин (1793–1841) – английский математик и физик

$S = \frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx = -\frac{1}{2} \oint_L ydx - xdy = -\frac{1}{2}(-2\pi ab) = \pi ab$ , значение, которое мы получили ранее вычисляя двойной интеграл  $\iint_S dx dy$ .

### 57.3. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования

Зададимся вопросом существуют ли условия, которые должны быть наложены на функции  $P = P(x; y)$  и  $Q = Q(x; y)$ , чтобы криволинейный интеграл  $\int_{AB} Pdx + Qdy$  не зависел от пути интегрирования, т.е. для любых кривых соединяющих точки  $A$  и  $B$  интеграл имел бы одно и тоже значение. Сделаем вначале некоторые предварительные замечания. Очевидно, что если интеграл  $\int_{AB} Pdx + Qdy$  не зависит от пути интегрирования, то по замкнутому контуру он будет равен нулю. Действительно, рассмотрим какой-либо замкнутый контур  $L$  проходящий через точки  $A, B, C, D$  и охватывающий область  $S$  (рис. 116):

$$\begin{aligned} \oint_{ACBDA} Pdx + Qdy &= \int_{ACB} Pdx + Qdy + \int_{BDA} Pdx + Qdy = \\ &= \int_{ACB} Pdx + Qdy - \int_{ADB} Pdx + Qdy = 0. \end{aligned}$$

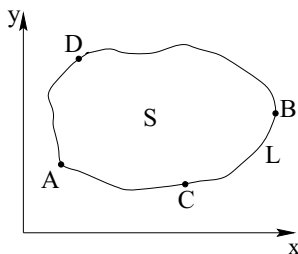


Рис. 116. К выводу условий независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

Здесь использовано высказанное выше предположение о независимости криволинейного интеграла  $\int_{AB} Pdx + Qdy$  от пути интегрирования и то свойство, что криволинейный интеграл вдоль одной и той же

кривой при изменении направления интегрирования меняет знак на противоположный. Аналогичным образом можно показать, что, если криволинейный интеграл по замкнутому контуру равен нулю, то он не зависит от пути интегрирования. Действительно, если для изображаемой на рис. 116 замкнутой линии  $ACBDA$  криволинейный интеграл  $\oint_{ACBDA} Pdx + Qdy = 0$ , то, очевидно,  $\int_{ACB} Pdx + Qdy = \int_{ADB} Pdx + Qdy$ , т.е. он не зависит от пути интегрирования. С учётом сказанного мы теперь можем доказать теорему о независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.

**ТЕОРЕМА 57.2.** *Для того, чтобы криволинейный интеграл  $\int_{AB} Pdx + Qdy$  не зависел от пути интегрирования в односвязной области  $D$  (см. лекцию 35), необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке этой области выполнялось условие*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (57.8)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о:** Достаточность. Будем считать, что область  $S$  изображенная на рис. 116 вместе со своей границей  $L$  целиком принадлежит упомянутой в теореме области  $D$ , т.е. в области  $S$  включая её границу выполняется условие (57.8).

Покажем, что криволинейный интеграл  $\oint_L Pdx + Qdy$  равен нулю. На основании формулы Грина (57.6) и с учётом формулы (57.8) получаем, что  $\oint_L Pdx + Qdy = \iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dS = 0$ . Итак, интеграл  $\oint_L Pdx + Qdy$  по любому замкнутому контуру  $L$  в области  $D$  равен нулю, следовательно, криволинейный интеграл  $\int_{AB} Pdx + Qdy$  в области  $D$  не зависит от вида кривой, соединяющей точки  $A$  и  $B$ .

**Необходимость.** Пусть  $\int_{AB} Pdx + Qdy$  не зависит от пути интегрирования в области  $D$ . Покажем, что в таком случае во всех точках этой области выполняется условие (57.8).

Предположим противное, что в некоторой точке  $M_0(x_0; y_0)$  данной области  $\left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{M_0} \neq \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{M_0}$ . Пусть для определённости  $\left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)_{M_0} > 0$ . Разность  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$  в силу предположения о непрерывности частных

производных  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  и  $\frac{\partial P}{\partial y}$  также является непрерывной функцией. Следовательно, для точки  $M_0$  существует такая  $\delta$ -окрестность  $\in D$  во всех точках которой, как и в точке  $M_0$ , разность  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0$ . Применив к области  $\delta$  формулу Грина  $\oint_C Pdx + Qdy = \iint_\delta \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\delta$ , где  $C$  – граница  $\delta$ , и учитывая, что  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0$  во всех точках области  $\delta$ , получаем, что  $\iint_\delta \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\delta > 0$ . Следовательно,  $\oint_C Pdx + Qdy > 0$ , а это противоречит предположению, что данный криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования. Полученное противоречие доказывает, что во всех точках области  $D$  имеет место равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

**ПРИМЕР 57.4.** Зависят ли от пути интегрирования криволинейные интегралы из примера 57.1

$$\int_{AB} ydx + xdy \quad \text{и} \quad \int_{AB} ydx - xdy.$$

**Решение:** Для интеграла  $\int_{AB} ydx + xdy$ :  $P = y$ ,  $Q = x$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  и данный интеграл не зависит от пути интегрирования, а по любому замкнутому контуру он будет равен нулю, что мы и видели в примерах 57.1 и 57.2.

В интеграле  $\int_{AB} ydx - xdy$ :  $P = y$ ,  $Q = -x$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = -1 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$  и данный интеграл зависит от пути интегрирования, а по замкнутому контуру он не равен нулю, что мы получили в примерах 57.1 и 57.2.

#### 57.4. Восстановление функции по её полному дифференциалу

Пусть дано дифференциальное выражение  $Pdx + Qdy$ , в котором функции  $P = P(x; y)$  и  $Q = Q(x; y)$  непрерывны вместе со своими частными производными в некоторой односвязной области  $D$ . На вопрос при каких условиях это выражение является полным дифференциалом некоторой функции  $U = U(x; y)$  отвечает следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 57.3.** Для того, чтобы дифференциальное выражение

$Pdx + Qdy$  в односвязной области  $D$  было полным дифференциалом некоторой функции  $U = U(x; y)$ , необходимо и достаточно выполнение в области  $D$  условия (57.8)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Докажем только необходимость. Если  $Pdx + Qdy$  есть полный дифференциал функции  $U = U(x; y)$ , то

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = Pdx + Qdy. \quad (57.9)$$

Следовательно,  $\frac{\partial U}{\partial x} = P$ ,  $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$ . Продифференцировав первое соотношение по  $y$ , а второе по  $x$ , получим  $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ . Так как  $\frac{\partial P}{\partial y}$  и  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  непрерывны, непрерывными являются и смешанные производные функции  $U(x; y)$ , а следовательно, они равны. Таким образом, доказано, что  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 57.3.** Функция  $U = U(x; y)$ , полный дифференциал которой равен дифференциальному выражению  $Pdx + Qdy$ , называется первообразной для этого выражения.

В данном случае  $\int_{AB} Pdx + Qdy$  не зависит от вида кривой, соединяющей точки  $A$  и  $B$ , а зависит лишь от координат точек  $A$  и  $B$ , которые мы обозначим  $x_0, y_0$  и  $x, y$ . Тогда  $\int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} dU(x; y) = \int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} P(\xi; \eta)d\xi + Q(\xi; \eta)d\eta$  и, следовательно,

$$U(x; y) = \int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} P(\xi; \eta)d\xi + Q(\xi; \eta)d\eta + C. \quad (57.10)$$

Здесь для того, чтобы не путать координаты  $x$  и  $y$  произвольной точки с переменными интегрирования мы обозначили последние буквами  $\xi$  и  $\eta$ . Очевидно, что функция  $U(x; y)$  определяется с точностью до константы  $C = U(x_0; y_0)$

Интегрирование в формуле (57.10) можно проводить вдоль любой линии, соединяющей точки  $A(x_0; y_0)$  и  $B(x; y)$ . Наиболее целесообразным будет брать путь интегрирования, совпадающий с ломаной линией  $ABC$ , со звеньями  $AB$  и  $CD$ , являющимися координатными



линиями  $\eta = y_0 = \text{const}$  и  $\xi = x = \text{const}$ , на которых, соответственно  $d\eta = 0$  и  $d\xi = 0$  (рис. 117):

$$U(x; y) = \int_{x_0}^x P(\xi; y_0) d\xi + \int_{y_0}^y Q(x; \eta) d\eta + C. \quad (57.11)$$

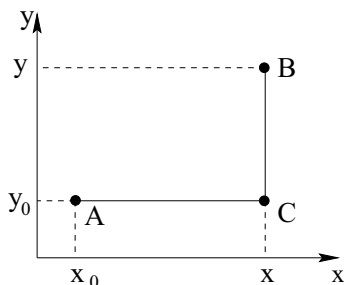


Рис. 117. К вычислению первообразной  $U = U(x; y)$

Если  $P(x; y)$  и  $Q(x; y)$  не имеют особенностей на оси абсцисс, в формуле (57.11) целесообразно положить  $x_0 = y_0 = 0$ :

$$U(x; y) = \int_0^x P(\xi; 0) d\xi + \int_0^y Q(x; \eta) d\eta + C. \quad (57.12)$$

**ПРИМЕР 57.5.** Найти первообразную для дифференциального выражения  $ydx + xdy$  из примера 57.1.

**Решение:** В данном выражении в примере 57.4 мы показали, что для данного криволинейного интеграла выполняется условие 57.8 и, следовательно,  $ydx + xdy$  является полным дифференциалом и имеет первообразную, которую можно найти по формуле (57.12), так как на оси абсцисс особенностей  $y$  подынтегрального выражения нет

$$U(x; y) = \int_0^x 0 d\xi + \int_0^y x d\eta = xy + C.$$

Для проверки вычислим  $dU$ . Получим:  $dU = d(xy + C) = ydx + xdy$ .

**ПРИМЕР 57.6.** Проверить существует ли первообразная у дифференциального выражения  $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) dx + \left(\frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}\right) dy$ , и если да, найти её.

**Решение:**  $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ;  $Q = \frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}$ . Проверим выполнение условия (57.8):  $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}$ ;  $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}$ . Следовательно  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  и данное выражение имеет первообразную, однако, в отличие от предыдущего примера вычислять её нужно по формуле (57.11), а не (57.12), так как при  $x = 0$  и  $y = 0$  функции  $P(x; y)$  и  $Q(x; y)$  не определены. Положим в формуле (57.11)  $x_0 = y_0 = 1$ :

$$\begin{aligned} U(x; y) &= \int_1^x \left(\frac{1}{\xi} + 1\right) d\xi + \int_1^y \left(\frac{2}{\eta} - \frac{x}{\eta^2}\right) d\eta = \\ &= (\ln \xi + \xi)|_1^x + \left(2 \ln \eta + \frac{x}{\eta}\right)\Big|_1^y = \end{aligned}$$

$$= \ln x + x - \ln 1 - 1 + 2 \ln y + \frac{x}{y} - 2 \ln 1 - x = \ln x + 2 \ln y + \frac{x}{y} + C.$$

Проверка: найдем  $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = P(x, y)$ ;  $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2}{y} - \frac{x}{y^2} = Q(x, y)$ .

## Практическое занятие 57. Криволинейные интегралы на плоскости

Прежде всего рассмотрим пример на вычисление заданного криволинейного интеграла вдоль различных линий.

**ПРИМЕР 57.1.** Вычислить криволинейный интеграл

$\int_{AB} 2xy dx - x^2 dy$ , где  $O(0; 0)$ , а  $A(2; 1)$ , вдоль различных линий, соединяющих точку  $O$  и  $A$  (рис. 118):

- вдоль прямой  $OaA$ ;

**Решение:** Уравнение прямой  $OaA$  будет  $y = \frac{1}{2}x \Rightarrow$

$$dy = \frac{1}{2} dx \text{ и}$$

$$\int_{OaA} 2xy dx - x^2 dy = \int_0^2 \left(x^2 - \frac{1}{2}x^2\right) dx = \frac{1}{6}x^3\Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

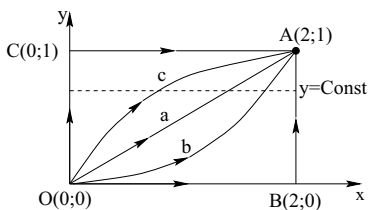


Рис. 118. К примерам 57.1, 57.2, 57.3, 57.4

- вдоль параболы  $ObA$ , для которой ось  $Oy$  является осью симметрии;

Решение: Уравнение параболы  $ObA$  будет  $y = \frac{x^2}{4} \Rightarrow dy = \frac{x}{2}dx$  и

$$\int_{ObA} 2xydx - x^2dy = \int_0^2 \left( \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{2} \right) dx = 0.$$

- вдоль параболы  $OcA$ , ось  $Ox$  для которой является осью симметрии;

Решение: Уравнение параболы  $OcA$  будет  $y = \sqrt{\frac{x}{2}} \Rightarrow dy = \frac{dx}{2\sqrt{2x}}$  и

$$\begin{aligned} \int_{OcA} 2xydx - x^2dy &= \int_0^2 \left( x\sqrt{2x} - \frac{1}{4}x\sqrt{2x} \right) dx = \frac{3\sqrt{2}}{4} \int_0^2 x^{3/2} dx = \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{2}{5} x^{5/2} \Big|_0^2 = \frac{12}{5}. \end{aligned}$$

- вдоль ломаной линии  $OBA$ ;

Решение: Ломаную  $OBA$  можно разбить на два отрезка  $OB$  и  $BA$ , на  $OB - y = 0 \Rightarrow dy = 0$ , на  $BA - x = 2dx = 0$ ,

следовательно,

$$\int_{OBA} 2xydx - x^2dy = 0 + \int_0^1 (-4)dy = -4.$$

- вдоль ломаной линии  $OCA$ ;

Решение: Ломаную  $OCA$  можно разбить на два отрезка  $OC$  и  $CA$ , на  $OC - x = 0 \Rightarrow dx = 0$ , на  $CA - y = 1 \Rightarrow dy = 0$ , следовательно,

$$\int_{OCA} 2xydx - x^2dy = \int_0^2 2xdx + 0 = x^2 \Big|_0^2 = 4.$$

ПРИМЕР 57.2. Вычислить  $\int_{OA} 2xydx + x^2dy$  вдоль всех линий из примера 57.1.

- Вдоль прямой  $OaA$ ;

Решение:

$$\int_{OaA} 2xydx + x^2dy = \int_0^2 \left( x^2 + \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \frac{3}{2} \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{2} \Big|_0^2 = 4.$$

- Вдоль параболы  $ObA$ ;

Решение:

$$\int_{ObA} 2xdx + x^2dy = \int_0^2 \left( \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{2} \right) dx = \int_0^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = 4.$$

- Вдоль параболы  $OcA$ ;

Решение:

$$\begin{aligned} \int_{OcA} 2xdx + x^2dy &= \int_0^2 \left( x\sqrt{2x} + \frac{1}{4}x\sqrt{2x} \right) dx = \\ &= \frac{5\sqrt{2}}{4} \int_0^2 x^{3/2} dx = \frac{5\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{2}{5} x^{5/2} = 4. \end{aligned}$$

- Вдоль ломаной линии  $OBA$

Р е ш е н и е:

$$\int_{OBA} 2xdx + x^2dy = 0 + \int_0^1 4dy = 4.$$

- Вдоль ломаной линии  $OCA$

Р е ш е н и е:

$$\int_{OCA} 2xdx + x^2dy = \int_0^2 2xdx + 0 = x^2 \Big|_0^2 = 4.$$

Как мы видим, заданный в этом примере криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования.

Рассмотрим теперь пример на использование теоремы Грина.

**ПРИМЕР 57.3.** *Вычислить криволинейный интеграл из примера 57.1 по замкнутому контуру  $L$  с помощью теоремы Грина и непосредственно.*

- Контуром  $L$  служит замкнутая кривая  $OBAaO$ .

Р е ш е н и е: В данном интеграле  $P = 2xy$ ,  $Q = -x^2$ . Следовательно,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2x - 2x = -4x,$$

откуда

$$\begin{aligned} \oint_L 2xydx - x^2dy &= -4 \iint_S x dS = -4 \int_0^1 dy \int_{2y}^2 x dx = \\ &= -4 \int_0^1 \frac{x^2}{2} \Big|_{2y}^2 dy = -2 \int_0^1 (4 - 4y^2) dy = 8 \left( \frac{y^3}{3} - y \right) \Big|_0^1 = -\frac{16}{3}. \end{aligned}$$

При вычислении двойного интеграла интегрирование вначале проводилось по  $x$  вдоль линии  $y = \text{const}$  от точки кривой  $y = 2x$  до прямой  $x = 2$ .

Для непосредственного вычисления криволинейного интеграла по контуру  $OBAaO$  воспользуемся результатами решения примера 57.1:

$$\oint_L 2xydx - x^2dy = \int_{OBA} 2xydx - x^2dy + \int_{AaO} 2xydx - x^2dy = -4 - \frac{4}{3} = \frac{16}{3}.$$

- Контуром  $L$  служит замкнутая кривая  $ObAcO$ .

Р е ш е н и е:

$$\begin{aligned} \int_L 2xydx - x^2dy &= -4 \int_0^1 dy \int_{2y^2}^{2\sqrt{y}} xdx = -2 \int_0^1 x^2 \Big|_{2y^2}^{2\sqrt{y}} dx = \\ &= -2 \int_0^1 (4y - 4y^4) dy = 8 \left( \frac{y^5}{5} - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^1 = -\frac{12}{5}. \end{aligned}$$

При вычислении двойного интеграла интегрирование первоначального проводится по  $x$  вдоль линии  $y = \text{const}$  от точки кривой  $x = 2y^2$  до точки кривой  $x = 2\sqrt{y}$ .

Для непосредственного вычисления криволинейного интеграла по контуру  $ObAcO$  воспользуемся также результатами решения примера 57.1:

$$\oint_L 2xydx - x^2dy = \int_{ObA} 2xydx - x^2dy + \int_{AcO} 2xydx - x^2dy = -4 - \frac{4}{3} = \frac{16}{3}.$$

**ПРИМЕР 57.4.** Вычислить площадь, ограниченную контуром  $ObAcO$  (пример 57.1) с помощью криволинейного интеграла.

Р е ш е н и е: Для вычисления указанной площади воспользуемся первой формулой (57.7) и указаниями к решению примера 57.1

$$\begin{aligned} S &= \oint_L xdy = \int_{ObA} xdy + \int_{AcO} xdy = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx + \int_2^0 \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{2}} dx = \\ &= \frac{x^3}{6} \Big|_0^2 - \frac{1}{3\sqrt{2}} x^{3/2} \Big|_0^2 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

**ПРИМЕР 57.5.** Показать, что интеграл из примера 57.2

$\int_L 2xydx + x^2dy$  не зависит от пути интегрирования.

**Решение:** Для данного интеграла  $P = 2xy$ ,  $Q = x^2 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}$  и  $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x$ , условие (57.8) выполнено, а, следовательно, интеграл  $\int_L 2xydx + x^2dy$  не зависит от пути интегрирования. В примере 57.2 был получен одинаковый результат при вычислении данного интеграла вдоль различных линий  $L$  от точки  $O(0; 0)$  до  $A(2; 1)$  и он оказался равен 4.

**ПРИМЕР 57.6.** Найти первообразную дифференциального выражения  $2xydx + x^2dy$ .

**Решение:** В предыдущем примере мы показали, что первообразная для данного дифференциального выражения существует, так как выполняется условие (57.8) и поскольку особенностей это выражение не имеет для его определения можно воспользоваться формулой (57.12)

$$U(x; y) = 0 + \int_0^y x^2 d\eta = x^2 y + C.$$

Проверка: найдём  $\frac{\partial U}{\partial x} = 2xy$ ;  $\frac{\partial U}{\partial y} = x^2$ .

### Самостоятельная работа

**ПРИМЕР 57.7.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{AB} (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy$ , где  $AB$  — дуга параболы  $y = x^2$  от точки  $A(1; 1)$  до точки  $B(2; 4)$ .

**ПРИМЕР 57.8.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_C (2a - y)dx + xdy$ , где  $C$  — дуга первой арки циклоиды  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

**ПРИМЕР 57.9.** Применяя формулу Грина, вычислить  $\oint_C 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2dy$ , где  $C$  — пробегаемый против часовой стрелки контур треугольника с вершинами в точках  $A(1; 1)$ ,  $B(2; 2)$  и  $C(1; 3)$ . Сравнить с результатом полученным непосредственно вычислением криволинейного интеграла по замкнутому контуру  $ABCA$ .

**ПРИМЕР 57.10.** Вычислить площадь, ограниченную астрондой  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ .

**ПРИМЕР 57.11.** Проверить, являются ли данные дифференциальные выражения полными дифференциалами некоторых функций и, если да, то найти их:

$$(3x^2 - 2xy + y^2)dx - (x^2 - 2xy + 3y^2)dy;$$

$$e^{x-y}((1+x+y)dx + (1-x-y)dy);$$

$$\frac{dx}{x+y} + \frac{dy}{x+y}.$$

## Лекция 58. Элементы теории векторного поля

Трёхмерное векторное поле. Векторные линии и трубки. Поток вектора через поверхность. Дивергенция вектора. Теорема Остроградского-Гаусса. Источники и стоки. Соленоидальное поле. Криволинейный интеграл по координатам в трёхмерном векторном поле. Циркуляция и ротор векторного поля. Теорема Стокса. Потенциальное поле. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования. Определение потенциала по заданному векторному полю.

### 58.1. Трёхмерное векторное поле. Векторные линии и трубки. Поток вектора через поверхность

Пусть в каждой точке области  $D$  трёхмерного пространства  $Oxyz$  задан вектор  $\vec{F}$  с проекциями  $F_x = P = P(x; y; z)$ ,  $F_y = Q = Q(x; y; z)$  и  $F_z = R = R(x; y; z)$ , зависящими от координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 58.1.** Область  $D$ , в каждой точке которой определен вектор

$$\vec{F} = \vec{F}(x; y; z) = P(x; y; z)\vec{i} + Q(x; y; z)\vec{j} + R(x; y; z)\vec{k} \quad (58.1)$$

называется *трёхмерным (пространственным) векторным полем*.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 58.2.** Линия  $L$ , в каждой точке которой направление касательной совпадает с направлением вектора  $\vec{F} = (P; Q; R)$  в этой точке, называется *векторной линией*.

Пусть в данном векторном поле дана замкнутая кривая  $C$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 58.3.** Множество всех векторных линий, проходящих через замкнутую кривую  $C$ , образуют поверхность, называемую *векторной трубкой*.



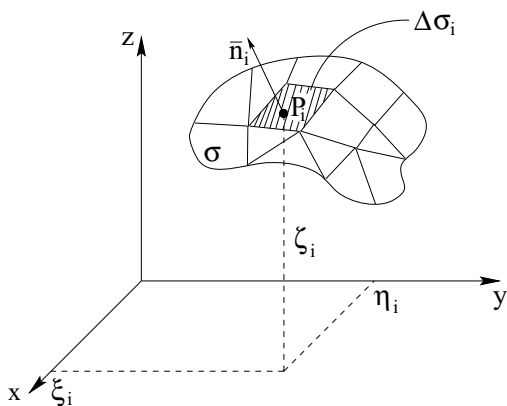


Рис. 119. К определению потока вектора через поверхность

Пусть в области  $D$  задана поверхность  $\sigma$  (рис. 119). Разобьем её на  $n$  частей  $\sigma = \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i$ . Пусть точка  $P_i$  с координатами  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$ , является произвольной точкой, принадлежащей  $\Delta\sigma_i$ . Определим в ней единичный вектор  $\vec{n}_i = \vec{n}(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)$ , перпендикулярный поверхности  $\sigma$ . В качестве вектора  $\vec{n}$  для незамкнутой поверхности  $\sigma$  выберем вектор образующий острый угол с осью  $Oz$ . Тогда, противоположный ему вектор будет иметь другой знак. Вычислим  $\vec{F}_i = \vec{F}(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)$  и будем считать вектора  $\vec{n}_i$  и  $\vec{F}_i$  постоянными во всех точках  $\Delta\sigma_i$  и равными их значениям в точке  $P_i$ . Составим скалярное произведение  $\vec{F}_i \cdot \vec{n}_i \cdot \Delta\sigma_i$  и образуем  $n$ -ую интегральную сумму  $\Phi_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{n}_i \cdot \Delta\sigma_i$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 58.4. Предел  $n$ -ой интегральной суммы

$\Phi_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{n}_i \cdot \Delta\sigma_i$  при стягивании всех  $\Delta\sigma_i$  в точки, и, следовательно, при  $n \rightarrow +\infty$ , называется потоком вектора  $\vec{F}$  через поверхность  $\sigma$  и обозначается

$$\Phi_\sigma = \iint_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_\sigma \vec{F}(x; y; z) \cdot \vec{n}(x; y; z) d\sigma. \quad (58.2)$$

Если поверхность замкнутая, то в качестве вектора  $\vec{n}$  выбирается внешняя нормаль и поток вектора через замкнутую поверхность  $\sigma$

обозначается

$$\Phi_{\sigma} = \oiint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma. \quad (58.3)$$

Изучение векторных полей чрезвычайно важно для решения задач физики и техники. Так, например, если область  $D$  заполнена жидкостью, скорость движения которой  $\vec{W} = \vec{W}(x; y; z)$  в каждой точке  $D$  различна, то эта область является векторным полем, для которой  $\vec{F} = \vec{W}(x; y; z)$ .

Другим примером векторного поля, как мы уже отмечали в предыдущей лекции, являются силовые поля, например, поле тяготения, электростатическое поле и т.д. Очевидно, векторными линиями поля скоростей жидкости являются траектории, по которым движутся частицы жидкости, а в электростатическом поле векторными линиями служат силовые линии. По этой причине векторные линии в этих случаях называют линиями тока или силовыми линиями.

Для выяснения физического смысла потока векторного поля через поверхность  $\sigma$  рассмотрим стационарное, т.е. не зависящее от времени движение жидкости с постоянной плотностью  $\gamma$  в пространстве. Прежде всего рассмотрим случай, когда скорость  $\vec{W}$  во всех точках рассматриваемой области постоянна, а поверхностью является плоская площадка  $\Delta\sigma$  (рис. 120).

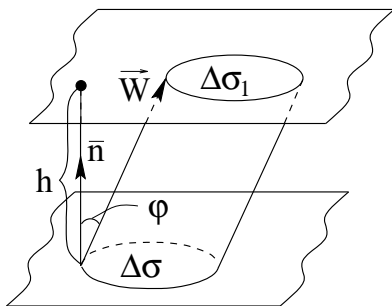


Рис. 120. К выводу расхода жидкости через поверхность  $\Delta\sigma$

За единицу времени частицы жидкости, расположенные на площадке  $\Delta\sigma$ , переместятся на площадку  $\Delta\sigma_1$  в направлении вектора  $\vec{W}$  на расстояние, равное его длине. Количество жидкости  $\Delta Q$ , которое

пройдет через  $\Delta\sigma$  за единицу времени, численно равно объёму цилиндра с основанием  $\Delta\sigma$  и образующей  $W$ , умноженному на плотность жидкости  $\gamma$ . Обозначив высоту цилиндра  $h$ , получим  $\Delta Q = \gamma h \Delta\sigma$ . Если  $\bar{n}$  – единичный вектор нормали к  $\Delta\sigma$ , а  $\varphi$  – угол между ним и вектором  $\bar{W}$ , то  $\Delta Q = \gamma W \cos \varphi \cdot \Delta\sigma = \gamma(\bar{W}\bar{n})\Delta\sigma$ .

Таким образом, в соответствии с формулой (58.2), получим, что расход жидкости через произвольную поверхность  $\sigma$

$$Q = \gamma \iint_{\sigma} \bar{W}(x; y; z) \cdot \bar{n}(x; y; z) d\sigma. \quad (58.4)$$

## 58.2. Дивергенция векторного поля.

### Теорема Остроградского-Гаусса<sup>6</sup>

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 58.5.** Дивергенцией (расходимостью) векторного поля  $\bar{F} = (P(x; y; z); Q(x; y; z); R(x; y; z))$  в точке  $M(x; y; z) \in \Delta V$  называется предел, к которому стремится отношение потока векторного поля  $\bar{F}$  через замкнутую поверхность  $\sigma$ , являющуюся границей области  $\Delta V$ , при стягивании этой области в точку  $M$ , и, следовательно, при  $\Delta V \rightarrow 0$ .

Дивергенция обозначается символом  $\operatorname{div}$ . Таким образом

$$\operatorname{div} \bar{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\sigma} \bar{F} \bar{n} d\sigma \quad (58.5)$$

Примем без доказательства формулы:

$$\operatorname{div} \bar{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad \text{и} \quad (58.6)$$

$$\Phi_{\sigma} = \oint_{\sigma} \bar{F} \cdot \bar{n} d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \bar{F} dV. \quad (58.7)$$

Последняя формула называется формулой Остроградского-Гаусса. Сформулируем соответствующую теорему, являющуюся основанием формулы (58.7).

---

<sup>6</sup>М.В. Остроградский (1801–1861) – выдающийся русский математик и механик; К.Гаусс (1777–1855) – крупнейший немецкий математик.

**ТЕОРЕМА 58.1. (Остроградского-Гаусса).** Если функции  $P = P(x; y; z)$ ,  $Q = Q(x; y; z)$  и  $R = R(x; y; z)$ , являющиеся проекциями вектора  $\vec{F}$  на оси координат  $F_x = P$ ,  $F_y = Q$ ,  $F_z = R$ , непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в ограниченной замкнутой области, имеющей объём  $V$ , то поток вектора  $\vec{F}$  через замкнутую поверхность  $\sigma$ , ограничивающую  $V$ , равен тройному интегралу от дивергенции этого вектора по объёму  $V$ .

Напомним, что  $\vec{n}$  – есть единичный вектор внешней нормали к поверхности  $\sigma$ .

Выясним физический смысл формулы Остроградского-Гаусса (58.7). Пусть нам задано поле скоростей  $\vec{W}$  движущейся жидкости. Расход жидкости через любую замкнутую поверхность, ограничивающую объём  $V$ , расположенную в этом поле, в соответствии с (58.4) и (58.7) будет

$$Q = \gamma \oint_{\sigma} \vec{W} \cdot \vec{n} d\sigma = \gamma \iiint_V \operatorname{div} \vec{W} dV. \quad (58.8)$$

Пусть  $\operatorname{div} \vec{W} > 0$  в некоторой точке  $M$ , тогда в силу непрерывности частных производных найдется такая окрестность этой точки, в которой всюду  $\operatorname{div} \vec{W} > 0$ . Возьмём объём  $V$  настолько малым, чтобы он принадлежал этой окрестности, тогда в силу (58.8) расход  $Q$  жидкости через поверхность  $\sigma$ , ограничивающую  $V$ , будет положительным, и, следовательно, жидкость будет вытекать из этого объёма. По этой причине данная точка называется источником. Если же  $\operatorname{div} \vec{W} < 0$  в точке  $M$ , то  $Q < 0$  и жидкость втекает в  $V$ . Такая точка называется стоком. Эти названия переносятся и на любое векторное поле  $\vec{F} = \vec{F}(x; y; z)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 58.6.** Точка векторного поля, в которой  $\operatorname{div} \vec{F} > 0$ , называется источником, а точка, в которой  $\operatorname{div} \vec{F} < 0$  – стоком.

Векторные линии выходят из источника и заканчиваются в точке стока. Для жидкости это, как мы знаем, траектории частиц, для электростатического поля – силовые линии, исходящие из точки, имеющей положительный заряд, и заканчивающиеся в точке с отрицательным зарядом.

Для трубки тока поток векторного поля через боковую поверхность, очевидно, равен нулю, так как  $\vec{n} \perp \vec{F}$ , поэтому, если внутри векторной трубки, ограниченной поперечными сечениями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  (рис.121),

$\operatorname{div} \vec{F} = 0$ , суммарный поток векторного поля через сечения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  будет равен нулю:  $\iint_{\sigma_1} \vec{F} \vec{n} d\sigma + \iint_{\sigma_2} \vec{F} \vec{n} d\sigma = 0$ .

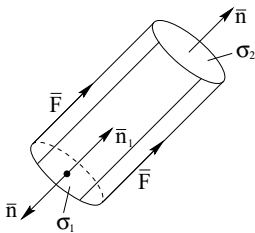


Рис. 121. Трубка тока

Если изменить направление вектора  $\vec{n}$  в сечении  $\sigma$ , на противоположное  $\vec{n}_1 = -\vec{n}$ , знак первого интеграла изменится и из последнего равенства получим  $\iint_{\sigma_1} \vec{F} \vec{n}_1 d\sigma = \iint_{\sigma_2} \vec{F} \vec{n} d\sigma$ . Отсюда следует, что, если в векторном поле  $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ , вектора через любое сечение векторной трубки имеет одно и то же значение.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 58.7.** Векторное поле, в каждой точке которого  $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ , называется соленоидальным (или трубчатым).

### 58.3. Криволинейный интеграл по координатам в трёхмерном векторном поле. Циркуляция и ротор векторного поля. Теорема Стокса

Пусть дуга  $L$ , начинающаяся в точке  $A$  и заканчивающаяся в точке  $B$ , целиком принадлежит  $D$ . По аналогии с плоским векторным полем образуем  $n$ -ю интегральную сумму

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \vec{F}(\xi_i; \eta_i; \zeta_i) \overline{\Delta l_i} = \\ &= \sum_{i=1}^n P(\xi_i; \eta_i; \zeta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i; \eta_i; \zeta_i) \Delta y_i + R(\xi_i; \eta_i; \zeta_i) \Delta z_i. \end{aligned}$$

По полной аналогии с определением 57.2 введем

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 58.8.** Предел, к которому стремится  $n$ -я интегральная сумма  $\sum_{i=1}^n \vec{F}(\xi_i; \eta_i; \zeta_i) \overline{\Delta l_i}$ , при стремлении к нулю длин всех

звеньев ломаной линии, вписанной в дугу  $AB$ , и, следовательно, при  $n \rightarrow +\infty$ , называется криволинейным интегралом 2-го рода и обозначается

$$\int_L \overline{F}(x; y; z) d\overline{l} = \int_L P(x; y; z) dx + Q(x; y; z) dy + R(x; y; z) dz \quad (58.9)$$

или

$$\int_{AB} \overline{F}(x; y; z) d\overline{l} = \int_{AB} P(x; y; z) dx + Q(x; y; z) dy + R(x; y; z) dz.$$

Если кривая  $L$  задана в параметрическом виде:  $x = x(t)$ ;  $y = y(t)$  и  $z = z(t)$ , то (58.9) сводится к определённомu интегралу

$$\begin{aligned} \int_{AB} P dx + Q dy + R dz = \\ = \int_{t_A}^{t_B} (P(x(t); y(t); z(t))x'(t) + Q(x(t); y(t); z(t))y'(t) + \\ + R(x(t); y(t); z(t))z'(t)) dt, \end{aligned} \quad (58.10)$$

где  $t_A$  и  $t_B$  — значения параметра  $t$  в точках  $A$  и  $B$ .

Как и в двумерном случае (57.5) криволинейный интеграл в силовом поле  $\overline{F} = \overline{F}(x; y; z) = (F_x(x; y; z); F_y(x; y; z); F_z(x; y; z))$  определяет работу, совершаемую при перемещении какого-либо объекта из точки  $A$  в точку  $B$  вдоль линии  $L$

$$A = \int_{AB} \overline{F}(x; y; z) d\overline{l} = \int_{AB} F_x(x; y; z) dx + F_y(x; y; z) dy + F_z(x; y; z) dz. \quad (58.11)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 58.9.** Криволинейный интеграл (58.9) по замкнутому контуру  $L$  называется циркуляцией векторного поля  $\overline{F}$  по замкнутому контуру  $L$  и обозначается

$$\oint_L \overline{F} d\overline{l} = \oint_L P(x; y; z) dx + Q(x; y; z) dy + R(x; y; z) dz. \quad (58.12)$$

В формуле (58.12) обход поверхности, границей которой является контур  $L$  совершается таким образом, чтобы при обходе эта поверхность находилась слева. При изменении направления обхода знак циркуляции меняется на противоположный.

Введем некоторый новый вектор согласно следующему определению

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 58.10. *Ротором (или вихрем) векторного поля  $\vec{F} = P(x; y; z)\vec{i} + Q(x; y; z)\vec{j} + R(x; y; z)\vec{k}$  называется вектор обозначаемый  $\text{rot } \vec{F}$  и равный*

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (58.13)$$

В формуле (58.13) введен символический определитель для удобства запоминания выражений проекций вектора  $\text{rot } \vec{F}$ . Если формально разложить этот определитель по элементам первой строки и считать при этом произведения символов  $\frac{\partial}{\partial x}$ ;  $\frac{\partial}{\partial y}$ ;  $\frac{\partial}{\partial z}$  на функции  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  равными их соответствующим частным производным  $\frac{\partial P}{\partial x}$ ;  $\frac{\partial P}{\partial y}$ ;  $\frac{\partial P}{\partial z}$ ;  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  и т.д., то можно получить проекции  $\text{rot } \vec{F} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$

Связь  $\text{rot } \vec{F}$  с циркуляцией  $\oint_L \vec{F} d\vec{l}$  определяется следующей теоремой, приводимой нами без доказательства.

ТЕОРЕМА 58.2. (Теорема Стокса)<sup>7</sup>. Если функции  $P = P(x; y; z)$ ,  $Q = Q(x; y; z)$ ,  $R = R(x; y; z)$ , являющиеся проекциями вектора  $\vec{F} = \vec{F}(x; y; z)$ , и их первые производные непрерывны на поверхности  $\sigma$ , ограниченной замкнутым контуром  $L$ , то циркуляция вектора  $\vec{F}$  по контуру  $L$  равна потоку ротора этого вектора через поверхность  $\sigma$ :

$$\oint_L \vec{F} d\vec{l} = \iint_{\sigma} \text{rot } \vec{F} d\sigma. \quad (58.14)$$

Формула (58.14) позволяет установить физический смысл ротора векторного поля. Если мы рассматриваем движение жидкости, то циркуляция вектора скорости по замкнутому контуру  $L$  определяется движением (вращением) частиц жидкости по этому контуру, а по формуле (58.14) она равна потоку  $\text{rot } \vec{V}$  через поверхность, ограниченную  $L$ . Отсюда ясен смысл названия ротор, или иначе вихрь.

<sup>7</sup>Д. Стокс (1819–1903) – английский математик и механик

Покажем, что формула Грина (57.6) является частным случаем формулы Стокса (58.14). Действительно, если  $P = P(x; y)$ ;  $Q = Q(x; y)$ , а  $R = 0$ , то согласно (58.13)  $\operatorname{rot} \bar{F} = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \bar{k}$ . Если, кроме того, кривая  $L$  и область  $\sigma$  расположены в плоскости  $Oxy$ , то  $\bar{n} = \bar{k}$ . Поставив эти значения  $\operatorname{rot} \bar{F}$  и  $\bar{n}$  в (58.14) получаем (57.6).

#### 58.4. Потенциальное поле. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 58.11. Векторное поле

$$\bar{F} = (P(x; y; z); Q(x; y; z); R(x; y; z))$$

называется безвихревым, если во всех его точках  $\operatorname{rot} \bar{F} = 0$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 58.12. Функция  $U = U(x; y; z)$ , градиент которой равен вектору  $\bar{F} \equiv F(x; y; z)$ , называется потенциальной функцией (или просто потенциалом) поля  $\bar{F} = \bar{F}(x; y; z)$ .

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 58.3. Для того, чтобы векторное поле  $\bar{F} = \bar{F}(x; y; z) = P(x; y; z)\bar{i} + Q(x; y; z)\bar{j} + R(x; y; z)\bar{k}$  было потенциальным необходимо и достаточно, чтобы оно было безвихревым, т.е., чтобы во всех точках векторного поля выполнялось условие

$$\operatorname{rot} \bar{F} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}; \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}; \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0. \quad (58.15)$$

Поскольку, если вектор равен нулю, равны нулю и его проекции, следовательно, выполняются условия

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0. \quad (58.16)$$

Докажем только необходимость. Пусть поле  $\bar{F} = \bar{F}(x; y; z)$  имеет потенциал  $U = U(x; y; z)$ , и, следовательно, согласно определению (58.12) и выражению градиента (39.7)

$$\bar{F} = \operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{k}$$

откуда

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (58.17)$$



Подставляя эти выражения в (58.16) и учитывая, что смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования, видим, что (58.16) и, следовательно, (58.15) выполняются.

Подставляя (58.15) в (58.14) мы получаем следующую теорему:

**ТЕОРЕМА 58.4.** *Если векторное поле является потенциальным, то циркуляция вектора  $\vec{F}$  по любому замкнутому контуру, расположенному в этом поле, равна нулю и, следовательно, криволинейный интеграл  $\int_{AB} \vec{F} d\vec{l}$  в этом поле не зависит от пути интегрирования.*

Учитывая, что для потенциального поля  $\vec{F} = (P; Q; R)$  выполняются условия (58.17), а полным дифференциалом функции  $U = U(x; y; z)$  является выражение  $dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$ , имеем

$$\begin{aligned} \int_{AB} \vec{F} d\vec{l} &= \int_{AB} P dx + Q dy + R dz = \\ &= \int_{AB} \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = \int_A^B dU = U(B) - U(A). \end{aligned} \quad (58.18)$$

Обращаясь к физическому смыслу криволинейного интеграла (58.11), получаем, что работа, совершаемая при перемещении какого-либо объекта из точки  $A$  в точку  $B$  в силовом потенциальном поле, не зависит от пути, соединяющего  $A$  и  $B$ , а равна разности потенциалов в точках  $A$  и  $B$ .

### 58.5. Нахождение потенциала по заданному векторному полю

Если векторное поле является потенциальным, то согласно определению (58.12)  $\vec{F}(x; y; z) = \text{grad } U(x; y; z)$  и нашей задачей является определение функции  $U = U(x; y; z)$  по заданному векторному полю  $\vec{F} = \vec{F}(x; y; z)$ . Это можно сделать с помощью формулы (58.18).

Возьмём в качестве точки  $A$  (рис. 122) фиксированную точку  $(x_0; y_0; z_0)$ , а в качестве  $B$  — произвольную точку  $(x; y; z)$ . И поскольку криволинейный интеграл в (58.18) не зависит от пути интегрирования из (58.18) получим

$$U(x; y; z) = \int_{(x_0; y_0; z_0)}^{(x; y; z)} P(\xi; \eta; \zeta) d\xi + Q(\xi; \eta; \zeta) d\eta + R(\xi; \eta; \zeta) d\zeta + C, \quad (58.19)$$

где переменные интегрирования обозначены  $\xi, \eta, \zeta$ , чтобы не путать их с координатами точки  $(x; y; z)$ , а  $C = U(x_0; y_0; z_0)$ .

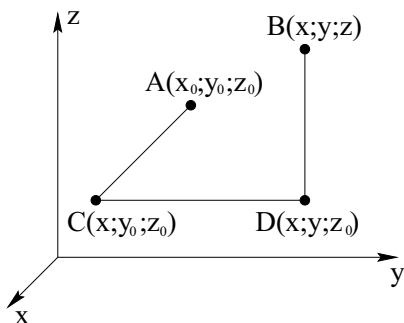


Рис. 122. Путь интегрирования вдоль ломаной  $L$  со звеньями, являющимися координатными линиями

Для упрощения вычислений целесообразно провести интегрирование вдоль ломаной  $ACDB$  со звеньями  $AC$ ,  $CD$  и  $DB$  являющимися координатными линиями (рис. 122), на которых, соответственно,  $\eta = y_0, \zeta = z_0; \xi = x, \zeta = z_0; \xi = x, \eta = y$  и  $d\eta = d\zeta = 0; d\xi = d\zeta = 0; d\xi = d\eta = 0$ . Подставляя эти значения в формулу (58.19), получаем

$$U(x; y; z) = \int_{x_0}^x P(\xi; y_0; z_0) d\xi + \int_{y_0}^y Q(x; \eta; z_0) d\eta + \int_{z_0}^z R(x; y; \zeta) d\zeta + C. \quad (58.20)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 58.1.** Если  $P, Q, R$  не имеют особенностей при  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ , в (58.20) целесообразно вести интегрирование от точки  $O(0; 0; 0)$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 58.2.** В определении 57.3 мы ввели понятие первообразной для функции двух переменных  $U = U(x; y)$  аналогичное понятие можно было ввести и для функции трёх переменных  $U = U(x; y; z)$ , но в этой лекции мы пользовались терминами, принятыми в теории векторного поля, и вместо первообразной ввели соответствующее понятие – потенциал векторного поля

## Практическое занятие 58. Решение примеров на применение элементов теории векторного поля

**ПРИМЕР 58.1.** Найти поток векторного поля  $\vec{F} = k\vec{r} = kx\vec{i} + ky\vec{j} + kz\vec{k}$  через сферу радиуса  $R$  с центром в начале координат непосредственно и с помощью теоремы Остроградского-Гаусса.

**Решение:** Уравнение сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , вектор единичной внешней нормали к ней  $\vec{n} = \frac{1}{R}\vec{R}$ , векторное поле на поверхности сферы  $\vec{F} = k\vec{R}$ , скалярное произведение  $\vec{F}\vec{n} = k\vec{R} \cdot \frac{1}{R}\vec{R} = \frac{k}{R}R^2 = kR$  и, следовательно, поток поля  $\vec{F} = k\vec{r}$  через поверхность сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , определяется по формуле (58.8)

$$\Phi_\sigma = \iint_\sigma \vec{F}\vec{n}d\sigma = kR \iint_\sigma d\sigma = kR4\pi R^2 = 4\pi kR^3.$$

Найдем дивергенцию заданного векторного поля. Поскольку для заданного поля  $P = kx$ ;  $Q = ky$ ;  $R = kz$  по формуле (58.6) находим  $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial kx}{\partial x} + \frac{\partial ky}{\partial y} + \frac{\partial kz}{\partial z} = 3k$ . По формуле Остроградского-Гаусса (58.7) находим

$$\Phi_\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV = 3k \iiint_V dV = 3k \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi kR^3.$$

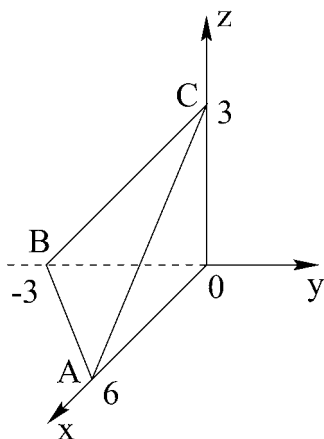
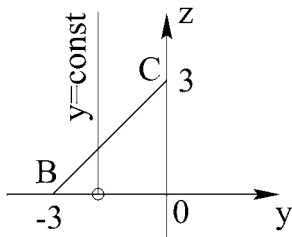
**ПРИМЕР 58.2.** Вычислить поток векторного поля  $\vec{F} = (2x + z)\vec{i} + (y + 2z)\vec{j} + (z - y)\vec{k}$  через тетраэдр, ограниченный плоскостями  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $z = 0$  и  $x - 2y + 2z - 6 = 0$ , используя формулу Остроградского-Гаусса и непосредственно.

**Решение:** Тетраэдр, ограниченный заданными плоскостями, изображен на рис. 123. Определим дивергенцию векторного поля  $\vec{F}$ . Поскольку в нашем примере  $P = 2x + z$ ;  $Q = y + 2z$ ;  $R = z - y$ , получим

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial(2x + z)}{\partial x} + \frac{\partial(y + 2z)}{\partial y} + \frac{\partial(z - y)}{\partial z} = 2 + 1 + 1 = 4$$

и, следовательно, по формуле (58.7)

$$\begin{aligned} \Phi_\sigma &= \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV = 4 \iiint_V dV = \\ &= 4 \cdot \frac{1}{6} OA \cdot BO \cdot OC = 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 3 = 36. \end{aligned}$$


 Рис. 123. К примерам  
58.2 и 58.3

 Рис. 124. К примеру  
58.2; плоскость  $x = 0$ 

Перейдем теперь к непосредственному вычислению потока векторного поля через четыре грани  $BOC$ ;  $AOC$ ;  $AOB$  и  $ABC$  тетраэдра  $OABC$ .

- На грани  $BOC$  (рис. 124):  $x = 0$ ,  $\vec{n} = -\vec{i}$ ,  $\vec{F}\vec{n} = -z$ ,  $\Phi_{BOC} =$   

$$= - \iint_{BOC} z dz dy = - \int_{-3}^0 dy \int_0^{3+y} z dz = -\frac{1}{2} \int_{-3}^0 z^2 \Big|_0^{3+y} dy = \frac{1}{2} \int_0^{-3} (9+6y+y^2) dy = -\frac{1}{2} \left( 9y + 3y^2 + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{-3} = -\frac{1}{2} (-27 + 27 - 9) = -4,5.$$
- На грани  $AOC$  (рис. 125):  $y = 0$ ,  $\vec{n} = \vec{j}$ ,  $\vec{F}\vec{n} = 2z$ ,  $\Phi_{AOC} =$   

$$= 2 \iiint_{AOC} z dx dz = 2 \int_0^3 z dz \int_0^{6-2z} dx = 2 \int_0^3 z(6-2z) dz = 2 \left( 3z^2 - \frac{2}{3} z^3 \right) \Big|_0^3 =$$
  

$$= 2(27 - 8) = 18.$$
- На грани  $AOB$  (рис. 126):  $z = 0$ ,  $\vec{n} = -\vec{k}$ ,  $\vec{F}\vec{n} = y$ ,  $\Phi_{AOB} =$   

$$= \iint_{AOB} y dx dy = \int_{-3}^0 y dy \int_0^{6+2y} dx = \int_{-3}^0 y(6+2y) dy = \left( 3y^2 + \frac{2}{3} y^3 \right) \Big|_{-3}^0 =$$
  

$$= -27 + 18 = -9.$$

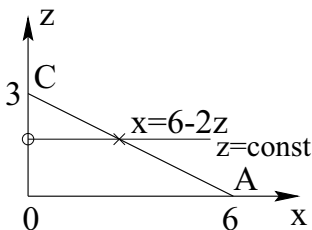


Рис. 125. К примеру 58.2; плоскость  $y = 0$

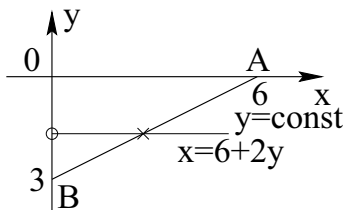


Рис. 126. К примеру 58.2; плоскость  $z = 0$

- На плоскости  $ABC : x - 2y + 2z - 6 = 0$ ; нормальный вектор этой плоскости

$$\begin{aligned}\bar{N} &= A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k} = \bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k} \Rightarrow \bar{n} = \frac{\bar{N}}{N} = \\ &= \frac{\bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{1}{3}\bar{i} - \frac{2}{3}\bar{j} + \frac{2}{3}\bar{k}.\end{aligned}$$

Таким образом, скалярное произведение векторов  $\bar{F}$  и  $\bar{n}$  равно:  $\bar{F}\bar{n} = \frac{1}{3}(2x + z - 2y - 4z + 2z - 2y)$ . Положив в этом выражении

$$\begin{aligned}z &= 3 - \frac{x}{2} + y \text{ получим } \bar{F}\bar{n} = \frac{5}{6}x - \frac{5}{2}y - 1 \text{ и, учитывая, что в} \\ \text{соответствии с формулой (54.2) } d\sigma &= \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} dxdy = \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1} dxdy = \frac{3}{2} dxdy, \text{ найдем}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{ABC} &= \frac{3}{2} \iiint_{AOB} \left( \frac{5}{6}x - \frac{5}{3}y - 1 \right) dxdy = \\ &= \frac{3}{2} \int_{-3}^0 dy \int_0^{6+2y} \left( \frac{5}{6}x - \frac{5}{3}y - 1 \right) dx = \\ &= \frac{3}{2} \int_{-3}^0 \left( \frac{5}{12}(6+2y)^2 - \frac{5}{3}(6+2y) - (6+2y) \right) dy = \\ &= \frac{3}{2} \int_{-3}^0 \left( 9 - 2y - \frac{5}{3}y^2 \right) dy = \frac{3}{2} \left( 9y - y^2 - \frac{5}{3}y^3 \right) \Big|_{-3}^0 = 31,5.\end{aligned}$$

- Суммарный поток векторного поля через поверхность ограничивающую тетраэдр  $OABC$   $\Phi_\sigma = \Phi_{BOC} + \Phi_{AOC} + \Phi_{AOB} + \Phi_{ABC} = -4,5 + 18 - 9 + 31,5 = 36$ .

Очевидно, что тот же самый результат с помощью теоремы Остроградского-Гаусса был получен несравненно быстрее.

Рассмотрим теперь пример, в котором для определения единичного вектора, нормального к поверхности, необходимо использовать понятия градиента (лекция 40).

ПРИМЕР 58.3. Найти поток  $\Phi$  векторного поля

$\vec{F} = xy^2\vec{i} + \frac{yz}{2}\vec{j} + x^2z\vec{k}$  через часть параболоида вращения  $z = x^2 + y^2$ , вырезанную цилиндром  $x^2 + y^2 = 4$  (рис. 97).

Р е ш е н и е:

Поскольку в нашем случае поверхность задана уравнением  $z = f(x; y)$ , на основании формулы (40.20) имеем

$$\vec{n} = \frac{-f'_x(x; y)\vec{i} - f'_y(x; y)\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + f'^2_x(x; y) + f'^2_y(x; y)}} = \frac{-2x\vec{i} - 2y\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}.$$

При этом угол  $\vec{n}$  с осью  $Ox$  является острым.

Определим  $\vec{F}\vec{n} = \frac{-2x^2y^2 - y^2z + x^2z}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}.$

Таким образом, искомый поток векторного поля

$$\Phi = \iint_{\sigma} \frac{-2x^2y^2 - y^2z + x^2z}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} d\sigma.$$

В соответствии с формулой (39.11)

$$d\sigma = \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y} ds = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} ds.$$

Подставляя  $z = x^2 + y^2$  в формулу для  $\Phi$  получим

$$\Phi = \iint_{\sigma_{xy}} (-2x^2y^2 + (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)) d\sigma,$$

где  $\sigma_{xy}$  — круг радиуса  $R = 2$  в плоскости  $Oxy$  с центром в начале координат.

Вычисляя двойной интеграл в полярных координатах

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_{\sigma_{xy}} (-2r^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + r^4 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)) r dr d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( -\frac{\sin^2 2\varphi}{2} + \cos 2\varphi \right) d\varphi \int_0^2 r^5 dr = \\ &= \left( \frac{\varphi}{4} + \frac{\sin^2 2\varphi}{16} + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} \frac{r^6}{6} \Big|_0^2 = -\frac{16\pi}{3}.\end{aligned}$$

Рассмотрим один пример на использование теоремы Стокса.

**ПРИМЕР 58.4.** Вычислить циркуляцию векторного поля  $\overline{F}$  по контуру  $ACBA$  из примера 58.2 на основе теоремы Стокса и непосредственно.

**Решение:** Для заданного поля  $P = 2x + z$ ,  $Q = y + 2z$ ,  $R = z - y$  и, следовательно, по формуле (58.13)

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \overline{F} &= \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = \\ &= (-1 - 2)\vec{i} + (1 - 0)\vec{j} + (0 - 0)\vec{k} = -3\vec{i} + \vec{j}.\end{aligned}$$

Вектор  $\vec{n}$  найден в примере 58.2. Поток  $\operatorname{rot} \overline{F}$  через грань  $ABC$

$$\begin{aligned}\iint_{\sigma} \vec{n} \operatorname{rot} \overline{F} d\sigma &= \iint_{ACB} \left( -1 - \frac{2}{3} \right) d\sigma = -\frac{5}{3} \iint_{ACB} d\sigma = -\frac{5}{3} d\sigma_{ACB} = \\ &= -\frac{5}{3} \frac{S_{ABC}}{\cos \gamma} = -\frac{5}{3} \frac{\frac{1}{2} OA \cdot OB}{2/3} = -\frac{5 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 2} = -22,5.\end{aligned}$$

Таким образом, согласно формуле Стокса (58.14) циркуляция поля по контуру  $ACBA$

$$\oint_{ACBA} \overline{F} d\vec{l} = \iint_{ACB} \vec{n} \operatorname{rot} \overline{F} d\sigma = -22,5.$$

Найдем теперь значение циркуляции  $\oint_{ACBA} \overline{F} d\vec{l}$  вычисляя криволинейные интегралы от  $Pdx + Qdy + Rdz$  по ребрам  $AC$ ;  $CB$  и  $BA$ :

- на ребре  $AC$ :  $y = 0$  и  $z = 3 - \frac{x}{2}$ , откуда  $dy = 0$  и  $dz = -\frac{1}{2}dx$ .  
Таким образом,  $\int_{AB} (2x + y)dx + (y + 2z)dy + (z - y)dz =$   
 $\int_6^0 \left(\frac{7}{4}x + \frac{3}{2}\right) dx = \left(\frac{7}{8}x^2 + \frac{3}{2}x\right)\Big|_6^0 = -40,5.$
- на ребре  $CB$ :  $x = 0$  и  $z = 3 + y$ , откуда  $dx = 0$  и  $dz = dy$ .  
Таким образом,  $\int_{CB} (2x + y)dx + (y + 2z)dy + (z - y)dz =$   
 $\int_0^{-3} (9 + 3y) dy = \left(9y + \frac{3y^2}{2}\right)\Big|_0^{-3} = -13,5.$
- на ребре  $BA$ :  $z = 0$  и  $x = 6 + 2y$ , откуда  $dz = 0$  и  $dx = 2dy$ .  
Таким образом,  $\int_{BA} (2x + y)dx + (y + 2z)dy + (z - y)dz =$   
 $\int_{-3}^0 (24 + 9y) dy = \left(24y + \frac{9y^2}{2}\right)\Big|_{-3}^0 = 31,5.$

В итоге  $\oint_{ACBA} \overline{F}dl = -40,5 - 13,5 + 31,5 = -22,5.$

И наконец, в заключение этого занятия рассмотрим пример на определение потенциала по заданному полю.

**ПРИМЕР 58.5.** Проверить, является ли поле  $\overline{F} = (2xy + z^2)\vec{i} + (x^2 + z)\vec{j} + (y + 2xz)\vec{k}$  потенциальным и, если да, найти его потенциал.

**Решение:**

Для данного поля  $P = 2xy + z^2$ ;  $Q = x^2 + z$ ;  $R = y + 2xz$ . Проверим условие потенциальности (58.16)

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 1 - 1 = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 2z - 2z = 0;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2x = 0,$$

следовательно, что  $\text{rot } \overline{F} = 0$  и поле имеет потенциал. Найдем его по формуле (61.20), положив  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ , поскольку никаких особенностей функции  $P(x; y; z)$ ;  $Q(x; y; z)$  и  $R(x; y; z)$  не имеют.

$$u(x; y; z) = \int_0^x 0 dx + \int_0^y x^2 dy + \int_0^z (y + 2xz) dz = x^2 y + yz + xz^2 + C.$$

Проверка:  $P = \frac{\partial u}{\partial x} = 2xy + z^2$ ;  $Q = \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + z$ ;  $R = \frac{\partial u}{\partial z} = y + 2xz.$



### Самостоятельная работа

**ПРИМЕР 58.6.** Найти поток векторного поля  $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  через поверхность куба, ограниченного поверхностями:  $x = -a$ ,  $x = a$ ,  $y = -a$ ,  $y = a$ ,  $z = -a$ ,  $z = a$  по теореме Остроградского-Гаусса и непосредственно.

**ПРИМЕР 58.7.** Найти поток векторного поля  $\vec{F} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$  через расположенную в первой октанте часть сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

**ПРИМЕР 58.8.** Выяснить имеет ли векторное поле  $\vec{F} = yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}$  потенциал и, если да, найти его.

## Лекция 59. Интегралы в комплексной области

Интеграл вдоль линии в комплексной области. Теорема Коши для односвязной и многосвязной областей. Вычет функции в изолированной точке. Применение теории вычетов к вычислению интегралов в комплексной области, к вычислению определённых интегралов и несобственных интегралов с бесконечными пределами

### 59.1. Интеграл вдоль линии $L$ в комплексной области.

Пусть  $L = AB$  кусочно-гладкая линия, т.е. линия, состоящая из отрезков с непрерывной производной, расположена в области  $S$  на комплексной области  $\boxed{Z}$  (рис. 127).

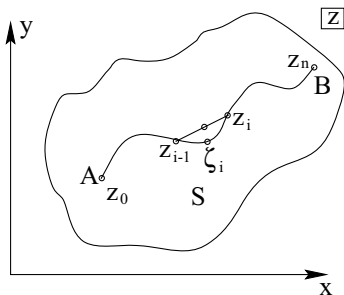


Рис. 127. К выводу понятия интеграла в комплексной области

Определение понятия области дано в лекции 35. Разобьем линию  $L$  на  $n$  частей. Как мы знаем (лекция 33) каждой точке комплексной плоскости соответствует комплексное число. Обозначим начальную и конечную точки  $L$ , соответственно,  $z_A = z_0$  и  $z_B = z_n$ . Впишем в  $L$  ломаную линию, соединяющую точки разбиения. На каждой элементарной дуге  $z_{i-1}z_i$  возьмём точку  $\xi_i$  и составив произведения  $f(\xi_i)(z_i - z_{i-1}) = f(\xi_i)\Delta z_i$ . Образует интегральную сумму  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta z_i$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 59.1.** *Интегралом от функции  $f(z)$  комплексной переменной  $z$  вдоль линии  $L$  называется предел интегральной суммы  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta z_i$ , при условии, что длины всех элементарных дуг этой линии стремятся к нулю и, следовательно, их число стремится к бесконечности. Этот предел не должен зависеть от способа разбиения  $L$  на элементарные дуги и от выбора на каждой из них точки  $\xi_i$ . Полученный предел обозначается*

$$\int_L f(z)dz = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta z_i. \quad (59.1)$$

В дальнейшем для сокращения введенный таким образом интеграл (59.1) будем называть просто интегралом вдоль линии  $L$  без упоминания комплексной переменной, что уже определяется самой темой лекции.

Как известно студентам, комплексная переменная  $z$  (лекция 33) и её функция  $f(z)$  (лекция 42) состоят из действительной и мнимой частей, т.е.  $z = x + iy$ ,  $f(z) = u + iv$ , где  $u = u(x; y)$ ,  $v = v(x; y)$ . Подставив эти выражения  $z$  и  $f(z)$  в интеграл и, учитывая, что  $i^2 = -1$ , получим

$$\int_L f(z)dz = \int_L (u + iv)(dx + idy) = \int_L udx - vdy + i \int_L vdx + udy. \quad (59.2)$$

Таким образом, действительная  $\operatorname{Re} \int_L f(z)dz = \int_L u(x; y)dx - v(x; y)dy$  и мнимая  $\operatorname{Im} \int_L f(z)dz = \int_L v(x; y)dx + u(x; y)dy$  части интеграла вдоль линии  $L$  являются криволинейными интегралами по координатам (лекция 57) и обладают всеми свойствами таких интегралов, изученными нами в лекции 57. Рассмотрим два примера на вычисление интегралов вдоль заданной линии  $L$ .

ПРИМЕР 59.1. Вычислить интеграл  $\int_L \operatorname{Im} z dz$  вдоль прямой, соединяющей начало координат с точкой  $z = 1 + 2i$  (рис. 128).

Решение:

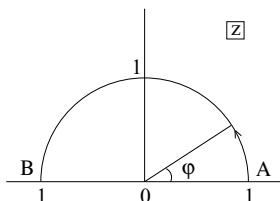
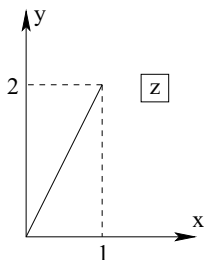


Рис. 129. К примеру 59.2

Рис. 128. К примеру 59.1

Уравнение линии интегрирования  $y = 2x$ ,  $dy = 2dx$ . Имеем  $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im}(x + iy) = y$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{0z} \operatorname{Im} z dz &= \int_{0z} y(dx + i dy) = \int_0^1 2x dx + i \int_0^1 4x dx = \\ &= x^2 \Big|_0^1 + i \cdot 2x^2 \Big|_0^1 = 1 + 2i. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 59.2. Вычислить  $\int_L |z| dz$ , где  $L$  — верхняя полуокружность радиуса 1 с центром в начале координат (рис. 129).

Решение:

Параметрическое уравнение заданной окружности:

$$z = \cos \varphi; \quad y = \sin \varphi, \quad (0 \leq \varphi \leq \pi).$$

Следовательно,  $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ ,  $dz = (-\sin \varphi + i \cos \varphi) d\varphi$ ,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1.$$

Таким образом,

$$\int_{AB} |z| dz = \int_0^{\pi} (-\sin \varphi + i \cos \varphi) d\varphi = \cos \varphi \Big|_0^{\pi} + i \sin \varphi \Big|_0^{\pi} = -1 - 1 = -2.$$

Если контур интегрирования замкнутый, то, как и для криволинейных интегралов, положительным направлением обхода принято считать такое направление, при интегрировании по которому область, лежащая внутри контура, находится слева, при изменении направления обхода знак интеграла меняется (см. лекцию 57).

ПРИМЕР 59.3. Вычислить интеграл  $\oint_L \frac{dz}{z}$  (рис. 130).

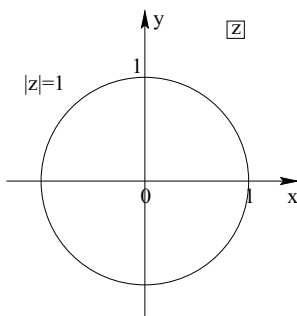


Рис. 130. К примеру 59.3

**Решение:** Представим  $z$  в показательной форме  $z = |z|e^{i\varphi} = e^{i\varphi}$  (см. лекцию 33),  $dz = ie^{i\varphi}d\varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ). Следовательно,

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\varphi}d\varphi}{e^{i\varphi}} = i\varphi \Big|_0^{2\pi} = 2\pi i.$$

## 59.2. Теорема Коши для односвязной области

**ТЕОРЕМА 59.1.** Теорема Коши для односвязной области.

Если функция  $f(z) = u(x; y) + iv(x; y)$  является аналитической в односвязной области  $S$ , то интеграл  $\oint_L f(z)dz$  по любому замкнутому

контур, принадлежащему этой области равен нулю, а  $\int_{L_{AB}} f(z)dz$  не зависит от вида кривой  $L$ , а зависит только от начальной и конечной точек пути интегрирования  $z_A$  и  $z_B$ .

**Доказательство:** В соответствии с формулой (59.2)  $\operatorname{Re} \int_L f(z)dz = \int_L udx - vdy$ ,  $\operatorname{Im} \int_L f(z)dz = \int_L vdx + udy$ . Как нам известно, для того, чтобы криволинейный интеграл  $\int_{L_{AB}} Pdx + Qdy$  не зависел от пути интегрирования  $L$ , и, соответственно, по замкнутому контуру был равен нулю необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (57.8)  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ .

Для интеграла

$$\int_L udx - vdy : P = u, Q = -v \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x}; \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

для интеграла

$$\int_L vdx + udy : P = v, Q = u \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

По условию теоремы функция  $f(z) = u + iv$  аналитическая, т.е. для неё выполняются условия Коши-Римана (42.12)  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ;  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$  и, следовательно, условия (57.8) выполнены. Таким образом, действительная и мнимая части интеграла  $\int_L f(z)dz$  не зависят от пути интегрирования, а по замкнутому контуру они равны нулю. Следовательно, и сам интеграл  $\int_L f(z)dz$  обладает этими свойствами и, в частности, имеет место формула

$$\oint_L f(z)dz = 0. \quad (59.3)$$

Перейдем теперь к рассмотрению свойств интеграла от аналитической функции в многосвязных областях. В лекции 35 дано определение односвязной области. Дадим теперь определение  $n$ -связной области.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 59.2.**  *$n$ -связной областью называется область, граница которой состоит из  $n$  отдельных, не связанных между собой участков.*

Пусть функция  $f(z)$  является аналитической в  $3^x$  связной области  $S$ , граница которой состоит из замкнутых контуров  $L_0, L_1, L_2$  (рис. 131).

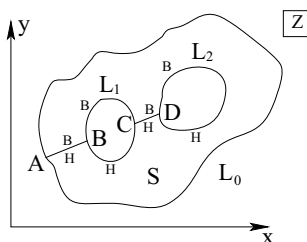


Рис. 131. Пример  $3^x$  связной области

Сделав разрезы от точки  $A \in L_0$  до точки  $B \in L_1$  и от точки  $C \in L_1$  до точки  $D \in L_2$  мы получим односвязную область, ограниченную непрерывной кривой

$$L = A_n L_0 A_n B_n L_1 B_n C_n D_n L_2 D_n C_n L_1 B_n A_n,$$

в которой функция  $f(z)$  аналитична. Выше индексами «н» и «в» мы обозначали, соответственно, нижний и верхний края разреза. Согласно теореме 59.2

$$\oint_L f(z) dz = \int_{A_n L_0 A_n} + \int_{A_n B_n} + \int_{B_n L_1 B_n} + \int_{C_n D_n} + \int_{D_n L_2 D_n} + \\ + \int_{D_n C_n} + \int_{C_n L_1 B_n} + \int_{B_n A_n} = 0.$$

По свойствам интеграла

$$\int_{A_n B_n} = - \int_{B_n A_n}, \quad \int_{C_n D_n} = - \int_{D_n C_n}, \quad \int_{B_n L_1 B_n} + \int_{C_n L_1 B_n} = - \oint_{L_1} f(z) dz - \text{по} \\ \text{часовой стрелке}, \quad \int_{D_n L_2 D_n} = \oint_{L_2} f(z) dz, \quad \int_{A_n L_0 A_n} = \oint_{L_0} f(z) dz.$$

Таким образом, мы имеем положительный обход против часовой стрелки

$$\oint_{L_0} f(z)dz = \oint_{L_1} f(z)dz + \oint_{L_2} f(z)dz.$$

В случае  $n$  внутренних контуров мы получим формулу

$$\oint_{L_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^n \oint_{L_k} f(z)dz \quad (59.4)$$

и докажем следующую теорему.

**ТЕОРЕМА 59.2.** *Теорема Коши для многосвязной области. Если функция  $f(z)$  является аналитической в многосвязной области  $S$ , то интеграл по внешнему контуру  $L_0$  равен сумме интегралов по внутренним контурам  $L_k$ , при этом все они проходятся против часовой стрелки.*

Если среди внутренних границ имеются разрезы или изолированные «выколотые» точки, их следует охватить замкнутыми контурами, внутри которых нет других особых точек.

**ПРИМЕР 59.4.** *Вычислить интеграл  $\oint_L (z-a)^m dz$ , где  $L$  — замкнутый контур, а  $m$  — целое число.*

**Решение:** Если точка  $a$  лежит вне контура  $L$  подынтегральная функция  $(z-a)^m$  является аналитической внутри  $L$ , при любом  $m$  и, следовательно,  $\oint_L (z-a)^m dz = 0$ .

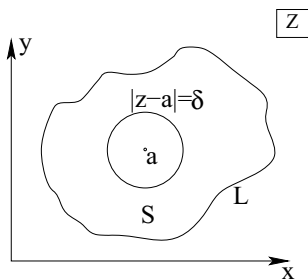


Рис. 132.  $\delta$ -окрестности особой точки  $a$ , расположенной внутри контура  $L$

Пусть теперь точка  $a$  расположена внутри контура  $L$ . Тогда, если  $m \geq 0$  подынтегральная функция является аналитической во всей плоскости  $\boxed{\mathbb{Z}}$  и, следовательно  $\oint_L (z-a)^m dz = 0$ . Рассмотрим теперь случай, когда  $m < -1$ , тогда точка  $a$  является особой точкой находящейся внутри  $L$ . Рассмотрим некоторую малую  $\delta$ -окрестность точки  $a$ , целиком расположенную внутри  $L$  (рис. 132), на границе этой  $\delta$ -окрестности  $C : |z-a| = \delta$ , а  $z = a + \delta e^{i\varphi}$ .

Функция  $(z-a)^m$  является аналитической в  $2^x$  связной области  $S$ , расположенной между  $L$  и  $C$

Следовательно, согласно теореме 59.2

$$\begin{aligned} \oint_L (z-a)^m dz &= \oint_C (z-a)^m dz = \left| \begin{array}{l} m \neq -1 \\ k = -m > 0 \\ z-a = \delta e^{i\varphi} \\ dz = i\delta e^{i\varphi} d\varphi \end{array} \right| = \\ &= \oint_{|z-a|=\delta} \frac{dz}{(z-a)^k} = \int_0^{2\pi} \frac{i\delta e^{i\varphi} d\varphi}{\delta^k e^{ik\varphi}} = i\delta^{1-k} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{e^{i(k-1)\varphi}} = \\ &= i\delta^{1-k} \left. \frac{e^{-i(k-1)\varphi}}{(1-k)^i} \right|_0^{2\pi} = 0, \end{aligned}$$

т.к.  $e^z$  является периодической функцией с  $T = 2\pi i$ .

Пусть теперь  $m = -1$ , тогда по аналогии с примером (59.3)

$$\oint_{|z-a|=\delta} \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{i\delta e^{i\varphi} d\varphi}{\delta e^{i\varphi}} = i\varphi \Big|_0^{2\pi} = 2\pi i.$$

Итак, окончательно, имеем

$$\oint_L (z-a)^m dz = \begin{cases} 2\pi i, & m = -1, \\ 0, & m \neq -1. \end{cases} \quad (59.5)$$

### 59.3. Вычет функции $f(z)$ в изолированной особой точке

Пусть  $a$  – единственная изолированная особая точка, находящаяся внутри контура  $L$ .



ОПРЕДЕЛЕНИЕ 59.3. *Вычетом функции  $f(z)$  в изолированной особой точке  $a$  называют интеграл  $\frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z)dz$ , для которого принято обозначение*

$$\operatorname{Res} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z)dz. \quad (59.6)$$

Разложим функцию  $f(z)$  в окрестности точки  $a$  в ряд Лорана (42.4)

$$f(z) = \dots + \frac{C_{-1}}{(z-a)^n} + \dots + \frac{C_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{C_{-1}}{z-a} + \\ + C_0 + C_1(z-a) + \dots + C_n(z-a)^n + \dots$$

Пусть данный ряд сходится в области  $0 < |z-a| < R$ , т.е. во всех точках, расположенных внутри окружности радиуса  $R$  с центром в точке  $a$ , кроме самой точки  $a$ . Пусть контур  $L$  лежит внутри кольца  $0 < |z-a| < R$ . Проинтегрируем почленно ряд (42.4) по этому контуру

$$\oint_L f(z)dz = \sum_{m=2}^{+\infty} C_{-m} \oint_L \frac{dz}{(z-a)^m} + C_{-1} \oint_L \frac{dz}{z-a} + \sum_{k=0}^{+\infty} C_k \oint_L (z-a)^k dz.$$

На основании разобранных примеров (59.4) все интегралы справа в полученном выражении, кроме  $\oint_L \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$ , равны нулю и, следовательно,  $\oint_L f(z)dz = C_{-1}2\pi i$ , откуда следует на основании формулы (59.6) вычет в изолированной особой точке  $a$  также равен коэффициенту  $C_{-1}$  в разложении функции  $f(z)$  в ряд Лорана в окрестности этой точки.

$$\operatorname{Res} f(a) = C_{-1}. \quad (59.7)$$

В лекции 42 дана классификация особых точек функции  $f(z)$ , согласно которой особая точка является устранимой если соответствующий ряд Лорана не содержит главной части, полюсом  $n$ -го порядка – если главная часть содержит  $n$  членов, и существенно особой точкой – если бесконечное число членов. На основании сказанного, очевидно, что *вычет функции в устранимой особой точке равен нулю.*

Если точка  $a$  является полюсом  $n$ -го порядка функции  $f(z)$ , то разложение этой функции в ряд Лорана имеет вид:

$$f(z) = \frac{C_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{C_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \dots + \frac{C_{-1}}{z-a} + \sum_{k=0}^{+\infty} C_k(z-a)^k.$$

Умножив обе части этого выражения на  $(z - a)^n$  получим

$$(z - a)^n f(z) = C_{-n} + C_{-n+1}(z - a) + \dots + C_{-1}(z - a)^{n-1} + \\ + \sum_{k=0}^{+\infty} C_k (z - a)^{k+n}.$$

Продифференцируем обе части последнего выражения  $n - 1$  раз

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z - a)^n f(z)) = C_{-1}(n - 1)! + C_0 n(n - 1) \dots \\ \dots 2(z - a) + C_1(n + 1)n \dots 3(z - a)^2 + \dots$$

Переходя к пределу при  $z \rightarrow a$  получим

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z - a)^n f(z)) = C_{-1}(n - 1)! = (n - 1)! \operatorname{Res} f(a).$$

Откуда, окончательно, находим, что вычет функции  $f(z)$  в полюсе  $n$ -го порядка

$$\operatorname{Res} f(a) = \frac{1}{(n - 1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z - a)^n f(z)). \quad (59.8)$$

**ПРИМЕР 59.5.** Найти вычет функции  $f(z) = \frac{z^5}{(z + 1)^4}$ .

**Решение:** Функция  $\frac{1}{f(z)} = \frac{(z+1)^4}{z^5}$  имеет в точке  $z = -1$  нуль 4-го порядка, следовательно, функция  $f(z) = \frac{z^5}{(z+1)^4}$  имеет в этой точке полюс 4-го порядка (см. лекцию 42). По формуле (59.8)

$$\operatorname{Res} \frac{z^5}{(z + 1)^4} \Big|_{z=-1} = \frac{1}{3!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d^3}{dz^3} \left( (z + 1)^4 \frac{z^5}{(z + 1)^4} \right) = \\ = \frac{1}{3!} \lim_{z \rightarrow -1} (z^5)^{III} = \frac{1}{3!} \lim_{z \rightarrow -1} 5 \cdot 4 \cdot 3z^2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$$

Если точка  $a$  является полюсом 1-го порядка или иначе простым полюсом, то с учётом того, что  $0! = 1$  и  $f^0(z) = f(z)$ , из (59.8) при  $n = 1$  получаем

$$\operatorname{Res} f(a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) f(z). \quad (59.9)$$

**ПРИМЕР 59.6.** Найти вычеты в особых точках функции  $f(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1}$ .

**Решение:**  $\frac{1}{f(z)} = \frac{z^2-1}{z^2} = \frac{(z-1)(z+1)}{z^2}$  имеем два простых нуля  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = -1$ . Следовательно функция  $f(z) = \frac{z^2-1}{z^2}$  имеет в этих точках простые полюса, которые находим по формуле (59.9)

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \frac{z^2}{z^2-1} \Big|_{z=1} &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{z^2}{z^2-1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2}{z+1} = \frac{1}{2}, \\ \operatorname{Res} \frac{z^2}{z^2-1} \Big|_{z=-1} &= \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{z^2}{z^2-1} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z^2}{z-1} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Если функция  $f(z)$  имеет вид  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ , где  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  аналитические функции в точке  $a$ , причём  $\varphi(a) \neq 0$ , а точка  $a$  является простым нулём для знаменателя  $\psi(z)$ , т.е.  $\psi(a) = 0$ , но  $\psi'(a) \neq 0$ , то из формулы (59.8)

$$\operatorname{Res} f(a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \varphi(a) \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{\frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Таким образом, *вычет в простом полюсе  $a$  функции  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ ,  $\varphi(a) \neq 0$ ,  $\psi(a) = 0$ ,  $\psi'(a) \neq 0$  определяется по формуле*

$$\operatorname{Res} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \Big|_{z=a} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \quad (59.10)$$

**ПРИМЕР 59.7.** *Найти вычеты в особых точках функции из примера 59.6.*

**Решение:**  $f(z) = \frac{z^2}{z^2-1}$  имеет два простых полюса  $a_1 = 1$  и  $a_2 = -1$ . При  $\varphi(z) = z^2$  в этих точках не обращается в нуль. По (59.10) находим

$$\operatorname{Res} \frac{z^2}{z^2-1} \Big|_{z=1} = \frac{z^2}{2z} \Big|_{z=1} = \frac{1}{2}; \quad \operatorname{Res} \frac{z^2}{z^2-1} \Big|_{z=-1} = \frac{z^2}{2z} \Big|_{z=-1} = -\frac{1}{2}.$$

Если точка  $a$  является существенной особой точкой функции  $f(z)$ , то только в этом случае приходится раскладывать функцию  $f(z)$  в ряд Лорана в окрестности этой точки и находить коэффициент  $C_{-1}$ .

**ПРИМЕР 59.8.** *Найти вычет функции  $f(z) = e^{1/z}$  в точке  $z = 0$ .*

**Решение:** Точка  $z = 0$  является существенной особой точкой функции  $f(z) = e^{1/z}$ . Ряд Лорана получен для неё в примере 42.3:

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots + \frac{1}{n!z^n} + \dots$$

Следовательно,  $C_{-1} = 1$  и  $\operatorname{Res} e^{1/z}|_{z=0} = 1$ .

#### 59.4. Применение теории вычетов к вычислению интегралов в комплексной области

**ТЕОРЕМА 59.3.** *Основная теорема о вычетах. Если функция  $f(z)$  аналитическая в ограниченной замкнутой области  $\bar{S}$  (см. лекцию 35), границей которой является контур  $L$ , за исключением конечного числа изолированных особых точек  $a_k \in S$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , то интеграл от  $L$  в положительном направлении равен сумме вычетов  $f(z)$  в этих особых точках, умноженной на  $2\pi i$*

$$\oint_L f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(a_k). \quad (59.11)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о:** Окружим каждую особую точку  $a_k$  окружностями  $\gamma_k$ , не содержащими внутри себя других особых точек и не пересекающимися друг с другом (рис. 133).

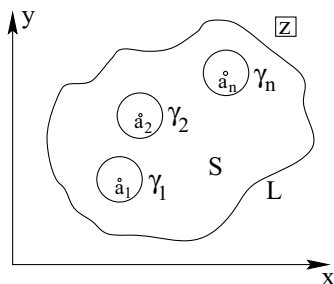


Рис. 133. К доказательству основной теоремы о вычетах

В многосвязной области, ограниченной контурами  $L, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  функция  $f(z)$  будет аналитической и, следовательно, по теореме 59.2

$$\oint_L f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_k} f(z) dz,$$

но по (59.6)

$$\oint_{\gamma_k} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(a_k),$$

откуда следует формула (59.11) и, следовательно, доказательство теоремы 59.3.

ПРИМЕР 59.9. Вычислить  $\oint_{|z|=3/2} \frac{e^z dz}{z^4 + 3z^2 - 4}$ .

Решение: Функция  $f(z) = \frac{e^z dz}{z^4 + 3z^2 - 4}$  имеет особые точки, в которых знаменатель  $z^4 + 3z^2 - 4 = 0$ . Разложив  $z^4 + 3z^2 - 4 = 0$  на множители  $z^4 + 3z^2 - 4 = (z-1)(z+1)(z-2i)(z+2i)$ , находим особые точки  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = -1$ ,  $a_3 = 2i$ ,  $a_4 = -2i$ , которые являются простыми полюсами. Внутри окружности  $|z| = 3/2$  находятся лишь два из них  $a_1$  и  $a_2$ , а  $a_3$  и  $a_4$  лежат вне её (рис. 134).

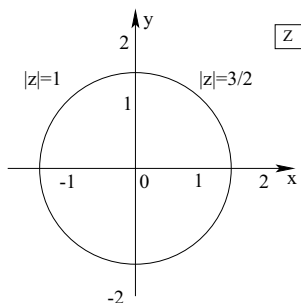


Рис. 134. К примеру 59.9

Таким образом,

$$\oint_{|z|=3/2} \frac{e^z dz}{z^4 + 3z^2 - 4} = 2\pi i \left( \operatorname{Res} \frac{e^z}{z^4 + 3z^2 - 4} \Big|_{z=1} + \operatorname{Res} \frac{e^z}{z^4 + 3z^2 - 4} \Big|_{z=-1} \right).$$

Для нахождения вычетов в простых полюсах  $z = 1$  и  $z = -1$  нашей функции на основании (59.10) имеем

$$\operatorname{Res} \frac{e^z}{z^4 + 3z^2 - 4} \Big|_{z=a} = \frac{e^a}{4a^3 + 6a},$$

откуда, подставляя  $a = 1$  и  $a = -1$ , получаем

$$\operatorname{Res} \frac{e^z}{z^4 + 3z^2 - 4} \Big|_{z=1} = \frac{e}{10}; \quad \operatorname{Res} \frac{e^z}{z^4 + 3z^2 - 4} \Big|_{z=-1} = -\frac{e^{-1}}{10} = -\frac{1}{10e}.$$

Следовательно,

$$\oint_{|z|=3/2} \frac{e^z dz}{z^4 + 3z^2 - 4} = 2\pi i \left( \frac{e}{10} - \frac{1}{10e} \right) = \frac{\pi i}{5e} (e^2 - 1).$$

### 59.5. Применение теории вычетов к вычислению определённых интегралов и несобственных интегралов с бесконечными пределами

Для нахождения определённых интегралов оказывается возможным сделать замену, переводящую их в комплексную область и затем применить основную теорему о вычетах.

**ПРИМЕР 59.10.** Найти интеграл  $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \cos \varphi} \quad (a > 1).$

**Решение:** Положим  $e^{i\varphi} = z$ ,  $dz = ie^{i\varphi} d\varphi = iz d\varphi$ ,  $\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}$ . Если  $\varphi$  меняется от 0 до  $2\pi$ , то  $z$  проходит окружность единичного радиуса  $|z| = 1$ . Таким образом

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \cos \varphi} &= \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz(a + \frac{z^2+1}{2z})} = \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} = \\ &= \left| \begin{array}{l} z^2 + 2az + 1 = 0, \\ z_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}, \operatorname{Res} \frac{1}{z^2 + 2az + 1} \Big|_{z_1} = \frac{1}{2z + 2a} \Big|_{z_1} = \\ z_1 \in |z| < 1, \\ z_2 \in |z| > 1, \end{array} \right. = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}} \Big|_{z_1} = \\ &= 2\pi i \frac{2}{i} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}. \end{aligned}$$

Однако значительно больший интерес представляет применение теории вычетов к несобственным интегралам с бесконечными пределами. Это оказывается возможным, когда при переходе в комплексную область соответствующий интеграл по полуокружности радиуса  $N$  (рис. 135) стремится к нулю при  $N \rightarrow +\infty$ .

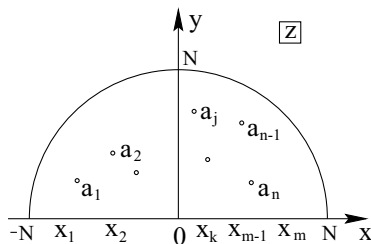


Рис. 135. К применению теории вычетов к вычислению несобственных интегралов с бесконечными пределами

Ниже мы сформулируем две теоремы и приведем примеры на их применение.

**ТЕОРЕМА 59.4.** Если функция  $f(z)$  является аналитической в верхней полуплоскости  $\text{Im}z \geq 0$  за исключением особых точек  $a_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $\text{Im}a_j > 0$ , кроме того, для  $f(z)$  бесконечно удалённая точка является нулём порядка не ниже второго, то имеет место формула

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}f(a_j). \quad (59.12)$$

**ПРИМЕР 59.11.** Вычислить  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$ .

**Решение:** Для функции  $f(z) = \frac{z^2+1}{z^4+1}$  бесконечность является нулём 2-го порядка. В верхней полуплоскости имеется два простых полюса (см. пример 33.6 лекции 33)

$$\begin{aligned} a_{1,2} &= \frac{\sqrt{2}}{2}(i \pm 1); \quad \text{Res} \frac{z^2 + 1}{z^4 + 1} \Big|_{a_{1,2}} = \frac{a_{1,2}^2 + 1}{4a_{1,2}^3} = \frac{\frac{1}{2}(i^2 \pm 2i + 1) + 1}{\frac{4}{2\sqrt{2}}(i^3 \pm 3i^2 + 3i \pm 1)} = \\ &= \frac{\pm i + 1}{\frac{4}{\sqrt{2}}(i \mp 1)} = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{1 \pm i}{i \mp 1} \cdot \frac{i \pm 1}{i \pm 1} = \frac{\sqrt{2}(i \pm i^2 \pm 1 + i)}{4(i^2 - 1)} = -\frac{\sqrt{2}i}{4}. \end{aligned}$$

Таким образом, в соответствии с (59.12)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx = 2\pi i \left( -\frac{\sqrt{2}}{4}i - \frac{\sqrt{2}}{4}i \right) = 2\pi i \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \pi\sqrt{2}.$$

С помощью следующей теоремы мы найдем некоторые не выражающиеся в элементарных функциях интегралы.

**ТЕОРЕМА 59.5.** Если функция  $f(z) = g(z)e^{i\alpha z}$ , где  $\alpha > 0$ ,  $g(z) \rightarrow 0$  при  $|z| \rightarrow +\infty$ , является аналитической в верхней полуплоскости  $\text{Im} z \geq 0$  за исключением особых точек  $a_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  ( $\text{Im} a_j > 0$ ) и простых полюсов  $x_k$ ,  $k = 1, \dots, m$  расположенных на оси  $x$  (рис. 135), то имеет место формула

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \left( \sum_{j=1}^n \text{Res} f(a_j) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \text{Res} f(x_k) \right). \quad (59.13)$$

**ПРИМЕР 59.12.** Найми  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  и  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ .

**Решение:** Это так называемые «неберущиеся» интегралы (см. лекцию 43). На основании формулы Эйлера (33.23)

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \text{ и } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Функция  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$  удовлетворяет всем условиям теоремы 59.5, для неё  $\alpha = 1$ ,  $g(z) = \frac{1}{z} \rightarrow 0$  при  $|z| \rightarrow +\infty$ . Она имеет один простой полюс в точке  $z = 0$  и, следовательно,  $\text{Res} \frac{e^{iz}}{z} \Big|_{z=0} = \frac{e^{iz}}{1} \Big|_{z=0} = e^0 = 1$ .

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 2\pi i \frac{1}{2} \text{Res} \frac{e^{iz}}{z} \Big|_{z=0} = \pi i.$$

Откуда, приравнявая действительные и мнимые части, получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx = 0, \quad \text{а} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$



ПРИМЕР 59.13. Найдите  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^4 - 1} dx$  и  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4 - 1} dx$ .

Решение:

Аналогично примеру 59.12 вводим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^4 - 1} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4 - 1} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^4 - 1} dx.$$

Функция  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^4 - 1}$  удовлетворяет всем условиям теоремы (59.5), для неё  $\alpha = 1$ ,  $g(z) = \frac{1}{z^4 - 1} \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow +\infty$  очевидно, что  $z^4 - 1 = (z - 1)(z + 1)(z^2 + 1)$  имеет два простых полюса на оси  $x$ :  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = -1$  и ещё один простой полюс  $a_3 = i$  в верхней полуплоскости. Находим в них вычеты используя формулу (59.10)

$$\operatorname{Res} \frac{e^{iz}}{z^4 - 1} \Big|_{z=a_j} = \frac{e^{ia_j}}{4a_j^3}; \operatorname{Res} f(1) = \frac{e^i}{4} = \frac{\cos 1 + i \sin 1}{4};$$

$$\operatorname{Res} f(-1) = -\frac{e^{-i}}{4} = \frac{-\cos 1 + i \sin 1}{4}; \operatorname{Res} f(i) = \frac{e^{-1}}{-4i} = \frac{i}{4e}.$$

Тогда по формуле (59.10) имеем

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4 - 1} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^4 - 1} dx = \\ & = 2\pi i \left( \operatorname{Res} f(i) + \frac{1}{2} (\operatorname{Res} f(1) + \operatorname{Res} f(-1)) \right) = \\ & = 2\pi i \left( \frac{i}{4e} + \frac{\cos 1 + i \sin 1 - \cos 1 + i \sin 1}{2} \right) = -\frac{\pi}{2e} - 2\pi \sin 1. \end{aligned}$$

Откуда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4 - 1} dx = -\pi \left( \frac{1}{2e} + 2 \sin 1 \right), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^4 - 1} dx = 0.$$

## Практическое занятие 59. Контрольная работа по материалам лекций 52–58

Рассмотрим один из возможных вариантов контрольной работы на кратные и криволинейные интегралы, элементы теории векторного поля.

ПРИМЕР 59.1. Вычислить двойной интеграл  $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{3-x} 2y(x+2y^2)dy$ .

Изменить порядок интегрирования и получить тот же результат.

ПРИМЕР 59.2. Найти центр тяжести тела, ограниченного поверхностями:  $z = x^2$ ,  $x = y^2$ ,  $x = 1$ ,  $z = 0$ .

ПРИМЕР 59.3. Вычислить  $\oint_{ABCA} (3xy + x^2)dx + 8x^2dy$ , где точки

$A(0; 1)$ ;  $B(2; 2)$ ;  $C(0; 3)$  являются вершинами треугольника, непосредственно и с помощью теоремы Грина.

ПРИМЕР 59.4. Вычислить поток векторного поля  $\vec{F} = (x + y; x + y + z; 2z - y)$  через поверхность тетраэдра с вершинами  $O(0; 0; 0)$ ;  $A(-3; 0; 0)$ ;  $B(0; 2; 0)$ ;  $C(0; 0; 3)$  непосредственно и с помощью теоремы Остроградского-Гаусса.

ПРИМЕР 59.5. Проверить является ли поле  $\vec{F} = (e^x \sin y; e^x \cos y; 1)$  потенциальным и, если да, найти его потенциал.

### Решение примеров варианта контрольной работы

ПРИМЕР 59.1.

Р е ш е н и е: Интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{3-x} 2y(x+2y^2)dy &= \int_0^1 (y^2x + y^4) \Big|_{\sqrt{1-x^2}}^{3-x} dx = \\ &= \int_0^1 ((3-x)^2x + (3-x)^4 - x(1-x^2) - (1-x^2)^2) dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 ((9 - 6x + x^2)(9 - 5x + x^2) - x + x^3 - 1 + 2x^2 - x^4) dx = \\
&= \int_0^1 (81 - 54x + 9x^2 - 45x + 30x^2 - 5x^3 + 9x^2 - 6x^3 + x^4 - x + x^3 - 1 + \\
&\quad + 2x^2 - x^4) dx = \int_0^1 (80 - 100x + 50x^2 - 10x^3) dx = \\
&= \left( 80x - 50x^2 + \frac{50}{3}x^3 - \frac{10}{4}x^4 \right) \Big|_0^1 = 30 + \frac{50}{3} - \frac{5}{2} = \frac{265}{6}.
\end{aligned}$$

Чтобы изменить порядок интегрирования вначале найдем границы области интегрирования и построим её. Границами области интегрирования являются прямые  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 3 - x$  и окружность  $y^2 = 1 - x^2$ . Область интегрирования  $ABCE$  представлена на рис. 136.

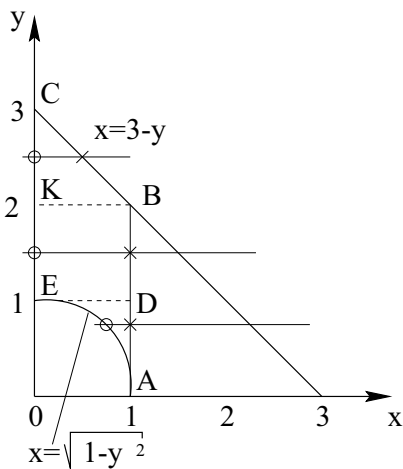


Рис. 136. К примеру 59.1

Если мы изменим порядок интегрирования, то необходимо область  $ABCE$  разбить на три области:  $ADE$ ,  $EDKB$ ,  $KBC$ . Таким образом,

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{3-x} 2y(x+2y^2)dy = \int_2^3 dy \int_0^{3-y} 2y(x+2y^2)dx + \\
 & + \int_1^2 dy \int_0^1 2y(x+2y^2)dx + \int_0^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^1 2y(x+2y^2)dx = \\
 & = \int_2^3 (yx^2 + 4y^3x) \Big|_0^{3-y} dy + \int_1^2 (yx^2 + 4y^3x) \Big|_0^1 dy + \\
 & + \int_0^1 (yx^2 + 4y^3x) \Big|_{\sqrt{1-y^2}}^1 dy = \int_2^3 (y(9-6y+y^2) + 4y^3(3-y)) dy + \\
 & + \int_1^2 (y + 4y^3) dy + \int_0^1 (y + 4y^3 - y(1-y^2) - 4y^3\sqrt{1-y^2}) dy = \\
 & = \int_2^3 (9y - 6y^2 + 13y^3 - 4y^4) dy + \int_1^2 (y + 4y^3) dy + \\
 & + \int_0^1 (5y^3 - 4y^3\sqrt{1-y^2}) dy = \left( \frac{9y^2}{2} - 2y^3 + \frac{13y^4}{4} - \frac{4y^5}{5} \right) \Big|_2^3 + \\
 & + \left( \frac{y^2}{2} + y^4 \right) \Big|_1^2 + \left( \frac{5}{4}y^4 - \frac{4\sqrt{(1-y^2)^5}}{5} + \frac{4\sqrt{(1-y^2)^3}}{3} \right) \Big|_0^1 = \\
 & = \frac{81}{2} - 54 + \frac{1053}{4} - \frac{972}{5} - 18 + 16 - 52 + \\
 & + \frac{128}{5} + 2 + 16 - \frac{1}{2} - 1 + \frac{5}{4} + \frac{4}{5} - \frac{4}{3} = \frac{265}{6}.
 \end{aligned}$$

## ПРИМЕР 59.2.

Р е ш е н и е: Границами тела  $OABCD$  являются две параболические цилиндрические поверхности:  $OCD - z = x^2$  и  $OAD, OBC - x = y^2$  и две плоскости  $x = 1$  и  $z = 0$  (рис. 137,а).

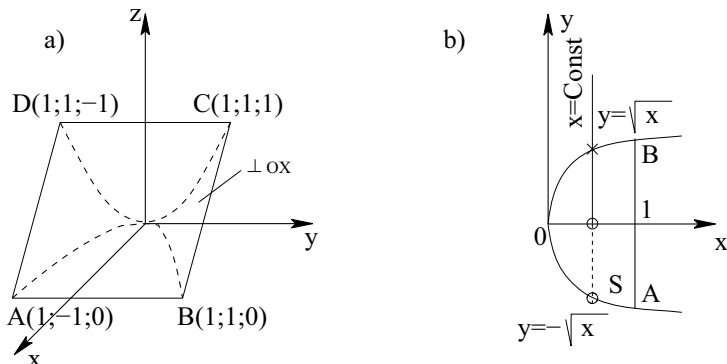


Рис. 137. К примеру 59.2

Прежде всего найдем объём тела (область интегрирования изображена на рис. 137,б)

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_S z ds = \iint_S x^2 dx dy = 2 \int_0^1 x^2 dx \int_0^{\sqrt{x}} dy = 2 \int_0^1 x^2 y \Big|_0^{\sqrt{x}} dx = \\
 &= 2 \int_0^1 x^2 \sqrt{x} dx = 2 \cdot \frac{2}{7} x^{7/2} \Big|_0^1 = \frac{4}{7}.
 \end{aligned}$$

Очевидно, что  $y_{ц} = 0$ . Найдем теперь  $x_{ц}$  по формуле (56.12) и  $z_{ц}$  по (56.13)

$$\begin{aligned}
 x_{ц} &= \frac{7}{4} \iiint_V x dv = \frac{7}{4} \int_0^1 x dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dy \int_0^{x^2} dz = \frac{7}{4} \int_0^1 x dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} z \Big|_0^{x^2} dy = \\
 &= \frac{7}{4} \int_0^1 x^3 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dy = \frac{7}{4} \int_0^1 x^3 y \Big|_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dx = \frac{7}{4} \int_0^1 2x^3 \sqrt{x} dx =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{9} x^{\frac{9}{2}} \Big|_0^1 = \frac{7}{9};$$

$$z_{\text{и}} = \frac{7}{4} \iiint_V z dv = \frac{7}{4} \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dy \int_0^{x^2} z dz = \frac{7}{4} \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{z^2}{2} \Big|_0^{x^2} dy =$$

$$= \frac{7}{8} \int_0^1 x^4 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dy = \frac{7}{8} \int_0^1 x^4 y \Big|_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dx = \frac{7}{4} \int_0^1 x^4 \sqrt{x} dx =$$

$$= \frac{7}{4} \frac{2}{11} x^{\frac{11}{2}} \Big|_0^1 = \frac{7}{22}.$$

ПРИМЕР 59.3.

Р е ш е н и е: Согласно формуле Грина  $\oint_L Pdx + Qdy =$   
 $= \iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$

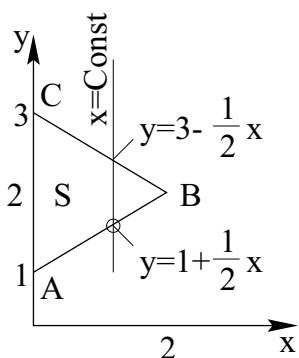


Рис. 138. К примеру 59.3

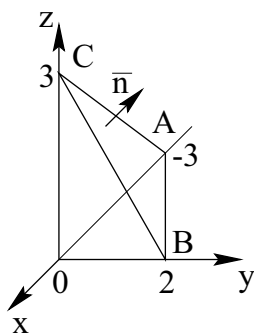


Рис. 139. К примеру 59.4

В нашем случае  $P = 3xy + x^2$ ,  $Q = 8x^2$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 16x - 3x = 13x$ .  
И, следовательно (рис. 138),

$$\begin{aligned} \oint_{ABCA} (3xy + x^2)dx + 8x^2dy &= \iint_S 13xdxdy = 13 \int_0^2 xdx \int_{1+\frac{1}{2}x}^{3-\frac{1}{2}x} dy = \\ &= 13 \int_0^2 x \left( 3 - \frac{x}{2} - 1 - \frac{x}{2} \right) dx = 13 \int_0^2 (2x - x^2)dx = \\ &= 13 \left( x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = 13 \left( 4 - \frac{8}{3} \right) = \frac{52}{3}. \end{aligned}$$

С другой стороны, учитывая, что на  $AB$ :  $y = 1 + \frac{1}{2}x$ ,  $dy = \frac{1}{2}dx$ , на  $BC$ :  $y = 3 - \frac{1}{2}x$ ,  $dy = -\frac{1}{2}dx$ , на  $CA$ :  $x = 0$ ,  $dx = 0$ , проведем вычисление криволинейного интеграла следующим образом

$$\begin{aligned} \oint_{ABCA} (3xy + x^2)dx + 8x^2dy &= \int_0^2 \left( 3x \left( 1 + \frac{x}{2} \right) + x^2 + 4x^2 \right) dx + \\ &+ \int_2^0 \left( 3x \left( 3 - \frac{x}{2} \right) + x^2 - 4x^2 \right) dx + \int_3^0 0dy = \int_0^2 (-6x + 11x^2)dx = \\ &= \left( -3x^2 + \frac{11}{3}x^3 \right) \Big|_0^2 = \frac{52}{3}. \end{aligned}$$

#### ПРИМЕР 59.4.

Р е ш е н и е: Объём тетраэдра, изображенного на рис. 139,  
 $V = \frac{1}{6}OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 3$ .

Согласно формуле Остроградского-Гаусса суммарный поток вектора  $\vec{F}$  через грани тетраэдра  $\sigma$

$$\begin{aligned} \Phi_\sigma &= \oiint_\sigma \vec{F} \vec{n} d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \left| \operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial(x+y)}{\partial x} + \frac{\partial(x+y+z)}{\partial y} + \frac{\partial(2z-y)}{\partial z} = 1 + 1 + 2 = 4 \right| = \\ &= 4 \iiint_V dV = 4V = 12. \end{aligned}$$

Значительно сложнее провести непосредственное вычисление потока векторного поля  $\vec{F} = (x+y)\vec{i} + (x+y+z)\vec{j} + (2z-y)\vec{k}$  через грани тетраэдра. Действительно, рассмотрим потоки через грани поверхности  $\sigma = OBC + OBA + OAC + ABC$ :

грань  $OBC$  (рис. 140):

$$x = 0, \vec{n} = \vec{i}, \vec{F}\vec{n} = y, \iint_{OBC} y dy dz = \int_0^2 y dy \int_0^{3-\frac{3}{2}y} dz = \int_0^2 y(3 - \frac{3}{2}y) dy = \left( \frac{3}{2}y^2 - \frac{y^3}{2} \right) \Big|_0^2 = 6 - 4 = 2;$$

грань  $OBA$  (рис. 141):

$$z = 0, \vec{n} = -\vec{k}, \vec{F}\vec{n} = y, \iint_{OBA} y dy dx = \int_0^2 y dy \int_{\frac{3}{2}y-3}^0 dx = \int_0^2 y(3 - \frac{3}{2}y) dy = 2;$$

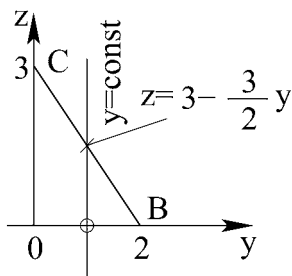


Рис. 140. Грань  $OBC$

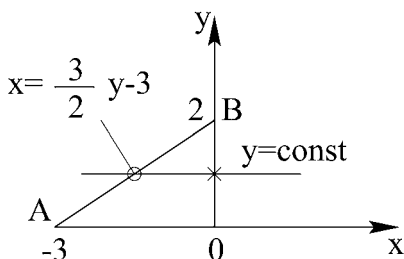


Рис. 141. Грань  $OBA$

грань  $OAC$  (рис. 142):

$$y = 0, \vec{n} = -\vec{j}, \vec{F}\vec{n} = -x - z, \iint_{OAC} (-x - z) dx dz = - \int_{-3}^0 dx \int_0^{x+3} (x+z) dz = - \int_{-3}^0 (xz + \frac{z^2}{2}) \Big|_0^{x+3} dx = \int_{-3}^0 (x^2 + 3x + \frac{1}{2}(x^2 + 6x + 9)) dx = \int_{-3}^0 (\frac{3}{2}x^2 + 6x + \frac{9}{2}) dx = \left( \frac{x^3}{2} + 3x^2 + \frac{9}{2}x \right) \Big|_{-3}^0 = -\frac{27}{2} + 27 - \frac{27}{2} = 0;$$

грань  $ABC$  (рис. 139):

уравнение плоскости  $ABC$   $-\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ , следовательно, нормальный вектор плоскости  $\vec{N} = (-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3})$ ,  $N = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{17}}{6}$ ,



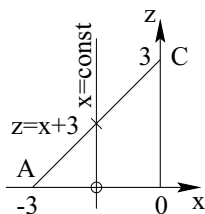


Рис. 142. Грань OAC

единичный вектор нормали  $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{N} = \left(-\frac{2}{\sqrt{17}}; \frac{3}{\sqrt{17}}; \frac{2}{\sqrt{17}}\right)$ ,

$$\vec{F}\vec{n} = -\frac{2}{\sqrt{17}}(x+y) + \frac{3}{\sqrt{17}}(x+y+z) + \frac{2}{\sqrt{17}}(2z-y) = \frac{1}{\sqrt{17}}(x-y+7z) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{на плоскости } ABC \\ z = 3 + x - \frac{3}{2}y \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{17}} \left( x - y + 21 + 7x - \frac{21}{2}y \right) = \frac{1}{\sqrt{17}} \left( 8x - \frac{23}{2}y + 21 \right),$$

$$\iint_{ABC} \frac{1}{\sqrt{17}} \left( 8x - \frac{23}{2}y + 21 \right) d\sigma =$$

$$= \left| dS = dx dy = d\sigma \cdot \cos \gamma = \frac{2}{\sqrt{17}} d\sigma \right| =$$

$$= \iint_{OBA} \left( 4x - \frac{23}{4}y + \frac{21}{2} \right) dx dy = \int_0^2 dy \int_{\frac{3}{2}y-3}^0 \left( 4x - \frac{23}{4}y + \frac{21}{2} \right) dx =$$

$$= \int_0^2 \left( 2x^2 - \frac{23}{4}y + \frac{21}{2}x \right) \Big|_{\frac{3}{2}y-3}^0 dy =$$

$$= \int_0^2 \left( -2 \left( \frac{3}{2}y - 3 \right)^2 + \frac{23}{4}y \left( \frac{3}{2}y - 3 \right) - \frac{21}{2} \left( \frac{3}{2}y - 3 \right) \right) dy =$$

$$= \int_0^2 \left( -\frac{9y^2}{2} + 18y - 18 + \frac{69y^2}{8} - \frac{69}{4}y - \frac{63}{4}y + \frac{63}{2} \right) dy =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^2 \left( \frac{33}{8}y^2 - 15y + \frac{27}{2} \right) dy = \left( \frac{11}{8}y^3 - \frac{15}{2}y^2 + \frac{27}{2}y \right) \Big|_0^2 = \\
 &= 11 - 30 + 27 = 8, \\
 &\oint_{\sigma} \vec{F} \vec{n} d\sigma = 2 + 2 + 0 + 8 = 12.
 \end{aligned}$$

ПРИМЕР 59.5.

**Р е ш е н и е:** Для того чтобы поле  $\vec{F} = \vec{F}(x; y; z)$  было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы  $\text{rot } \vec{F} = 0$  (Теорема 58.3). В нашем случае

$$\begin{aligned}
 \text{rot } \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x \sin y & e^x \cos y & 1 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial 1}{\partial y} - \frac{\partial e^x \cos y}{\partial z} \right) \vec{i} + \\
 &+ \left( -\frac{\partial 1}{\partial x} + \frac{\partial e^x \sin y}{\partial z} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial e^x \cos y}{\partial x} - \frac{\partial e^x \sin y}{\partial y} \right) \vec{k} = \\
 &= 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + (e^x \cos y - e^x \cos y) \vec{k} = 0.
 \end{aligned}$$

При вычислении потенциала по формуле (58.20), в которой мы можем положить  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ , получим

$$\begin{aligned}
 V(x; y; z) &= \int_0^x 0 d\xi + \int_0^y e^x \cos \eta d\eta + \int_0^z d\zeta + C = \\
 &= e^x \sin \eta \Big|_0^y + \zeta \Big|_0^z + C = e^x \sin y + z + C.
 \end{aligned}$$

Проверка:  $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial(e^x \sin y + z + C)}{\partial x} = e^x \sin y = F_x,$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial(e^x \sin y + z + C)}{\partial y} = e^x \cos y = F_y;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial(e^x \sin y + z + C)}{\partial z} = 1 = F_z.$$

## Самостоятельная работа

ПРИМЕР 59.6. Вычислить  $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} xy dy$ . Изменить порядок интегрирования и получить тот же результат.

ПРИМЕР 59.7. Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями:  $x^2 + y^2 = z + 1$ ,  $z = 3$ .

ПРИМЕР 59.8. Вычислить  $\oint_{ABCA} 2xy dx + (x^2 - 3xy) dy$ , где  $A(1; 1)$ ,  $B(2; 2)$ ,  $C(3; 1)$  – вершины треугольника  $ABC$ , непосредственно и с помощью теоремы Грина.

ПРИМЕР 59.9. Вычислить поток вектора  $\vec{F} = (2z; x - y + z; 3y + 2z)$  через поверхность тетраэдра с вершинами  $O(0; 0; 0)$ ,  $A(-4/3; 0; 0)$ ,  $B(0; 2; 0)$ ,  $C(0; 0; 4)$  непосредственно и с помощью теоремы Остроградского-Гаусса.

ПРИМЕР 59.10. Проверить, является ли векторное поле  $\vec{F} = (2xz + y^2; 2xy + z^2; 2yz + x^2)$  потенциальным и, если да, найти его потенциал.

## ОТВЕТЫ

**35.5.** Множество точек плоскости  $Oxy$ , не принадлежащих окружности  $x^2 + y^2 = 4$ . **35.6.** Множество точек плоскости  $Oxy$ , не принадлежащих окружности  $x^2 + y^2 = 3$ . **35.7.** Внешность круга  $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$ . **35.8.** Внешность круга  $(x+3)^2 + y^2 = 1$ . **35.9.** Внутренность эллипса и эллипс  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ . **35.10.**  $z \leq x^2 + 9y^2 + 18y + 9$ . **35.11.**  $z < x^2 + 2x + y^2/4 - y/2 + 5/5$ . **35.12.** Пересечение полупространств  $2x - z - 1 > 0$  и  $y + 2x + 1 > 0$ . **35.13.** Окружность вида  $(x+3)^2 + y^2 = c$ . **35.14.** Эллипсы вида  $\frac{x^2}{9(c-18)} + \frac{(y+1)^2}{c-18} = 1$  при  $c > 18$ . **35.15.** Круговой цилиндр  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ . **35.16.** Эллиптический цилиндр  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ . **35.17.** Параболический цилиндр  $x-1 = (y+1)^2$ . **35.18.** Параболический цилиндр  $y-1 = x^2$ . **35.19.** Конус  $\frac{x^2}{4} + z^2 - \frac{y^2}{4} = 0$ .

**36.8.** Эллипсоид. **36.9.** Однополостный гиперболоид вдоль  $Oz$ . **36.10.** Двуполостный гиперболоид вдоль  $Oy$ . **36.11.** Эллиптический параболоид вдоль  $Oy$ . **36.12.** Эллиптический параболоид вращения вдоль  $Oz$ . **36.13.** Гиперболический параболоид вдоль  $Ox$ .

**37.4.** Эллипсоид  $(x+1)^2 + \frac{y^2}{1/4} + \frac{(z-1)^2}{1/2} = 1$ . **37.5.** Сфера  $(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 3$ . **37.6.** Однополостный гиперболоид  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$ . **37.7.** Однополостный гиперболоид  $(y-1)^2 - \frac{x^2}{3} + z^2 = 1$ . **37.8.** Двуполостный гиперболоид  $\frac{x^2}{3} + z^2 - \frac{y^2}{2} = -1$ . **37.9.** Двуполостный гиперболоид  $(x-1)^2 + y^2 - \frac{(z+1)^2}{3} = -1$ . **37.10.** Эллиптический параболоид  $y = \frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{3}$ . **37.11.** Эллиптический параболоид  $x = \frac{(y+1)^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{4}$ . **37.12.** Эллиптический параболоид  $z = -\frac{x^2}{9} - (y+1)^2$ . **37.13.** Гиперболический параболоид  $y = \frac{x^2}{2} - \frac{z^2}{3}$ . **37.14.** Двуполостный гиперболоид  $\frac{X^2}{2} + Y^2 - \frac{Z^2}{3} = -1$ ,  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 6$ ,  $\lambda_3 = -2$ ,  $\det A = -36$ ,  $\det D = 216$ . **37.15.** Эллипсоид  $\frac{X^2}{16} + \frac{Y^2}{32/5} + \frac{Z^2}{4} = 1$ ,  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 5$ ,  $\lambda_3 = 8$ ,  $\det A = 80$ ,  $\det D = 2560$ . **37.16.** Эллипсоид  $\frac{X^2}{7} + \frac{Y^2}{7/2} + \frac{Z^2}{7/3} = 1$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 3$ ,  $\det A = 6$ ,  $\det D = -42$ .

**38.6.**  $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - 2y + 3$ ;  $\frac{\partial z}{\partial y} = -6y - 2x - 5$ . **38.7.**  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-3(2x-5y)-2(2y-3x)}{(2x-5y)^2}$ ;

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2(2x-5y)+5(2y-3x)}{(2x-5y)^2}. \quad \mathbf{38.8.} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(\sqrt{y}-x)+x}{(\sqrt{y}-x)^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{2(\sqrt{y}-x)^2\sqrt{y}}. \quad \mathbf{38.9.}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-y)^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-y)^2}}. \quad \mathbf{38.10.} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3}{(y-x)^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3}{(y-x)^2}.$$

$$\mathbf{38.11.} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2^{\frac{x}{y}} \ln 2 \cdot \frac{1}{y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2^{\frac{x}{y}} \ln 2 \frac{1}{y^2}. \quad \mathbf{38.12.} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \cos\left(\frac{x}{2\sqrt{y}}\right) \frac{1}{2\sqrt{y}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\cos\left(\frac{x}{2\sqrt{y}}\right) \frac{x}{4y^{3/2}}. \quad \mathbf{38.13.} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\sqrt{y}}{\cos^2\left(\frac{\sqrt{y}}{3\sqrt[3]{x}}\right)9x^{4/3}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\sqrt{y}}{3\sqrt[3]{x}}\right)6\sqrt[3]{x}\sqrt{y}}.$$

$$\mathbf{38.14.} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2}{\sqrt{1-(3y-2x)^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{\sqrt{1-(3y-2x)^2}}. \quad \mathbf{38.15.} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3}{1+(3x-2\sqrt{y})^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{(1+(3x-2\sqrt{y})^2)\sqrt{y}}. \quad \mathbf{38.16.} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = y^{xz} \ln y \cdot z; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xzy^{xz-1};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = y^{xz} \ln y \cdot x. \quad \mathbf{38.17.} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{z}{x^2y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{z}{xy^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{xy}. \quad \mathbf{38.18.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (yz)^x \ln(yz); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x(yz)^{x-1}z; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x(yz)^{x-1}y. \quad \mathbf{38.19.} \quad \frac{\partial u}{\partial u} =$$

$$= -\frac{\sin u}{\cos u - \sin v}; \quad \frac{\partial u}{\partial v} = -\frac{\cos v}{\cos u - \sin v}. \quad \mathbf{38.20.} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}. \quad \mathbf{38.21.} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x-y^2)^2 \ln 3}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} =$$

$$= \frac{4y^2}{(x-y^2)^2 \ln 3}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2y}{(x-y^2)^2 \ln 3}.$$

$$\mathbf{39.8.} \quad \Delta z \approx 0,32; \quad dz = 0,30. \quad \mathbf{39.9.} \quad \Delta z \approx 0,03; \quad dz = 0,03. \quad \mathbf{39.10.}$$

$$dz = \frac{4xy}{(x^2-y^2)^2}(-ydx + xdy). \quad \mathbf{39.11.} \quad dz = (y^x + xy^x \ln y)dx + x^2y^{x-1}dy.$$

$$\mathbf{39.12.} \quad dz = \frac{2}{y \sin \frac{2x}{y}}(dx - \frac{x}{y}dy). \quad \mathbf{39.13.} \quad dz = yzdx + xzdy + xydz. \quad \mathbf{39.14.}$$

$$dz = e^{xy}(ydx + xdy); \quad d^2z = e^{xy}(y^2dx^2 + 2(1+xy)dxdy + x^2dy^2). \quad \mathbf{39.15.}$$

$$dz = (e^y + ye^x)dx + (xe^y + e^x)dy; \quad d^2z = ye^x dx^2 + 2(e^y + e^x)dxdy + xe^y dy^2.$$

$$\mathbf{39.16.} \quad dz = e^y(\cos dx + \sin xdy); \quad d^2z = e^y \sin x(-dx^2 - 2dxdy + dy^2).$$

$$\mathbf{39.17.} \quad 1,01. \quad \mathbf{39.18.} \quad 2,63. \quad \mathbf{39.19.} \quad 0,25. \quad \mathbf{39.20.} \quad \frac{dz}{dt} = -\frac{\arcsin t}{t \ln^2 t} + \frac{1}{\ln t \sqrt{1-t^2}}.$$

$$\mathbf{39.21.} \quad \frac{dz}{dt} = \frac{1}{2\sqrt[3]{x-\lg x}}\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\cos^2 x}\right). \quad \mathbf{39.22.} \quad \frac{du}{dt} = \frac{e^t}{2\cos t \sqrt{t+2}} + \frac{e^t \sqrt{t+2}}{\cos t} +$$

$$+ \frac{e^t \sqrt{t+2}}{\cos^2 t} \sin t. \quad \mathbf{39.23.} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = y^x \ln y; \quad \frac{dz}{dx} = y^x \ln y + \frac{xy^{x-1}}{x^2+1}. \quad \mathbf{39.24.} \quad \frac{\partial z}{\partial x} =$$

$$= \cos(\operatorname{tg} x \sqrt{x})\left(\frac{\operatorname{tg} x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\cos^2 x}\right). \quad \mathbf{39.25.} \quad y' = y \ln 3 / (y \ln 3 - 1).$$

$$\mathbf{40.5.} \quad \frac{16}{\sqrt{2}}. \quad \mathbf{40.6.} \quad 1 - \sqrt{3}. \quad \mathbf{40.7.} \quad (1 - 4\sqrt{2})/3. \quad \mathbf{40.8.} \quad -\frac{1}{2\sqrt{2}}. \quad \mathbf{40.9.} \quad 1.$$

$$\mathbf{40.10.} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}. \quad \mathbf{40.11.} \quad 68/13. \quad \mathbf{40.12.} \quad \operatorname{grad} z = (22; 5); \quad |\operatorname{grad} z| = \sqrt{509}.$$

$$\mathbf{40.13.} \quad \operatorname{grad} z = (-3/2; 5/2); \quad |\operatorname{grad} z| = \sqrt{34}/2. \quad \mathbf{40.14.} \quad \operatorname{grad} z =$$

$$= (4; 6; 12); \quad |\operatorname{grad} z| = 14. \quad \mathbf{40.15.} \quad \operatorname{grad} z = (8; 2; 2); \quad |\operatorname{grad} z| = 6\sqrt{2}.$$

$$\mathbf{41.7.} \quad z_{\min} = -1. \quad \mathbf{41.8.} \quad z_{\min} = -8. \quad \mathbf{41.9.} \quad \text{Экстремумов нет.}$$

$$\mathbf{41.10.} \quad z_{\max} = 5 \text{ при } x = 2, y = 1; \quad z_{\min} = -5 \text{ при } x = -2, y = -1.$$

$$41.11. \quad z_{\min} = \frac{36}{13} \text{ при } x = \frac{12}{13}, y = \frac{18}{13}. \quad 41.12. \quad z_{\text{наим}} = 5, \quad z_{\text{наиб}} = 11.$$

$$41.13. \quad z_{\text{наим}} = -\frac{1}{2}, \quad z_{\text{наиб}} = \frac{1}{2}.$$

$$42.8. \quad x^2 - y^2 > 4 \quad 42.9. \quad \text{Эллиптический параболоид } 4x = \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{4}.$$

$$42.10. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{x}{(y^2 - x^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x(2y^2 - x^2)}{y^2(y^2 - x^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{y}{(y^2 - x^2)^{3/2}}. \quad 42.11.$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{(\sin x - \sqrt{x})} \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} - \cos x \right). \quad 42.12. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{x^{2y} \ln 2}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{2^y \ln 2 + (x+1)^2}{x^{2y} 2^{2y} \ln^2 2}.$$

$$42.13. \quad 1. \quad 42.14. \quad M = z(0; 3) = z(2; 3) = 12, \quad m = z(1; 0) = -1; \quad \frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}.$$

$$43.28. \quad 2x^3. \quad 43.29. \quad \frac{1}{3} \ln |\cos 5x|. \quad 43.30. \quad \frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{\sqrt{2}} + C.$$

$$43.31. \quad -\ln |\cos 2s| + C. \quad 43.32. \quad \frac{3}{2} (\sin x)^{2/3} + C. \quad 43.33. \quad -\frac{(1-7x)^6}{42} + C.$$

$$43.34. \quad e^{\operatorname{tg} x} + C. \quad 43.35. \quad \frac{2}{5} (\arcsin x)^{5/2} + C. \quad 43.36. \quad \frac{1}{2} e^{x^2+2x} + C. \quad 43.37.$$

$$\sqrt{x^2-6} + C. \quad 43.38. \quad 2e^{\sqrt{x}}. \quad 43.39. \quad -\frac{5}{6} (9-e^x)^{6/5}. \quad 43.40. \quad \frac{x^2}{2} - \frac{4}{3} x \sqrt{x} + x + C.$$

$$43.41. \quad \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2} x^2 + 3x - \ln x + C. \quad 43.42. \quad -\frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{3} \cos 6x. \quad 43.43. \quad \frac{1}{6} (2x^2 +$$

$$+7) \sqrt{2x^2+7} + C. \quad 43.44. \quad \ln |x^2+5x-13| + C. \quad 43.45. \quad -\frac{2\sqrt{5+\cos 3x}}{3} + C.$$

$$43.46. \quad \frac{3}{2} \operatorname{tg} 2x \sqrt[3]{2x} + C. \quad 43.47. \quad \frac{(2+\ln x)^2}{2} + C. \quad 43.48. \quad -\ln(7+\cos^2 x) + C.$$

$$43.49. \quad \frac{1}{2\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{3} \ln(x^4+5) + C. \quad 43.50. \quad -\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

$$43.51. \quad x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C. \quad 43.52. \quad \frac{e^{2t}}{13} (3 \sin 3t + 2 \cos 3t) + C.$$

$$44.8. \quad \ln |x+3| + C. \quad 44.9. \quad -\frac{1}{5(x-2)^4} + C. \quad 44.10. \quad \ln(x^2+2x+5) +$$

$$+\frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C. \quad 44.11. \quad -\frac{x+3}{2(x^2+4x+5)} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x+2) + C. \quad 44.12. \quad \ln |x| -$$

$$-\ln |x-1| - \frac{1}{x-1} + C. \quad 44.13. \quad -\frac{1}{5(x+1)} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C. \quad 44.14. \quad -\frac{x}{3(x^3-1)} +$$

$$+\frac{1}{9} \ln \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \quad 44.15. \quad \frac{5x+1}{38} \left( \frac{1}{2(5x^2+2x+4)^2} + \frac{15}{76(5x^2+2x+4)} \right) +$$

$$+\frac{75}{2888\sqrt{19}} \operatorname{arctg} \frac{5x+1}{\sqrt{19}} + C.$$

$$45.12. \quad -\frac{1}{16} \cos 8x - \frac{1}{8} \cos 4x + C. \quad 45.13. \quad \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{10} \sin 5x + C. \quad 45.14.$$

$$-\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{2 \cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + C. \quad 45.15. \quad 3 \sqrt[3]{\sin^2 x} \left( \frac{1}{8} \sin x - \frac{2}{11} \sin^3 x - \frac{1}{7} \sin^5 x \right) + C.$$

$$45.16. \quad \frac{3}{8} x - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C. \quad 45.17. \quad \frac{1}{16} \left( \frac{3}{16} x - \frac{1}{16} \sin 4x + \frac{1}{128} \sin 8x + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{20} \sin^5 2x \right) + C. \quad 45.18. \quad \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + \frac{4}{3} \operatorname{tg}^3 x + 6 \operatorname{tg} x - 4 \operatorname{ctg} x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + C.$$

$$45.19. \quad 2 \sqrt{\operatorname{tg} x} \left( \frac{1}{3} \operatorname{tg} x + \frac{1}{7} \operatorname{tg}^3 x \right) + C. \quad 45.20. \quad -\frac{1}{4} \operatorname{ctg}^4 x + \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} + \ln |\sin x| + C.$$

$$45.21. \quad \frac{1}{7} \operatorname{tg}^7 x - \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + x + C. \quad 45.22. \quad \frac{1}{16} \left( -\frac{1}{4} \operatorname{ctg}^4 \frac{x}{2} - 2 \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} + \right.$$

$$\left. + 6 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + 2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 \frac{x}{2} \right) + C.$$

**46.9.**  $\ln \frac{(12\sqrt{x}+1)^{12}}{x} - \frac{12}{12\sqrt{x}} + C$ . **46.10.**  $-\frac{\sqrt{(3-4x)(9-5x)}}{5} + \frac{21}{20\sqrt{5}} \ln |51-40x +$   
 $+4\sqrt{5(3-4x)(9-5x)}| + C$ . **46.11.**  $-\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-2}} + C$ . **46.12.**  $\frac{1}{\sqrt{6}} \ln |12x +$   
 $+5 + 2\sqrt{6(6x^2+5x+11)}| + C$ . **46.13.**  $-\frac{2}{11}\sqrt{7+8x-11x^2} + \frac{63}{11\sqrt{11}} \cdot$   
 $\cdot \arcsin \frac{11x-4}{\sqrt{93}} + C$ . **46.14.**  $\arccos \frac{1}{x\sqrt{2}} + C$ . **46.15.**  $-\frac{1}{15}\frac{\sqrt{15+3x^2}}{x} + C$ .  
**46.16.**  $-\frac{x}{5\sqrt{x^2-5}} + C$ . **46.17.**  $\frac{1}{x}\sqrt{\frac{3+4x^3}{x}}$ . Подстановка  $3x^{-3}+4=t^2$ .

**47.11.**  $h \sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih)$ ,  $h = \frac{b-a}{n}$ . **47.12.**  $\frac{he^h}{e^h-1} (e^b - e^a)$ ,  $h = \frac{b-a}{n}$ .

**47.13.**  $\frac{1}{2}(a^2 - b^2)$ . **47.14.**  $\frac{\pi}{6}$ . **47.15.**  $e^3 - e^2$ . **47.16.**  $\ln \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .  
**47.17.**  $1 + \ln \frac{9}{4}$ . **47.18.**  $\frac{\pi}{4}$ . **47.19.**  $\frac{\pi a^2}{4}$ . **47.20.**  $\frac{\pi}{2} - 1$ . **47.21.**  $\frac{\pi}{2}$ .  
**47.22.**  $-2$ .

**48.10.**  $\frac{32}{3}$ . **48.11.**  $\frac{38\pi}{R^2}$ . **48.12.**  $\frac{32\pi}{a^2}$ . **48.13.**  $\frac{1}{6}$ . **48.14.**  $\frac{\pi c^2}{2}$ . **48.15.**  $\frac{\pi}{3}$ .  
**48.16.**  $2\pi\sqrt{5}$ . **48.17.**  $\frac{x}{2}\sqrt{4a^2x^2+1} + \frac{1}{4a} \ln(2ax + \sqrt{4a^2x^2+1})$ .  
**48.18.**  $6R$ . **48.19.**  $\frac{a}{2}(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2} + \ln(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}))$ . **48.20.**  $\frac{qt^2}{2}$ .

**49.12.** Расходится. **49.13.**  $\frac{\pi}{2ab}$ . **49.14.** Расходится. **49.15.**  $2\sqrt{2}$ .  
**49.16.** Расходится. **49.17.** 7,5. **49.18.**  $\frac{\pi^2}{8}$ . **49.19.**  $\pi$ . **49.20.** Расхо-  
 дится. **49.21.** Сходится. **49.22.** Расходится. **49.23.** Сходится. **49.24.**  
 Расходится.

**50.10.**  $\frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} + C$ . **50.11.**  $xe^x + C$ . **50.12.**  $\frac{29}{45} \operatorname{arctg} \frac{5x+3}{9} -$   
 $-\frac{3}{10} \ln(5x^2+6x+18) + C$ . **50.13.**  $-\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C$ .  
**50.14.**  $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C$ . **50.15.**  $\frac{7}{18}$ . **50.16.** Сходится. **50.17.**  $6\pi$ .  
**50.18.**  $\frac{1}{2}\gamma\pi HR^4$ .

**51.5.**  $14\pi/3$ . **51.6.**  $\ln(25/24)$ . **51.7.**  $\frac{7}{6}$ . **51.8.**  $y = \sqrt{2x-x^2}$ ,  
 $y = \sqrt{4x}$ ,  $x=0$ ,  $x=2$ . **51.9.**  $x = y^2/2$ ,  $x = \sqrt{3-y^2}$ ,  $y=0$ ,  $y=1$ .

**52.3.**  $y = \sqrt{2x-x^2}$ ,  $y = \sqrt{4x}$ ,  $x=0$ ,  $x=2$ ,  $\int_0^1 dy \int_{y^2/4}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx +$   
 $+ \int_0^1 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^2 f(x,y) dx + \int_1^{2\sqrt{2}} dy \int_{y^2/4}^2 f(x,y) dx$ . **52.4.**  $x = y^2/2$ ,

$$x = \sqrt{3-y^2}, \quad y = 0, \quad y = 1, \quad \int_0^{1/2} dx \int_0^{2x} f(x, y) dy + \int_{1/2}^{\sqrt{2}} dx \int_0^1 f(x, y) dy + \\ + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$53.6. \quad \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{1/\cos \varphi} \rho f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\rho + \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{1/\sin \varphi} \rho f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\rho.$$

$$53.7. \quad \int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int_0^{1/\sin \varphi} \rho f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\rho. \quad 53.8. \quad \frac{4}{3}\pi^4 a^3. \quad 53.9. \quad \pi(1 - e^{-a^2}).$$

$$53.10. \quad 20/3.$$

$$54.7. \quad 3(\pi/4 + 1/2). \quad 54.8. \quad 1/6. \quad 54.9. \quad 32/9. \quad 54.10. \quad \sqrt{17}/24.$$

$$54.11. \quad 26. \quad 54.12. \quad x_{\text{и}} = 5a/6, \quad y_{\text{и}} = 0. \quad 54.13. \quad \frac{21}{32}\pi a^4 \gamma, \quad \frac{49}{32}\pi a^4 \gamma, \quad \frac{35}{16}\pi a^4 \gamma.$$

$$55.7. \quad \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) dz. \quad 55.8. \quad \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^H f(x, y, z) dz.$$

$$55.9. \quad \frac{8}{15}(31 + 12\sqrt{2} - 27\sqrt{3}). \quad 55.10. \quad 4\pi\sqrt{2}/3. \quad 55.11. \quad \frac{\pi a^5}{5}(18\sqrt{3} - \frac{97}{6}).$$

$$55.12. \quad \frac{8}{3}R^3(\pi - \frac{4}{3}). \quad 55.13. \quad \pi/10.$$

$$56.8. \quad 32/9. \quad 56.9. \quad z_{\text{и}} = 4/3, \quad x_{\text{и}} = y_{\text{и}} = 0. \quad 56.10. \quad x_{\text{и}} = y_{\text{и}} = 0, \quad z_{\text{и}} = 2H/3.$$

$$56.11. \quad \pi H^2(R_2^4 - R_1^4)/4. \quad 56.12. \quad \frac{1}{4}\pi H^2(R_2^4 - 3R_1^4 + 2R_1^2 R_2^2), \quad \frac{1}{4}\pi H^2(3R_2^4 - R_1^4 - 2R_1^2 R_2^2).$$

$$57.7. \quad 40\frac{19}{30}. \quad 57.8. \quad -2\pi a^2. \quad 57.9. \quad -\frac{4}{3}. \quad 57.10. \quad \frac{3}{8}\pi a^2. \quad 57.11. \quad x^3 - x^2 y - y^3 + C; \\ e^{x-y}(x+y) + C; \ln|x+y| + C$$

$$58.6. \quad 24a^3. \quad 58.7. \quad \frac{3\pi}{16}. \quad 58.8. \quad u = xyz + C$$

$$59.6. \quad \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} xy dy = \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} xy dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} xy dx = 0.$$

$$59.7. \quad x_{\text{и}} = y_{\text{и}} = 0; \quad z_{\text{и}} = \frac{5}{3}. \quad 59.8. \quad -4. \quad 59.9. \quad \frac{16}{9}. \quad 59.10. \quad U(x; y; z) = \\ = xy^2 + yz^2 + x^2 z + C.$$



## Литература

1. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - М. : Наука, 1984.
2. Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. - М. : Наука, 1987.
3. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. - М. : Наука, 1985.
4. Борович З. И. Определители и матрицы. - М. : Наука, 1988.
5. Бугров Я. С., Никольский С. М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. - М. : Наука, 1980; 1984; 1988.
6. Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальное и интегральное исчисление. - М. : Наука, 1980; 1988.
7. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика: Задачник. - М. : Наука, 1982.
8. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. - М. : Наука, 1985.
9. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч. - М. : Высш. шк., 1986. - Ч. 1, 2.
10. Ильин В. А., Поздняк Э. Г. Аналитическая геометрия. - М. : Наука, 1981.
11. Ильин В. А., Поздняк Э. Г. Линейная алгебра. - М. : Наука, 1983.
12. Ильин В. А., Поздняк Э. Г. Основы математического анализа. - М. : Наука, 1980. - Ч. 1; 1982. - Ч. 2.
13. Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗОВ. Под ред. Демидовича Б.П. - М. : Наука, 1996.
14. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. - Харьковский университет, 1971.
15. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. - СПб. : Лань, 2011.
16. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. - М. : Высш. шк., 1981. - Т. 1, 2.
17. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. - М. : Высш. шк., 1988. - Т. 1 - 3.
18. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа. - М. : Наука, 1989.

19. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу: Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. - М. : Наука, 1984.

20. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу: Интегралы. Ряды. - М. : Наука, 1986.

21. Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике / типовые расчеты. - СПб. : Лань, 2013.

22. Курс математики для технических высших учебных заведений. Под редакцией В.Б.Миносцева и Е.А.Пушкаря, ч.1, М., РИЦ МГИУ, 2011.

23. Мантуров О. В., Матвеев Н. М. Курс высшей математики. - М. : Высш. шк., 1986.

24. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике. - М. : Наука, 1987.

25. Никольский С. М. Курс математического анализа. - М. : Наука, 1983. - Т.1, 2.

26. Щипачев В. С. Высшая математика. - М. : Высш. шк., 1985.

27. Шнейдер В. Е., Слуцкий А. И., Шумов А. С. Краткий курс высшей математики: Учебное пособие для втузов. - М. : Высш. шк., 1972.



## Предметный указатель

- Векторная линия, 374  
Векторная трубка, 374  
Векторное поле, 357, 374  
Вычисление двойного интеграла в полярных координатах, 294  
Вычисление тройного интеграла в сферических координатах, 332  
Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах, 331  
Геометрическая интерпретация двойного интеграла, 270  
Геометрический смысл определённого интеграла, 208  
Гиперболический параболоид, 32  
Гиперболический цилиндр, 16  
Гиперболоиды, 26  
Градиент, 84  
Двойной интеграл, 268  
Двулостный гиперболоид, 29  
Декартова система координат, 6  
Диаметр разбиения, 195, 269, 323  
Дивергенция вектора, 377  
Дифференциалы высших порядков, 68  
Дифференцирование неявных функций, 72  
Дифференцирование сложных функций, 69  
Длина дуги плоской кривой, 223  
Достаточные условия экстремума, 102  
Замена переменной в неопределённом интеграле, 139  
Замена переменной в определённом интеграле, 205  
Замена переменных в двойном интеграле, 300  
Замена переменных в тройном интеграле, 330  
Изменение порядка интегрирования, 283  
Интегральный признак сходимости знакоположительных рядов, 245  
Интегрирование иррациональных функций, 180  
Интегрирование методом разложения, 140  
Интегрирование по частям в неопределённом интеграле, 142  
Интегрирование по частям в определённом интеграле, 207  
Интегрирование простейших рациональных дробей, 153  
Интегрирование тригонометрических функций, 167  
Источники и стоки, 374  
Касательная плоскость, 88  
Конические поверхности, 18  
Координаты центра тяжести пластины, 313  
Криволинейный интеграл по длине дуги, 226

- Криволинейный интеграл по координатам, 379
- Локальный экстремум функции нескольких переменных, 99
- Масса пластины, 313
- Метод множителей Лагранжа, 107
- Моменты инерции пластины, 313
- Моменты инерции тел, 345
- Наибольшее и наименьшее значение функции в области, 104
- Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования, 363
- Необходимые условия экстремума, 100
- Неопределённый интеграл, 134
- Непрерывность функции нескольких переменных, 53
- Несобственные интегралы, 238
- Нормаль к поверхности, 88
- Объём тела, 308
- Объём тела вращения, 222
- Объём тела по известным поперечным сечениям, 220
- Однополостный гиперболоид, 27
- Определённый интеграл, 195
- Параболический цилиндр, 16
- Параболоиды, 31
- Параллельный перенос осей декартовой системы координат, 37
- Первообразная, 132
- Площадь поверхности, 311
- Площадь поверхности вращения, 229
- Поверхности второго порядка, 24
- Поверхность вращения, 19
- Поворот осей декартовой системы координат, 38
- Полное приращение функции, 63
- Полный дифференциал функции, 64
- Понятие области, 8
- Потенциальное поле, 382
- Поток вектора, 375
- Предел функции двух переменных, 50
- Приведение уравнения поверхности 2-го порядка к каноническому виду, 41
- Признаки сходимости несобственных интегралов, 244
- Производная интеграла по переменной верхней границе, 202
- Производная по направлению, 81
- Решение систем нелинейных уравнений методом Ньютона, 95
- Ротор векторного поля, 379
- Свойства двойного интеграла, 271
- Скалярное поле, 81
- Соленоидальное поле, 374
- Статические моменты и координаты центра тяжести тел, 342
- Статические моменты пластины, 313
- Сферическая система координат, 7
- Таблица основных интегралов, 137
- Теорема Грина, 362
- Теорема Остроградского-Гаусса, 377
- Теорема Стокса, 381
- Теорема существования двойного интеграла, 270
- Тройной интеграл, 323
- Универсальная тригонометрическая подстановка, 167
- Условный экстремум, 106
- Физический смысл определённого интеграла, 209
- Формула Ньютона-Лейбница, 204
- Формула Симпсона, 252
- Формула трапеций, 252
- Цилиндрическая система координат, 7
- Цилиндрические поверхности, 14
- Циркуляция вектора, 379
- Частные производные 1-го порядка, 55
- Частные производные высших порядков, 57
- Эллипсоид, 24
- Эллиптический цилиндр, 15

*Владимир Анатольевич ЛЯХОВСКИЙ,  
Анатолий Иванович МАРТЫНЕНКО,  
Вениамин Борисович МИНОСЦЕВ*

**КУРС МАТЕМАТИКИ  
ДЛЯ ТЕХНИЧЕСКИХ ВЫСШИХ  
УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ  
ЧАСТЬ 2**

**Функции нескольких переменных.  
Интегральное исчисление.  
Теория поля**

*Под ред. В. Б. Миносцева, Е. А. Пушкаря*

*Учебное пособие*

Издание второе, исправленное

ЛР № 065466 от 21.10.97  
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10  
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

**Издательство «ЛАНЬ»**

lan@lanbook.ru; www.lanbook.com

192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.

Тел./факс: (812) 412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.

Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 25.07.13.  
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108<sup>1/32</sup>.  
Печать офсетная. Усл. п. л. 22,68. Тираж 1000 экз.

Заказ № .

Отпечатано в полном соответствии  
с качеством предоставленного оригинал-макета  
в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие «Правда Севера».  
163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, д. 32.  
Тел./факс (8182) 64-14-54; www.ippps.ru