В. А. Смирнов, И. М. Смирнова

Геометрические задачи на развитие критического мышления

Москва
Издательство МЦНМО
2021

УДК 51
ББК 74.200.58:22.1
Г82

Смирнов В. А., Смирнова И. М.

Г82 Геометрические задачи на развитие критического мышления. — М.: МЦНМО, 2021. — 96 с.

ISBN 978-5-4439-1613-2

Пособие содержит задачи на развитие критического мышления учащихся. Среди них задачи на распознавание конфигураций геометрических фигур по их изображениям и описаниям, на сравнение и оценку геометрических величин, на установку верности и неверности утверждений, на нахождение ошибок в формулировках и доказательствах, а также приведение контрпримеров и задачи с неоднозначным ответом.

ББК 74.200.58:22.1

ISBN 978-5-4439-1613-2

Введение

Под критическим мышлением будем понимать способ мышления, при котором человек ставит под сомнение любую информацию, и даже собственные убеждения, использует методы познания, которые отличаются контролируемостью, обоснованностью и целенаправленностью [10].

Это согласуется с высказываниями великого французского философа и математика Рене Декарта, который считал, что только принцип «Сомневайся во всём» в состоянии помочь нам познать мир.

Сегодня критическое мышление необходимо каждому человеку в связи с огромным потоком информации, распространяемым через средства массовой информации, интернет и т. п.

Задача развития критического мышления учащихся является одной из важных задач обучения, в частности математике. К сожалению, в школе этому вопросу уделяется крайне мало внимания.

В то же время, задачи, использующие критическое мышление, предлагаются на основном государственном экзамене (ОГЭ) и на едином государственном экзамене (ЕГЭ) по математике.

Отметим, что в середине прошлого века было издано несколько замечательных книг, посвящённых: ошибкам в математических рассуждениях, например [1, 3, 4, 9]; зрительным иллюзиям [8]; софизмам [5] и др.

В пособиях [2, 6, 7] также имеются задачи, которые можно отнести к задачам, развивающим критическое мышление учащихся.

Предлагаем включать в обучение геометрии задачи на формирование следующих умений учащихся, которые, на наш взгляд, будут способствовать развитию их критического мышления.

1. Распознавать конфигурации геометрических фигур по их изображениям и описаниям.
2. Сравнивать и оценивать геометрические величины.
3. Устанавливать верность и неверность утверждений.
4. Находить ошибки в формулировках и доказательствах.
5. Приводить контрпримеры.
6. Решать задачи с неоднозначным ответом.

1. Распознавание

1. Параллельны ли прямые AB и CD, изображённые на рисунке 1?

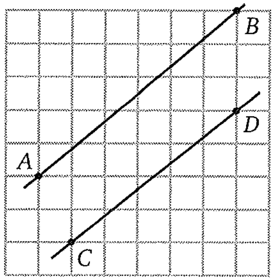


Рис. 1

2. Перпендикулярны ли прямые AB и CD, изображённые на рисунке 2?

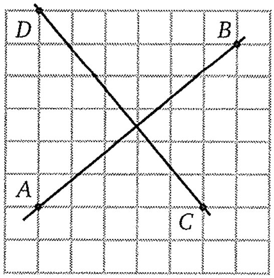


Рис. 2

3. Не используя линейку, скажите, какие две линии a и b или a и c на рисунке 3 изображают одну и ту же прямую. Ответ проверьте с помощью линейки.

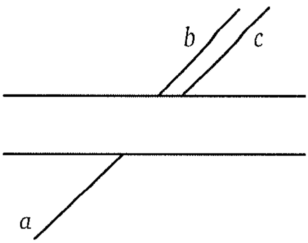


Рис. 3

4. Не используя линейку, скажите, являются ли линии a и b, изображённые на рисунке 4, прямыми или нет. Ответ проверьте с помощью линейки.

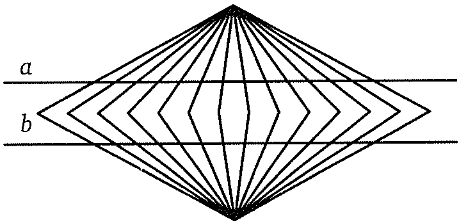


Рис. 4

5. Является ли линия $ABCD$ (рис. 5) составленной из отрезков или из кривых? Ответ проверьте с помощью линейки.

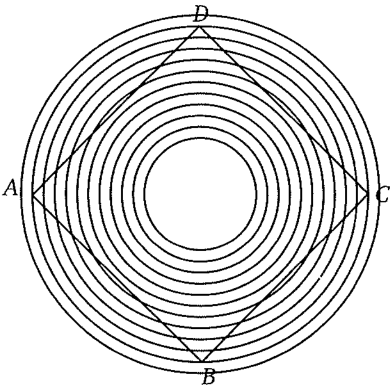


Рис. 5

6. Может ли биссектриса треугольника проходить через середину: а) биссектрисы; б) медианы; в) высоты этого треугольника?

7. Может ли медиана треугольника проходить через середину: а) биссектрисы; б) медианы; в) высоты этого треугольника?

8. Может ли высота треугольника проходить через середину: а) биссектрисы; б) медианы; в) высоты этого треугольника?

9. Могут ли биссектриса, высота и медиана, проведённые из разных вершин разностороннего треугольника, пересекаться в одной точке?

10. Как в пространстве расположены прямые DE и FG (рис. 6)?

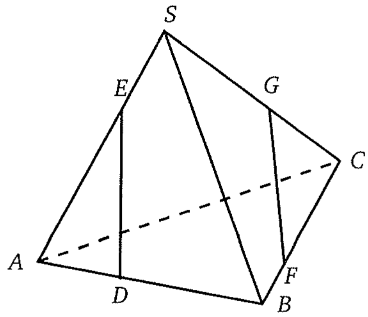


Рис. 6

11. Пересекаются ли прямые DE и FG (рис. 7)?

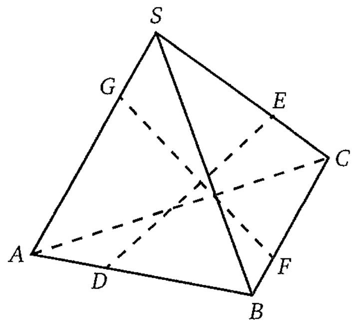


Рис. 7

12. Как в пространстве расположены рёбра SA и BC правильной треугольной пирамиды $SABC$ (рис. 8)?

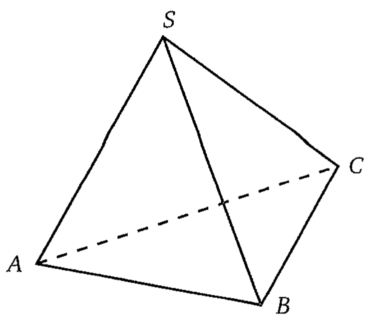


Рис. 8

13. Как в пространстве расположены прямые EE_1 и FF_1 (рис. 9)?

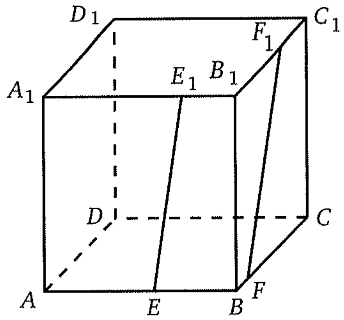


Рис. 9

14. Пересекаются ли прямые DB_1 и CD_1 (рис. 10)?

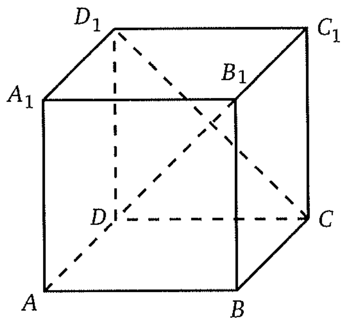


Рис. 10

15. Как в пространстве расположены прямые AC и BD_1 (рис. 11)?

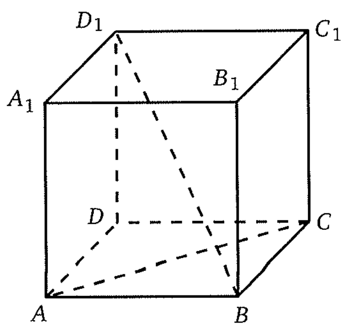


Рис. 11

16. Как в пространстве расположены прямые EF и GH (рис. 12)?

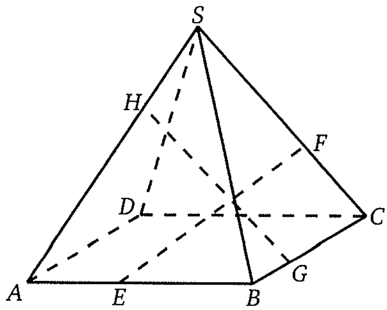


Рис. 12

17. $SABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида. Как в пространстве расположены прямые SA и BD (рис. 13)?

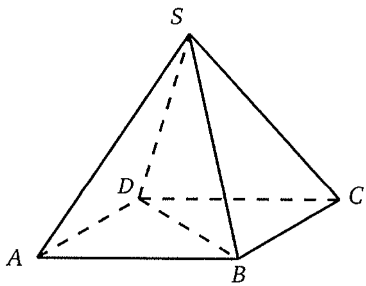


Рис. 13

18. $SABCDEF$ — правильная шестиугольная пирамида. Как в пространстве расположены прямые SA и CE (рис. 14)?

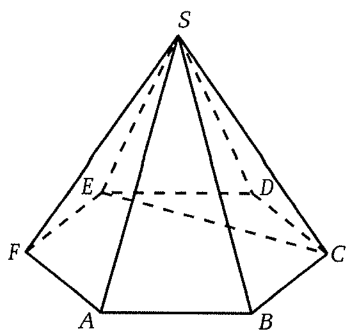


Рис. 14

19. Сколько общих точек имеют плоскости α и β (рис. 15)?

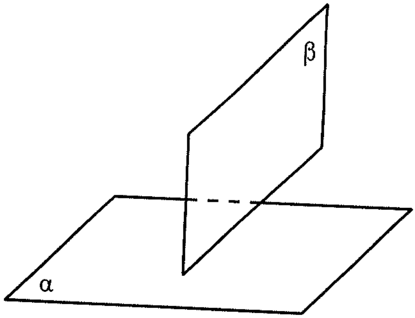


Рис. 15

20. Как в пространстве расположены прямые a и b, лежащие в плоскостях соответственно α и β (рис. 16)?

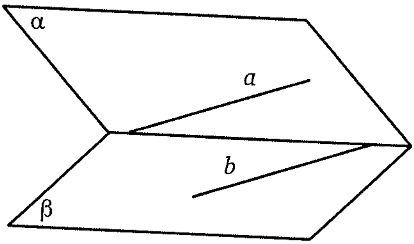


Рис. 16

21. Как расположены прямые AD_1 и CE_1, проходящие через вершины правильной шестиугольной призмы (рис. 17)?

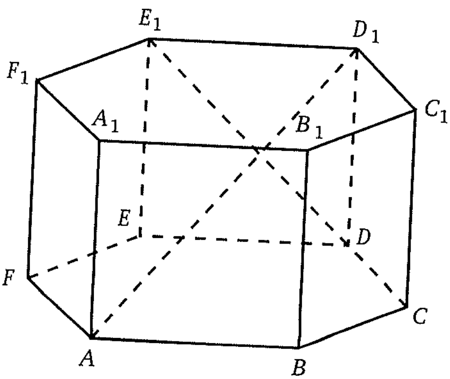


Рис. 17

22. Как расположены прямая A_1B_1 и плоскость ACD_1, проходящие через вершины куба (рис. 18)?

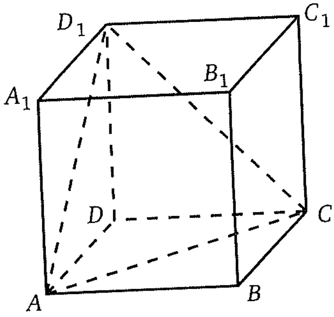


Рис. 18

23. Как расположены прямая C_1D_1 и плоскость CFA_1, проходящие через вершины правильной шестиугольной призмы (рис. 19)?

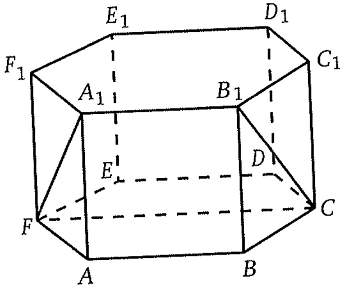


Рис. 19

24. Как расположены прямая D_1E_1 и плоскость ACB_1, проходящие через вершины правильной шестиугольной призмы (рис. 20)?

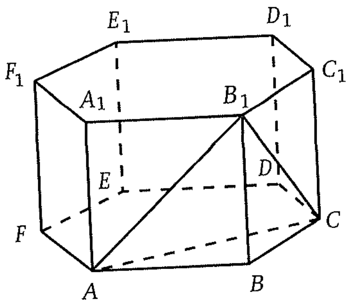


Рис. 20

25. Как расположены плоскости ACD_1 и BC_1A_1, проходящие через вершины куба (рис. 21)?

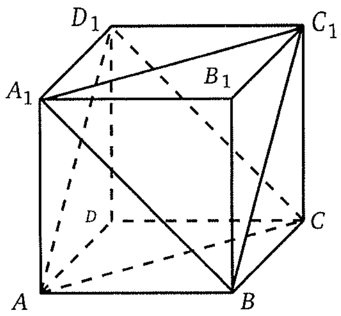


Рис. 21

26. Как расположены плоскости BCC_1 и AFF_1, проходящие через вершины правильной шестиугольной призмы (рис. 22)?

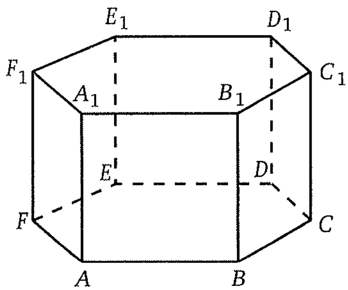


Рис. 22

27. Как расположены плоскости ACB_1 и FDC_1, проходящие через вершины правильной шестиугольной призмы (рис. 23)?

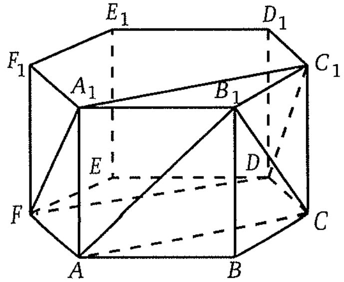


Рис. 23

28. На рисунке 24 укажите призмы.

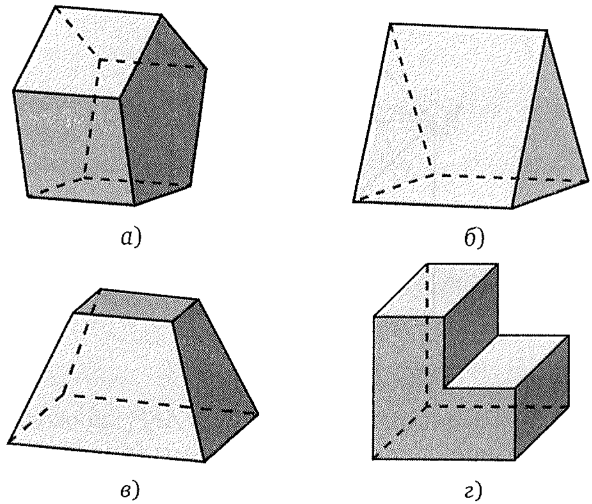


Рис. 24

29. На рисунке 25 укажите пирамиды.

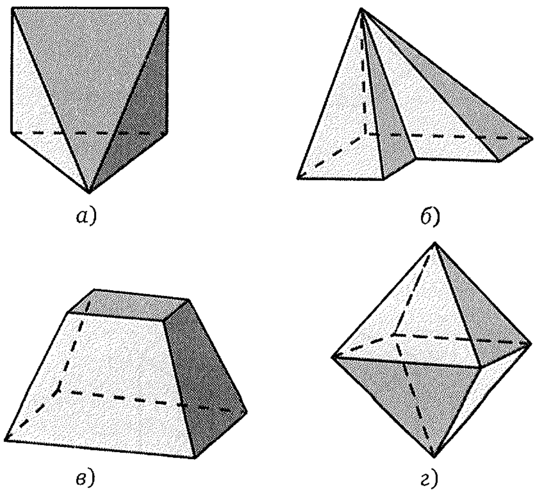


Рис. 25

30. Сколько тетраэдров изображено на рисунке 26?

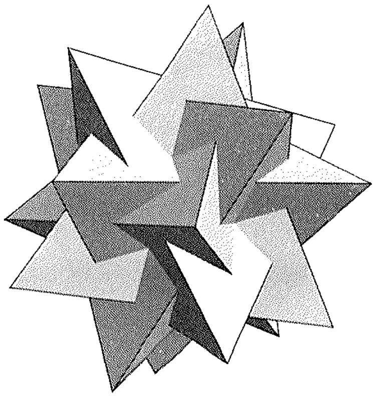


Рис. 26

31. Вершинами какого многогранника являются вершины тетраэдров, изображённых на рисунке 26?

32. Какой многогранник является пересечением тетраэдров, изображённых на рисунке 26?

33. Сколько кубов изображено на рисунке 27?

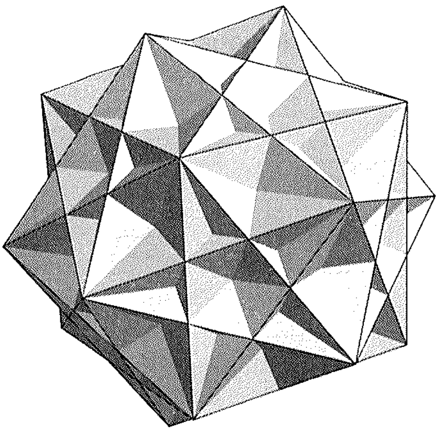


Рис. 27

34. Вершинами какого многогранника являются вершины кубов, изображённых на рисунке 27?

35. Соединение каких двух многогранников изображено на рисунке 28?

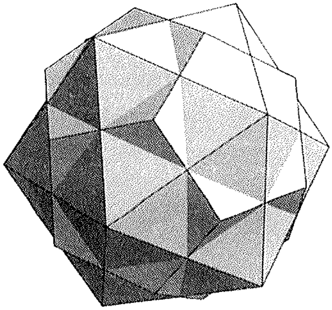


Рис. 28

36. У многогранника 12 вершин. В каждой из них сходится 5 треугольников. Сколько у этого многогранника рёбер (Р) и граней (Г)?

37. В каждой вершине многогранника сходится 3 пятиугольника. Сколько у него вершин (В) и рёбер (Р), если число граней равно 12?

38. У многогранника двенадцать вершин. В каждой из них сходится два треугольника и два четырёхугольника. Сколько у него рёбер (Р), треугольных ($Г_3$) и четырёхугольных ($Г_4$) граней?

39. На рисунке 29 укажите номера развёрток куба.

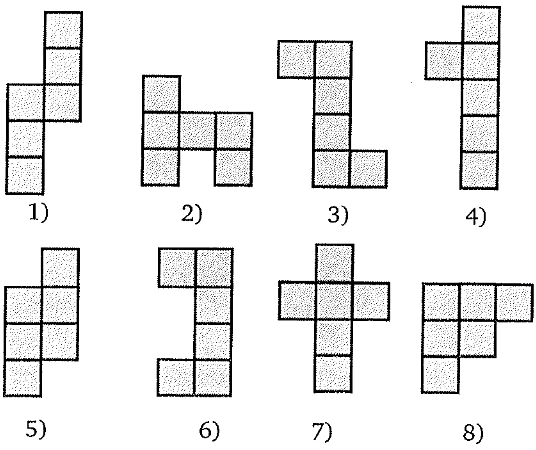


Рис. 29

40. Укажите номер многогранника, развёртка которого изображена на рисунке 30.

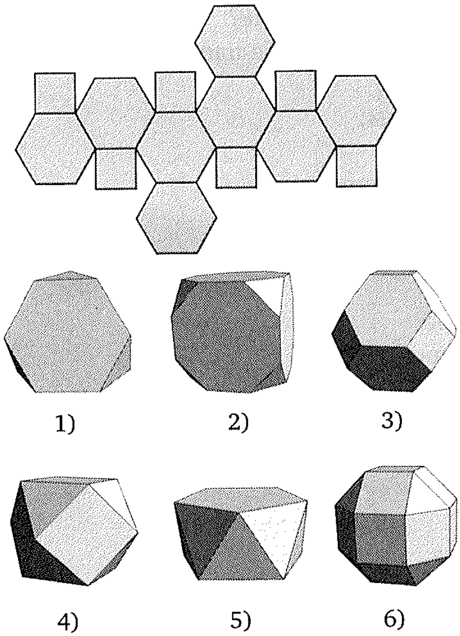


Рис. 30

41. В каждой вершине многогранника сходится один пятиугольник и два шестиугольника (рис. 31). Число пятиугольных граней равно 12. Чему равно число шестиугольных граней?

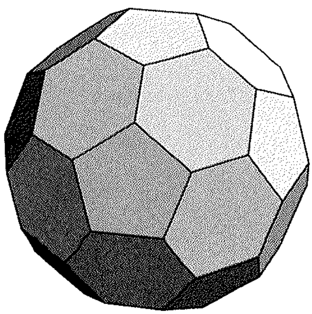


Рис. 31

42. Может ли сечением куба плоскостью быть:

а) остроугольный треугольник;

б) прямоугольный треугольник;

в) тупоугольный треугольник?

43. Может ли сечением куба плоскостью быть:

а) прямоугольник;

б) параллелограмм;

в) ромб;

г) равнобедренная трапеция;

д) прямоугольная трапеция?

44. Может ли сечением куба плоскостью быть пятиугольник, у которого равны:

а) все стороны;

б) четыре стороны;

в) три стороны;

г) две стороны?

45. Может ли сечением куба плоскостью быть пятиугольник, у которого равны:

а) все углы;

б) четыре угла;

в) три угла;

г) два угла?

Более подробно с задачами на распознавание пространственных фигур можно познакомиться в книге [7].

2. Сравнение и оценка

1. Сравните длины отрезков *AB* и *CD*, изображённых на рисунке 32.

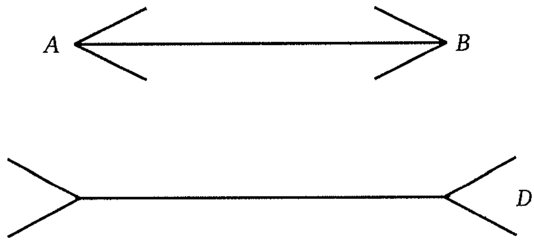


Рис. 32

2. Сравните длины отрезков *AB* и *CD*, изображённых на рисунке 33.

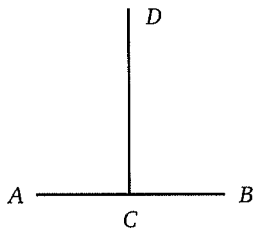


Рис. 33

3. Сравните длины отрезков *AB* и *CD*, изображённых на рисунке 34.

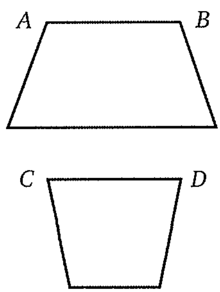


Рис. 34

4. Сравните длины отрезков AB и CD, изображённых на рисунке 35.

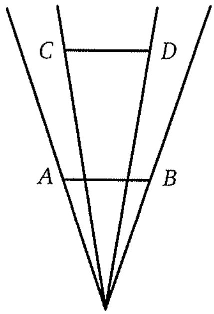


Рис. 35

5. Сравните длины отрезков AC и BC, изображённых на рисунке 36.

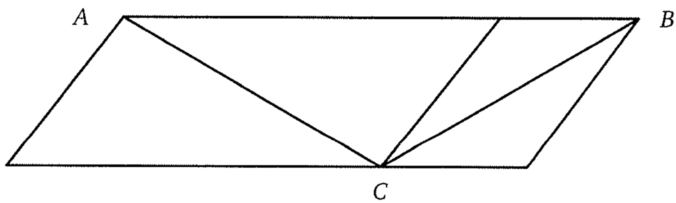


Рис. 36

6. Какой из двух внутренних кругов, изображённых на рисунке 37, больше?

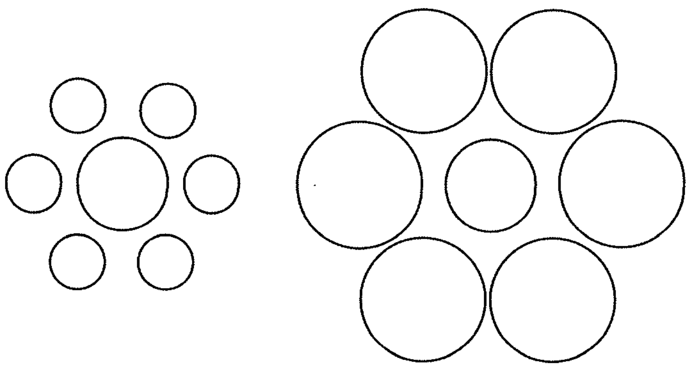


Рис. 37

7. Сравните длины ломаных AC_iB ($i=1, \dots, 5$) (рис. 38).

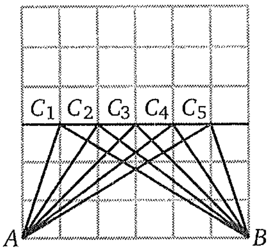


Рис. 38

8. Требуется проложить шоссейные дороги, соединяющие населённые пункты A, B, C, расположенные в вершинах треугольника (рис. 39). Не производя вычислений, оцените, в каком расположении дорог их суммарная длина наименьшая.

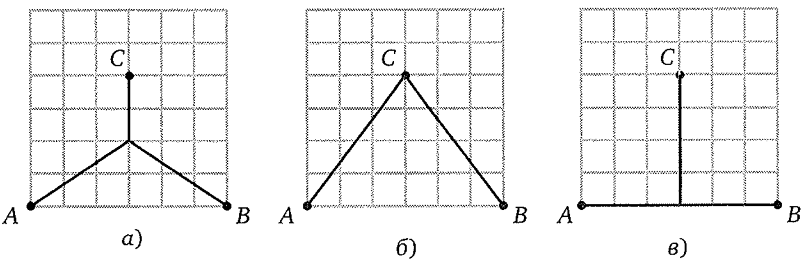


Рис. 39

9. Требуется проложить шоссейные дороги, соединяющие населённые пункты A, B, C, D, расположенные в вершинах прямоугольника (рис. 40). Не производя вычислений, оцените, в каком расположении дорог их суммарная длина наименьшая.

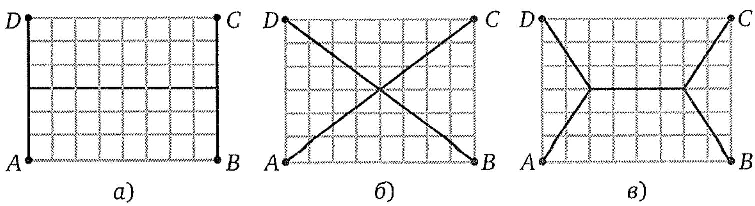


Рис. 40

10. Сравните углы ABC и DEF, изображённые на рисунке 41.

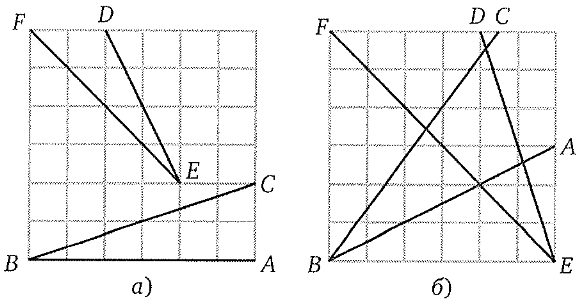


Рис. 41

11. В трапеции $ABCD$ (рис. 42) $AD < BC$, O — точка пересечения диагоналей AC и BD. Сравните площади треугольников AOD и BOC.

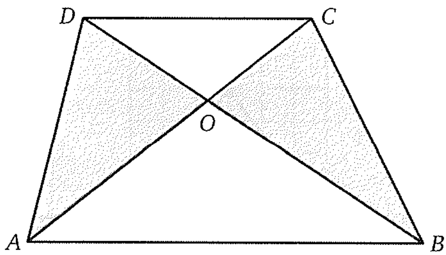


Рис. 42

12. В трапеции $ABCD$ (рис. 43) $AD < BC$, E, F — середины оснований AB и CD. Сравните площади четырёхугольников $AEFD$ и $EBCF$.

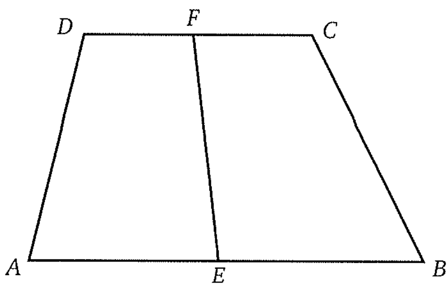


Рис. 43

13. В четырёхугольнике *ABCD* точки *E*, *F*, *G*, *H* — середины соответствующих сторон (рис. 44). Сравните площади закрашенной и незакрашенной частей этого четырёхугольника.

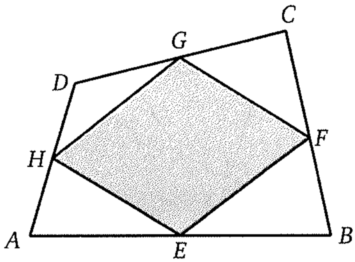


Рис. 44

14. В четырёхугольнике *ABCD* точки *E*, *F*, *G*, *H* — середины соответствующих сторон, *O* — внутренняя точка (рис. 45). Сравните площади закрашенной и незакрашенной частей этого четырёхугольника.

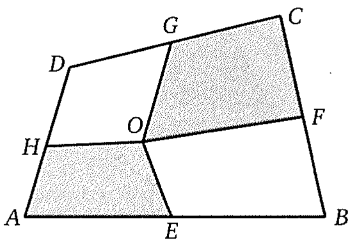


Рис. 45

15. Два параллелограмма *ABCD* и *DEFG* расположены так, как показано на рисунке 46. Сравните их площади.

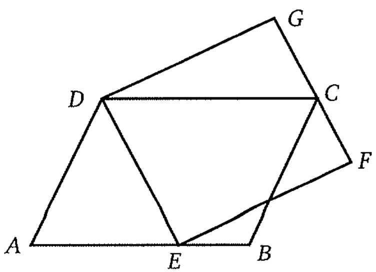


Рис. 46

16. Для квадрата $ABCD$ (рис. 47) сравните площадь четырёхугольника $DPQR$ и площадь закрашенной фигуры.

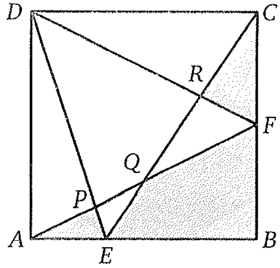


Рис. 47

17. Сравните площади шестиугольника $ABCDEF$, у которого противолежащие стороны равны и параллельны (рис. 48), и закрашенного треугольника ACE.

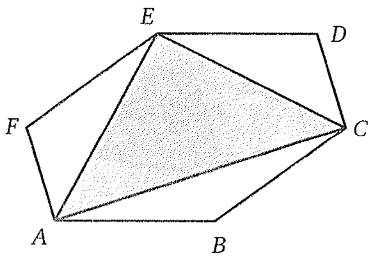


Рис. 48

18. Сравните площади правильного восьмиугольника (рис. 49) и закрашенного прямоугольника $CDGH$.

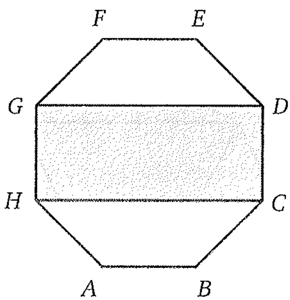


Рис. 49

19. Какой наименьший периметр может иметь забор, ограничивающий прямоугольный участок земли, площадь которого равна 625 $м^2$?

20. Какую наибольшую площадь может иметь прямоугольный участок земли, ограниченный забором, периметр которого равен 80 м?

21. Зрачок человеческого глаза, имеющий форму круга, может изменять свой диаметр в зависимости от освещения от 1,5 мм до 7,5 мм. Во сколько раз при этом увеличивается площадь поверхности зрачка?

22. Не производя вычислений, оцените, какую часть объёма единичного куба составляет объём единичного правильного тетраэдра (рис. 50).

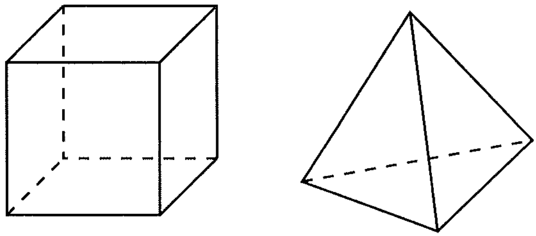


Рис. 50

23. В фужере в форме перевёрнутого конуса имеется вода, полностью его заполняющая (рис. 51). Требуется отлить половину этой воды в стакан. Какую часть высоты конуса должна занимать оставшаяся в конусе вода?

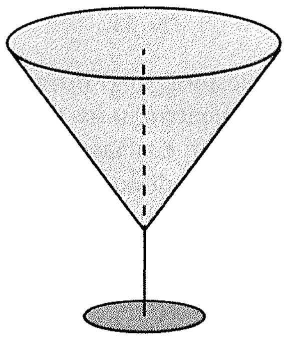


Рис. 51

24. Толщина h мякоти вишни равна диаметру d косточки (рис. 52). Считая шарообразной форму вишни и косточки, сравните объёмы мякоти и косточки.

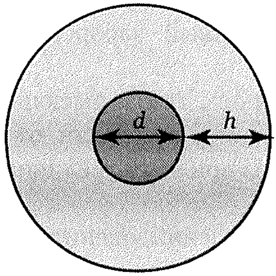


Рис. 52

25. Толщина кожуры апельсина составляет одну пятую его радиуса (рис. 53). Оцените, какую часть объёма апельсина занимает его кожура.

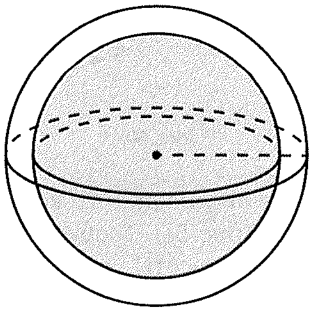


Рис. 53

26. Представим, что Земной шар обтянули по экватору верёвкой. Затем длину верёвки увеличили на 3 м и расположили её в виде окружности, концентрической с экватором. Может ли в образовавшийся просвет между поверхностью Земного шара и верёвкой, пролезть человек средней комплекции?

3. Утверждения

Укажите номера верных утверждений.

1. Прямые и углы

1. Через любую точку проходит ровно одна прямая.

2. Через любую точку проходит не менее одной прямой.

3. Через любую точку проходит более одной прямой.

4. Через любые две точки проходит не менее одной прямой.

5. Через любые две точки проходит не более одной прямой.

6. Через любые три точки проходит не менее одной прямой.

7. Через любые три точки проходит ровно одна прямая.

8. Через любые три точки проходит не более одной прямой.

9. Любые две прямые имеют не менее одной общей точки.

10. Любые две прямые имеют ровно одну общую точку.

11. Любые две прямые имеют не более одной общей точки.

12. Любые три прямые имеют не более одной общей точки.

13. Любые три прямые имеют не менее одной общей точки.

14. Сумма вертикальных углов равна 180°.

15. Сумма двух смежных углов равна 90°.

16. Смежные углы равны.

17. Если угол равен 30°, то вертикальный с ним угол равен 60°.

18. Если угол равен 45°, то вертикальный с ним угол равен 45°.

19. Если угол равен 80°, то смежный с ним угол равен 120°.

20. Если угол равен 60°, то смежный с ним угол равен 120°.

21. Если при пересечении двух прямых третьей прямой внутренние накрест лежащие углы равны 70°, то эти две прямые параллельны.

22. Если при пересечении двух прямых третьей прямой внутренние односторонние углы равны 70° и 110°, то эти две прямые параллельны.

23. Если при пересечении двух прямых третьей прямой соответственные углы равны 65°, то эти две прямые параллельны.

24. Если две прямые перпендикулярны третьей прямой, то эти две прямые перпендикулярны.

25. Если при пересечении двух прямых третьей прямой, внутренние накрест лежащие углы составляют в сумме 90°, то эти две прямые параллельны.

26. Если при пересечении двух прямых третьей прямой соответственные углы составляют в сумме 180°, то эти две прямые параллельны.

27. Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то внутренние односторонние углы равны.

28. Если расстояние от точки до прямой больше 1, то и длина любой наклонной, проведённой из данной точки к данной прямой, больше 1.

29. Если расстояние от точки до прямой равно 1, то длина любой наклонной, проведённой из данной точки к данной прямой, больше 1.

30. Если расстояние от точки до прямой меньше 1, то и длина любой наклонной, проведённой из данной точки к данной прямой, меньше 1.

2. Треугольники

1. Если сторона и угол одного треугольника соответственно равны стороне и углу другого треугольника, то такие треугольники равны.

2. Если три угла одного треугольника соответственно равны трём углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

3. Если основание и боковая сторона одного равнобедренного треугольника соответственно равны основанию и боковой стороне другого равнобедренного треугольника, то такие треугольники равны.

4. Если гипотенуза одного прямоугольного треугольника равна гипотенузе другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

5. В равнобедренном треугольнике имеется не менее двух равных углов.

6. В равнобедренном треугольнике имеется не более двух равных углов.

7. Каждая сторона треугольника не превосходит суммы двух других сторон.

8. Каждая сторона треугольника больше суммы двух других сторон.

9. Каждая сторона треугольника меньше разности двух других сторон.

10. Каждая сторона треугольника больше разности двух других сторон.

11. Если все стороны треугольника меньше 1, то и все его высоты меньше 1.

12. Если все высоты треугольника меньше 1, то и все его стороны меньше 1.

13. Если две стороны треугольника равны 3 и 4, то его третья сторона меньше 7.

14. Если две стороны треугольника равны 3 и 5, то его третья сторона больше 2.

15. Треугольник со сторонами 1, 2, 3 не существует.

16. Треугольник со сторонами 2, 2, 3 существует.

17. Треугольник со сторонами 2, 3, 4 не существует.

18. Сумма углов треугольника не превосходит 180°.

19. Внешний угол треугольника равен сумме двух его внутренних углов.

20. Внешний угол треугольника больше каждого внутреннего угла.

21. Внешний угол треугольника больше каждого, не смежного с ним, внутреннего угла.

22. Сумма острых углов прямоугольного треугольника не превосходит 90°.

23. Если два угла треугольника равны 40° и 70°, то третий угол равен 70°.

24. Если один из углов равнобедренного треугольника равен 120°, то другой его угол равен 30°.

25. Если один из углов равнобедренного треугольника равен 30°, то один из его оставшихся углов равен 120°.

26. Если в треугольнике ABC углы A и B равны соответственно 40° и 70°, то внешний угол этого треугольника с вершиной C равен 110°.

27. Если два угла треугольника меньше 30°, то его третий угол больше 120°.

28. Если один угол треугольника больше 120°, то два других его угла меньше 30°.

29. В треугольнике против большей стороны лежит меньший угол.

30. В треугольнике против меньшего угла лежит большая сторона.

31. В треугольнике против меньшей стороны лежит больший угол.

32. В треугольнике против меньшей стороны лежит меньший угол.

33. В треугольнике против меньшего угла лежит меньшая сторона.

34. В треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

35. В треугольнике ABC, для которого $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 70^\circ$, сторона AB — наибольшая.

36. В треугольнике ABC, для которого $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 70^\circ$, сторона BC — наименьшая.

37. В треугольнике ABC, для которого $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 80^\circ$, сторона AC — наибольшая.

38. В треугольнике ABC, для которого $AB = 4$, $BC = 5$, $AC = 6$, угол A — наибольший.

39. В треугольнике ABC, для которого $AB = 4$, $BC = 5$, $AC = 6$, угол B — наибольший.

40. В треугольнике ABC, для которого $AB = 3$, $BC = 4$, $AC = 5$, угол C — наименьший.

3. Окружность

1. Через любые две точки проходит единственная окружность.

2. Через любые две точки проходит не менее одной окружности.

3. Через любые две точки проходит бесконечно много окружностей.

4. Через любые три точки проходит не более одной окружности.

5. Через любые три точки проходит единственная окружность.

6. Через любые четыре точки, не принадлежащие одной прямой, проходит единственная окружность.

7. Если расстояние от центра окружности до прямой меньше диаметра окружности, то эти прямая и окружность пересекаются.

8. Если расстояние от центра окружности до прямой равно диаметру окружности, то эти прямая и окружность касаются.

9. Если расстояние от центра окружности до прямой больше диаметра окружности, то эти прямая и окружность не имеют общих точек.

10. Если радиус окружности равен 2, а расстояние от центра окружности до прямой равно 3, то эти прямая и окружность не имеют общих точек.

11. Если радиус окружности равен 3, а расстояние от центра окружности до прямой равно 2, то эти прямая и окружность пересекаются.

12. Если радиус окружности и расстояние от центра окружности до прямой равны 2, то эти прямая и окружность касаются.

13. Если расстояние между центрами двух окружностей меньше суммы радиусов, то эти окружности пересекаются.

14. Если расстояние между центрами двух окружностей равно сумме их диаметров, то эти окружности касаются.

15. Если расстояние между центрами двух окружностей больше суммы их диаметров, то эти окружности не имеют общих точек.

16. Если две окружности касаются, то расстояние между их центрами равно сумме радиусов.

17. Если радиусы двух окружностей равны 3 и 5, а расстояние между их центрами равно 1, то эти окружности пересекаются.

18. Если радиусы двух окружностей равны 3 и 5, а расстояние между их центрами равно 8, то эти окружности касаются.

19. Если радиусы двух окружностей равны 5 и 7, а расстояние между их центрами равно 3, то эти окружности не имеют общих точек.

20. Вписанные углы окружности равны.

21. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же хорду окружности, равны.

22. Если вписанный угол равен 30°, то дуга окружности, на которую опирается этот угол, равна 60°.

23. Если дуга окружности равна 80°, то центральный угол, опирающийся на эту дугу, равен 40°.

24. Если вписанный угол равен 30°, то центральный угол, опирающийся на ту же дугу окружности, равен 60°.

25. Если дуга окружности равна 80°, то вписанный угол, опирающийся на эту дугу окружности, равен 40°.

4. Четырёхугольники

1. Сумма углов выпуклого четырёхугольника равна 180°.

2. Сумма углов выпуклого четырёхугольника больше 270°.

3. Сумма углов выпуклого четырёхугольника не превосходит 360°.

4. Если сумма трёх углов выпуклого четырёхугольника равна 200°, то его четвёртый угол равен 160°.

5. Сумма двух противолежащих углов четырёхугольника не превосходит 180°.

6. Сумма двух противолежащих углов параллелограмма равна 180°.

7. Если один из углов, прилежащих к стороне параллелограмма, равен 50°, то другой угол, прилежащий к той же стороне, равен 130°.

8. Сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, не превосходит 180°.

9. Если один из углов параллелограмма равен 60°, то противолежащий ему угол равен 120°.

10. Если один из углов, прилежащих к стороне параллелограмма, равен 50°, то другой угол, прилежащий к той же стороне, равен 50°.

11. Если в четырёхугольнике две стороны параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

12. Если в четырёхугольнике две противолежащие стороны равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

13. Диагонали параллелограмма равны.

14. Диагонали параллелограмма делят его углы пополам.

15. Диагонали параллелограмма перпендикулярны.

16. Диагонали ромба в точке пересечения делятся пополам.

17. Диагонали квадрата делят его углы пополам.

18. Диагонали квадрата равны.

19. Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

20. Если в параллелограмме диагонали перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб.

21. Если диагонали параллелограмма делят его углы пополам, то этот параллелограмм — ромб.

22. Если в параллелограмме диагонали равны и перпендикулярны, то этот параллелограмм — квадрат.

23. Если противолежащие углы четырёхугольника равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

24. Если основания трапеции равны 4 и 6, то средняя линия этой трапеции равна 10.

25. Если средняя линия трапеции равна 5, то сумма её оснований равна 10.

5. Вписанные и описанные многоугольники

1. Около всякого треугольника можно описать не более одной окружности.

2. Около всякого треугольника можно описать не менее одной окружности.

3. Центром окружности, описанной около треугольника, является точка пересечения биссектрис.

4. Центром окружности, описанной около правильного треугольника, является точка пересечения высот.

5. Центр окружности, описанной около остроугольного треугольника, находится вне этого треугольника.

6. Центр окружности, описанной около тупоугольного треугольника, находится внутри этого треугольника.

7. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, находится на стороне этого треугольника.

8. Центр окружности, описанной около тупоугольного треугольника, находится вне этого треугольника.

9. Центр окружности, описанной около остроугольного треугольника, находится внутри этого треугольника.

10. Центр окружности, описанной около треугольника со сторонами, равными 3, 4, 5, находится на стороне этого треугольника.

11. Около всякого четырёхугольника можно описать не более одной окружности.

12. Центром окружности, описанной около квадрата, является точка пересечения его диагоналей.

13. Если стороны прямоугольника равны 3 и 4, то диаметр описанной около него окружности, равен 5.

14. Около любого ромба можно описать окружность.

15. Около любой трапеции можно описать окружность.

16. Около любого правильного многоугольника можно описать не более одной окружности.

17. В любой треугольник можно вписать не более одной окружности.

18. В любой треугольник можно вписать не менее одной окружности.

19. Центр окружности, вписанной в тупоугольный треугольник, находится вне этого треугольника.

20. Центром окружности, вписанной в правильный треугольник, является точка пересечения медиан.

21. В любой четырёхугольник можно вписать не более одной окружности.

22. В любой прямоугольник можно вписать окружность.

23. Центром окружности, вписанной в треугольник, является точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.

24. Центром окружности, вписанной в квадрат, является точка пересечения его диагоналей.

25. В любой правильный многоугольник можно вписать не менее одной окружности.

6. Симметрия

1. Прямая имеет единственный центр симметрии.

2. Прямая не имеет центра симметрии.

3. Прямая имеет бесконечно много центров симметрии.

4. Две центрально-симметричные прямые перпендикулярны.

5. Центром симметрии правильного треугольника является точка пересечения его биссектрис.

6. Равнобедренный треугольник не имеет центра симметрии.

7. Центром симметрии равнобедренного прямоугольного треугольника является середина гипотенузы.

8. Центром симметрии прямоугольника является точка пересечения его диагоналей.

9. Прямоугольник не имеет центра симметрии.

10. Центром симметрии квадрата является точка пересечения его диагоналей.

11. Квадрат не имеет центра симметрии.

12. Центром симметрии ромба является точка пересечения его диагоналей.

13. Ромб не имеет центра симметрии.

14. Центром симметрии равнобедренной трапеции является точка пересечения её диагоналей.

15. Равнобедренная трапеция не имеет центра симметрии.

16. Правильный пятиугольник имеет центр симметрии.

17. Правильный пятиугольник не имеет центра симметрии.

18. Правильный шестиугольник имеет центр симметрии.

19. Правильный шестиугольник не имеет центра симметрии.

20. Окружность имеет единственный центр симметрии.

21. Окружность не имеет центра симметрии.

22. Окружность имеет бесконечно много центров симметрии.

23. Круг имеет единственный центр симметрии.

24. Круг не имеет центра симметрии.

25. Круг имеет бесконечно много центров симметрии.

26. Прямая не имеет осей симметрии.

27. Прямая имеет единственную ось симметрии.

28. Прямая имеет бесконечно много осей симметрии.

29. Равнобедренный треугольник имеет единственную ось симметрии.

30. Равнобедренный треугольник имеет три оси симметрии.

31. Равнобедренный треугольник не имеет осей симметрии.

32. Параллелограмм имеет две оси симметрии.

33. Квадрат имеет две оси симметрии.

34. Прямоугольник имеет четыре оси симметрии.

35. Правильный пятиугольник имеет пять осей симметрии.

36. Правильный шестиугольник имеет три оси симметрии.

37. Правильный шестиугольник имеет шесть осей симметрии.

38. Круг не имеет осей симметрии.

38. Круг имеет одну ось симметрии.

40. Круг имеет бесконечно много осей симметрии.

7. Подобие. Теоремы Пифагора, синусов, косинусов

1. Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то такие треугольники подобны.

2. Если два угла одного треугольника соответственно пропорциональны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

3. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники подобны.

4. Если два треугольника подобны, то их соответствующие стороны равны.

5. Любые два равносторонних треугольника подобны.

6. Любые два равнобедренных треугольника подобны.

7. Любые два прямоугольных треугольника подобны.

8. Любые два прямоугольных равнобедренных треугольника подобны.

9. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы не превосходит суммы квадратов катетов.

10. В прямоугольном треугольнике квадрат катета равен разности квадратов гипотенузы и другого катета.

11. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, не превосходит половины гипотенузы.

12. Стороны треугольника пропорциональны косинусам противолежащих углов.

13. Стороны треугольника пропорциональны синусам прилежащих углов.

14. Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на синус угла между ними.

15. Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без произведения этих сторон на косинус угла между ними.

16. Если катеты прямоугольного треугольника равны 5 и 12, то его гипотенуза равна 13.

17. Если катет и гипотенуза прямоугольного треугольника равны соответственно 6 и 10, то второй катет этого треугольника равен 8.

18. Треугольник ABC, у которого $AB = 4$, $BC = 5$, $AC = 6$, является прямоугольным.

19. Треугольник ABC, у которого $AB = 3$, $BC = 4$, $AC = 5$, является тупоугольным.

20. Треугольник ABC, у которого $AB = 5$, $BC = 6$, $AC = 7$, является остроугольным.

8. Площадь

1. Если площади фигур равны, то равны и сами фигуры.

2. Площадь прямоугольника равна произведению двух его сторон.

3. Площадь квадрата равна произведению двух его смежных сторон.

4. Площадь параллелограмма равна произведению двух его сторон на косинус угла между ними.

5. Площадь ромба равна произведению его стороны на высоту, проведённую к этой стороне.

6. Площадь ромба равна произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними.

7. Если две смежные стороны параллелограмма равны 4 и 5, а угол между ними равен 30°, то площадь этого параллелограмма равна 10.

8. Если диагонали ромба равна 3 и 4, то его площадь равна 6.

9. Площадь треугольника равна произведению его стороны на высоту, проведённую к этой стороне.

10. Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту.

11. Площадь прямоугольного треугольника равна произведению его катетов.

12. Площадь прямоугольного треугольника меньше произведения его катетов.

13. Если две стороны треугольника равны 4 и 5, а угол между ними равен 30°, то площадь этого треугольника равна 5.

14. Площадь треугольника не превосходит половины произведения двух его сторон на синус угла между ними.

15. Если сторона треугольника равна 5, а высота, проведённая к этой стороне, равна 4, то площадь этого треугольника равна 20.

16. Если катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4, то его площадь равна 12.

17. Площадь трапеции меньше произведения суммы оснований на высоту.

18. Площадь трапеции не превосходит произведения средней линии на высоту.

19. Площадь трапеции равна произведению суммы оснований на высоту.

20. Если основания трапеции равны 6 и 4, а высота равна 3, то площадь этой трапеции равна 15.

21. Если средняя линия трапеции равна 5, а высота равна 3, то площадь этой трапеции равна 15.

22. Площадь многоугольника, описанного около окружности, равна четверти произведения его периметра на диаметр вписанной окружности.

23. Площадь многоугольника, описанного около окружности, равна произведению его периметра на радиус вписанной окружности.

24. Если периметр многоугольника, описанного около окружности радиусом 2, равен 20, то его площадь равна 20.

25. Площадь круга равна четверти произведения длины его окружности на диаметр.

26. Площадь круга равна произведению длины его окружности на радиус.

27. Если радиус круга равен 4, то его площадь равна 8π.

28. Если площадь круга равна 4π, то его радиус равен 2.

29. Отношение площадей подобных фигур равно коэффициенту подобия.

30. Если стороны правильного шестиугольника увеличить в три раза, то его площадь увеличится в 9 раз.

4. Доказательства

Найдите ошибки в доказательствах следующих утверждений.

Утверждение 1. *Если две стороны и угол, лежащий против одной из них, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, лежащему против одной из них, другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$. Отложим треугольник ABC от луча A_1B_1 так, чтобы вершина C перешла в точку C_2, лежащую по другую сторону от точки C_1 относительно прямой A_1B_1 (рис. 54).

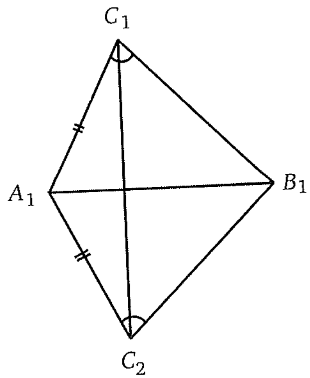


Рис. 54

Из равенства сторон A_1C_1 и A_1C_2 следует, что треугольник $C_1A_1C_2$ равнобедренный, значит, $\angle A_1C_1C_2 = \angle A_1C_2C_1$. Из этого и равенства углов C_1 и C_2 следует равенство углов $B_1C_1C_2$ и $B_1C_2C_1$. Значит, треугольник $B_1C_1C_2$ равнобедренный. Следовательно, его стороны B_1C_1 и B_1C_2 равны. Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_1B_1C_2$ равны по двум сторонам и углу между ними ($A_1C_1 = A_1C_2$, $B_1C_1 = B_1C_2$, $\angle C_1 = \angle C_2$). Следовательно, равны и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. □

Утверждение 2. *Если две стороны и высота, проведённая к одной из них, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и высоте другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, высота CH равна высоте C_1H_1 (рис. 55). Прямоугольные треугольники BCH и $B_1C_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, угол CBH равен углу $C_1B_1H_1$. Значит, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. □

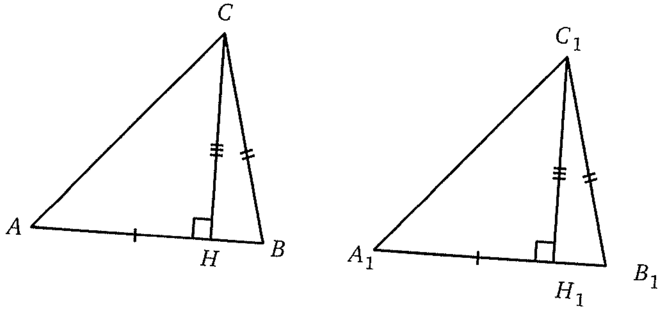


Рис. 55

Утверждение 3. *Если две стороны и высота, проведённая из их общей вершины, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и высоте другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, высота CH равна высоте C_1H_1 (рис. 56). Прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, угол ACH равен углу $A_1C_1H_1$. Прямоугольные треугольники BCH и $B_1C_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, угол BCH равен углу $B_1C_1H_1$. Следовательно, углы ACB и $A_1C_1B_1$ равны, как суммы равных углов. Значит, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. □

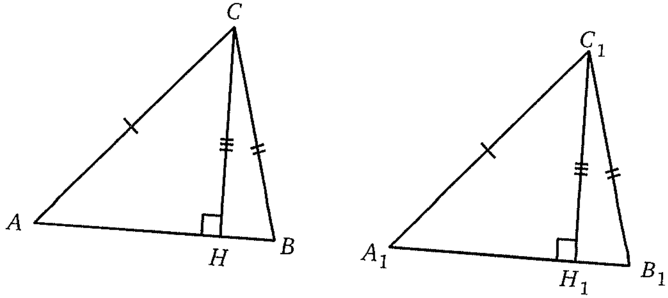


Рис. 56

Утверждение 4. *Если сторона и две высоты, опущенные из её концов, одного треугольника соответственно равны стороне и двум высотам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, высота AG равна высоте A_1G_1, высота BH равна высоте B_1H_1 (рис. 57). Прямоугольные треугольники ABG и $A_1B_1G_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, угол B равен углу B_1. Прямоугольные треугольники ABH и $A_1B_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, угол A равен углу A_1. Значит, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. □

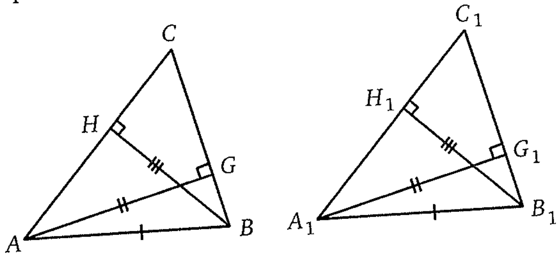


Рис. 57

Утверждение 5. *Если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и медиана, проведённая к другой стороне, прилежащей к данному углу, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и медиане другого треугольника, то эти треугольники равны.*

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ угол A равен углу A_1, сторона AB равна стороне A_1B_1, медиана BM равна медиане B_1M_1 (рис. 58).

Треугольники ABM и $A_1B_1M_1$ равны по двум сторонам и углу. Следовательно, $AM = A_1M_1$. Значит, равны стороны AC и A_1C_1. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. □

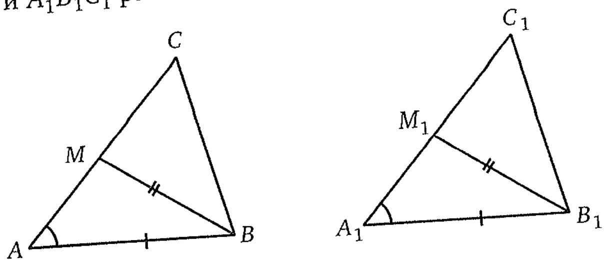


Рис. 58

Утверждение 6. *Если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и медиана, проведённая к этой стороне, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и медиане другого треугольника, то эти треугольники равны.*

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ угол A равен углу A_1, сторона AB равна стороне A_1B_1, медиана CM равна медиане C_1M_1 (рис. 59).

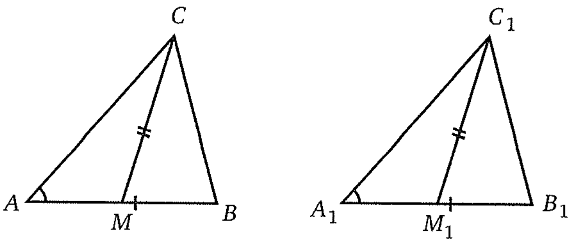


Рис. 59

Из равенства сторон AB и A_1B_1 следует равенство отрезков AM и A_1M_1. Треугольники ACM и $A_1C_1M_1$ равны по двум сторонам и углу. Следовательно, $AC = A_1C_1$. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. □

Утверждение 7. *Если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и биссектриса, проведённая к другой стороне этого угла, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и биссектрисе другого треугольника, то эти треугольники равны.*

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ угол A равен углу A_1, сторона AC равна стороне A_1C_1, биссектриса CD равна биссектрисе C_1D_1 (рис. 60).

Треугольники ACD и $A_1C_1D_1$ равны по двум сторонам и углу. Следовательно, угол ACD равен углу $A_1C_1D_1$. Значит, равны и углы ACB

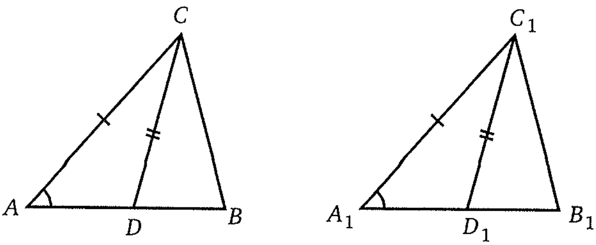


Рис. 60

и $A_1C_1B_1$. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. □

Утверждение 8. *Если угол, медиана и высота, проведённые к стороне этого угла, одного треугольника соответственно равны углу, медиане и высоте другого треугольника, то эти треугольники равны.*

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ угол A равен углу A_1, медиана CM равна медиане C_1M_1, высота CH равна высоте C_1H_1 (рис. 61).

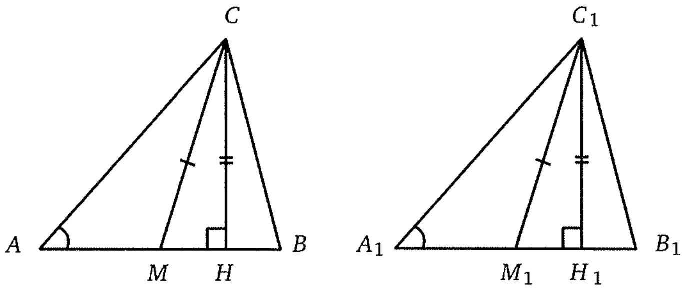


Рис. 61

Прямоугольные треугольники MCH и $M_1C_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Значит, угол CMH равен углу $C_1M_1H_1$. Следовательно, угол AMC равен углу $A_1M_1C_1$. Треугольники AMC и $A_1M_1C_1$ равны по стороне и двум углам. Следовательно, сторона AC равна стороне A_1C_1, отрезок AM равен отрезку A_1M_1. Из равенства этих отрезков вытекает равенство сторон AB и A_1B_1. Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. □

Утверждение 9. *Если сторона, биссектриса и высота, проведённые из конца этой стороны, одного треугольника соответственно равны стороне, биссектрисе и высоте другого треугольника, то эти треугольники равны.*

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ сторона AC равна стороне A_1C_1, биссектриса CD равна биссектрисе C_1D_1, высота CH равна высоте C_1H_1 (рис. 62).

Прямоугольные треугольники DCH и $D_1C_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Значит, угол CDH равен углу $C_1D_1H_1$. Следовательно, угол ADC равен углу $A_1D_1C_1$. Треугольники ADC и $A_1D_1C_1$ равны по двум сторонам и углу. Следовательно, угол A равен углу A_1, угол ACD

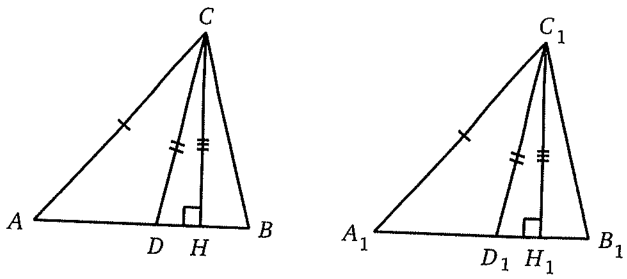


Рис. 62

равен углу $A_1C_1D_1$. Из равенства этих углов следует равенство углов ACB и $A_1C_1B_1$. Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. □

Утверждение 10. *Если угол, биссектриса и высота, проведённые к стороне этого угла, одного треугольника соответственно равны углу, биссектрисе и высоте другого треугольника, то эти треугольники равны.*

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ угол A равен углу A_1, биссектриса CD равна биссектрисе C_1D_1, высота CH равна высоте C_1H_1 (рис. 63).

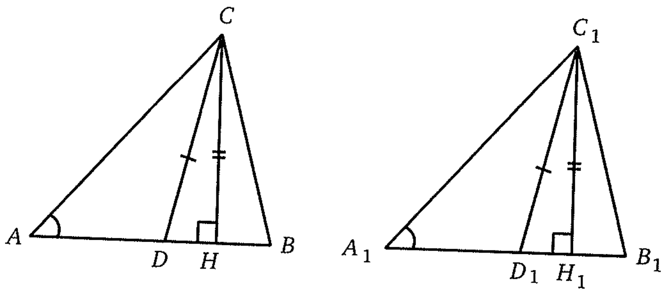


Рис. 63

Прямоугольные треугольники DCH и $D_1C_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Значит, угол CDH равен углу $C_1D_1H_1$. Следовательно, угол ADC равен углу $A_1D_1C_1$. Треугольники ADC и $A_1D_1C_1$ равны по стороне и двум углам. Следовательно, угол ACD равен углу $A_1C_1D_1$. Из равенства этих углов следует равенство углов ACB и $A_1C_1B_1$. Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. □

Утверждение 11. *Если две стороны и радиус описанной окружности одного треугольника соответственно равны двум сторонам и радиусу описанной окружности другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и R — радиус описанных около них окружностей (рис. 64).

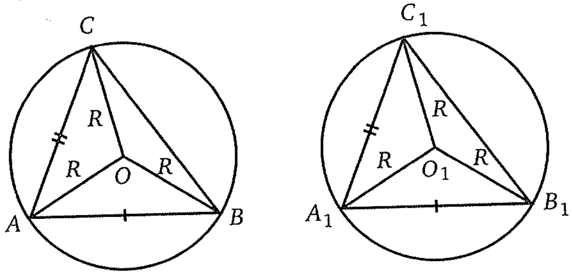


Рис. 64

Обозначим O и O_1 соответственно центры этих окружностей. Треугольники AOB и $A_1O_1B_1$ равны по трём сторонам. Следовательно, угол BAO равен углу $B_1A_1O_1$. Треугольники AOC и $A_1O_1C_1$ равны по трём сторонам. Следовательно, угол CAO равен углу $C_1A_1O_1$. Значит, угол BAC равен углу $B_1A_1C_1$. Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. □

Утверждение 12. *Если угол, сторона, прилежащая к этому углу и радиус описанной окружности одного треугольника соответственно равны углу, стороне и радиусу описанной окружности другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$ и R — радиус описанных около них окружностей (рис. 65).

Из равенства углов A и A_1 следует равенство отрезков BC и B_1C_1. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ будут равны по двум сторонам и углу. □

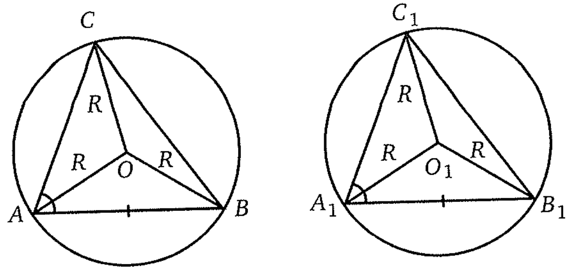


Рис. 65

Утверждение 13. *Гипотенуза прямоугольного треугольника равна его катету.*

Доказательство. Пусть ABC — прямоугольный треугольник (угол C — прямой) (рис. 66). Докажем, что гипотенуза AB равна катету AC.

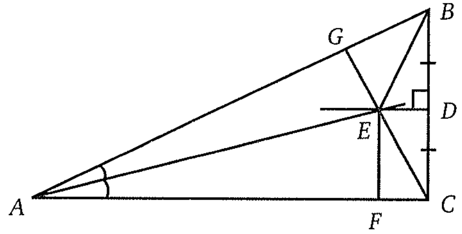


Рис. 66

Проведём биссектрису угла A и серединный перпендикуляр к стороне BC. Обозначим через E их точку пересечения. Соединим отрезками точку E с вершинами B и C. Из точки E опустим перпендикуляры EF и EG соответственно на стороны AC и AB треугольника ABC. Так как точка E принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку BC, то отрезки BE и CE равны. Так как точка E принадлежит биссектрисе угла A, то отрезки EF и EG равны. Прямоугольные треугольники BEG и CEF равны по катету и гипотенузе. Следовательно, отрезки BG и CF равны. Прямоугольные треугольники AEG и AEF равны по катету и гипотенузе. Следовательно, отрезки AG и AF равны. Складывая отрезки AG и BG, AF и CF, получаем равенство гипотенузы AB и катета AC. □

Утверждение 14. *Стороны произвольного треугольника равны.*

Доказательство. Пусть ABC — произвольный треугольник, D — середина стороны AB. Проведём биссектрису угла C и серединный

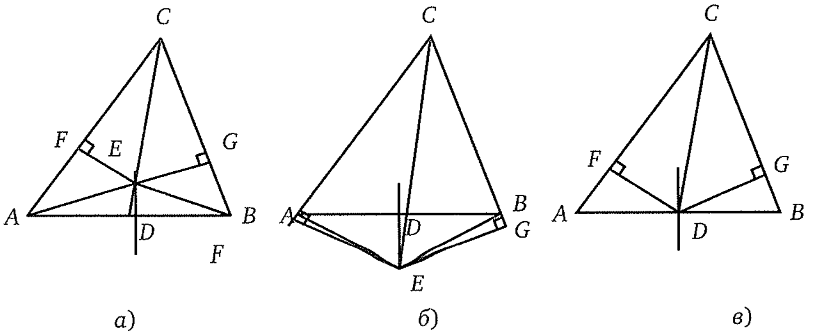


Рис. 67

перпендикуляр к отрезку AB. Обозначим E их точку пересечения. Возможны следующие случаи: либо точка E находится внутри треугольника ABC (рис. 67, *а*); либо вне его (рис. 67, *б*); либо на стороне AB (рис. 67, *в*).

В первом случае опустим перпендикуляры EF и EG на стороны соответственно AC и BC. Так как точка E принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку AB, то отрезки AE и BE равны. Так как точка E принадлежит биссектрисе угла A, то отрезки EF и EG равны. Прямоугольные треугольники AEF и BEG равны по катету и гипотенузе. Следовательно, отрезки AF и BG равны. Прямоугольные треугольники CEF и CEG равны по гипотенузе и острому углу. Следовательно, отрезки FC и GC равны. Складывая отрезки AF и FC, BG и GC, получаем равенство сторон AC и BC.

Аналогичным образом рассматриваются второй и третий случаи. Также доказывается равенство сторон AB и AC. Следовательно, все стороны треугольника ABC равны. □

Утверждение 15. *Прямой угол равен тупому углу.*

Доказательство. Пусть $ABCD$ — четырёхугольник (рис. 68), в котором $AD = BC$, угол D прямой, угол C тупой. Докажем, что углы D и C равны. Проведём серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD. Обозначим через G их точку пересечения. Прямоугольные треугольники AEG и BEG равны по двум катетам. Следовательно, $AG = BG$. Прямоугольные треугольники DFG и CFG также равны по двум катетам. Следовательно, $DG = CG$, $\angle GDF = \angle GCF$. Треугольники AGD и BGC равны по трём сторонам. Следовательно, $\angle ADG = \angle BCG$. Вычитая из второго равенства углов первое, получаем равенство углов ADC и BCD, т. е. получаем, что прямой угол ADC равен тупому углу BCD. □

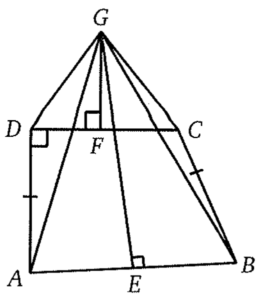


Рис. 68

Утверждение 16. *Если в четырёхугольнике две противолежащие стороны равны, то две другие стороны параллельны.*

Доказательство. Пусть $ABCD$ — четырёхугольник, у которого равны стороны AD и BC (рис. 69).

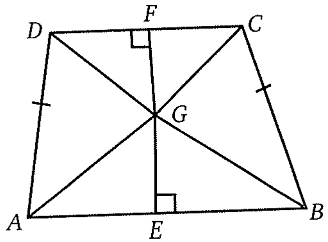


Рис. 69

Проведём серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD. Если они параллельны, то стороны AB и CD параллельны, так как они будут перпендикулярны параллельным прямым. Если эти серединные перпендикулярны не параллельны, то обозначим через G их общую точку. Прямоугольные треугольники AEG и BEG равны по двум катетам. Следовательно, $AG = BG$, $\angle AGE = \angle BGE$. Прямоугольные треугольники DFG и CFG также равны по двум катетам. Следовательно, $DG = CG$, $\angle DGF = \angle CGF$. Треугольники AGD и BGC равны по трём сторонам. Следовательно, $\angle AGD = \angle BGC$. Так как сумма всех рассмотренных углов равна 360°, то из равенства их пар следует, что сумма углов AGE, AGD и DGF равна 180°. Значит, серединные перпендикуляры совпадают. В этом случае стороны AB и CD будут перпендикулярны одной прямой, следовательно, параллельны. □

Утверждение 17. *Сумма углов треугольника равна* 180°.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC (рис. 70).

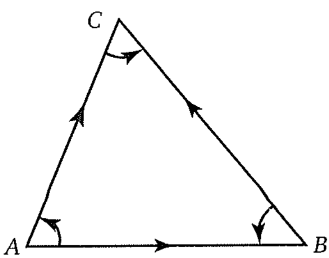


Рис. 70

Зададим на прямой AB направление (указано стрелкой). Повернём прямую AB вокруг точки A на угол A. Она перейдёт в прямую AC. Повернём прямую AC вокруг точки C на угол C. Она перейдёт в прямую BC. Повернём прямую BC вокруг точки B на угол B. Она перейдёт в прямую BA с направлением, противоположным начальному направлению прямой AB. Таким образом, прямая AB повернулась на 180°. С другой стороны, этот поворот на 180° складывается из поворотов на углы A, B и C. Следовательно, сумма углов A, B и C треугольника ABC равна 180°. □

Утверждение 18. *Из вершины треугольника можно провести две высоты.*

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC и на его сторонах AC и BC, как на диаметрах, опишем окружности (рис. 71).

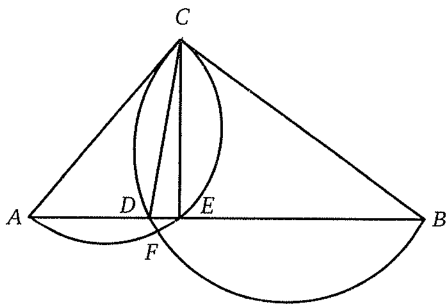


Рис. 71

Точки D и E пересечения этих окружностей со стороной AB соединим отрезками с точкой C. Угол AEC равен 90°, так как является вписанным углом, опирающимся на диаметр окружности. Аналогично, угол BDC равен 90°, так как является вписанным углом, опирающимся на диаметр окружности. Следовательно, CD и CE являются высотами треугольника ABC. □

Утверждение 19. *Хорда, не проходящая через центр окружности, равна диаметру этой окружности.*

Доказательство. Рассмотрим окружность, в которой проведён диаметр AB (рис. 72).

Отметим на этой окружности какую-нибудь точку C, отличную от A и B. Соединим её отрезком с точкой A. Обозначим середину хорды AC через D и проведём через неё и точку B хорду BE. Соединим отрезком точки C и E. Треугольники ABD и ECD равны по

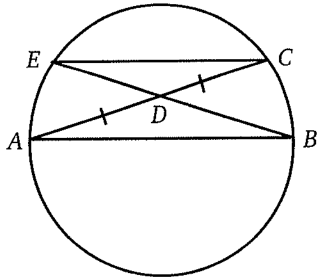


Рис. 72

стороне и двум углам ($AD = CD$ по построению, $\angle B = \angle C$ как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу $\breve{AE}$, $\angle ADB = \angle CDE$ как вертикальные). Так как в равных треугольниках против равных углов лежат и равные стороны, то $AB = CE$. □

Утверждение 20. *Сумма длин катетов прямоугольного треугольника равна длине его гипотенузе.*

Доказательство. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC (угол C — прямой) (рис. 73).

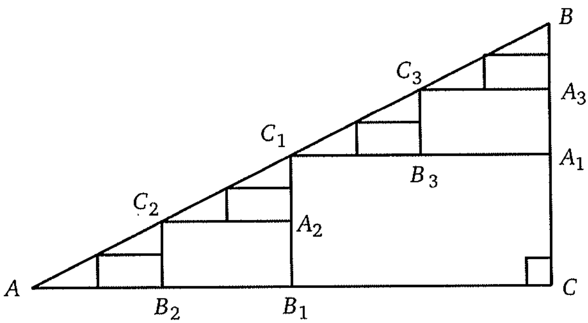


Рис. 73

Из середины C_1 гипотенузы AB опустим перпендикуляры C_1A_1 и C_1B_1 соответственно на катеты BC и AC. Длина ломаной $AB_1C_1A_1B$ будет равна сумме длин катетов AC и BC. Из середин C_2, C_3 отрезков соответственно AC_1, C_1B опустим перпендикуляры C_2A_2, C_2B_2, C_3A_3, C_3B_3 на соответствующие катеты прямоугольных треугольников AB_1C_1, C_1A_1B. Длина ломаной $AB_2C_2A_2C_1B_3C_3A_3B$ будет равна сумме длин катетов AC и BC. Продолжая этот процесс, будем получать ломаные, приближающиеся к гипотенузе. Длины этих ломаных будут стремиться к длине гипотенузы. Так как длины этих ломаных остаются равными сумме длин катетов AC и BC, то длина гипотенуза AB будет равна сумме длин катетов AC и BC. □

Утверждение 21. *Углы произвольного треугольника равны.*

Доказательство. Обозначим углы A, B, C треугольника ABC соответственно α, β, γ, а стороны, лежащие против этих углов, соответственно a, b, c. На продолжениях сторон BC и AC отложим соответственно отрезки $CD=b$ и $CE=a$ (рис. 74).

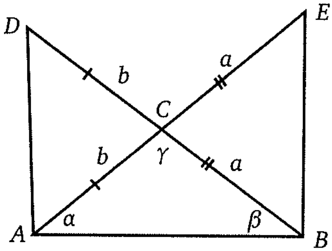


Рис. 74

Тогда $\angle D=\frac{\gamma}{2}$, следовательно, $\angle BAD=\alpha+\frac{\gamma}{2}$. По теореме синусов имеем:

$$\frac{a+b}{\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)}=\frac{c}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Аналогично, $\angle E=\frac{\gamma}{2}$, следовательно, $\angle ABE=\beta+\frac{\gamma}{2}$. По теореме синусов имеем:

$$\frac{a+b}{\sin\left(\beta+\frac{\gamma}{2}\right)}=\frac{c}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Из этих двух равенств получаем равенство

$$\frac{a+b}{\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)}=\frac{a+b}{\sin\left(\beta+\frac{\gamma}{2}\right)}.$$

Следовательно, имеет место равенство $\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)=\sin\left(\beta+\frac{\gamma}{2}\right)$, из которого следует равенство $\alpha+\frac{\gamma}{2}=\beta+\frac{\gamma}{2}$, значит, имеет место равенство $\alpha=\beta$.

Аналогичным образом доказывается, что $\beta=\gamma$. Следовательно, все углы треугольника ABC равны. □

Утверждение 22. $64 = 65$.

Доказательство. Рассмотрим квадрат со стороной, равной 8. Разрежем его на части, как показано на рисунке 75, *а*. Сложим из этих частей прямоугольник (рис. 75, *б*). Его площадь равна 65. Следовательно, «$64 = 65$». □

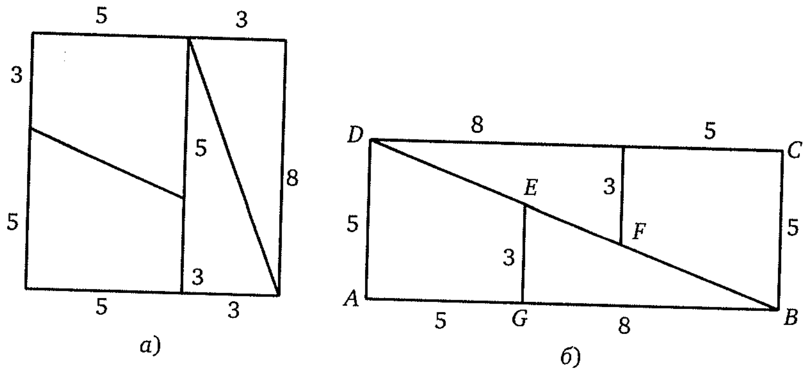


Рис. 75

Утверждение 23. *Две окружности разных радиусов имеют одинаковую длину.*

Доказательство. Рассмотрим две концентрические окружности (рис. 76).

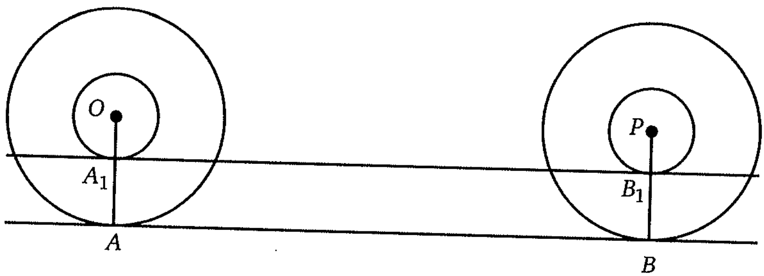


Рис. 76

Предположим, что большая окружность прокатилась по прямой из положения A в положение B и сделала полный оборот. Тогда длина отрезка AB равна длине большей окружности. При этом меньшая окружность переместится из положения A_1 в положение B_1 и также сделает полный оборот. Следовательно, длина отрезка A_1B_1 равна длине меньшей окружности. Учитывая, что отрезки AB и A_1B_1 равны, получаем, что равны длины данных окружностей. □

Утверждение 24. *Длина полуокружности равна диаметру соответствующей окружности.*

Доказательство. Рассмотрим полуокружность и диаметр $AB=d$. Разобьём этот диаметр на n равных частей и построим на них, как на диаметрах, полуокружности (рис. 77).

Длина исходной полуокружности равна $\pi\frac{d}{2}$. Длины построенных полуокружностей равны $\pi\frac{d}{2n}$. Следовательно, их сумма равна $\pi\frac{d}{2}$, т. е. равна длине исходной полуокружности. При увеличении n построенные полуокружности будут приближаться к диаметру AB. Следовательно, сумма их длин должна приближаться к диаметру. Так как эта сумма постоянна и равна длине полуокружности, то она будет равна диаметру. □

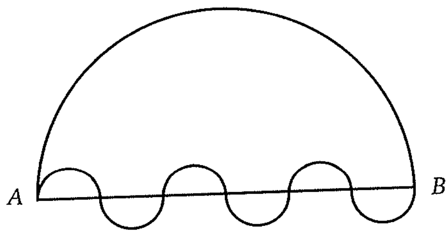


Рис. 77

5. Контрпримеры

Приведите контрпримеры для следующих утверждений.

Утверждение 1. Если две стороны и угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника, то такие треугольники равны.

Утверждение 2. Если две стороны и высота, проведённая к одной из них, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и высоте другого треугольника, то такие треугольники равны.

Утверждение 3. Если две стороны и высота, проведённая из их общей вершины, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и высоте другого треугольника, то такие треугольники равны.

Утверждение 4. Если сторона и две высоты, опущенные из её концов, одного треугольника соответственно равны стороне и двум высотам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Утверждение 5. Если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и медиана, проведённая к другой стороне, прилежащей к данному углу, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и медиане другого треугольника, то эти треугольники равны.

Утверждение 6. Если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и медиана, проведённая к этой стороне, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и медиане другого треугольника, то эти треугольники равны.

Утверждение 7. Если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и биссектриса, проведённая к другой стороне этого угла, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и биссектрисе другого треугольника, то эти треугольники равны.

Утверждение 8. Если угол, медиана и высота, проведённые к стороне этого угла, одного треугольника соответственно равны углу, медиане и высоте другого треугольника, то эти треугольники равны.

Утверждение 9. Если сторона, биссектриса и высота, проведённые из конца этой стороны, одного треугольника соответственно равны стороне, биссектрисе и высоте другого треугольника, то эти треугольники равны.

Утверждение 10. Если угол, биссектриса и высота, проведённые к стороне этого угла, одного треугольника соответственно равны углу, биссектрисе и высоте другого треугольника, то эти треугольники равны.

Утверждение 11. Если две стороны и радиус описанной окружности одного треугольника соответственно равны двум сторонам и радиусу описанной окружности другого треугольника, то такие треугольники равны.

Утверждение 12. Если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и радиус описанной окружности одного треугольника соответственно равны углу, стороне и радиусу описанной окружности другого треугольника, то такие треугольники равны.

Утверждение 13. Если сторона и два угла одного треугольника равны стороне и двум углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Утверждение 14. Если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и медиана, проведённая к другой стороне, прилежащей к данному углу, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и медиане другого треугольника, то эти треугольники равны.

Утверждение 15. Если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и медиана, проведённая к стороне, противолежащей данному углу, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и медиане другого треугольника, то эти треугольники равны.

Утверждение 16. Если угол, сторона, противолежащая этому углу, и медиана, проведённая к другой стороне, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и медиане другого треугольника, то эти треугольники равны.

Утверждение 17. Если угол и две медианы, проведённые к его сторонам, одного треугольника соответственно равны углу и двум медианам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Утверждение 18. Если угол и две медианы, одна из которых проведена из вершины данного угла, одного треугольника, соответственно равны углу и двум медианам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Утверждение 19. Если сторона треугольника, медиана и высота, проведённые к двум другим его сторонам, соответственно равны стороне, медиане и высоте другого треугольника, то эти треугольники равны.

Утверждение 20. Если угол, медиана и высота, проведённые из вершин двух других углов, одного треугольника соответственно равны углу, медиане и высоте другого треугольника, то эти треугольники равны.

6. Задачи с неоднозначным ответом

Задача 1. Радиусы двух касающихся окружностей равны 3 и 2. Найдите расстояние между их центрами.

Задача 2. Радиусы двух пересекающихся окружностей равны 5 и 4, а общая хорда равна 6. Найдите расстояние между их центрами.

Задача 3. В окружности проведены три хорды AB, BC и CD и отмечены их середины соответственно M, N и K. Угол BMN равен α. Найдите угол NKC.

Задача 4. Треугольник ABC вписан в окружность радиусом 1, сторона AB равна 1. Найдите угол C.

Задача 5. Расстояние между центрами двух окружностей равно 4. Их радиусы равны 2 и 1. Найдите отрезок их общей касательной, заключённый между точками касания.

Задача 6. В треугольнике ABC $AC=5$, $BC=4$, высота CH равна 3. Найдите сторону AB.

Задача 7. В треугольнике ABC $AB=6$, $BC=5$, высота CH равна 4. Найдите сторону AC.

Задача 8. В треугольнике ABC сторона AB равна 5, высота AG равна 4, высота BH равна 3. Найдите стороны AC и BC этого треугольника.

Задача 9. В треугольнике ABC $AC=10$, $\angle A=60°$, медиана CM равна 9. Найдите сторону AB.

Задача 10. В треугольнике ABC $AB=16$, $\angle A=60°$, медиана CM равна 7. Найдите сторону AC.

Задача 11. В треугольнике ABC $AB=6$, $AC=BC=5$. Через середину D стороны AB проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке E и отсекающая треугольник, подобный треугольнику ABC. Найдите сторону DE отсечённого треугольника.

Задача 12. Сторона AD параллелограмма $ABCD$ равна 2. Биссектрисы углов A и B пересекают сторону CD в точках M и N. Найдите сторону AB, если отрезок MN равен 1.

Задача 13. Расстояния от точки C, расположенной внутри прямого угла, до его сторон равны 1 и 2. Найдите радиус окружности, проходящей через точку C и касающейся сторон этого угла.

Задача 14. Трапеция с основаниями 14 и 40 вписана в окружность радиусом 25. Найдите высоту трапеции.

Задача 15. Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Известно, что угол AO_1B равен 90°, угол AO_2B равен 60°, $O_1O_2 = 1$. Найдите радиусы окружностей.

Задача 16. Около треугольника ABC описана окружность с центром O, угол AOB равен 60°. В треугольник ABC вписана окружность с центром P. Найдите угол APB.

Задача 17. Треугольник ABC вписан в окружность радиусом 12. Известно, что $AB = 6$ и $BC = 4$. Найдите AC.

Задача 18. Прямые, содержащие высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что $CH = AB$. Найдите угол ACB.

Задача 19. В треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1, O — центр вписанной окружности. Известно, что $BC = 24$, $B_1C_1 = 12$. Найдите радиус R окружности, описанной около треугольника BOC.

Задача 20. На стороне AB угла BAC, равного 30°, взята такая точка D, что $AD = 1$ и $DB = 2$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки B, D и касающейся прямой AC.

Ответы и указания

1. Распознавание

1. Нет. **2.** Да. **3.** Линии a и c изображают одну и ту же прямую. **4.** Линии a и b являются прямыми. **5.** $ABCD$ — квадрат.

6. а), в) Нет; б) да. Действительно, предположим, что биссектриса AA_1 треугольника ABC проходит через середину O биссектрисы CC_1. Тогда AO является биссектрисой и медианой треугольника ACC_1. Значит, этот треугольник равнобедренный ($AC = AC_1$), и AO является его высотой. Следовательно, сумма углов A и C треугольника AOC равна 90°. Так как AA_1 и CC_1 — биссектрисы, то из этого следует, что сумма углов A и C треугольника ABC равна 180°, что невозможно. Следовательно, одна биссектриса треугольника не может проходить через середину другой биссектрисы этого треугольника (рис. 78, a).

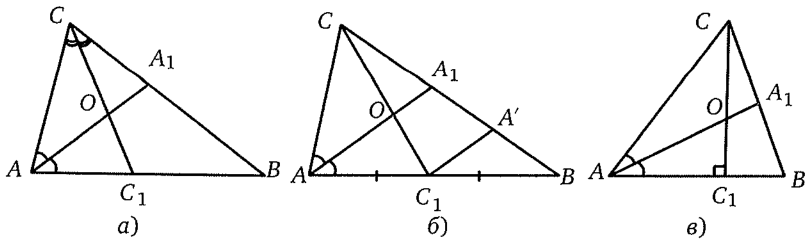


Рис. 78

Выясним, в каком отношении биссектриса треугольника может делить его медиану. Предположим, что биссектриса AA_1 треугольника ABC пересекает медиану CC_1 в точке O. Обозначим стороны треугольника $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ (рис. 78, $б$). Выразим отношение $CO : OC_1$ через эти стороны. Для этого через точку C_1 проведём прямую, параллельную прямой AA_1, и обозначим A' её точку пересечения со стороной BC. Тогда отрезок C_1A' является средней линией треугольника ABA_1. Следовательно, $A_1A' = A'B$. По свойству биссектрисы треугольника точка A_1 делит отрезок BC в отношении $CA_1 : A_1B = b : c$. Значит, $CA_1 : A_1A' = 2b : c$. По теореме о пропорциональных отрезках получаем равенство $\frac{CO}{OC_1} = \frac{2b}{c}$. Это отношение может принимать любые значения, большие нуля. В частности, оно равно 1, если $c = 2b$; равно 2, если $b = c$.

Выясним, в каком отношении биссектриса треугольника может делить его высоту. Предположим, что биссектриса AA_1 треугольника ABC пересекает высоту CC_1 в точке O (рис. 78, *в*). Так как AO — биссектриса треугольника ACC_1, то имеют место равенства

$$\frac{CO}{OC_1} = \frac{AC}{AC_1} = \frac{1}{\cos A}.$$

Следовательно, отношение $\frac{CO}{OC_1}$ может принимать любое значение, большее единицы. В частности, биссектриса не может проходить через середину высоты.

7. а), б) Нет; в) да. Докажем, что медиана треугольника не может проходить через середину его биссектрисы. Предположим, что медиана AA_1 треугольника ABC пересекает биссектрису CC_1 в точке O (рис. 79, *а*). Если бы точка O была серединой биссектрисы CC_1, то отрезок OA_1 был бы средней линией треугольника BCC_1. Следовательно, прямая OA_1 была бы параллельна прямой AB, что неверно. Значит, медиана треугольника не может проходить через середину биссектрисы.

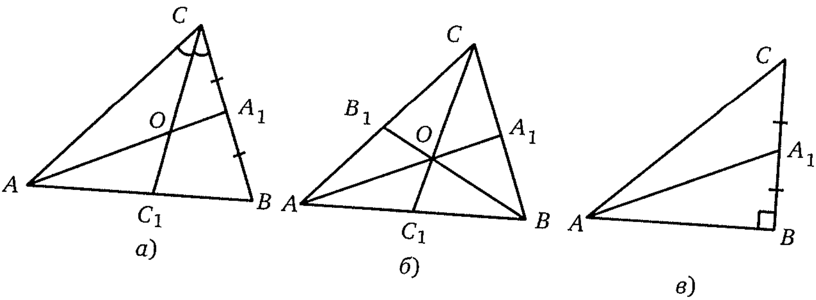


Рис. 79

Известно, что медианы треугольника в точке пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершин (рис. 79, *б*). Следовательно, медиана треугольника не может проходить через середину другой его медианы.

На рисунке 79, *в* представлен случай, когда медиана AA_1 треугольника ABC проходит через середину его высоты CB.

8. а), б), в) Да. Выясним, в каком отношении высота треугольника может делить его биссектрису. Обозначим O точку пересечения высоты AA_1 и биссектрисы CC_1 треугольника ABC. Докажем, что отношение $CO:OC_1$ может принимать любое значение $k>0$. Рассмотрим острый угол с вершиной C (рис. 80, *а*). Проведём биссектрису этого угла и отложим на ней отрезок CC_1. Отметим на этом отрезке точку O, делящую его в отношении $\frac{CO}{OC_1}=k$. Через точку O проведём прямую, перпендикулярную одной стороне рассмотренного угла, и обозначим A_1 их точку пересечения. Обозначим A точку пересечения этой прямой с другой стороной угла. Через точки A и C_1 проведём прямую и обозначим B её точку пересечения с прямой CA_1. Треугольник ABC будет искомым треугольником, у которого высота AA_1 делит биссектрису CC_1 в отношении $\frac{CO}{OC_1}=k$.

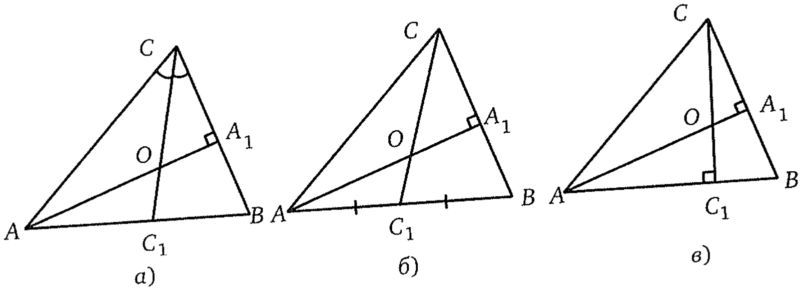


Рис. 80

Выясним, в каком отношении высота треугольника может делить его медиану. Обозначим O точку пересечения высоты AA_1 и медианы CC_1 треугольника ABC. Докажем, что отношение $CO:OC_1$ может принимать любое значение $k>0$. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABA_1 (рис. 80, *б*). На продолжении катета BA_1 отметим точку C. Соединим её отрезком с точкой A и с серединой C_1 гипотенузы AB. Обозначим O точку пересечения этого отрезка и катета AA_1. Получим треугольник ABC с высотой AA_1 и медианой CC_1. Заметим, что если точка C приближается к точке A_1, то отношение $\frac{CO}{OC_1}$ приближается к нулю. Если же точка C удаляется от точки A_1, то это отношение неограниченно растёт. Учитывая непрерывность изменения этого отношения, получаем, что оно может принимать любые значения, большие нуля.

Докажем, что отношение $CO:OC_1$, в котором высота AA_1 треугольника ABC делит высоту CC_1, может принимать любое значение

$k > 0$. Рассмотрим прямоугольный треугольник BCC_1 (рис. 80, *в*). Отметим на катете CC_1 точку O, делящую этот катет в отношении $\frac{CO}{OC_1} = k$. Через точку O проведём прямую, перпендикулярную прямой BC. Найдём точку A её пересечения с прямой BC_1. Треугольник ABC будет искомым треугольником, в котором точка O пересечения высот AA_1 и CC_1 делит высоту CC_1 в отношении $\frac{CO}{OC_1} = k$.

9. Рассмотрим треугольник ABC, в котором угол A острый, $AB = AC\left(\frac{1}{\cos A} - 1\right)$. Используя теорему Чевы, нетрудно доказать, что медиана, биссектриса и высота, проведённые из вершин соответственно A, B, C этого треугольника, пересекаются в одной точке. Построим пример такого треугольника. Рассмотрим какой-нибудь прямоугольный треугольник ACC' (рис. 81).

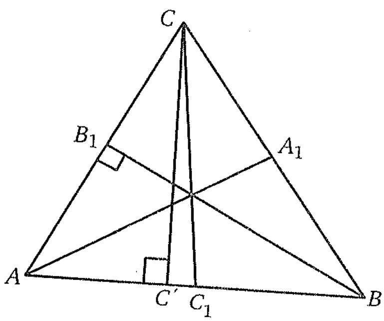


Рис. 81

На гипотенузе AC отложим отрезок $CB_1 = AC'$. Через точку B_1 проведём прямую, перпендикулярную прямой AC, и обозначим B её точку пересечения с прямой AC'. Треугольник ABC будет искомым.

10. Скрещиваются. **11.** Нет.
12. Скрещиваются и перпендикулярны. **13.** Скрещиваются.
14. Нет. **15.** Скрещиваются и перпендикулярны.
16. Скрещиваются. **17.** Скрещиваются и перпендикулярны.
18. Скрещиваются и перпендикулярны. **19.** Бесконечно много.
20. Скрещиваются. **21.** Скрещиваются. **22.** Пересекаются.
23. Пересекаются. **24.** Пересекаются. **25.** Параллельны.
26. Пересекаются. **27.** Пересекаются. **28.** а), б), г). **29.** а), б).
30. 5. **31.** Додекаэдра. **32.** Икосаэдр. **33.** 5. **34.** Додекаэдра.

35. Икосаэдра и додекаэдра. **36.** Р = 30, Г = 20. **37.** В = 20, Р = 30.
38. Р = 24, $Г_3 = 8$, $Г_4 = 6$. **39.** 1), 3), 7). **40.** 3). **41.** 20.

42. а) Да; б), в) нет. Докажем, что в сечении куба плоскостью не могут получиться прямоугольный или тупоугольный треугольники. Пусть плоскость пересекает рёбра куба, выходящие из вершины B_1 соответственно в точках A', B', C' (рис. 82).

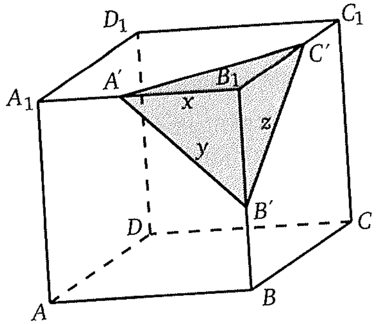


Рис. 82

Обозначим $B_1A' = x$, $B_1B' = y$, $B_1C' = z$. Тогда $A'B'^2 = x^2 + y^2$, $A'C'^2 = x^2 + z^2$, $B'C'^2 = y^2 + z^2$. Из этих равенств следует, что квадрат каждой стороны треугольника $A'B'C'$ меньше суммы квадратов двух других сторон. Значит, треугольник $A'B'C'$ остроугольный.

43. а), б), в), г) Да; д) нет. На рисунках 83, *а*, *б* показаны сечения куба соответственно в форме ромба и трапеции. Как было доказано в задаче 42, треугольник IEH (рис. 83, *б*) остроугольный. Значит, углы E и H четырёхугольника $EFGH$ тупые. Следовательно, в сечении куба плоскостью не может получиться прямоугольная трапеция.

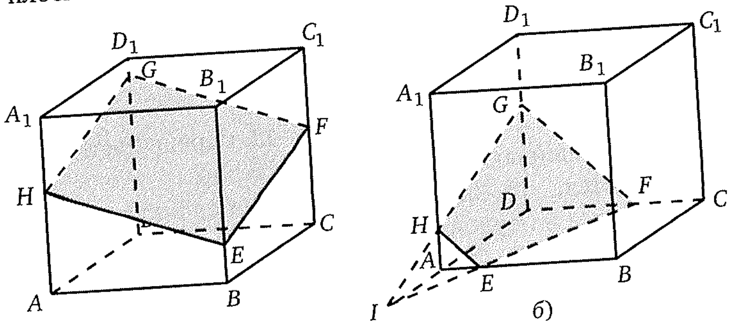


Рис. 83

44. а), б) Нет; в), г) да. Докажем, что в сечении куба не может получиться пятиугольник $EFGHI$ (рис. 84), у которого равны четыре стороны. Проведём прямые FG и EI. Обозначим R их точку пересечения. Четырёхугольник $RGHI$ — параллелограмм. Значит, сторона EI пятиугольника меньше его стороны GH, а сторона FG меньше стороны IH. Следовательно, у этого пятиугольника нет четырёх равных сторон.

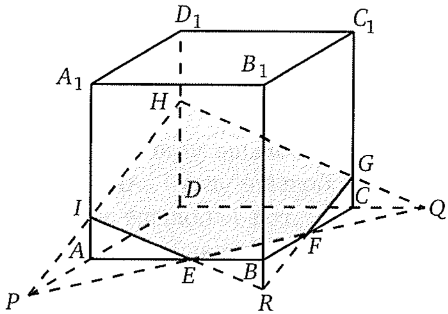


Рис. 84

Докажем, что в сечении единичного куба может получиться пятиугольник $EFGHI$, у которого равны три стороны EF, GH и IH. Выберем точки E, F так, чтобы $AE = CF = d$ $(0 < d < 1)$. Обозначим $DH = x$.

$$EF^2 = 2(1-d)^2, \quad AP = d, \quad AI = \frac{d \cdot x}{1+d}, \quad IH^2 = \frac{x^2}{(1+d)^2} + 1.$$

Приравнивая EF^2 и IH^2, получаем уравнение

$$2(1-d)^2 = \frac{x^2}{(1+d)^2} + 1,$$

решая которое, находим $x^2 = (1+d)^2(2(1-d)^2 - 1)$. Из неравенства $2(1-d)^2 - 1 > 0$ следует, что для d должно выполняться неравенство $d < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. В частности, если $d = \frac{1}{4}$, то $x = \frac{5\sqrt{2}}{16}$.

45. а), б), в) Нет; г) да. Докажем, что в сечении куба не может получиться пятиугольник $EFGHI$ (рис. 85), у которого равны три угла.

Действительно, из решения предыдущей задачи следует, что в пятиугольнике $EFGHI$ угол H острый, а углы G и I тупые. Докажем, что угол E больше угла I. На ребре CD отложим отрезок DK, равный DH. Тогда $PH = PK$, $PI = PJ$. Так как $AJ < AE$, то $PI < PE$. Значит,

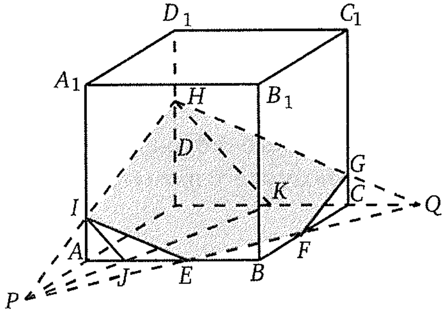


Рис. 85

в треугольнике PIE угол I больше угла E. Следовательно, в пятиугольнике $EFGHI$ угол E больше угла I. Аналогично доказывается, что в этом пятиугольнике угол F больше угла G. Таким образом, в пятиугольнике $EFGHI$ нет трёх равных углов, однако могут быть две пары равных углов E и F, I и G.

2. Сравнение и оценка

1. Длины отрезков AB и CD равны. **2.** Длины отрезков AB и CD равны. **3.** Длины отрезков AB и CD равны. **4.** Длины отрезков AB и CD равны. **5.** Длины отрезков AC и BC равны. **6.** Круги равные. 7. $AC_1B = AC_5B > AC_2B = AC_4B > AC_3B$. **8.** а). **9.** в).

10. Тангенсы углов ABC и DEF (рис. 41, *а*) равны $\frac{1}{3}$. Следовательно, и сами углы равны. Тангенсы углов ABC и DEF (рис. 41, *б*) равны $\frac{1}{2}$. Следовательно, и сами углы равны.

11. Площади треугольников AOD и BOC равны.

12. Проведём отрезки AF и BF (рис. 86). Площади треугольников AEF и EBF равны. Площади треугольников ADF и BCF также равны. Следовательно, площади четырёхугольников $AEFD$ и $EBCF$ равны.

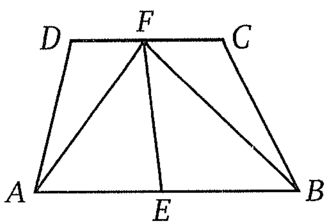


Рис. 86

13. Проведём диагонали AC и BD (рис. 87). Площадь треугольника AEH равна одной четвёртой площади треугольника ABD. Площадь треугольника CFG равна одной четвёртой площади треугольника CBD. Следовательно, сумма площадей треугольников AEH и CFG равна одной четвёртой площади четырёхугольника $ABCD$. Аналогично, сумма площадей треугольников BFE и DHG равна одной четвёртой площади четырёхугольника $ABCD$. Следовательно, сумма площадей всех четырёх треугольников равна половине площади четырёхугольника $ABCD$. Значит, площади закрашенной части четырёхугольника $ABCD$ равна площади его незакрашенной части.

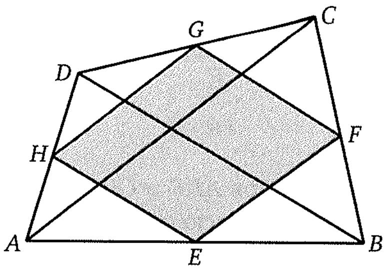


Рис. 87

14. Проведём отрезки AO, BO, CO и DO (рис. 88). Площади треугольников AOE и BOE, BOF и COF, COG и DOG, AOH и DOH равны. Следовательно, равны площади закрашенной и незакрашенной частей четырёхугольника $ABCD$.

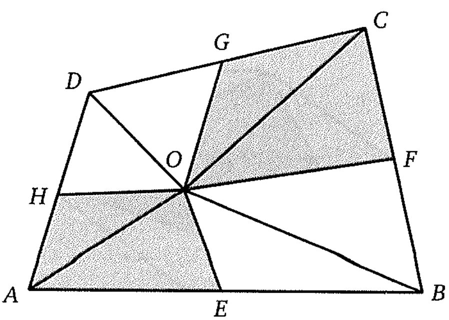


Рис. 88

15. Площади параллелограммов $ABCD$ и $DEFG$ равны удвоенной площади треугольника DEC (рис. 89). Следовательно, площади этих параллелограммов равны.

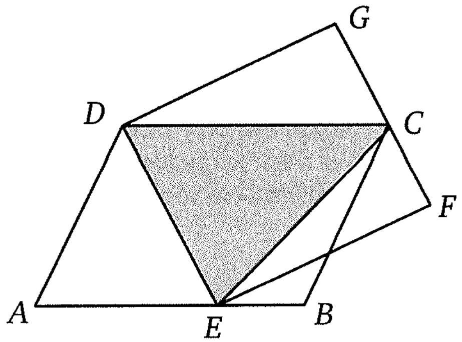


Рис. 89

16. Площади треугольников ADF и CDE равны половине площади квадрата. В сумме они дают всю площадь квадрата. Следовательно, площадь части, которую эти треугольники покрывают дважды (четырёхугольник $DPQR$), равна площади части, которую они не покрывают совсем (закрашенная фигура).

17. Через точки A, C, E проведём прямые, параллельные некоторым сторонам данного шестиугольника (рис. 90). Обозначим G их точку пересечения. Шестиугольник разбивается на три параллелограмма $ABCG$, $CDEG$ и $AGEF$. Диагонали AC, CE и AE этих параллелограммов делят их площади соответственно на равные части. Следовательно, площадь закрашенного треугольника равна половине площади шестиугольника.

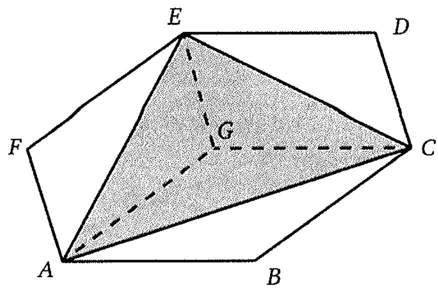


Рис. 90

18. В правильном восьмиугольнике проведём диагонали AF и BE (рис. 91). В квадрате $PQRS$ также проведём диагонали. Эти диагонали разбивают восьмиугольник на попарно равные части. Следовательно, площадь прямоугольника $CDGH$ равна половине площади восьмиугольника.

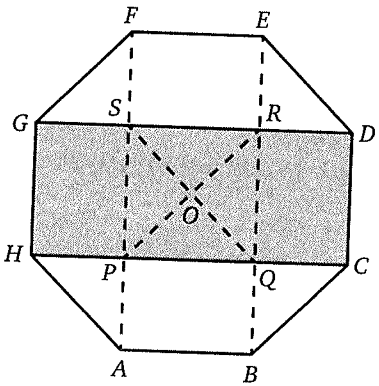


Рис. 91

19. 100 м. **20.** 400 м^2. **21.** В 25 раз.

22. Объём единичного куба равен 1, а объём единичного правильного тетраэдра равен $\frac{\sqrt{2}}{12} \approx \frac{1}{8}$.

23. Оставшаяся часть воды должна занимать примерно $\frac{4}{5}$ высоты конуса. Объём оставшейся воды будет равен $\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125} \approx \frac{1}{2}$ исходного объёма воды.

24. Диаметр вишни в 3 раза больше диаметра косточки. Следовательно, объём вишни в 27 раз больше объёма косточки. Значит, объём мякоти в 26 раз больше объёма косточки.

25. Мякоть апельсина имеет форму шара, радиус которого равен $\frac{4}{5}$ радиуса апельсина. Следовательно, объём мякоти составляет $\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125} \approx \frac{1}{2}$ объёма апельсина. Значит, объём кожуры также составляет примерно половину объёма апельсина.

26. После увеличения длины верёвки на 3 м радиус образованной ею окружности увеличится на $\frac{3}{2\pi} \approx 0{,}48$ (м). Таким образом, зазор между поверхностью Земного шара и верёвкой составит 0,48 м. В него может пролезть человек средней комплекции.

3. Утверждения

1. 2, 3, 4, 5, 8, 11, 12, 18, 20, 21, 22, 23, 28, 29.

2. 3, 5, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 18, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 32, 33, 34, 35, 36, 39, 40.

3. 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12, 15, 18, 22, 24, 25.

4. 2, 3, 4, 7, 8, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25.

5. 1, 2, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 20, 21, 24, 25.

6. 3, 6, 8, 10, 12, 15, 17, 18, 20, 23, 28, 35, 37, 40.

7. 3, 5, 8, 9, 10, 11, 16, 17, 20.

8. 3, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 17, 18, 21, 22, 24, 25, 28, 30.

4. Доказательства

1. В доказательстве не рассмотрен случай, когда вершина A_1 или вершина B_1 принадлежат отрезку C_1C_2.

2. Из равенства углов CBH и $C_1B_1H_1$ не следует равенство углов ABC и $A_1B_1C_1$. Угол $A_1B_1C_1$ может быть смежным с углом $C_1B_1H_1$.

3. Из равенства углов ACH и $A_1C_1H_1$, BCH и $B_1C_1H_1$ не следует равенство углов ACB и $A_1C_1B_1$. Угол $A_1C_1B_1$ может быть равен разности углов $A_1C_1H_1$ и $B_1C_1H_1$.

4. Из равенства углов ABG и $A_1B_1G_1$ не следует равенство углов ABC и $A_1B_1C_1$. Угол $A_1B_1C_1$ может быть смежным с углом $A_1B_1G_1$.

5. Необоснованно применён признак равенства треугольников, так как углы A и A_1 в треугольниках ABM и $A_1B_1M_1$ не лежат между соответствующими сторонами.

6. Необоснованно применён признак равенства треугольников, так как углы A и A_1 в треугольниках ACM и $A_1C_1M_1$ не лежат между соответствующими сторонами.

7. Необоснованно применён признак равенства треугольников, так как углы A и A_1 в треугольниках ACD и $A_1C_1D_1$ не лежат между соответствующими сторонами.

8. Из равенства углов CMH и $C_1M_1H_1$ не следует равенство углов CMB и $C_1M_1B_1$. Значит, не следует и равенство углов AMC и $A_1M_1C_1$.

9. Из равенства углов CDH и $C_1D_1H_1$ не следует равенство углов CDB и $C_1D_1B_1$. Значит, не следует и равенство углов ADC и $A_1D_1C_1$.

10. Из равенства углов CDH и $C_1D_1H_1$ не следует равенство углов CDB и $C_1D_1B_1$. Значит, не следует и равенство углов ADC и $A_1D_1C_1$.

11. Из равенства углов BAO и $B_1A_1O_1$, CAO и $C_1A_1O_1$ не следует равенство углов BAC и $B_1A_1C_1$, так как один из них может быть равен сумме, а другой — разности соответствующих углов.

12. Необоснованно применён признак равенства треугольников, так как углы A и A_1 в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ не лежат между соответствующими сторонами.

13. Неправильно выполнен рисунок. Построить правильный рисунок поможет программа GeoGebra. В ней можно построить прямоугольный треугольник ABC, провести биссектрису угла A и серединный перпендикуляр к отрезку BC, найти их точку пересечения E, опустить из неё перпендикуляры на прямые, содержащие стороны AC и AB (рис. 92). На этом рисунке видно, что точка E расположена вне треугольника ABC, причём, основание F перпендикуляра, опущенного из неё на прямую AC, принадлежит продолжению стороны AC, а основание G перпендикуляра, опущенного на прямую AB, принадлежит стороне AB. Так как сторона AB равна сумме отрезков AG и BG, а сторона AC равна разности отрезков AF и FC, то из равенства отрезков $AG = AF$ и $BG = CF$ не следует равенство сторон AB и AC треугольника ABC.

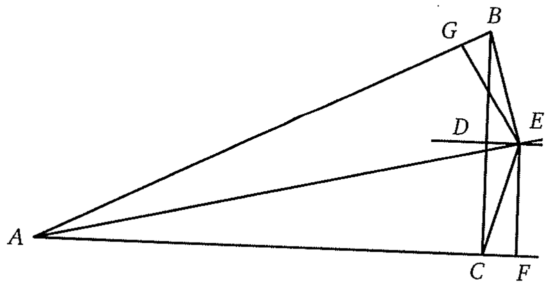


Рис. 92

Установим указанное расположение точки E, не опираясь на рисунок. Для этого с центром в точке A и радиусом AB проведём окружность. Обозначим H её точку пересечения с лучом AC. Проведём отрезок BH (рис. 93).

В треугольнике ABH $AB = AH$. Следовательно, биссектриса угла A пересечёт отрезок BH в его середине E, которая расположена вне треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к отрезку BC содержит среднюю линию треугольника BCH, следовательно, пересекает отре-

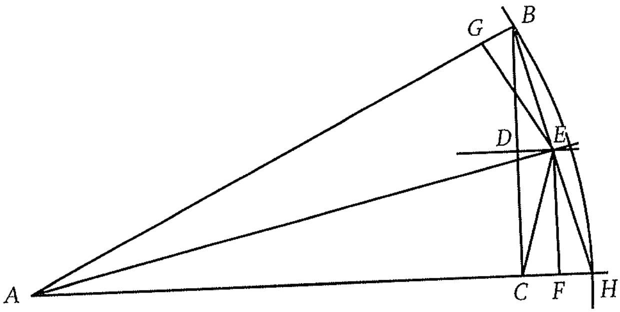


Рис. 93

зок BH в точке E. Таким образом, точка E является точкой пересечения биссектрисы угла A и серединного перпендикуляра к отрезку BC. Так как точка E расположена вне треугольника ABC, то основание F перпендикуляра, опущенного из точки E на прямую AC, будет принадлежать продолжению стороны AC, а так как отрезок AE меньше отрезка AB, то основание G перпендикуляра, опущенного из точки E на прямую AB, будет принадлежать стороне AB.

14. Ошибка аналогична ошибке в доказательстве предыдущего утверждения. Основание перпендикуляра, опущенного из точки E на прямую AC, может принадлежать отрезку AC, а основание перпендикуляра, опущенного из точки E на прямую BC, может не принадлежать отрезку BC (рис. 94), Так как сторона AC равна сумме отрезков CF и AF, а сторона BC равна разности отрезков CG и BG, то из равенства отрезков $CF = CG$ и $AF = BG$ не следует равенство сторон AC и BC треугольника ABC.

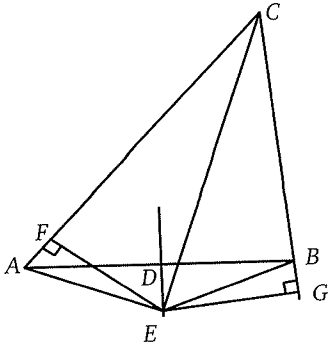


Рис. 94

15. Из равенства углов *ADG* и *BCG*, *GDF* и *GCF* не следует равенство углов *ADC* и *BCD* (рис. 95), так как угол *ADC* равен разности углов *ADG* и *CDF*, а угол *BCD* равен сумме углов *BCG* и *GCF*.

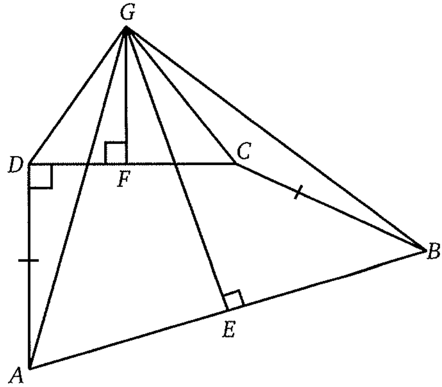


Рис. 95

16. Решение аналогично решению предыдущей задачи.

17. Ошибка в доказательстве связана с тем, что оно не использует аксиому параллельных, а без этого данное утверждение неверно. Например, оно неверно в геометрии Лобачевского.

18. Если для точки *E* отрезка *AB* угол *AEC* прямой, то и угол *BEC* должен быть прямым. Значит, точка *E* должна принадлежать обеим окружностям, т. е. совпадает с точкой *F* (рис. 96). Следовательно, имеется единственная высота, опущенная из вершины *B*.

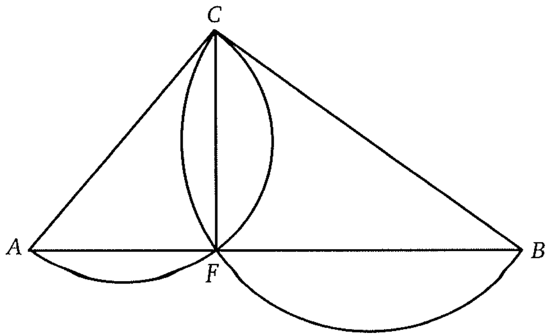


Рис. 96

19. Неправомерно использован признак равенства треугольников по стороне и двум прилежащим к ней углам. В треугольнике ABD углы B и D не являются прилежащими к стороне AD.

20. Предложенный метод доказательства, на первый взгляд, аналогичен тому, как определяется длина окружности. Разница состоит в том, что в определении длины окружности берутся правильные многоугольники, вписанные в окружность, т. е. все их вершины принадлежат окружности, а в предложенном доказательстве ломаные не являются вписанными в гипотенузу. Именно это и даёт неверный результат.

21. Из равенства $\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)=\sin\left(\beta+\frac{\gamma}{2}\right)$ следует выполнимость равенства $\alpha+\frac{\gamma}{2}=\beta+\frac{\gamma}{2}$ или равенства $\alpha+\frac{\gamma}{2}=180^\circ-\left(\beta+\frac{\gamma}{2}\right)$. Во втором случае получаем равенство $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, из которого не следует равенство углов треугольника ABC.

22. На самом деле, точки D, E, F, B не принадлежат одной прямой. Если бы это было так, то треугольники ABD и GBE были бы подобны. Следовательно, выполнялось бы равенство $\frac{AD}{AB}=\frac{GE}{GB}$, которое не выполняется, так как $\frac{5}{13}\neq\frac{3}{8}$. Четырёхугольник $DEBF$ не содержится в фигуре 6. Он является параллелограммом, площадь которого равна 1.

23. Меньшая окружность не катится по отрезку A_1B_1.

24. Сумма длин построенных полуокружностей не приближается к диаметру исходной окружности, а остаётся постоянной, равной длине исходной полуокружности.

5. Контрпримеры

1. Контрпример приведён на рисунке 97. Треугольники ABC и AB_1C не равны, но у них $AB=AB_1$, AC — общая сторона, угол C — общий.

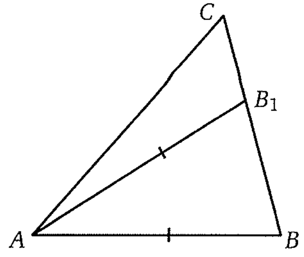


Рис. 97

2. Контрпример приведён на рисунке 98. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ не равны, но у них $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, высота CH равна высоте C_1H_1.

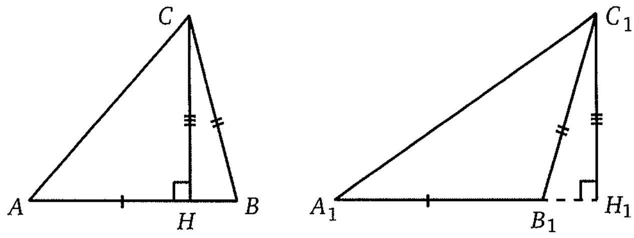


Рис. 98

3. Контрпример приведён на рисунке 99. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ не равны, но у них $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$, высота CH равна высоте C_1H_1.

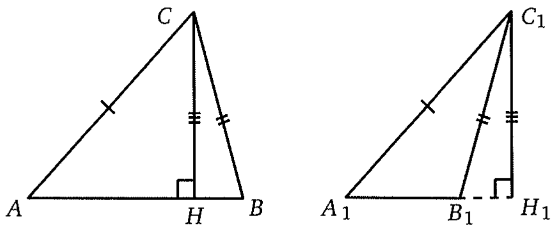


Рис. 99

4. Контрпример приведён на рисунке 100. Треугольники ABC и ABC_1 не равны, но у них сторона AB и высота BH — общие, высоты AG и AG_1 равны.

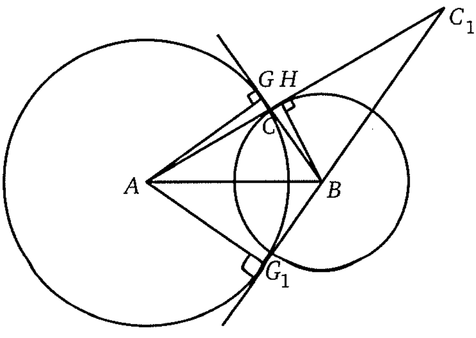


Рис. 100

5. Контрпример приведён на рисунке 101. В треугольниках ABC и AB_1C сторона AC — общая, угол A — общий, медианы CM и CM_1 равны. Однако, сами треугольники ABC и AB_1C не равны.

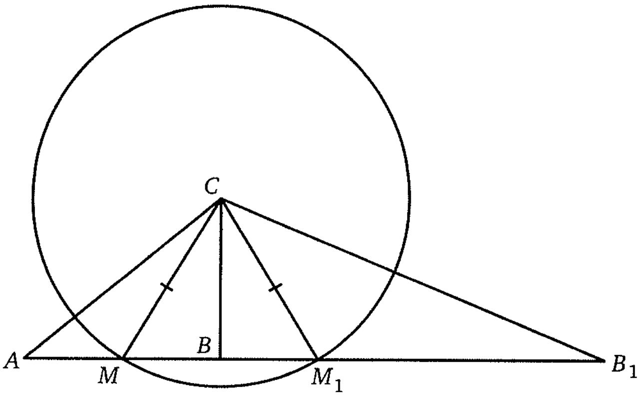


Рис. 101

6. Контрпример приведён на рисунке 102. В треугольниках ABC и A_1B_1C сторона AB равна стороне A_1B_1, угол A равен углу A_1, медиана CM — общая. Однако, сами треугольники ABC и A_1B_1C не равны.

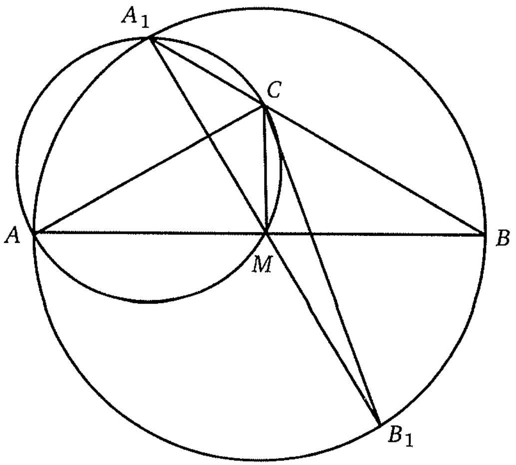


Рис. 102

7. Контрпример приведён на рисунке 103. В треугольниках ABC и ABC_1 $\angle B$ — общий, AB — общая сторона, биссектрисы AD и AD_1 равны. Однако треугольники ABC и ABC_1 не равны.

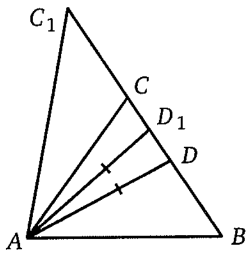


Рис. 103

8. Контрпример приведён на рисунке 104. В треугольниках ABC и AB_1C $\angle A$ и высота CH — общие, медиана CM равна медиане CM_1. Однако, треугольники ABC и AB_1C не равны.

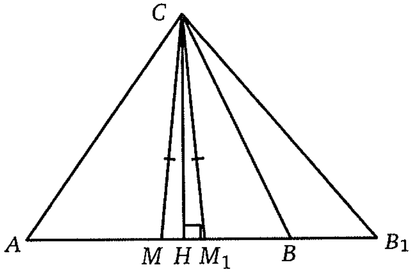


Рис. 104

9. Контрпример приведён на рисунке 105. В треугольниках ABC и AB_1C сторона AC и высота CH — общие, биссектриса CD равна биссектрисе CD_1. Однако, треугольники ABC и AB_1C не равны.

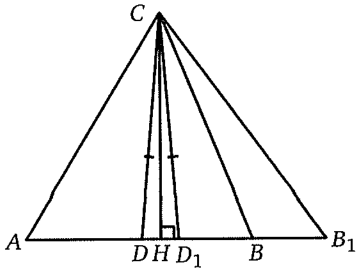


Рис. 105

10. Контрпример приведён на рисунке 105. В треугольниках ABC и AB_1C $\angle A$ и высота CH — общие, биссектриса CD равна биссектрисе CD_1. Однако, треугольники ABC и AB_1C не равны.

11. Контрпример приведён на рисунке 106. В треугольниках ABC и ABC_1 сторона AB — общая, описанная окружность — общая, $AC = AC_1$. Однако, треугольники ABC и ABC_1 не равны.

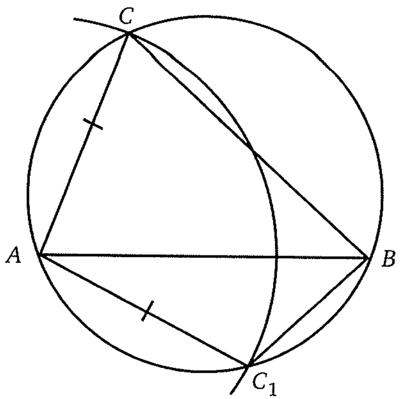


Рис. 106

12. Контрпример приведён на рисунке 107. В треугольниках ABC и ABC_1 сторона AB — общая, описанная окружность — общая, $\angle BAC = \angle BAC_1$. Однако, треугольники ABC и ABC_1 не равны.

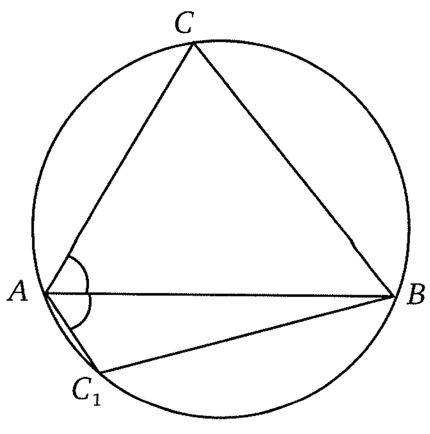


Рис. 107

13. Контрпример приведён на рисунке 108. В треугольниках ABD и CED $AD = CD$, $\angle A = \angle E$, $\angle B = \angle C$. Однако, треугольники ABD и ECD не равны.

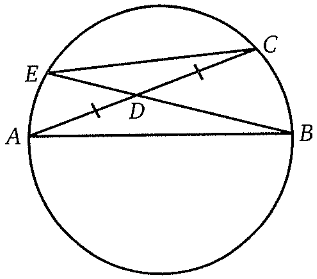


Рис. 108

14. Контрпример приведён на рисунке 109. В треугольниках ABC и AB_1C угол A и сторона AC — общие, медиана CM равна медиане CM_1. Однако, треугольники ABC и AB_1C не равны.

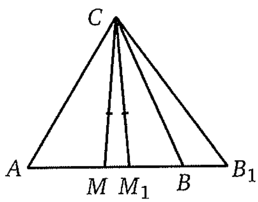


Рис. 109

15. Контрпример приведён на рисунке 110. В треугольниках ABC и ABC_1 угол A — общий, AB — общая сторона, медианы AM и AM_1 равны, однако, треугольники ABC и ABC_1 не равны.

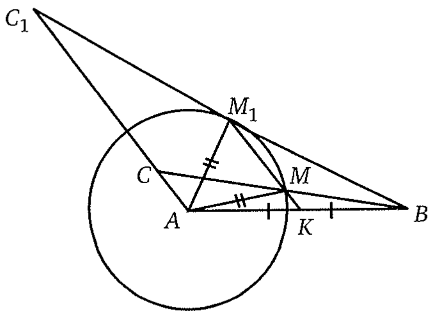


Рис. 110

16. Для построения контрпримера рассмотрим окружность с центром в точке O и окружность в два раза меньшего радиуса, касающуюся первой окружности внутренним образом в точке B (рис. 111). Напомним, что эта окружность без точки B является геометрическим местом середин хорд первой окружности, проходящих через точку B. Проведём хорду AB и окружность с центром в точке A, пересекающую вторую окружность в точках M и M_1. Проведём прямые BM и BM_1, пересекающие первую окружность соответственно в точках C и C_1. В треугольниках ABC и ABC_1 сторона AB — общая, $\angle C = \angle C_1$, медианы AM и AM_1 равны. Однако, треугольники ABC и ABC_1 не равны.

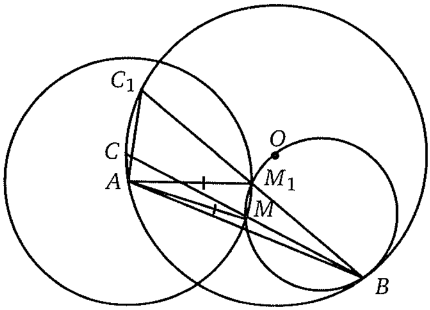


Рис. 111

17. Для построения контрпримера рассмотрим две равные окружности, касающиеся друг друга в точке M (рис. 112).

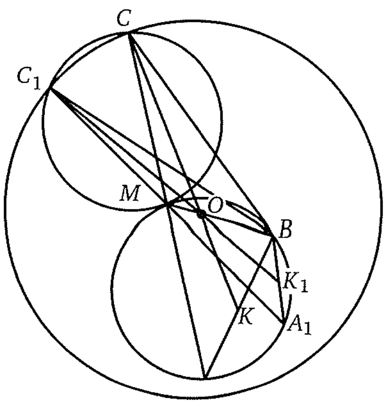


Рис. 112

Проведём в одной из них хорду AB и прямую AM, пересекающую вторую окружность в некоторой точке C. Проведём отрезок BC. Получим треугольник ABC. Проведём в нём медиану CK и обозначим O точку, делящую её в отношении $2:1$, считая от вершины C. Проведём окружность с центром в точке O радиусом OC, пересекающую вторую окружность в точке C_1. Проведём прямую C_1M и обозначим A_1 точку её пересечения с первой окружностью. Обозначим K_1 точку пересечения хорды A_1B и прямой C_1O. В треугольниках ABC и A_1BC_1 $\angle A = \angle A_1$, медианы CK и C_1K_1 равны, так как равны отрезки CO и C_1O, соответственно равные двум третям этих медиан, медиана BM — общая. Однако, треугольники ABC и A_1BC_1 не равны.

18. Для построения контрпримера рассмотрим две равные окружности, касающиеся друг друга в точке K (рис. 113).

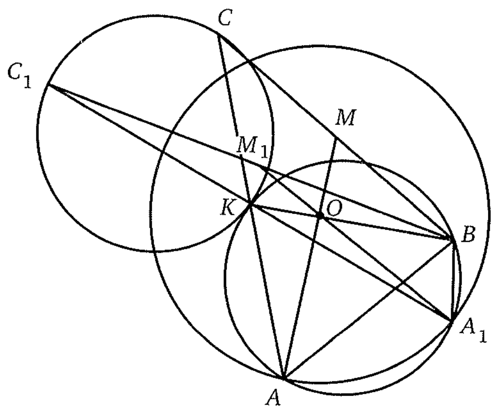


Рис. 113

Проведём в одной из них хорду AB и прямую AK, пересекающую вторую окружность в некоторой точке C. Проведём отрезок BC. Получим треугольник ABC. Проведём в нём медиану BK и обозначим O точку, делящую её в отношении $2:1$, считая от вершины B. Проведём окружность радиусом OA, пересекающую первую окружность в точке A_1. Проведём прямую A_1K и обозначим C_1 точку её пересечения со второй окружностью. Получим треугольник A_1BC_1, в котором O — точка пересечения медиан. В треугольниках ABC и A_1BC_1 $\angle A = \angle A_1$, медианы AM и A_1M_1 равны, так как равны отрезки AO и A_1O, соответственно равные двум третям этих медиан, медиана BK — общая. Однако, треугольники ABC и A_1BC_1 не равны.

19. Для построения контрпримера рассмотрим окружность и угол с вершиной в центре A этой окружности (рис. 114).

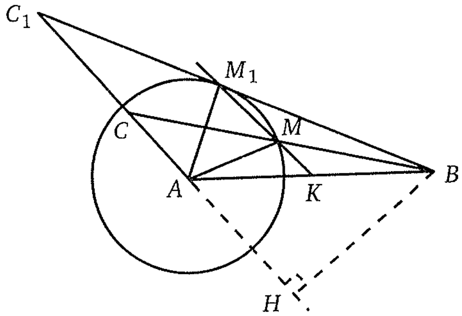


Рис. 114

Отложим на его стороне отрезок AB, больший диаметра, и через его середину K проведём прямую, параллельную другой стороне угла и пересекающую окружность в некоторых точках M и M_1. Проведём прямые BM, BM_1 и точки их пересечения со стороной угла обозначим соответственно C и C_1. Тогда в треугольниках ABC и ABC_1 сторона AB — общая, высота BH — общая, медианы AM и AM_1 равны, однако треугольники ABC и ABC_1 не равны.

20. Для построения контрпримера рассмотрим треугольник ABC. Проведём окружность с центром в середине M стороны BC и радиусом AM (рис. 115).

Обозначим A_1 точку пересечения этой окружности со стороной AC. В треугольниках ABC и A_1BC $\angle C$ — общий, медианы AM и A_1M равны, высота BH — общая. Однако, треугольники ABC и A_1BC не равны.

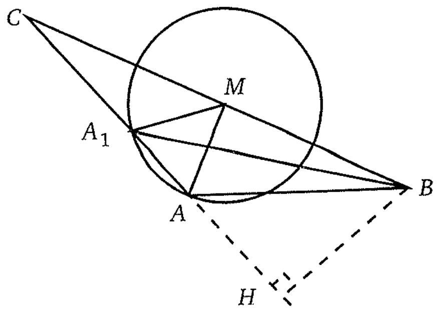
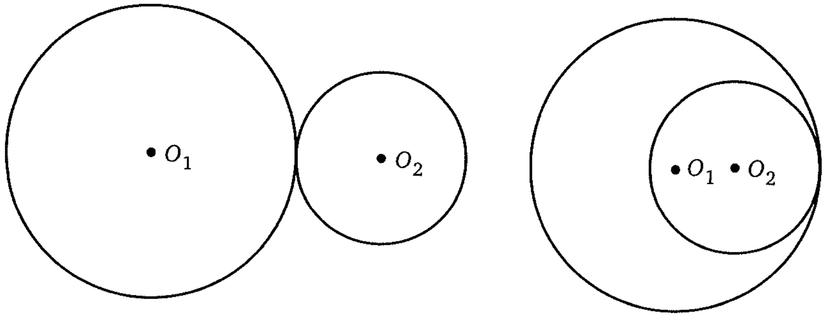


Рис. 115

6. Задачи с неоднозначным ответом

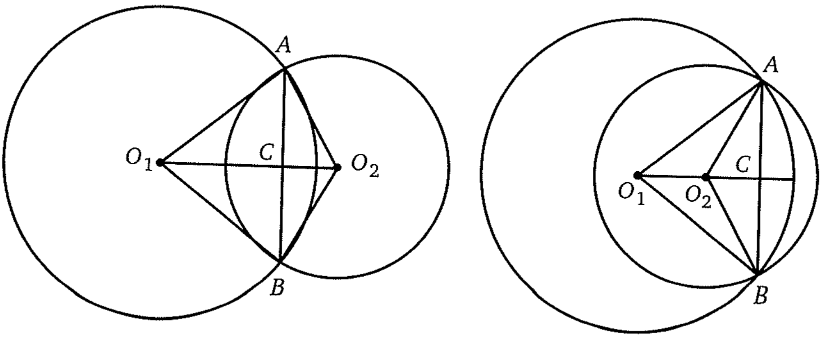
1. Возможны два случая расположения окружностей, представленные на рисунке 116. В первом случае расстояние между центрами этих окружностей равно 5, во втором равно 1.



а) *б)*

Рис. 116

2. Пусть O_1, O_2 — центры окружностей, AB — общая хорда, C — точка пересечения прямых O_1O_2 и AB. Возможны два случая расположения окружностей, представленные на рисунке 117. В первом случае расстояние между центрами этих окружностей равно $4+\sqrt{7}$, во втором равно $4-\sqrt{7}$.



а) *б)*

Рис. 117

3. Возможны два случая расположения ломаной $ABCD$, представленные на рисунке 118. В первом случае угол NKC равен α, во втором $180° - \alpha$.

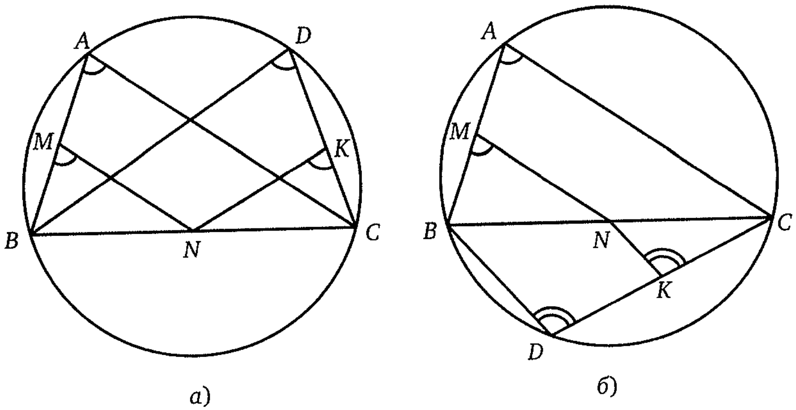


Рис. 118

4. Для указанных в условии данных возможны два треугольника ABC и ABC_1, изображённых на рисунке 119, $\angle C = 30°$, $\angle C_1 = 150°$.

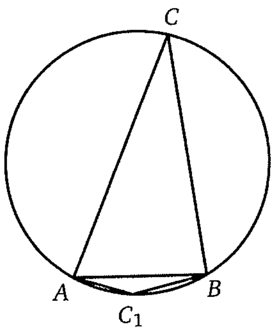


Рис. 119

5. Для указанных в условии данных возможны два отрезка касательных AB и CD, изображённых на рисунке 120.

Пусть O_1, O_2 — центры окружностей, AB, CD — касательные, O_1A, O_1C и O_2B, O_2D — радиусы, проведённые в точки касания. Через центр O_2 окружности проведём прямую, параллельную прямой AB, и обозначим E её точку пересечения с прямой O_1A. Через центр

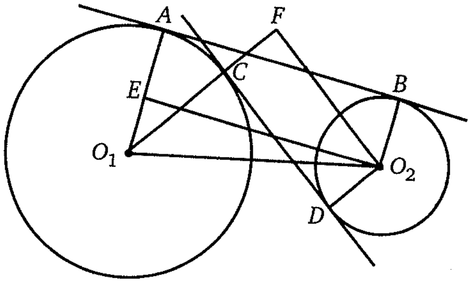


Рис. 120

O_2 окружности проведём прямую, параллельную прямой CD, и обозначим F её точку пересечения с прямой O_1C. Тогда отрезок AB равен отрезку O_2E, отрезок CD равен отрезку O_2F. Из прямоугольных треугольников O_1O_2E, O_1O_2F находим: $O_2E=\sqrt{15}$, $O_2F=\sqrt{7}$. Следовательно, $AB=\sqrt{15}$, $CD=\sqrt{7}$.

6. Для указанных в условии данных возможны два треугольника ABC и AB_1C, изображённых на рисунке 121. $AH=4$, $BH=B_1H=$ $=\sqrt{7}$. Следовательно, $AB=4+\sqrt{7}$, $AB_1=4-\sqrt{7}$.

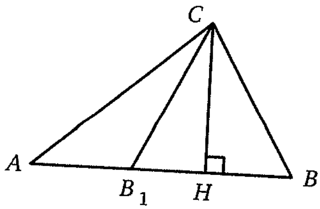


Рис. 121

7. Для указанных в условии данных возможны два треугольника ABC и ABC_1, изображённых на рисунке 122. $BH=BH_1=3$. Следовательно, $AC=5$, $AC_1=\sqrt{97}$.

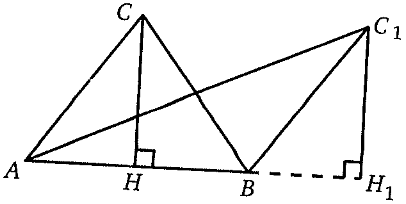


Рис. 122

8. Для указанных в условии данных возможны два треугольника ABC и ABC_1, изображённых на рисунке 123. Для треугольника ABC $AB=5$, $BC=3$, $AC=4$.

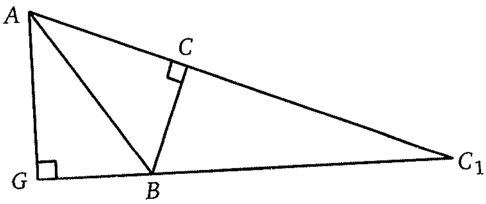


Рис. 123

Для нахождения сторон треугольника ABC_1 обозначим через x его сторону BC_1. Из подобия треугольников BCC_1 и AGC_1 получаем равенство $\frac{BC_1}{BC}=\frac{AC_1}{AG}$ Следовательно, имеем уравнение

$$\frac{x}{3}=\frac{4+\sqrt{x^2-9}}{4}.$$

Решая его, находим $x=10\frac{5}{7}$ Значит, $BC_1=10\frac{5}{7}$ В треугольнике ABC $AB=5$, $AC=4$, $BC=3$. Таким образом, в треугольнике ABC_1 $AB=5$, $BC_1=10\frac{5}{7}$, $AC_1=\frac{2\sqrt{1345}}{7}$.

9. Для указанных в условии данных возможны два треугольника ABC и AB_1C, изображённых на рисунке 124.

Обозначим CM медиану треугольника ABC. Пусть $AM=x$. По теореме косинусов, применённой к треугольнику AMC, имеем: $81=$ $=100+x^2-10x$. Решая это квадратное уравнение, находим $x_{1,2}=$ $=\frac{5\pm\sqrt{6}}{2}$. Следовательно, $AB=5+\sqrt{6}$, $AB_1=5-\sqrt{6}$.

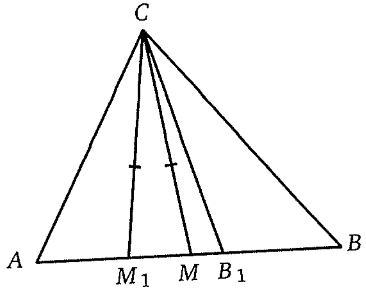


Рис. 124

10. Для указанных в условии данных возможны два треугольника ABC и ABC_1, изображённых на рисунке 125.

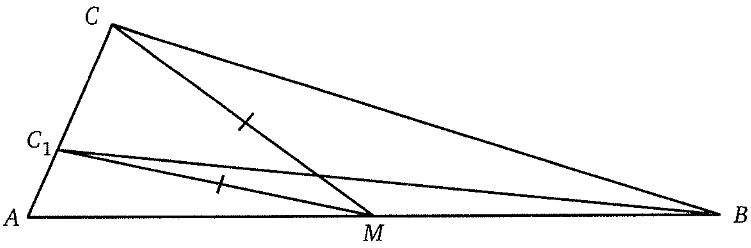


Рис. 125

Обозначим CM медиану треугольника ABC. Пусть $AC = x$. По теореме косинусов, применённой к треугольнику AMC, имеем: $49 = 64 + x^2 - 8x$. Решая это квадратное уравнение, находим $x_{1,2} = 4 \pm 1$. Следовательно, $AC = 5$, $AC_1 = 3$.

11. Имеется два отсечённых треугольника, подобных треугольнику ABC. Они показаны на рисунке 126. Для треугольника DBE_1 сторона DE_1 равна 2,5. Для треугольника E_2DB сторона E_2D равна 3.

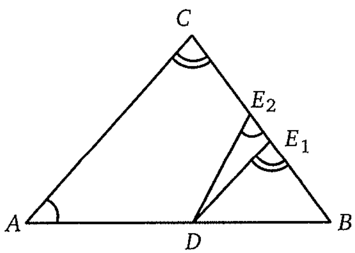


Рис. 126

12. Возможны два случая расположения точек M и N на стороне CD параллелограмма $ABCD$, показанные на рисунке 127. В первом случае $AB = 5$, во втором $AB = 3$.

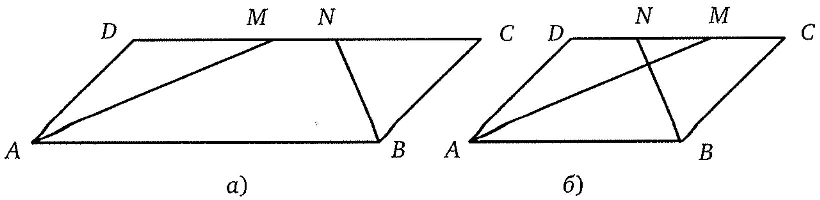


Рис. 127

13. Возможны два случая расположения окружности, показанные на рисунке 128. В первом случае радиус окружности равен 1, во втором равен 5.

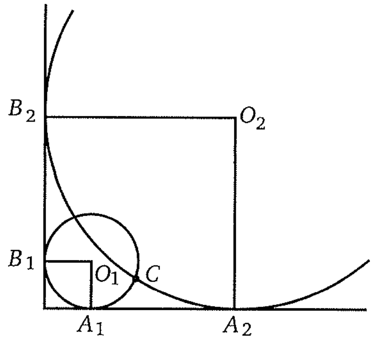


Рис. 128

14. Пусть $ABCD$ — трапеция ($AB \parallel CD$), вписанная в окружность с центром O и радиусом 25. Возможны два случая: основания AB и CD трапеции расположены по одну сторону от центра O (рис. 129, *а*); основания AB и CD расположены по разные стороны от центра O (рис. 129, *б*).

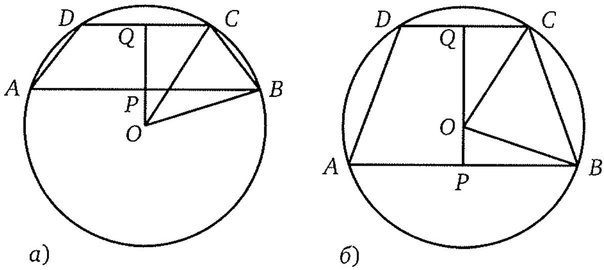


Рис. 129

В первом случае через точку O проведём прямую, перпендикулярную AB, и обозначим P, Q её точки пересечения соответственно с AB и CD. Тогда высота PQ трапеции равна $OQ - OP$. Имеем $OQ = 24$, $OP = 15$. Следовательно, $PQ = 9$.

Во втором случае через точку O проведём прямую, перпендикулярную AB, и обозначим P, Q её точки пересечения соответственно с AB и CD. Тогда высота PQ трапеции равна $OQ + OP$. Имеем $OQ = 24$, $OP = 15$. Следовательно, $PQ = 39$.

15. Возможны два случая: точки O_1, O_2 расположены по разные стороны от прямой AB (рис. 130, *а*); точки O_1, O_2 расположены по одну сторону от прямой AB (рис. 130, *б*).

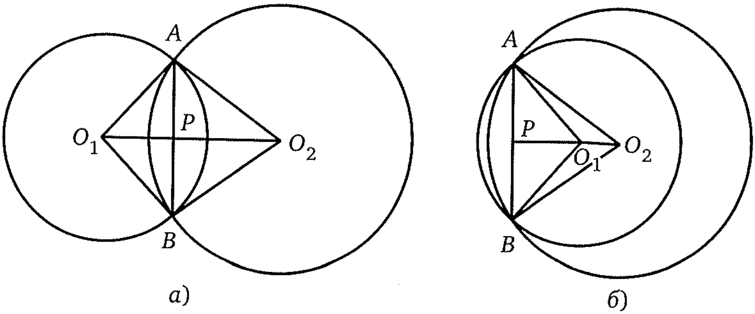


Рис. 130

Обозначим r, R радиусы окружностей соответственно с центрами O_1, O_2. Тогда радиус R окружности с центром O_2 будет равен $r\sqrt{2}$. Обозначим P точку пересечения прямых O_1O_2 и AB. Тогда $O_1P=\frac{r\sqrt{2}}{2}$, $O_2P=\frac{r\sqrt{6}}{2}$. В первом случае $\frac{r\sqrt{2}}{2}+\frac{r\sqrt{6}}{2}=1$, следовательно, $r=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$, $R=\sqrt{3}-1$. Во втором случае $\frac{r\sqrt{6}}{2}-\frac{r\sqrt{2}}{2}=1$, следовательно, $r=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$, $R=\sqrt{3}+1$.

16. Возможны два случая расположения вершины C треугольника ABC (рис. 131).

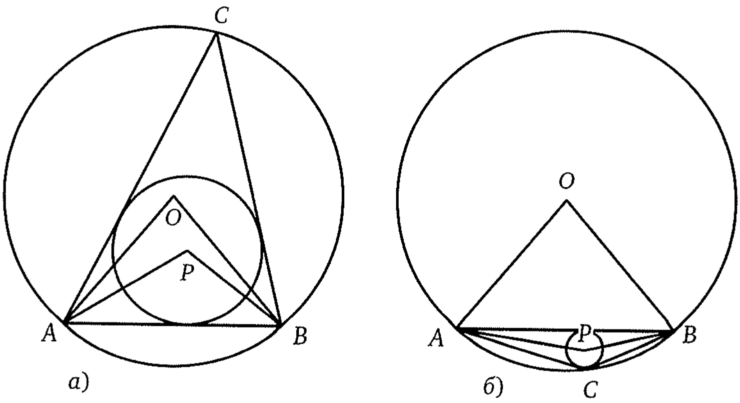


Рис. 131

В первом случае сумма углов A и B треугольника ABC равна 150°. Так как AP и BP — биссектрисы этих углов, то сумма углов BAP и ABP равна 75°, следовательно, угол APB равен 105°.

Во втором случае сумма углов A и B треугольника ABC равна 30°. Так как AP и BP — биссектрисы этих углов, то сумма углов BAP и ABP равна 15°, следовательно, угол APB равен 165°.

17. По теореме синусов

$$\frac{6}{\sin C} = \frac{4}{\sin A} = 24.$$

Откуда

$$\sin C = \frac{1}{4}, \quad \sin A = \frac{1}{6}.$$

Возможны два случая расположения вершины C треугольника ABC (рис. 132).

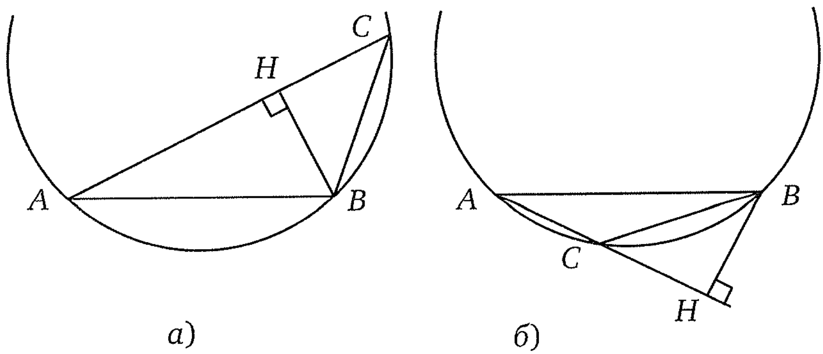


Рис. 132

Опустим перпендикуляр BH на прямую AC. Тогда

$$BH = AB \cdot \sin A = 1.$$

По теореме Пифагора

$$AH = \sqrt{35}, \quad CH = \sqrt{15}.$$

В первом случае

$$AC = \sqrt{35} + \sqrt{15}.$$

Во втором случае $AC = \sqrt{35} - \sqrt{15}$.

18. Пусть AA_1, BB_1 — высоты треугольника ABC. Опишем окружности на CH и AB, как на диаметрах. Они пройдут через точки A_1 и B_1. Возможны два случая расположения точки H (рис. 133).

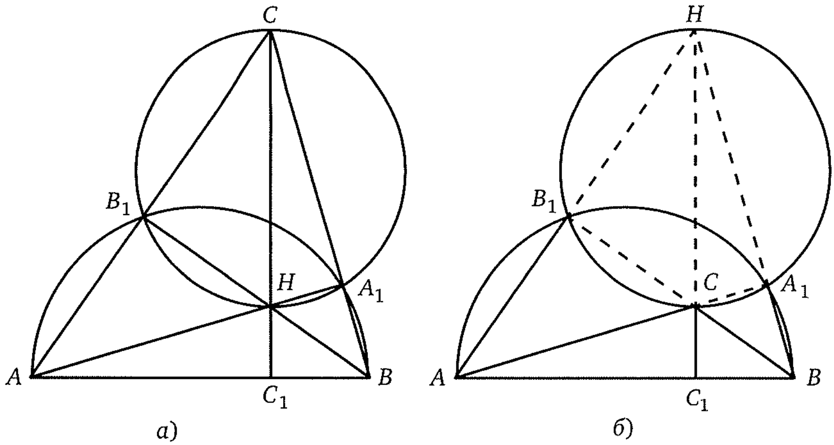


Рис. 133

В первом случае угол C треугольника ABC равен углу CAA_1, как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги. Следовательно, угол C равен 45°. Во втором случае угол C равен 135°.

19. Возможны два случая расположения отрезка B_1C_1 (рис. 134).

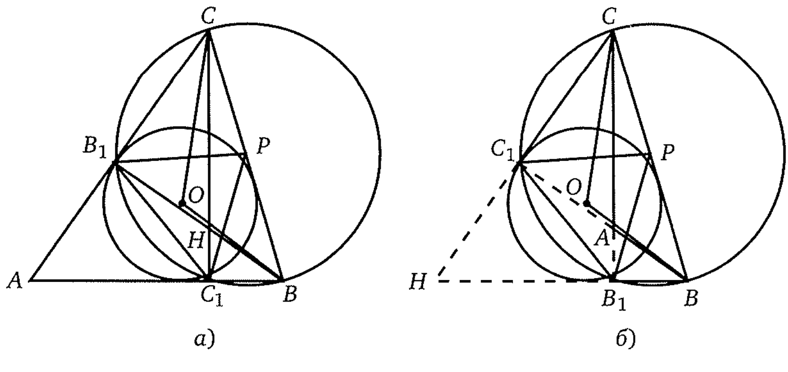


Рис. 134

На BC, как на диаметре, опишем окружность с центром P. Треугольник B_1C_1P равносторонний. Следовательно, сумма углов BPB_1 и CPC_1 равна 120°. В первом случае треугольники BPC_1 и CPB_1 равнобедренные. Следовательно, сумма углов B и C равна 120°. Так как BO и CO — биссектрисы, то угол BOC равен 120°. По теореме синусов находим $R=8\sqrt{3}$. Во втором случае сумма углов B и C равна $60°$. Так как BO и CO — биссектрисы, то угол BOC равен $150°$. По теореме синусов находим $R=24$.

20. Центр O искомой окружности принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку BD. Обозначим P середину отрезка BD, Q — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую AC, E — точку пересечения серединного перпендикуляра с прямой AC (рис. 135).

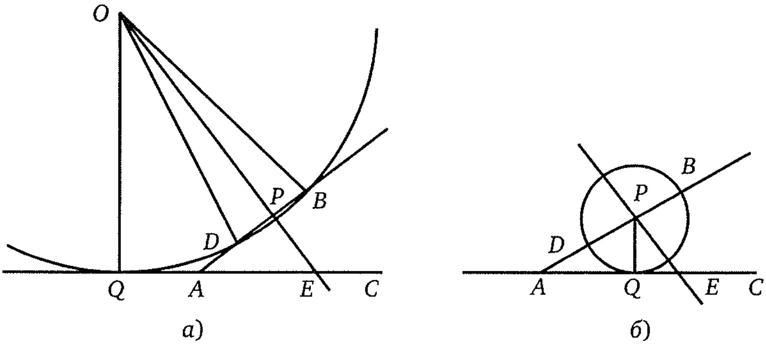


Рис. 135

Из условия касания окружности и прямой AC следует, что отрезки OB, OD и OQ равны радиусу R окружности. Заметим, что точка O не может лежать по ту же сторону от прямой AB, что и точка E, так как в этом случае расстояние от точки O до прямой AC меньше, чем расстояние от неё до точки B. Из прямоугольного треугольника APE с катетом $AP=2$ и $\angle A=30°$ находим, что $PE=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Так как $OB=R$ и $BP=1$, получаем: $OP=\sqrt{R^2-1}$, следовательно,

$$OE=\sqrt{R^2-1}+\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Из прямоугольного треугольника OQE, в котором $\angle E=60°$, находим:

$$R=OQ=\frac{\sqrt{3}}{2}OE=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{R^2-1}+1.$$

В результате получаем уравнение: $\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{R^2-1}=R-1$. Возведём в квадрат обе части этого уравнения и приведём подобные члены. Получим уравнение $R^2-8R+7=0$, решая которое находим два корня: $R_1=7$, $R_2=1$.

Литература

1. *Брадис В. М. и др.* Ошибки в математических рассуждениях. 2-е изд. М.: Учпедгиз, 1959.
2. *Гордин Р. К.* ЕГЭ 2012. Задача С4. Геометрия. Планиметрия. М.: МЦНМО, 2011.
3. *Дубнов Я. С.* Ошибки в геометрических доказательствах. 2-е изд. М.: Гос. изд. Технико-теоретической литературы, 1955. (Популярные лекции по математике; Вып. 11).
4. *Литцман В.* Где ошибка? М.: Физматлит, 1962.
5. *Мадера А. Г., Мадера Д. А.* Математические софизмы. М.: Просвещение, 2003.
6. *Произволов В. В.* Задачи на вырост. М.: Бюро Квантум, 2003. (Приложение к журналу «Квант»; № 5/2003).
7. *Смирнов В. А., Ященко И. В.* Фигуры в пространстве: пособие для подготовки к ЕГЭ. М.: МЦНМО, 2014.
8. *Толанский С.* Оптические иллюзии / Пер. с англ. К. А. Любарского. М.: Мир, 1967.
9. *Уёмов А. И.* Логические ошибки. М.: Госполитиздат, 1958.
10. *Халперн Д.* Психология критического мышления. М.; СПб.: Питер, 2000.

Содержание

Учебно-методическое издание

Владимир Алексеевич Смирнов
Ирина Михайловна Смирнова

Геометрические задачи на развитие критического мышления

В соответствии с Федеральным законом № 436-ФЗ
от 29 декабря 2010 года издание маркируется знаком 6+

Подписано в печать 08.04.2021 г. Формат 60×90 $1/16$.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 6. Тираж 1000 экз. Заказ №768.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель Пресс“».
г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.
Тел./факс+7 (495) 619-08-30, 647-01-89.
E-mail: mittelpress@mail.ru