Б. Н. ДЕЛОНЕ

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ ПЛАНИМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

К СТОЛЕТИЮ
СО ДНЯ СМЕРТИ
ЛОБАЧЕВСКОГО

Б. Н. ДЕЛОНЕ

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ ПЛАНИМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА · 1956

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книжка преследует скромную цель: изложить доказательство непротиворечивости планиметрии Лобачевского в форме, доступной пониманию читателей, имеющих законченное среднее образование. До сих пор наши центральные научные учреждения нередко получают рукописи, содержащие «доказательство» пятого постулата Евклида, т. е. аксиомы Евклида о параллельных. Как отвечать таким авторам? Нужно отвечать просто: давно доказано, что доказать это невозможно. Но как это доказано? Где прочесть подробное и вместе с тем понятное человеку со средним образованием доказательство этой невозможности? Я надеюсь, что первые две главы настоящей книжки восполнят этот пробел и тем самым сделают доступным более широким читательским массам понимание математической сути творения нашего великого геометра [1]).

Остальные главы (III — V) и оба приложения написаны также по возможности доступно. В них излагаются различные дальнейшие теоремы планиметрии Лобачевского.

---

[1]) При обработке окончательного изложения глав I и II я советовался с опытными учителями средней школы и очень им благодарен за ценные указания.

ВВЕДЕНИЕ [1]

1. Лобачевский — Коперник геометрии

11 (23) февраля 1826 г. профессор Казанского университета Николай Иванович Лобачевский (1792 — 1856) прочел на заседании физико-математического факультета Казанского университета доклад: «Краткое изложение начал геометрии». Этот доклад явился поворотным пунктом в истории математики и, как мы увидим дальше, важным узловым и поворотным пунктом в развитии современного естествознания вообще. Первая печатная работа Лобачевского, относящаяся к основаниям геометрии и озаглавленная «О началах геометрии», появилась в 1829—1830 гг.

Совершенно независимо от работы Лобачевского в 1832 г. была напечатана работа гениального венгерского математика Яноша Бо́яи (1802—1860), содержавшая аналогичные исследования. Наконец, впоследствии при разборе рукописного наследия великого немецкого математика Гаусса (1777—1855) стало известно, что и Гаусс, со своей стороны, пришел к тем же выводам, как Лобачевский и Бо́яи, и, повидимому, даже несколько раньше их, но до конца своей жизни Гаусс ничего об этом не напечатал. Это, может быть, объясняется его привычкой многие годы отделывать свои работы и печатать их только после того, как они отлежатся и всесторонне будут им обдуманы; такой же принципиальный вопрос, как

[1] Это введение есть воспроизведение статьи автора, помещенной в журнале «Природа», № 2 за 1956 г.

неевклидова геометрия, требовал, конечно, долгого обдумывания. Но, может быть, были и другие причины.

Один из видных продолжателей дела Лобачевского, английский математик Клиффорд, назвал Лобачевского «Коперником геометрии». Работы Лобачевского в корне изменили все наши представления в геометрии, как работы Коперника изменили их в астрономии. Коперник и Лобачевский открыли, один в астрономии, а другой в геометрии, совершенно новые пути, по которым затем пошли ученые.

2. Развитие геометрии до Лобачевского

Пространство и время суть формы существования материи. В ряде вопросов практики нам приходится интересоваться главным образом пространственными соотношениями реального мира, т. е. такими, в которых речь идет лишь о пространственных формах, величине и взаимном расположении предметов, а от всех остальных свойств предметов мы отвлекаемся. Наукой, изучающей эти пространственные отношения, является геометрия. Неудивительно, что человечество всегда с такой настойчивостью изучало геометрию, знание которой было ему все время необходимо в жизни, технике и при разработке других наук. Изучение древних египетских, китайских и вавилонских текстов показывает, что начальная стадия геометрии была всецело связана с запросами практики. Греческое название геометрии (γη — земля и μετρεω — мерю), т. е. землемерие, свидетельствует об этом.

Самое раннее сочинение, содержащее зачатки геометрии, дошло до нас из древнего Египта и относится примерно к XVII в. до н. э. Геометрические сведения излагались тогда в виде эмпирических правил. То же происходило в древнем Китае и Вавилоне. Это был первый — эмпирический период развития геометрии. Второй — теоретический — этап развития геометрии начался в древней Греции. Перенесенная из Египта около VII в. до н. э. в Грецию геометрия начала складываться в стройную систему. Не только были сформулированы основные абстрактные понятия геометрии — точка, прямая, плоскость, равенство отрезков, углов, параллельность и т. д., было показано гораздо более этого, а именно, что при помощи небольшого числа простых исходных истин — аксиом — можно дальнейшие истины геометрии — теоремы — доказывать, т. е. выводить их как логические следствия из этих аксиом, и так строить все здание геометрии. Постепенно было доказано множество теорем, из которых особо важной для практики оказалась теорема Пифагора, дающая возможность производить в геометрии самые различные вычисления. Уже около 300 лет до н. э. появилось знаменитое сочинение — «Начала» Евклида, в котором было подытожено это теоретическое развитие элементарной геометрии. «Начала» Евклида сыграли, повидимому, решающую роль в образовании наук. Именно элементарная геометрия была той наукой, стройность построения которой поразила в то время все образованное человечество и надолго стала как бы образчиком, часто недостижимым, при постепенном построении других наук. Большое прибавление к геометрии Евклида сделал Архимед (около 287—212 гг. до н. э.), давший способ сколь угодно точно находить число π и нашедший объемы цилиндра, конуса, шара и величины площадей их поверхностей. До настоящего времени во всем мире изучается в средней школе элементарная геометрия в размере части материала, содержащегося в сочинении Евклида с этими прибавлениями Архимеда. Одно время в Англии, изучая в средней школе элементарную геометрию, непосредственно использовали сочинения Евклида.

На основе элементарной геометрии Евклида для нужд астрономии, кораблестроения, механики, физики, нарождающейся техники, художественной перспективы были постепенно развиты различные другие геометрические науки: сферическая тригонометрия (греческий астроном Гиппарх 180—125 г. до н. э.), плоская тригонометрия (арабские ученые Абульвафа 940—997, Нассир-эддин 1201—1274, а в настоящем ее виде у Эйлера 1707—1783), аналитическая геометрия (Ферма 1601—1655, Декарт 1596—1650), дифференциальная геометрия (Ньютон 1642—1727, Эйлер), проективная геометрия (Дезарг

1593—1662, Паскаль 1623—1662), начертательная геометрия (Монж 1746—1818) и т. д.

На базе элементарной геометрии Евклида было, таким образом, в течение веков возведено огромное здание геометрической теории. Так, блестяще был выполнен человечеством второй — теоретический — этап развития геометрии. Развитие геометрии на этом этапе было все время тесно связано с применением ее в жизни, на практике. Уже сама элементарная геометрия Евклида, особенно с теми добавлениями, которые в нее внес Архимед, и с тригонометрией, непрерывно используется в повседневной практике, и поэтому как раз эти части геометрии во всех странах изучаются во всех средних школах и техникумах. Дальнейшие же выше названные геометрические науки сами выросли для потребностей других более прикладных наук и техники, причем особо важную роль в этом отношении сыграли аналитическая геометрия и дифференциальная геометрия — необходимые инструменты для построения механики, и начертательная геометрия, нужная для технического черчения. Поэтому как раз эти три геометрические науки изучаются во всех высших технических учебных заведениях. Все эти геометрические теории служили все время необходимым языком и подспорьем при развитии той техники, которая постепенно изменила всю жизнь людей.

3. Новая точка зрения на пространство, которую начали развивать Лобачевский, Бóяи и Гаусс

В знаменитом вступлении к своей книге «Новые начала геометрии» (1835—1838) Лобачевский говорит:

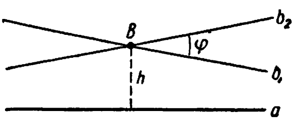
«В природе мы познаем собственно только движение (причем из предыдущего текста Лобачевского ясно, что тут идет речь о движении материи — *Б. Д.*), без которого чувственные впечатления невозможны. Итак, все прочие понятия, например, геометрические, произведены нашим умом искусственно, будучи взяты в свойствах движения; а потому пространство само собой, отдельно, для нас не существует. После чего в нашем уме не может быть никакого противоречия, когда мы допускаем, что некоторые силы в природе следуют одной, другие своей особой геометрии... В употребительной геометрии величину (поверхности) сферы принимают $4\pi r^2$ для полупоперечника r, от чего сила должна уменьшаться в содержании к квадрату расстояния. В воображаемой геометрии нашел я поверхность шара $2\pi(e^r - e^{-r})$, и такой геометрии может быть следуют молекулярные силы, которых затем все разнообразие будет зависеть от числа e[1]), всегда весьма большого... в том однакож нельзя сомневаться, что силы все производят одни: движение, скорость, время, массу, даже расстояния и углы».

В этих словах Лобачевского целая философская программа. Впервые было высказано убеждение, что аксиомы геометрии, в противоположность тому, что об этом говорил столь влиявший в то время на умы ученых немецкий философ Кант, не суть наши «врожденные идеи», а получаются нами из практики и являются лишь описаниями свойств окружающего нас реального мира.

Непосредственным поводом к развитию этого нового взгляда на свойства пространства было желание Лобачевского распутать, наконец, с первого взгляда, казалось бы, весьма частный вопрос о так называемом V постулате (или 11-й аксиоме) Евклида о параллельной: «если на плоскости задана прямая a и точка B, на ней не лежащая, то в плоскости существует не более одной прямой b, проходящей через точку B и нигде не пересекающей прямую a». Надо удивляться тому, что Евклид выписал (в другой форме) это требование как аксиому и, следовательно, уже считал, что его нельзя доказать, т. е. вывести как следствие из других аксиом геометрии. После Евклида, в течение более 2000 лет, крупнейшие математики стояли на противоположной точке зрения, а именно они пытались показать, что эта аксиома лишняя, и старались вывести это утверждение, исходя из других

[1]) Через e здесь Лобачевский обозначает постоянную, зависящую от единицы измерения.

аксиом геометрии. Однако это неизменно не удавалось. Причина, почему так интересовались 11-й аксиомой Евклида, была, повидимому, довольно поверхностная. Дело в том, что доказательство существования хотя бы одной прямой b, проходящей в плоскости через точку B и нигде не пересекающей прямую a, получить сравнительно легко. Доказательство это получается из теорем о том, что из любой точки можно опустить перпендикуляр на любую прямую и в любой точке прямой можно восставить к ней перпендикуляр, и из теоремы о внешнем угле треугольника. Неужели же, думали математики, так трудно доказать, что такая прямая b только одна? Математики, пытавшиеся доказать эту аксиому, однако, сами не зная того, ходили, как мы теперь видим, рядом с крупнейшим геометрическим открытием. Оказалось, как это впоследствии показали Лобачевский, Бóяи, Гаусс, Риман, Клейн и др., что, кроме евклидовой, существует еще одна и только одна геометрия (неевклидова геометрия Лобачевского — Бóяи), такая, что в ней, как в евклидовой геометрии, выполняются следующие два требования: 1) пространство бесконечно и 2) любое (и бесконечно большое) тело можно в этом пространстве передвигать в любое место и любым образом поворачивать его без того, чтобы было необходимо деформировать это тело, т. е. его сжимать или растягивать.



Черт. 1.

Лобачевский (и независимо от него Бóяи и Гаусс) первый допустил, что аксиома Евклида о параллельной может быть отвергнута, и можно предположить, что в рассматриваемой плоскости через точку B можно провести больше одной прямой b, не пересекающей прямую a. Он построил все здание геометрии из этого противоположного евклидову предположения, сохранив все остальные аксиомы Евклида. Оказалось (черт. 1), что угол φ между двумя крайними такими прямыми b_1 и b_2, проходящими через точку B, зависит от расстояния h от точки B до прямой a, причем этот угол тем меньше, чем меньше это расстояние. Если предположить, что наше пространство не евклидово, а зависимость между φ и h такова, что даже при h во много миллиардов километров угол φ еще чрезвычайно мал, то при современных средствах астрономии этот угол φ нельзя будет уловить. Действительно, нашему наблюдению доступны хотя и очень большие, но все же лишь конечные части пространства.

На снимках, полученных при помощи величайшего современного телескопа с зеркалом диаметром в 5 метров, можно различить отдаленные галактики (млечные пути), свет от которых идет до нас два миллиарда лет. Радиоастрономии доступны, повидимому, радиоизлучающие объекты, от которых свет идет десять миллиардов лет. Но еще более далекие части пространства пока недоступны нашим наблюдениям.

Таким образом, если бы наше пространство было пространством Лобачевского, мы на «малых» его кусках могли бы этого не обнаружить. Гаусс не обнаружил это при точнейших геодезических измерениях. Лобачевский пытался это сделать при помощи астрономических наблюдений, но это и ему не удалось.

То, что наше пространство не евклидово, было установлено гораздо позже (см. далее), причем оно оказалось и не пространством Евклида, и не пространством Лобачевского, а более сложным пространством.

В длинном ряде глубоких и обширных работ — «О началах геометрии» (1829—1830), «Воображаемая геометрия» (1835), «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам» (1835—1838), «Геометрические исследования по теории параллельных» (1840), «Пангеометрия» (1855) — Лобачевский подробно развил свое учение, и это стало делом всей его жизни. Ни Лобачевский, ни Бо́яи не дожили до торжества своих идей. Эти идеи были слишком новы и непривычны для того времени. Развивавшаяся Лобачевским, Гауссом и Бо́яи мысль, что основные истины даже элементарной геометрии имеют опытное, а не априорное происхождение, была лишь постепенно воспринята учеными и была началом изменения всех наших точек зрения на такие основные понятия, как пространство, время, количество движения, энергия и т. д., принесшего такие богатые плоды в современной физике.

Математический вопрос о том, не может ли быть чисто логических противоречий в схеме, предложенной Лобачевским, был решен лишь в 1870 г. Клейном, показавшим, что если нет противоречий в схеме Евклида, то не может быть противоречий и в схеме Лобачевского. Точки зрения и соображения, развитые в связи с обсуждением вопроса о непротиворечивости геометрии Лобачевского, оказали большое влияние на методы всей математики в целом.

4. Теория поверхностей Гаусса

Другим важным исходным пунктом развития новых идей в геометрии были одновременные с первыми работами Лобачевского исследования Гаусса по теории поверхностей. В 1828 г. Гаусс опубликовал замечательную работу по дифференциальной геометрии поверхностей, озаглавленную «Общие исследования о кривых поверхностях», тесно связанную с вопросами геодезии, которыми он тогда занимался.

Гаусс развивает совершенно новую для того времени и важную математическую идею так называемой «внутренней» геометрии поверхности. Поясним, что это значит. Представьте себе, что мы были бы не трехмерными, а двумерными «существами» и жили бы «в» некоторой данной поверхности F, т. е. были бы как бы пятнами на этой поверхности F. Представим себе, кроме того, что мы могли бы измерять расстояния между точками этой поверхности вдоль по этой поверхности, могли бы измерять длины любых линий на этой поверхности, величины углов, образуемых такими линиями около точек их пересечения, величины площадей кусков поверхности F и т. д., но не имели бы никакого понятия о том, что наш «мир» (поверхность F), «в» котором мы «живем», лежит в трехмерном пространстве. Для такого двумерного «существа» вообще 3-е измерение было бы лишь математической фикцией, как для нас 4-е. Что мы могли бы узнать о поверхности F? Все то, что такие двумерные существа могут узнать о поверхности F, Гаусс называет внутренней геометрией поверхности F. Прежде всего надо сделать очевидное замечание, что все внутренние свойства поверхности F не изменяются, если ее как угодно изгибать в трехмерном пространстве без сжатий и растяжений вдоль нее, т. е. не так, как деформируется тонкая резиновая пленка, которую можно не только изгибать, но и растягивать как угодно, а так, как изгибается лист почти нерастяжимой бумаги. Действительно, при таких изгибаниях не изменяются ни расстояния между точками поверхности вдоль по поверхности, ни длины ее линий, ни углы между ними, ни величины площадей ее частей и т. д. Верно и обратное: всякое свойство поверхности, не изменяющееся при любых ее изгибаниях, есть ее внутреннее свойство.

«Прямыми линиями» для «жителя» такой поверхности были бы кратчайшие пути, соединяющие две точки этой поверхности, так называемые геодезические линии.

Гаусс дал ряд замечательных теорем внутренней геометрии поверхности, но он все время исходил из того, что F — обычная поверхность, лежащая в обычном трехмерном евклидовом пространстве.

Математический аппарат, который применяет Гаусс для исследования внутренней геометрии поверхностей, состоит в следующем. На поверхности мысленно наносится какая-нибудь координатная сетка, аналогичная сетке меридианов и параллелей на глобусе. Это так называемые гауссовы координаты u и v точек поверхности. Затем определяется при помощи исследования специальных свойств рассматриваемой поверхности F, какова длина ds линейного элемента на поверхности, идущего из точки, имеющей координаты (u, v), в точку, имеющую координаты $(u+du, v+dv)$. Оказывается, что квадрат длины ds этого линейного элемента равен

$$ds^2 = e(u, v)\,du^2 + 2f(u, v)\,du\,dv + g(u, v)\,dv^2,$$

где $e(u, v)$, $f(u, v)$, $g(u, v)$ — функции от u и v, зависящие от того, какова поверхность F и какая координатная сетка на ней выбрана. Написанное выражение называется метрической квадратичной формой поверхности. Если она известна, т. е. заданы функции e, f, g, можно вычислять при помощи интегрирования длины любых линий на поверхности, так как линии можно составлять из их линейных элементов.

5. Дальнейший шаг в направлении идей Лобачевского и Гаусса, сделанный Риманом

В 1854 г. замечательный немецкий математик Риман (1826—1866) прочел в Геттингене пробную лекцию на право преподавания в университете, озаглавленную «О гипотезах, лежащих в основании геометрии», в которой сделал еще один важный шаг в направлении идей Гаусса и Лобачевского. Лекции Римана, повидимому, никто из слушавших его не понял, и только один старик Гаусс (который скончался в следующем, 1855 г.), присутствовавший на лекции Римана, хотя и промолчал, но, по преданию, ушел с нее, глубоко задумавшись. Гаусс понял, что на том пути, по которому шли он сам, Лобачевский и Бóяи, был сделан еще один существенно важный шаг вперед.

Гаусс и Риман в 1840-х годах ознакомились с работами Лобачевского, а также и с работой Бóяи, кроме того, как указано выше, Гаусс и сам, во всяком случае уже в двадцатых годах прошлого века, развил для себя ту же теорию. С другой стороны, Риман, конечно, знал внутреннюю геометрию поверхностей, созданную Гауссом. Риман провел идею Гаусса еще на один шаг дальше. А именно, и это самое важное, Риман стал рассматривать объект, который задается аналитическим аппаратом Гаусса, метрической квадратичной формой, сам по себе, а не исходя от заданной в евклидовом пространстве поверхности F, по примеру того, как Лобачевский рассматривал, например, свою плоскость саму по себе, вне какой-либо ее зависимости от пространства Евклида. Такой объект называется сейчас двумерным римановым многообразием, или двумерной римановой геометрией. Некоторые такие многообразия могут быть осуществлены в виде обычной поверхности, лежащей в евклидовом трехмерном пространстве, и тогда получается теория Гаусса, другие же таковы, что можно осуществить в виде поверхности в трехмерном евклидовом пространстве лишь небольшие их куски, а в целом они в трехмерном евклидовом пространстве не осуществляются.

Другой важный шаг, который сделал Риман, не более простой: он состоял в обобщении всей теории на n-мерный случай, т. е. в построении теории n-мерных римановых многообразий. Оказалось, что для любого n существуют два и только два таких римановых многообразия, которые, во-первых, бесконечны и, во-вторых, в них возможна полная группа движений любого конечного или бесконечного «твердого тела» (т. е. любое тело можно переносить в любое место и любым образом поворачивать, не подвергая деформации), — это n-мерное пространство Евклида и n-мерное пространство Лобачевского. Только после этого стало ясным, что за геометрию исследовали Лобачевский, Гаусс и Бóяи. Пространства Евклида и Лобачевского — это два самых замечательных и простых римановых многообразия.

Впоследствии Гильберт доказал, что плоскость Лобачевского (т. е. двумерное пространство Лобачевского) в целом нельзя осуществить в виде поверхности в трехмерном евклидовом пространстве.

Часть плоскости Лобачевского, например ее круговой сектор, если центральный угол его и радиус не очень велики, можно осуществить в виде такой поверхности — это так называемая псевдосфера Бельтрами.

6. Теория относительности Эйнштейна

Теперь нам придется обратиться к физике.

В конце XIX в. в физике было обнаружено фундаментальное противоречие. Известный опыт Майкельсона (1881), при котором измерялась скорость света (она составляет около 300 000 *км/сек*) в направлении движения Земли по ее орбите (около 30 *км/сек*) и в перпендикулярном к этому направлении, неожиданно обнаружил, что время прохождения света вдоль равных по длине отрезков, из которых один направлен по движению Земли, а другой перпендикулярен к нему, в точности одинаково. Сомнений в опыте не могло быть. Точность уже и первого опыта Майкельсона столь велика, что разница оказалась бы заметной, даже если бы она была в несколько раз меньше предполагавшейся, а впоследствии точность опыта была во много раз увеличена. Результат опыта Майкельсона поставил ученых в тупик, и для его объяснения были предложены три основные гипотезы.

Голландский физик Лоренц подробно разработал гипотезу, согласно которой все тела при своем движении, хотя бы и в пустоте, сокращаются в направлении движения, причем это сокращение тем больше, чем скорость движущегося тела ближе к скорости света, и при скорости света становится бесконечным. Немецкий физик Герц предположил, что среда, в которой, как тогда считали, распространяются волны света (так называемый «эфир»), увлекается атмосферой Земли при ее движении по орбите. Позже была также (Ритц) разработана гипотеза, по которой скорость света зависит от скорости его источника.

Неудовлетворительность всех этих объяснений побудила (1905) 26-летнего тогда, гениального физика Альберта Эйнштейна (1879—1955) воспринять результат опыта Майкельсона как обнаружение нового фундаментального свойства окружающего нас мира, состоящего в том, что все без исключения процессы в природе (механические, оптические, электрические и т. д.) протекают одинаково как в неподвижной, так и в равномерно и прямолинейно движущейся лаборатории. Точнее говоря, протекают одинаково по отношению к любой так называемой «инерциальной» координатной системе, т. е. такой координатной системе, по отношению к которой «в малом» выполняется закон инерции Ньютона. Тем самым исчезло укоренившееся со времен Ньютона представление об абсолютном пространстве и была выявлена неразрывная связь пространства и времени.

Опыт Майкельсона был тем же для вопроса о взаимосвязи пространства и времени, чем была 11-я аксиома Евклида для вопроса о свойствах пространства. В свое время неудача всех попыток доказать 11-ю аксиому Евклида заставила Гаусса, Лобачевского и Бóяи заподозрить, что возможно другое пространство, чем евклидово, и что вопрос о том, каково наше пространство, нельзя решить чисто математическим путем, так как свойства реального пространства — не априорные наши идеи, а являются отражением реальных свойств окружающего нас материального мира. Точно так же отрицательный результат опыта Майкельсона навел Эйнштейна на мысль, что этот результат есть лишь отражение неизвестного нам до него свойства времени и что свойства времени (или скорее его связи с пространством) также не суть наши априорные идеи, а являются такими же отражениями окружающего нас материального мира и реальных процессов, в нем происходящих, а потому могут и должны быть исследованы. Оказалось, что пространство и время при движении столь тесно переплетаются между собою, что лишь объединение их в одно четырехмерное непрерывное многообразие «пространство — время» позволяет правильно описывать физическую действительность.

В математической трактовке «специальной» теории относительности основную роль сыграли исследования Минковского, показавшие, что, если рассматривать время как 4-ю координату, то формально эту теорию можно рассматривать как особую четырехмерную псевдоевклидову геометрию, в которой преобразованиям Лоренца соответствуют движения в трехмерном пространстве Лобачевского.

В 1916 г. Эйнштейн дал дальнейшее обобщение своей теории, так называемую «общую теорию относительности», которую, может быть, правильнее было бы называть эйнштейновой теорией поля тяготения. Эта общая теория Эйнштейна исходит из учета свойств пространства — времени, выясненных в «специальной» теории относительности, и утверждения о принципиальной неразличимости «в малом» сил, вызываемых тяготением и ускорением тяжелых масс. В этой общей теории особенно ярко выступило значение римановой геометрии, так как Эйнштейн положил в основу ее изложения особое четырехмерное (три координаты пространственные, а четвертая — время) псевдориманово пространство, метрика которого определяется взаимным расположением и движением тяжелых масс (включая волны тяготения). С точки зрения этой «общей теории относительности» Эйнштейна траектории таких небесных тел, которые своею собственной массой мало искажают те поля тяготения, в которых они движутся, если учитывать кинематику их движения (т. е. и время), суть просто прямые (геодезические линии) рассматриваемого четырехмерного псевдориманова пространства. В частности, траектории фотонов (квантов света) суть особые, так называемые «нулевые» прямые этого пространства.

Таким образом получается еще более простое, чем у Ньютона, описаний движений небесных тел. Но чтобы решить вопрос в сторону ньютонова или этого эйнштейнова описания явлений, надо было найти какое-нибудь явление, которое бы не следовало из теории Ньютона, но вытекало бы из теории Эйнштейна. Таких явлений было найдено три. Отклонение движения Меркурия от законов Ньютона, смещение спектральных линий света, испускаемого Солнцем под действием его тяготения, и искривление луча света, исходящего от далекой звезды, проходящего вблизи Солнца, которое можно было пытаться обнаружить во время полных солнечных затмений. Все эти три явления подтвердились на опыте и, таким образом, вопрос был решен в пользу теории Эйнштейна, к которой теория Ньютона является лишь первым приближением.

Ввиду того, что тяжелые массы расположены в пространстве неравномерно, метрика псевдориманова пространства Эйнштейна не однородная. Отсюда следует, что и наше обычное трехмерное пространство неевклидово. Таким образом оказался, наконец, решенным вопрос, который себе ставили, как это было указано выше, еще Гаусс и Лобачевский. Пространство оказалось неевклидовым, но и не пространством Лобачевского, а более сложным римановым многообразием, свойства которого зависят от расположения и движения расположенных в нем масс (в основном звезд). Таким образом, «в малом» оно, безусловно, неевклидово. Каково же оно «в целом» — до сих пор решить не удается, так как нам не известно, каково расположение и движение масс во всем пространстве в целом.

Современная физика элементарных частиц, имеющих часто очень большие скорости, сравнимые со скоростью света, при которых уже сказываются так называемые релятивистские эффекты (т. е. приходится уже учитывать те новые свойства взаимосвязи пространства и времени, которые открыл Эйнштейн), все время при всех подсчетах должна использовать теорию относительности.

Между прочим, уже из специальной теории относительности Эйнштейна следует, что масса вещества при быстром его движении заметно отличается от той массы, которую оно имеет в покое. Как на одно из важнейших следствий специальной теории относительности надо указать на вытекающую из нее в связи с отмеченным сейчас обстоятельством знаменитую формулу Эйнштейна $E = mc^2$, показывающую, в частности, какова энергия, выделяемая при тех атомных реакциях, при которых масса покоя вещества убывает. Оказывается, что убывание массы покоя на один грамм эквивалентно выделению такой энергии, которая получается при сжигании 2000 тонн угля. Эта чисто теоретически выведенная Эйнштейном из принципа относительности формула блестяще оправдалась на опыте.

7. О месте геометрии Лобачевского в истории развития современного естествознания

Повидимому, наиболее раннее высказывание о развитии науки, которое сохранилось в истории знания, относится именно к геометрии. Уже древнегреческому ученому Евдему Родосскому (IV в. до н. э.) приписываются следующие слова: «Геометрия была открыта египтянами и возникла при измерении земли. Это измерение было им необходимо вследствие разлития реки Нила, постоянно смывавшего границы. Нет ничего удивительного в том, что эта наука, как и другие, возникла из потребностей человека. Всякое возникающее знание из несовершенного переходит в совершенное. Зарождаясь путем чувственного восприятия, оно постепенно становится предметом нашего рассмотрения и, наконец, делается достоянием разума». В этом высказывании Евдема Родосского содержатся два утверждения. Во-первых, то, что источником геометрии были непосредственные нужды практики, и, во-вторых, то, что разработка этих вопросов привела к развитию некоторой теории. Но в этом высказывании не подчеркнута третья важная сторона дела, а именно утверждение о том, что добытые теорией истины только постольку ценны, поскольку они снова возвращаются в практику и воздействуют на нее.

В течение более чем двух тысячелетий многие ученые и философы занимались вопросом о том, как развивается наука.

Процесс познания человеком природы начинается с чувственных восприятий, с непосредственного созерцания тех или иных вещей и явлений природы. Но познание не останавливается на этой первой ступени, оно поднимается на высшую ступень — образование понятий. Научные понятия, проверенные практикой, являются объективной истиной и дают глубокое отражение действительности. Об этом Ленин говорит: «Мышление, восходя от конкретного к абстрактному, не отходит — если оно *правильное... от* истины, а подходит к ней. Абстракция *материи*, *закона* природы, абстракция *стоимости* и т. д., одним словом *все* научные (правильные, серьезные, не вздорные) абстракции отражают природу глубже, вернее, *полнее*. От живого созерцания к абстрактному мышлению *и от него к практике* — таков диалектический путь познания *истины*, познания объективной реальности» [1]).

[1]) В. И. Ленин, Философские тетради, Госполитиздат, 1947, стр. 146—147.

В истории геометрии до Лобачевского, как нельзя более наглядно, проявился этот путь развития науки по «триаде» Ленина.

Но к тому, что здесь сказано о развитии науки, можно еще прибавить, что наука развивается, кроме того, как бы по спирали (по винтовой линии), на что также указывал Ленин, т. е., проделав все три этапа рассмотренной «триады», опираясь на те новые элементы практики, которые ею же порождены, наука опять возвращается к своим основам, но уже на высшей ступени. Перерабатывая свои основы на базе гораздо более глубокого проникновения в окружающий нас материальный мир, ставшего возможным благодаря прохождению предыдущей триады, предыдущего витка спирали, наука изменяет свои основы в соответствии с обнаруженными новыми более глубокими фактами (теория относительности) или в соответствии с новыми более глубокими соображениями (неевклидовы геометрии) и начинает новую триаду, новый виток спирали, но уже на высшей ступени. Сейчас мы переживаем как раз новое такое восхождение, с которым связано большое критическое углубление в свойства обеих основных форм существования материи — пространства и времени, начатое в отношении пространства в первой трети прошлого столетия создателями неевклидовой геометрии, а в отношении связи пространства со временем и зависимости свойств пространства от расположения и движения в нем инертных масс — физиками в начале нашего столетия.

В этом разрезе становится особенно понятным, в чем состоит значение дела Лобачевского. Правда, уже Аристотель в своем логическом трактате «Первая аналитика», разбирая логическую ошибку «постулирование основания» (petitio principii), т. е. ошибку неявного использования утверждения, равносильного доказываемому, отмечает положение с теорией параллельных. Англичанин Роджер Бэкон (1214—1294) уже говорил о зависимости времени и пространства от материи. Выдающийся югославский ученый Бошкович (1711—1788) не соглашался с теми, кто хочет доказать V постулат Евклида, а утверждал, что его можно принять лишь предположительно. Однако только с Лобачевского, Гаусса и Бо́яи начинается успешный период критического пересмотра наших понятий о формах существования материи.

Лобачевский и Бо́яи, Гаусс, Риман, Эйнштейн все глубже и глубже проникали в свойства пространства и времени и в связь их с материей, причем практически важнейшим этапом этого пересмотра пока оказалась теория относительности, так как она является учением о роли пространства и времени как раз в тех глубоких физических процессах, использование которых сейчас видоизменяет всю нашу жизнь.

Исторически Лобачевский стоит у самого начала, у самого истока этого пересмотра двух основных форм существования материи. И в этом его значение.

Вот в начальном и узловом пункте какого грандиозного развития более глубокого материалистического понимания окружающего нас мира стоят идеи и работы Лобачевского по геометрии и тот первый доклад о них, который он сделал в Казани в феврале 1826 г.

ГЛАВА I

АКСИОМАТИКА ЕВКЛИДОВОЙ ПЛОСКОСТИ И АКСИОМАТИКА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

§ 1. Аксиоматическое построение геометрии

В знаменитой книге «Начала» древнегреческого математика Евклида, жившего 2300 лет тому назад, сначала указывается, каковы основные понятия геометрии, затем приводятся основные постулаты или аксиомы и из них при помощи логических рассуждений постепенно выводятся все теоремы геометрии.

Двухтысячелетние размышления над геометрией Евклида показали, что хотя в принципе его построение геометрии и правильное, но набор его аксиом не полный. Надо прибавить еще несколько аксиом. С другой стороны, некоторые аксиомы Евклида никак не могут считаться аксиомами, а являются скорее описаниями, которые надо вовсе выпустить. Кроме того, обнаружилось, что доказательства многих первых простейших теорем у Евклида упущены, а содержащиеся в них утверждения (где они нужны) принимаются молча, без доказательства, хотя они и не внесены в список аксиом.

В конце прошлого и в начале нашего столетия было разработано несколько аксиоматик [1]) евклидовой геометрии,

---

[1] *Аксиоматика* — система аксиом, из которых следует некоторая отрасль математики.

которые уже не страдают указанными недостатками и, кроме того, удовлетворяют условию независимости аксиом, так что ни одна из аксиом не лишняя, т. е. не является следствием остальных. Наиболее употребительны у нас сейчас две системы аксиом евклидовой геометрии, одна из них предложена Д. Гильбертом, а другая Ф. Шуром. Мы будем в этой книге пользоваться аксиоматикой Шура.

Ввиду того что мы, ради простоты, ограничиваемся изложением лишь планиметрии Лобачевского, мы изложим аксиоматику евклидовой геометрии также лишь для планиметрии.

§ 2. Аксиоматика евклидовой планиметрии

Прежде всего утверждается, что при изучении евклидовой планиметрии будут рассматриваться три и только три вида элементов: *точки, прямые*[1]), и *движения*. Элементы эти никак не определяются, а только называются, т. е., например, не определяется, что такое точка или что такое прямая, или что такое движение, а только говорится, что мы будем рассматривать некоторые элементарные объекты, которые мы будем называть точками, прямыми и движениями. Затем утверждается, что между этими элементами, т. е. точками, прямыми и движениями, мы будем рассматривать четыре и только четыре сорта соотношений: *связи, порядка, соответствия точек при движениях* и *соответствия прямых при движениях*. Причем опять эти соотношения никак не определяются, а только называются.

---

[1]) Собственно этим самым утверждается, что все фигуры, которые мы будем рассматривать в планиметрии, мы будем считать состоящими из точек и прямых. Например, окружность мы будем рассматривать как совокупность таких-то точек и т. д., а также то, что прямые мы будем, так же как и точки, считать элементарными образованиями, т. е., другими словами, мы отказываемся объяснить, что значит, что точки расположены прямолинейно, а только предполагаем верным, что точки и прямые удовлетворяют тем утверждениям, которые о них делаются в указываемых ниже 20 аксиомах.

Эти семь основных понятий — три вида элементов и четыре вида соотношений между ними [1]).

Далее условливаются, что соотношение связи будем выговаривать так: «*точка лежит на прямой*», или, что одно и то же, «*прямая проходит через точку*», или «*точка и прямая инцидентны друг другу*». Соотношение порядка будем выговаривать так: «*точка B лежит между точками A и C*». Соотношение соответствия точек при движении будем выговаривать так: «*при данном движении d точка A переходит в точку A'*» или, что все равно, «*при данном движении d точка A' есть образ точки A*», «*при данном движении d точка A есть прообраз точки A'*».

Далее утверждается, что названные соотношения между названными элементами удовлетворяют некоторым 20 требованиям. Требования эти называются *аксиомами евклидовой планиметрии*. Под евклидовой планиметрией условливаемся понимать совокупность всех возможных лемм, теорем, следствий, построений и т. д., которые можно логически вывести из этих 20 аксиом [2]).

---

[1]) Конечно, все эти семь основных понятий постепенно сформировались на основе огромного многовекового опыта ряда поколений человечества. Например, представление о прямой мы получаем, когда имеем дело с туго натянутой нитью, с лучом света и т. д. Сама нить не есть прямая. Сам луч света не есть прямая в точном геометрическом смысле, но то абстрактное понятие, которое выкристаллизовывается из подобных многочисленных примеров, взятых из окружающего нас реального мира, есть геометрическое понятие прямой. То же можно сказать и об остальных шести основных понятиях геометрии.

[2]) Какими именно правилами вывода при этом условливаются пользоваться, нужно, строго говоря, также точно указать. Для этого надо ввести так называемую алгебру логики. Но мы, для простоты, этого делать не будем, а будем просто предполагать, что мы везде будем проводить «логически безупречные» рассуждения.

Можно себе поставить еще один вопрос, а именно: всякое ли разумное высказывание в терминах аксиоматики евклидовой геометрии может быть либо выведено из ее аксиом, либо опровергнуто, т. е. выведено из аксиом противоречащее ему утверждение? Этот вопрос в последнее время получил отрицательное решение, если к геометрии причислять и вопросы, связанные с арифметикой. Тогда существует сколько угодно таких выска-

Аксиомы эти следующие, причем везде слова «две точки» всегда будут значить две разные точки, «три точки» — три разные точки.

I. Аксиомы связи:

1) *Через любые две точки проходит прямая.*

2) *Через две точки проходит только одна прямая.*

3) *На любой прямой лежат по крайней мере две точки.*

4) *Какую бы прямую ни взять, существует точка, на ней не лежащая.*

Ничего больше о соотношениях связи не утверждается.

II. Аксиомы порядка:

1) *Если точка B лежит между точками A и C, то точка B лежит на прямой AC.*

2) *Если точка B лежит между точками A и C, то она лежит и между точками C и A.*

3) *Если A и B — две точки прямой, то на этой прямой всегда есть хотя бы одна точка C такая, что точка B лежит между точками A и C.*

4) *Из трех точек A, B, C прямой не более одной лежит между двумя другими.*

5) (Аксиома Паша). *Если точки A, B, C не лежат на одной прямой и прямая a не проходит ни через одну из этих точек и пересекает отрезок*[1]) *AB, то она пересекает один из отрезков AC или BC.*

Ничего больше о соотношениях порядка не утверждается.

зываний, которые заведомо не могут быть в данной аксиоматике ни доказаны, ни опровергнуты. Если же из геометрии исключить такого рода вопросы, аксиоматика ее полна в указанном смысле.

Наконец, еще можно себя спросить: все ли, что мы склонны называть элементарной геометрией, основывается на системе аксиом евклидовой геометрии или можно натолкнуться на такие вопросы, которые хотя нам кажутся относящимися к элементарной геометрии, тем не менее требуют еще каких-то новых аксиом? На этот вопрос можно ответить так: во-первых, элементарной геометрией, по определению, называется все то, что можно вывести из этих аксиом, во-вторых, вся практика человечества до сих пор не обнаруживала таких вопросов.

[1]) Мы говорим, что прямая *пересекает* отрезок AB, если на ней есть точка, лежащая между A и B.

III. Аксиомы движения[1]:

1) *Если задано движение д, то при нем любая данная точка плоскости A переходит в одну определенную ее точку A'.*

2) *При заданном движении д в любую точку плоскости A' переходит некоторая ее точка A.*

3) *При заданном движении д различные точки A и B переходят в различные точки A' и B'*[2].

Эти три аксиомы говорят, что движение есть так называемое *взаимно однозначное преобразование* совокупности всех точек плоскости в себя.

Если при движении $д_1$ точки $A, B, \ldots$ переходят в точки $A', B', \ldots$ а при движении $д_2$ точки $A', B', \ldots$ переходят в точки $A'', B'', \ldots$, то переход от точек $A, B, \ldots$ к точкам $A'', B'' \ldots$ будет, очевидно, также взаимно однозначным преобразованием совокупности всех точек плоскости в себя. Это преобразование называют *произведением преобразований* $д_1$ и $д_2$ и обозначают через $д_1 \cdot д_2$.

4) *Произведение любых двух движений есть опять некоторое движение*

$$д_1 \cdot д_2 = д_3.$$

5) *Всякое движение д имеет себе обратное движение $д^{-1}$ такое, что произведение $д \cdot д^{-1}$ есть движение, оставляющее все точки плоскости на месте, т. е. так называемое тождественное преобразование.*

В силу аксиом 4) и 5) тождественное преобразование тоже причисляется к числу движений.

---

[1]) В аксиомах движения дается аксиоматическое описание движений всей бесконечной плоскости в себе как жесткого целого, а также таких движений плюс отражения плоскости в прямой. Когда мы говорим «наложим один треугольник на другой», то мы и применяем как раз такие движения.

[2]) Аксиома 3) собственно следует из аксиомы 6) этой же группы аксиом, но мы ее все же поместим для того, чтобы аксиомы 1), 2), 3) определяли однозначность при движении отображения совокупности точек на себя. Это единственная зависимая аксиома, которую мы помещаем в нашем списке; все остальные независимые.

Аксиомы 1)—5) говорят, что совокупность всех движений плоскости образует *группу* взаимно однозначных преобразований совокупности всех точек плоскости в себя.

6) *При движении сохраняется порядок точек, т. е. если до движения точка B лежала между точками A и C, то точка B' лежит между точками A' и C', т. е., в частности, точки A', B', C' расположены на одной прямой.*

Замечание. Для высказывания следующих аксиом движения надо ввести некоторое новое понятие, называемое «репером». *Репером* мы будем называть следующее: некоторую точку, некоторую исходящую из этой точки полупрямую и одну из двух полуплоскостей, отсекаемых прямой, частью которой является эта полупрямая[1]).

Полупрямая и полуплоскость не являются элементарными понятиями. Для объяснения сущности этих понятий придется из предыдущих аксиом связи и порядка вывести ряд теорем. Чтобы не прерывать изложения системы аксиом, мы выведем эти теоремы в следующем параграфе.

7) *Если даны два репера, то существует движение, совмещающее первый репер со вторым.*

8) *Такое движение только одно.*

9) *Если дано движение g, то при нем любая прямая a плоскости переходит в одну вполне определенную прямую a', а именно в ту, на которой лежат образы точек прямой a.*

---

[1]) Можно было бы понятие о репере ввести иначе, а именно *репером* называть совокупность трех точек O, A, B, не лежащих на одной прямой. И два репера OAB и $O'A'B'$ считать *эквивалентными*, если *начала* O и O' их совпадают, точки O, A, A' лежат на одной прямой, причем точка O не лежит между A и A'; B и B' не лежат на прямой OA и прямая OA не пересекает отрезка BB'. Если ввести такое понятие репера и такое понятие эквивалентности реперов, то аксиома 7) должна быть высказана так:

7) *Если даны два репера, то существует движение, совмещающее первый репер со вторым репером или с ему эквивалентным репером.*

При таком подходе к вопросу нет надобности вводить при изложении аксиоматики понятий «полупрямая» и «полуплоскость», которые имеют тот недостаток, что являются теоретико-множественными понятиями.

IV. Аксиома непрерывности (аксиома Дедекинда):

1) *Если все точки прямой как угодно разбить на два класса I и II такие, что любая точка класса II лежит правее*[1]) *любой точки класса I, то либо в классе I есть самая правая точка, и тогда в классе II нет самой левой, либо, наоборот, в классе II есть самая левая точка, и тогда в классе I нет самой правой.*

V. Аксиома о параллельной:

1) *Если a — некоторая прямая и B — некоторая точка, на ней не лежащая, то существует не больше одной прямой b, проходящей через точку B и не пересекающей прямую a.*

Это и есть так называемый пятый постулат, или 11-я аксиома Евклида.

Всех аксиом в нашем списке $4+5+9+1+1=20$.

§ 3. Последовательность теорем, вытекающих из аксиом связи и порядка, поясняющих смысл понятий полупрямая и полуплоскость

Начнем с рассмотрения полупрямой. Для выяснения того, что такое полупрямая, надо последовательно доказать следующие теоремы:

а) если A и C — две точки прямой, то существует точка B, лежащая между ними;

б) из трех точек прямой A, B, C одна и только одна лежит между двумя другими;

в) n любых различных точек прямой можно всегда так занумеровать числами $1, 2, 3, \ldots, n$, что если $i<j<k$ (или $i>j>k$), то j-я точка лежит между i-й и k-й.

Из этих теорем можно вывести следующую теорему:

---

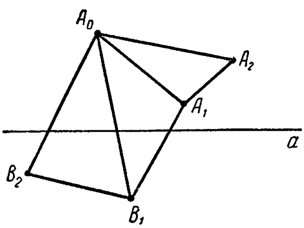
[1]) Одно из направлений на прямой условно мы называем *правым*. Что значит, с точки зрения наших аксиом, что точка B лежит на прямой правее точки A, можно объяснить, доказав ряд теорем, следующих из аксиом связи и порядка (см. § 3).

г) каждая точка O прямой a разделяет все ее точки, кроме точки O, на два множества I и II такие, что любые две точки A_1 и A_2 прямой a, отличные от точки O, принадлежат одному и тому же из этих множеств, если точка O не лежит между ними, и разным, если точка O лежит между ними;

д) (дополнение к аксиоме Паша) не может быть, чтобы прямая пересекала все три стороны треугольника.

Мы не будем утруждать читателя доказательством этих теорем, хотя они и не сложны.

Определение. Если точка A прямой a принадлежит, например, множеству I, то само это множество плюс еще точка O называется *полупрямой* OA с началом O.



Черт. 2.

Переходим к рассмотрению полуплоскости.

Можно доказать теорему: каждая прямая a разделяет все точки плоскости, не лежащие на прямой a, на два множества I и II такие, что любые две точки A_1 и A_2 плоскости, не лежащие на прямой a, принадлежат одному и тому же из этих множеств, если прямая a не пересекает отрезка A_1A_2, и разным, если она его пересекает (черт. 2).

Для того чтобы дать пример доказательства какой-нибудь начальной теоремы, которая опущена у Евклида, докажем эту теорему.

В силу третьей аксиомы связи имеется точка A_0, не лежащая на прямой a. Отнесем к множеству I все те точки A, не лежащие на прямой a, для которых отрезок A_0A не пересекается прямой a, а к множеству II все те точки B, не лежащие на прямой a, для которых отрезок A_0B пересекается прямой a. Всякая точка плоскости, не лежащая на прямой a, будет принадлежать либо к I, либо ко II множеству, так как прямая будет непременно либо не пересекать отрезок, соединяющий эту точку с точкой A_0, либо его пересекать.

Покажем, что множества I и II удовлетворяют условиям теоремы. Действительно:

1° Любой отрезок A_1A_2 (черт. 2) не пересекается прямой a, так как если бы он ею пересекался, то по аксиоме II_5 (аксиома Паша) прямая пересекала бы либо отрезок A_0A_1, либо отрезок A_0A_2, что противоречит предположенному о точках A.

2° Любой отрезок B_1B_2 (черт. 2) тоже не пересекается прямой a, так как, по определению точек B, прямая пересекает отрезки A_0B_1 и A_0B_2, а тогда она не может уже пересекать отрезок B_1B_2 в силу указанной теоремы д), дополняющей аксиому Паша.

3° Любой отрезок A_1B_1 (черт. 2) пересекается прямой a. Действительно, в силу самого определения точек A и B, прямая a пересекает сторону A_0B_1 треугольника $A_0A_1B_1$ и не пересекает стороны его A_0A_1, следовательно, по аксиоме Паша, она пересекает его сторону A_1B_1.

Отдельно надо доказывать теорему для тех случаев, когда точки A_0, A_1, A_2 или точки A_0, B_1, B_2, или точки A_0, A_1, B_1 не образуют треугольника, а расположены прямолинейно. В этих случаях при доказательстве используется теорема в).

Учитывая, что по 6-й аксиоме движения при движении сохраняется порядок точек, и учитывая только что сказанное о полупрямой и полуплоскости, мы получаем т е о р е м у: при движении всякая полупрямая переходит в полупрямую, а полуплоскость — в полуплоскость.

Во всем дальнейшем ничего, кроме того, что здесь сказано о понятии полуплоскость и полупрямая, не будет использовано.

§ 4. Аксиоматика плоскости Лобачевского

Если из выписанной системы 20 аксиом вовсе исключить аксиому о параллельной, то оставшиеся 19 аксиом образуют аксиоматику так называемой «*абсолютной*» планиметрии, для которой планиметрии Евклида и Лобачевского являются двумя подслучаями.

Если же аксиому о параллельной Евклида заменить следующей аксиомой о параллельных Лобачевского:

V*. *Если a — некоторая прямая и B — некоторая точка, на ней не лежащая, то через эту точку можно провести по крайней мере две разные прямые b и b', не пересекающие прямой a,*

то получается аксиоматика планиметрии Лобачевского.

Таким образом, аксиоматика планиметрии Лобачевского состоит из тех же первых 19 аксиом, что и аксиоматика плоскости Евклида, и одной видоизмененной (20-й) аксиомы о параллельных — аксиомы о параллельных Лобачевского.

ГЛАВА II

НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ ПЛАНИМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Эта вторая глава является центральной во всей книге. Мы докажем в этой главе следующую условную теорему:

Теорема. *Аксиоматика планиметрии Лобачевского непротиворечива, если непротиворечива аксиоматика геометрии Евклида*[1].

Заметим, что аксиоматика называется *непротиворечивой*, если, сколько бы ни выводить из нее теорем, мы никогда не придем к теореме, противоречащей какой-нибудь из ее аксиом, или к двум противоречащим друг другу теоремам. Доказательство этой теоремы после ряда подготовительных рассуждений (§ 5, 6) будет дано в § 8. Однако уже сейчас можно показать, что из этой теоремы следует такое утверждение:

Теорема. *Если аксиоматика Евклида непротиворечива, то в планиметрии Евклида нельзя доказать пятый постулат Евклида.*

Действительно, если бы из первых 19 аксиом планиметрии Евклида можно было бы вывести пятый постулат Евклида, т. е. 20-ю аксиому нашего списка, как теорему, то оказалось бы, что эта же теорема имеет место и в планиметрии Лобачевского, так как первые 19 аксиом планиметрии Лобачевского те же, что и в планиметрии

---

[1]) В предлагаемом далее выводе предполагается непротиворечивость как планиметрии, так и стереометрии Евклида, но можно было бы ограничиться только планиметрией Евклида.

Евклида. И получалась бы в планиметрии Лобачевского теорема, противоречащая аксиоме Лобачевского о параллельных, т. е. аксиоматика Лобачевского оказалась бы противоречивой, а это может быть в силу условной теоремы лишь в случае, если противоречива аксиоматика геометрии Евклида.

Мы видим, что «доказательство» пятого постулата Евклида привело бы к доказательству противоречивости самой геометрии Евклида.

В § 5 и 6 мы рассмотрим две предварительные теории — краткую теорию аффинных преобразований пространства (в § 5) и теорию преобразований Лоренца (в § 6). Параграфы эти — не трудные по содержанию, но довольно длинные, однако для понимания доказательства непротиворечивости надо будет сначала подробно их изучить. В § 7 мы рассматриваем одну проекцию всей евклидовой плоскости внутрь круга, являющуюся для случая евклидовой плоскости прямой аналогией той модели плоскости Лобачевского в круге, которую мы рассматриваем в § 8. Читатель может вовсе опустить § 7.

Замечание. При изложении материала § 5 и 6 мы на время совсем оставляем в стороне всякие вопросы об аксиоматике и будем в этих параграфах рассматривать просто некоторые теоремы обычной стереометрии, причем будем предполагать известным только курс геометрии средней школы. Стереометрические теоремы, доказываемые в этих параграфах, нам необходимы для построения модели плоскости Лобачевского (в § 8).

§ 5. Некоторые теоремы теории аффинных преобразований пространства

1. Точечные взаимно однозначные преобразования пространства

Определение. *Точечным взаимно однозначным преобразованием* пространства мы будем называть такое преобразование пространства, при котором:

1° всякая точка A пространства (прообраз) переходит в одну и только одну его точку A' (ее образ);

2° во всякую точку A' пространства переходит некоторая его точка;

3° две различные точки A и B переходят в различные точки A' и B'.

Например, параллельный перенос всего пространства как жесткого целого на данное расстояние и в данном направлении есть точечное взаимно однозначное преобразование пространства. Поворот всего пространства как жесткого целого вокруг данной оси на данный угол есть тоже точечное взаимно однозначное преобразование пространства. При обоих этих преобразованиях ни форма, ни величина фигур не изменяются, так как оба они суть движения пространства как жесткого целого.

Но бывают такие точечные взаимно однозначные преобразования пространства, при которых и форма фигур и их величина изменяются. Таковым является, например, *равномерное сжатие* пространства к некоторой его плоскости, которое состоит в том, что: 1° все точки этой плоскости остаются на месте; 2° всякая же точка пространства, не лежащая в этой плоскости, остается с той же стороны от плоскости, с которой она лежала, на том же перпендикуляре к этой плоскости, на котором она лежала, но перемещается по нему так, что ее новое расстояние h' от плоскости оказывается в t раз меньше старого расстояния h и коэффициент $t > 1$, называемый *коэффициентом сжатия*, один и тот же для всех точек пространства.

При равномерном сжатии пространства к плоскости, очевидно, форма и величина фигур изменяются. Например, шар превращается в «сжатый шар» (так называемый сжатый эллипсоид вращения или сфероид). Мы, однако, дальше покажем, что при равномерном сжатии прямые остаются прямыми.

Могут быть и еще более сложные точечные взаимно однозначные преобразования пространства, при которых не только форма и величина фигур изменяются, но и прямые перестают быть прямыми, а изгибаются.

Представим себе, например, что все бесконечное пространство заполнено какой-либо упругой массой вроде резины, и подвергнем ее каким-нибудь способом какой угодно упругой деформации (искажению). В одних местах растянем, в других сожмем, повернем и т. д., но не будем ее разрывать. Произойдет некоторое, вообще говоря, очень неправильное, точечное взаимно однозначное преобразование пространства, при котором не только форма и величина фигур изменяется, но и прямые причудливым образом изогнутся.

2. Определение аффинных преобразований

Определение. *Аффинным преобразованием* пространства будем называть преобразование, если оно:

1° точечное взаимно однозначное и, кроме того, при нем

2° всякая прямая пространства переходит в прямую и обратно (т. е. всякая прямая пространства получается из прямой),

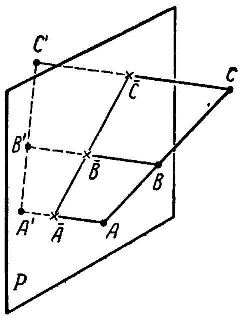
3° отношение, в котором точка делит отрезок, сохраняется.

Из сохранения отношения следует, что порядок точек на прямой сохраняется, т. е. если точка B лежит между точками A и C, то ее образ B' лежит между образами точек A и C.

3. Движение пространства как жесткого целого, отражение его в плоскости и равномерное сжатие его (или растяжение) к плоскости суть аффинные преобразования

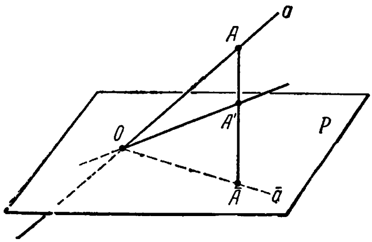
а) Движение всего пространства как жесткого целого есть аффинное преобразование, так как, во-первых, оно, как мы это уже отмечали, очевидно, точечное взаимно однозначное преобразование пространства. Во-вторых, при нем любая прямая, очевидно, переходит в прямую и, наоборот, получается из прямой, причем сохраняются отношения, в которых точки делят отрезок.

б) Отражение пространства в плоскости, т. е. такое преобразование пространства, при котором все точки некоторой плоскости P остаются на месте, а любая точка B, на ней не лежащая, переходит в точку B', лежащую на том же перпендикуляре к плоскости P, на котором лежит точка B, на таком же расстоянии от плоскости P, на каком от нее лежит точка B, но по другую сторону от плоскости P, чем точка B (черт. 3), как легко видеть, также есть аффинное преобразование.



Черт. 3.

Действительно, во-первых, оно, очевидно, взаимно однозначно. Во-вторых, точки A, B, C отрезка AC при таком отражении переходят в точки A', B', C' плоскости, проходящей через отрезок AC и перпендикулярной к плоскости P, симметричные с точками A, B, C по отношению к прямой $\bar{A}\bar{C}$ пересечения этих плоскостей. Но в таком случае точки A', B', C' тоже лежат на одной прямой и точка B' делит отрезок $A'C'$ в таком же отношении, в каком точка B делит отрезок AC, так как, поворачивая фигуру $\bar{A}AC\bar{C}$ вокруг прямой $\bar{A}\bar{C}$ на 180°, мы совместим точки A, B, C с соответственными точками A', B', C'.



Черт. 4.

в) Покажем, наконец, что равномерное сжатие (или растяжение) пространства к некоторой плоскости P есть аффинное преобразование. Такое преобразование, очевидно, точечное взаимно однозначное. Кроме того, любая прямая при нем переходит в прямую. Действительно, пусть a — какая-нибудь прямая, O — точка, в которой она пересекает плоскость P, и $\bar{a}$ — ее проекция на плоскость P (черт. 4).

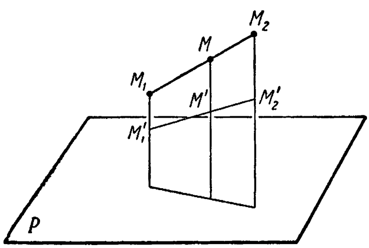
Пусть A — любая точка прямой a и $A\overline{A}$ — перпендикуляр, опущенный из точки A на плоскость P. После сжатия точка A перейдет в некоторую точку A' на этом перпендикуляре такую, что

$$A'\overline{A} = \frac{1}{k} A\overline{A},$$

где k — коэффициент сжатия. Поэтому тангенс угла $A'O\overline{A}$ будет равен

$$\frac{A'\overline{A}}{O\overline{A}} = \frac{1}{k}\frac{A\overline{A}}{O\overline{A}},$$

т. е. будет равен $\frac{1}{k}$ «раз» взятому тангенсу угла, образованного прямой a с плоскостью P, следовательно, тангенс угла $A'O\overline{A}$ для всех точек A', в которые перейдут разные точки прямой a, один и тот же. Все эти точки A' лежат, следовательно, тоже на одной и той же прямой, проходящей через



Черт. 5.

точку O в плоскости $OA\overline{A}$, перпендикулярной к плоскости P и образующей с прямой $\overline{a}$ такой угол, тангенс которого равен $\frac{A'\overline{A}}{O\overline{A}}$. Наконец, всякий прямолинейный отрезок M_1M_2 (черт. 5) при сжатии сокращается (а при растяжении удлиняется) равномерно. Действительно, в каком отношении точка M делит отрезок M_1M_2, в таком же ее образ M' делит образ $M_1' M_2'$ этого отрезка, так как параллельные прямые (тут — перпендикуляры к плоскости P) разрезают секущие (прямые M_1M_2 и $M_1' M_2'$) на пропорциональные части.

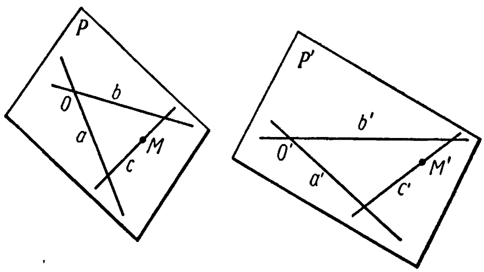
Итак, сжатие (и растяжение) суть точечные взаимно однозначные преобразования, при которых любая прямая переходит в прямую же и сохраняются отношения, т. е. аффинные преобразования.

4. Три леммы об аффинных преобразованиях

Докажем три леммы об аффинных преобразованиях.

Лемма I. *При аффинном преобразовании пространства всякая плоскость переходит в некоторую плоскость.*

Возьмем на преобразуемой плоскости P две пересекающиеся прямые a и b (черт. 6). Через любую точку M плоскости P, не лежащую на этих прямых, можно провести прямую c, пересекающую обе эти прямые. На образе P' плоскости P, о котором мы еще не знаем, что это тоже



Черт. 6.

плоскость, будут лежать образы a', b', c' прямых a, b и c. В силу определения аффинного преобразования это будут тоже прямые. Прямые a', b', c' будут тоже попарно пересекаться. Действительно, если, например, прямые a и b пересекаются, то образом точки O их пересечения является точка O', принадлежащая как прямой a', так и прямой b', т. е. прямые a' и b' имеют общую точку. Но они не совпадают, так как если A и B — точки прямых a и b, отличные от точки O их пересечения, то точки O, A и B не лежат на одной прямой, а следовательно, и их образы O', A' и B', лежащие либо на прямой a', либо на прямой b', также не лежат на одной прямой.

Образ M' точки M будет лежать на прямой c'. Следовательно, образ любой точки M плоскости P лежит в плоскости P', проходящей через прямые a' и b'. Если, наоборот, взять любую точку M' плоскости P', то обратным рассуждением мы убедимся, что она получается из некоторой точки M плоскости P.

Итак, при аффинном преобразовании пространства любая его плоскость P переходит в некоторую его плоскость P'.

Лемма II. *При аффинном преобразовании пространства параллельные плоскости переходят в параллельные плоскости.*

Действительно, образы их, которые, в силу леммы I, суть плоскости, не могут иметь общей точки, так как иначе прообраз этой точки был бы общей точкой преобразуемых параллельных плоскостей, а они общей точки не имеют.

Лемма III. *При аффинном преобразовании пространства параллельные его прямые переходят в параллельные прямые.*

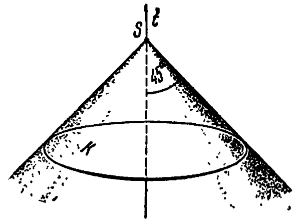
В самом деле, параллельные прямые лежат в одной плоскости и не пересекаются. Но по лемме I плоскость переходит в плоскость и поэтому образы таких прямых также лежат в одной плоскости. Но они и не пересекаются, так как если бы они имели общую точку, то ее прообраз был бы общей точкой преобразуемых параллельных прямых, а они общей точки не имеют.

§ 6. Аффинные преобразования (Λ) пространства и индуцированные ими преобразования Λ круга α в себя

1. Определение преобразований (Λ)

Бесконечную коническую поверхность, которая получается, если вращать вокруг некоторой оси l полупрямую, исходящую из некоторой точки S этой оси и образующую с этой осью l угол в 45°, мы будем называть *конусом* K (черт. 7). *Преобразованиями* (Λ) мы будем называть все те аффинные преобразования пространства, при которых вершина S конуса K остается на месте и конус K переходит в себя.

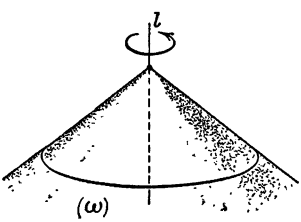
Замечание. Если бы мы потребовали еще, чтобы эти аффинные преобразования (/\) не изменяли объемов (чего, как это будет показано в § 12, всегда можно добиться, домножая преобразование (/\) на некоторую гомотетию [1]) относительно точки S), то это были бы как раз преобразования Лоренца (для плоского движения), которые рассматриваются в теории относительности в физике. Но об этом мы будем говорить дальше (см. § 12 и приложение II). А пока мы требуем только, чтобы преобразования (/\) были аффинными преобразованиями пространства, чтобы они оставляли точку S на месте и преобразовывали конус K в себя, т. е. чтобы при преобразовании (/\) любая точка поверхности K снова переходила в точку поверхности K.



Черт. 7.

2. Три простейших преобразования (/\)

Рассмотрим три специальных преобразования, два из которых совсем простые, а третье довольно неожиданное, и его придется подробно разобрать.



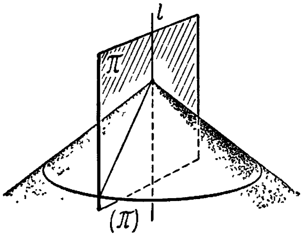
Черт. 8.

Очевидно, что любой поворот пространства как жесткого целого на некоторый угол ω вокруг оси l конуса K есть аффинное преобразование, преобразующее конус K в себя, мы будем обозначать это специальное преобразование (/\) через (ω) (черт. 8). Отражение пространства в некоторой плоскости π, проходящей через ось l

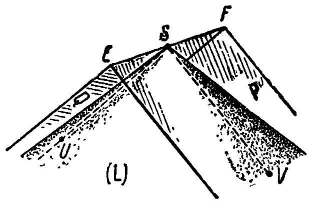
[1]) Гомотетией пространства относительно некоторой точки S называется равномерное его сжатие (или растяжение) к этой точке.

конуса K, есть, очевидно, также преобразование $(\bigwedge)$. Мы его будем обозначать через π (черт. 9).

Перейдем теперь к рассмотрению третьего специального преобразования $(\bigwedge)$, которое мы будем обозначать через (L). Рассмотрим (черт. 10) две противоположные образующие SU и SV нашего конуса и проведем к конусу касательные плоскости P и Q, касающиеся его по этим образующим. Ввиду того, что угол при вершине конуса, т. е. угол между этими образующими, равен 90°, плоскости P и Q будут взаимно перпендикулярными. Сделаем теперь сжатие всего пространства с некоторым коэффициентом t к плоскости P и затем растяжение с



Черт. 9.

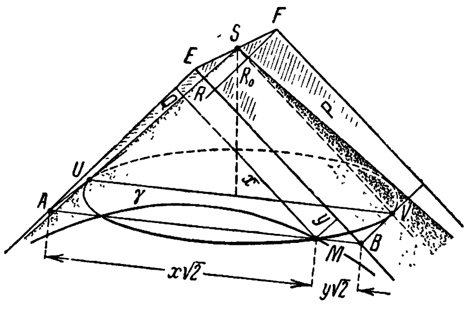


Черт. 10.

тем же коэффициентом t от плоскости Q. Например, сожмем в три раза пространство к плоскости P и растянем его в три раза от плоскости Q. Или, наоборот, сделаем сжатие к плоскости Q и такое же растяжение от плоскости P.

Как мы видели, сжатия и растяжения суть аффинные преобразования. Но если сделать аффинное преобразование, а затем над преобразованным пространством снова аффинное преобразование, то переход от исходного к окончательному пространству будет, очевидно, тоже аффинным преобразованием. Действительно, каждое из сделанных преобразований точечное взаимно однозначное, а следовательно, и их результат — точечное взаимно однозначное; при первом преобразовании прямые переходят в прямые (и обратно), при втором преобразовании эти преобразованные прямые снова переходят в прямые (и обратно), а следовательно, и при их произведении прямые переходят в прямые (и обратно); наконец, так как при обоих преобразованиях сохраняются отношения, то они сохраняются и при их произведении. Рассмотренное преобразование ($\llcorner$), состоящее из сжатия к плоскости P и такого же растяжения от плоскости Q (или наоборот), есть, следовательно, аффинное преобразование.

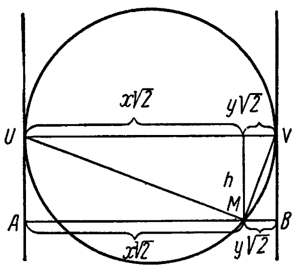
Покажем, что при этом составном аффинном преобразовании, которое мы условились обозначать через ($\llcorner$), конус K переходит в себя, т. е. что преобразование ($\llcorner$) — тоже некоторое специальное преобразование ($\wedge$).



Черт. 11.

Пусть M — некоторая точка конуса K (черт. 11). Рассмотрим плоскость R, перпендикулярную к «коньку» EF «крыши», образованной плоскостями P и Q, и проходящую через точку M. Плоскость эта пересекает конус K по некоторой линии γ (которая называется гиперболой). Покажем, что для всех точек этой линии произведение xy длин перпендикуляров, опущенных из ее точек на плоскости P и Q, постоянно. Для доказательства этого обстоятельства проведем через точку M линии γ плоскость Σ, перпендикулярную к оси конуса. Она пересечет конус по некоторой окружности, проходящей через точку M; плоскости P и Q пересекут ее по прямым, касающимся этой окружности в концах ее диаметра UV; а плоскость R — по некоторой прямой AB, параллельной диаметру UV, проходящей через точку M. Отрезки AM

и MB, очевидно, равны $x\sqrt{2}$ и $y\sqrt{2}$. Треугольник UMV — прямоугольный, так как его угол UMV — вписанный, опирающийся на диаметр (черт. 12). В силу известной теоремы о произведении отрезков, на которые делится гипотенуза основанием высоты h, опущенной на нее из вершины прямого угла, мы получаем:



Черт. 12.

$$x\sqrt{2}\cdot y\sqrt{2}=h^2,$$

или

$$xy=\frac{h^2}{2}.$$

Но h есть расстояние между плоскостью R и параллельной ей плоскостью R_0, проходящей через ось l конуса, т. е. оно одно и то же для всех точек линии γ, и, следовательно, произведение xy для всех точек линии γ постоянно.

При преобразовании ($\llcorner$) во сколько раз y уменьшается, во столько раз x увеличивается (или обратно), поэтому при преобразовании ($\llcorner$) точка, лежащая на гиперболе γ, переходит в точку, опять лежащую на гиперболе γ, т. е. конус K переходит в себя и, следовательно, преобразование ($\llcorner$) — действительно некоторое специальное преобразование ($\wedge$).

3. Преобразования ($\wedge$) взаимно однозначно преобразуют в себя совокупность полупрямых связки[1]) S, внутренних к конусу K

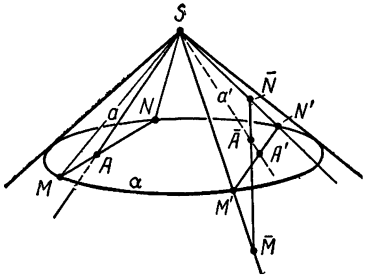
Пересечем конус K какой-нибудь плоскостью, перпендикулярной к его оси l. В сечении получится окружность. Круг, ограниченный этой окружностью, мы будем называть *кругом* α. Полупрямую a, исходящую из вершины S конуса K, мы будем называть *внутренней* к ко-

[1]) *Связкой* S полупрямых с центром в точке S называют совокупность всех полупрямых пространства, исходящих из точки S.

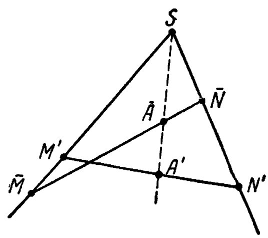
нусу K, если она проходит через какую-нибудь внутреннюю точку A круга α (черт. 13).

Лемма I. *При любом преобразовании* $(\bigwedge)$ *внутренняя полупрямая a переходит снова в некоторую внутреннюю полупрямую a'.*

Заметим, во-первых, что, в силу сохранения при аффинном преобразовании порядка точек, любая полупрямая переходит в полупрямую, а так как, по предположению, преобразования $(\bigwedge)$ оставляют вершину S конуса K на месте, то полупрямая a, исходящая из вершины конуса, переходит в полупрямую a', также исходящую из этой вершины (черт. 13). Пусть теперь A — внутренняя точка



Черт. 13.



Черт. 14.

круга α, в которой его пересекает полупрямая a, и MN — какая-нибудь хорда круга α, проходящая через эту точку A. Так как при преобразовании $(\bigwedge)$ конус K переходит в себя, его образующие SM и SN перейдут в некоторые две его образующие $S\bar{M}$ и $S\bar{N}$, причем эти образующие различны, так как точки S, M, N не лежат на одной прямой, а следовательно, в силу основного свойства аффинных преобразований, и образы их S, $\bar{M}$, $\bar{N}$ тоже не лежат на одной прямой. Хорда MN круга α перейдет в хорду $\bar{M}\bar{N}$ конуса K, а ее внутренняя точка A — в некоторую внутреннюю точку $\bar{A}$ хорды $\bar{M}\bar{N}$, так как при аффинных преобразованиях сохраняется порядок точек. Полупрямая SA перейдет в полупрямую $S\bar{A}$, которая тоже будет внутренней, что легко видеть из черт. 14.

Лемма II. *При преобразовании* $(\wedge)$ *в любую внутреннюю полупрямую a' переходит некоторая внутренняя полупрямая a.*

Для доказательства сделаем преобразование $(\wedge)^{-1}$, обратное $(\wedge)$. Оно будет также аффинным, также будет оставлять вершину S конуса K на месте и переводить конус K в себя, т. е. будет тоже преобразованием $(\wedge)$. При $(\wedge)^{-1}$ внутренняя полупрямая a' переходит, в силу предыдущей леммы, во внутреннюю же полупрямую a. Эта полупрямая a и будет той, которая при преобразовании $(\wedge)$ переходит в a'.

Лемма III. *Разные внутренние полупрямые a и b переходят при преобразовании* $(\wedge)$ *в разные внутренние полупрямые a' и b'.*

Следует из того, что если полупрямые a и b — разные и A и B, например, суть точки их пересечения с кругом α, то точки S, A, B не лежат на одной прямой; но тогда, в силу основного свойства аффинного преобразования, и их образы $\overline{S}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$ тоже не лежат на одной прямой и, следовательно, полупрямые $S\overline{A}$ и $S\overline{B}$, которые и суть полупрямые a' и b', различны.

Доказанные леммы показывают, что всякое данное преобразование $(\wedge)$ взаимно однозначно преобразует совокупность внутренних к конусу K полупрямых связки S в себя.

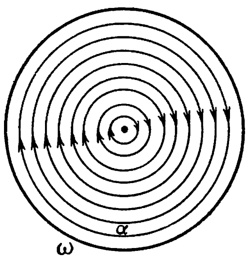
4. Преобразования $\wedge$ круга α в себя, индуцированные преобразованиями $(\wedge)$

Итак, при всяком преобразовании $(\wedge)$ пространства совокупность полупрямых, исходящих из вершины S конуса K и внутренних этому конусу, взаимно однозначно преобразуется в себя. Через всякую внутреннюю точку A круга α проходит одна и только одна такая внутренняя полупрямая и обратно. Круг α как целое мы будем считать не участвующим во всех рассматриваемых далее преобразованиях [1]). Тогда получается, если следить за точками

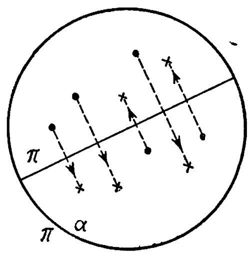
---

[1]) Как бы неподвижным экраном, стоящим на пути «лучей» a.

пересечения этих полупрямых с кругом α, что всякое взаимно однозначное преобразование совокупности внутренних полупрямых конуса K в себя дает, или, как мы будем говорить, «индуцирует», некоторое взаимно однозначное преобразование совокупности внутренних точек круга α в себя. Если взаимно однозначное преобразование совокупности внутренних полупрямых конуса K было вызвано преобразованием (/\) пространства, мы будем называть то взаимно однозначное преобразование совокупности внутренних точек круга α, которое при этом индуцировано, преобразованием /\ круга α в себя.



Черт. 15.



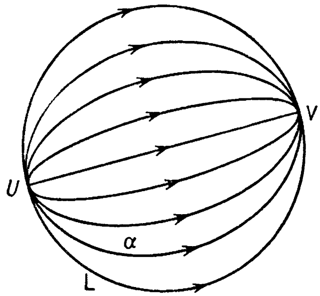
Черт. 16.

Посмотрим, какие преобразования /\ круга α в себя индуцируются простейшими преобразованиями (/\), рассмотренными в пункте 2, т. е. преобразованиями (ω), (π) и (L).

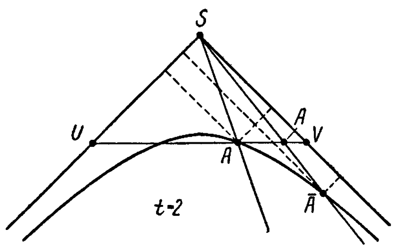
Очевидно, что преобразование (ω), т. е. поворот пространства как жесткого целого вокруг оси l конуса K на некоторый угол ω, дает просто такой же поворот связки S как жесткого целого, т. е. индуцирует просто поворот круга α вокруг его центра O на угол ω. Мы будем обозначать это преобразование /\ через ω (черт. 15).

Преобразование (π), т. е. отражение пространства в некоторой плоскости, проходящей через ось l конуса K, очевидно, индуцирует отражение круга α в том его диаметре, который является следом этой плоскости на плоскости круга α (черт. 16). Это преобразование /\ мы будем обозначать буквой π.

Преобразование ($\llcorner$) индуцирует некоторое более сложное преобразование $\wedge$ круга α в себя (черт. 17), которое мы будет обозначать символом $\llcorner$ и подробно рассмотрим дальше в § 15. А пока нам важно только то, что при нем точки диаметра UV, перпендикулярного к «коньку» EF той «крыши», по отношению к которой происходило преобразование ($\llcorner$), переходят при преобразовании $\llcorner$ в точки этого же диаметра, причем какую бы ни взять внутреннюю точку A круга α, лежащую на этом диаметре, можно так подобрать коэффициент t преобразования ($\wedge$), чтобы она перешла в любую наперед заданную другую внутреннюю точку A' круга α, лежащую на этом диаметре. Это следует



Черт. 17.



Черт. 18.

из того (черт. 18), что, изменяя t, можно любым образом изменять тангенс угла ASV, а следовательно, и угол ASV.

5. Девять теорем о преобразованиях $\wedge$ круга α в себя

Теорема 1. *При любом данном преобразовании $\wedge$ любая внутренняя точка A круга α переходит в одну вполне определенную внутреннюю точку A'.*

Следует из леммы I п. 3.

Теорема 2. *При любом данном преобразовании $\bigwedge$ в любую данную внутреннюю точку A' круга α переходит некоторая его внутренняя точка A.*

Следует из леммы II п. 3.

Теорема 3. *При любом данном преобразовании $\bigwedge$ разные внутренние точки A и B круга α переходят в разные его внутренние точки A' и B'.*

Следует из леммы III п. 3.

Теорема 4. *Произведение любых двух преобразований $\bigwedge$ есть снова некоторое преобразование $\bigwedge$:*

$$\bigwedge_1 \cdot \bigwedge_2 = \bigwedge_3.$$

Действительно, пусть преобразования $\bigwedge_1$ и $\bigwedge_2$ индуцируются преобразованиями $(\bigwedge_1)$ и $(\bigwedge_2)$; в таком случае преобразование $(\bigwedge_1)\cdot(\bigwedge_2)$, которое получается, если над пространством, преобразованным с помощью $(\bigwedge_1)$, еще совершить преобразование $(\bigwedge_2)$, очевидно, индуцирует преобразование $\bigwedge_3$. Но, так как преобразования $(\bigwedge_1)$ и $(\bigwedge_2)$ аффинные, то и преобразование $(\bigwedge_1)\cdot(\bigwedge_2)$ тоже аффинное. Преобразования $(\bigwedge_1)$ и $(\bigwedge_2)$ оставляют вершину S конуса K на месте и переводят конус K в себя, следовательно, и их произведение $(\bigwedge_1)\cdot(\bigwedge_2)$ тоже оставляет вершину S конуса K на месте и преобразует конус K в себя; преобразование $(\bigwedge_1)\cdot(\bigwedge_2)$ поэтому есть также некоторое преобразование $(\bigwedge)$. Обозначим его $(\bigwedge_3)$. Преобразование $\bigwedge_3$, которое оно индуцирует, есть, следовательно, некоторое преобразование $\bigwedge$.

Теорема 5. *Всякое преобразование $\bigwedge$ имеет себе обратное преобразование $\bigwedge^{-1}$ такое, что преобразование $\bigwedge\cdot\bigwedge^{-1}$ оставляет все внутренние точки круга α на месте.*

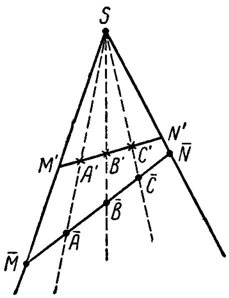
Действительно, если преобразование $\bigwedge$ индуцируется преобразованием $(\bigwedge)$, то преобразование $(\bigwedge)^{-1}$, обратное $(\bigwedge)$, которое тоже есть некоторое преобразование $(\bigwedge)$, индуцирует такое преобразование $\bigwedge^{-1}$.

Теоремы 4 и 5 показывают, что совокупность всех преобразований $\bigwedge$ множества внутренних точек круга α в себя образуют группу (см. стр. 30).

Теорема 6. *При преобразовании* $\wedge$ *сохраняется порядок внутренних точек круга* α.

Это следует из черт. 19 ровно так же, как доказывалось выше из черт. 14, что внутренняя точка A круга α переходит во внутреннюю его точку A'.

Дополнение к теореме 6. Из того же черт. 19 видно, что эта теорема верна, если включить и точки окружности круга α. А именно, что при преобразовании $\wedge$ любая хорда круга α переходит в некоторую его хорду с сохранением порядка точек на ней, включая и те точки, которые являются ее концами.



Черт. 19.

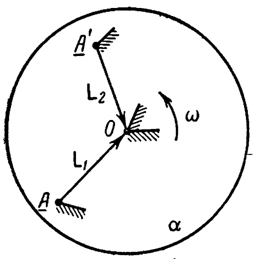
Назовем условно «*полухордой*» круга α часть хорды круга α от некоторой внутренней точки G этой хорды до одного из ее концов. Будем называть «*репером*» в круге α совокупность, состоящую из некоторой внутренней точки G этого круга, некоторой «полухорды», из нее исходящей, и одного из тех двух сегментов, на которые соответствующая хорда разрезает круг α.

В силу сохранения при любом преобразовании $\wedge$ порядка точек круга α (см. дополнение к теореме 6), при таком преобразовании полухорда (включая и ее конец), исходящая из внутренней точки круга α, перейдет опять в некоторую полухорду, исходящую из некоторой его внутренней точки, а сегмент круга α, отрезаемый хордой (включая и точки его дуги), — в сегмент круга α, отрезаемый ее образом. Поэтому любой репер круга α при преобразовании $\wedge$ переходит в некоторый репер круга α.

Теорема 7. (Теорема существования теории преобразований $\wedge$.) *Какие бы два репера* $\underline{A}$ *и* $\underline{A}'$ *в круге* α *ни были заданы, всегда существует преобразование* $\wedge$, *при котором первый из них переходит во второй.*

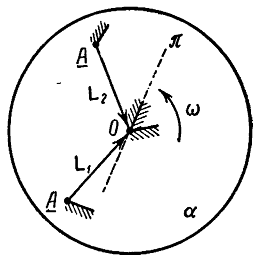
Мы докажем эту теорему, используя рассмотренные выше преобразования ω, π, $\llcorner$.

Пусть преобразования L_1 и L_2 такие, при которых начала первого и второго реперов переходят в центр O круга α. Если сделать L_1, затем нужный поворот ω, затем L_2^{-1}, то первый репер перейдет во второй (черт. 20). Может быть, впрочем, что, сделав L_1 и ω, надо будет еще сделать отражение в прямой π и только потом L_2^{-1} (черт. 21). Какие бы два репера ни были заданы в круге α,



$\Lambda = L_1 \omega L_2^{-1}$

Черт. 20.



$\Lambda = L_1 \omega \pi L_2^{-1}$

Черт. 21.

существует, таким образом, преобразование Λ, при котором первый из этих реперов переходит во второй, а именно оно равно

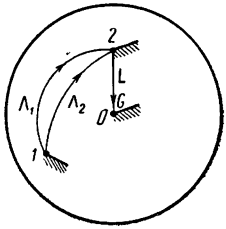
$$L_1 \cdot \omega \cdot L_2^{-1} \quad \text{или} \quad L_1 \cdot \omega \cdot \pi \cdot L_2^{-1}.$$

В силу теоремы 4 это есть преобразование Λ.

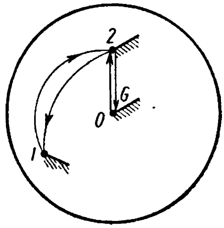
Теорема 8. (Теорема единственности теории преобразований Λ.) *Существует только одно преобразование Λ, при котором один данный репер круга α переходит в другой данный его репер.*

Заметим прежде всего, что для доказательства этой теоремы достаточно показать, что если при преобразовании Λ круга α в себя некоторый его репер G, имеющий вершину в центре O круга α, переходит в себя, то преобразование Λ тождественное (т. е. при нем все точки круга α остаются на месте). Такое преобразование мы будем обозначать через E.

Действительно, пусть Λ_1 и Λ_2 — два преобразования, при которых некоторый первый репер круга α переходит в некоторый заданный второй его репер (черт. 22), и L — то преобразование L, при котором вершина второго репера переходит в центр O круга α. В таком случае при обоих преобразованиях $\Lambda_1\mathrm{L}$ и $\Lambda_2\mathrm{L}$ первый репер переходит в один и тот же репер G, имеющий вершину в центре O круга α, и, следовательно, преобразование $(\Lambda_2\mathrm{L})^{-1}\Lambda_1\mathrm{L}$ переводит этот репер G в себя (черт. 23). Поэтому, если бы мы имели теорему, утверждающую, что если преобразование Λ преобразует некоторый репер G, имеющий вершину в центре O круга α, в себя,



Черт. 22.



Черт. 23.

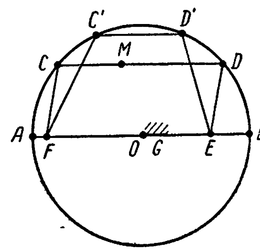
то оно тождественное, то мы имели бы отсюда, что $(\Lambda_2\mathrm{L})^{-1}\Lambda_1\mathrm{L}=E$. Умножая на оба эти равные друг другу преобразования преобразование $\Lambda_2\mathrm{L}$, мы получим опять равные друг другу преобразования: $\Lambda_2\mathrm{L}(\Lambda_2\mathrm{L})^{-1}(\Lambda_1\mathrm{L})=(\Lambda_2\mathrm{L})E$, или $\Lambda_1\mathrm{L}=\Lambda_2\mathrm{L}$, откуда $\Lambda_1=\Lambda_2$, т. е. что не может быть двух различных преобразований Λ, при которых некоторый данный репер переходит в некоторый второй данный репер.

Остается, таким образом, показать, что преобразование Λ, преобразующее в себя некоторый данный репер G, имеющий начало в центре O круга α, тождественное.

Пусть Λ — такое преобразование, а (Λ) — аффинное преобразование пространства, индуцирующее это преобразование Λ. Преобразование (Λ), очевидно, преобразует ось конуса K в себя. Домножим его на такую гомотетию относительно вершины S конуса K, чтобы при этом домноженном преобразовании, которое мы опять, для простоты, будем обозначать через (Λ), центр O

круга α переходил в себя. Это преобразование (/\) будет индуцировать то же самое преобразование /\.

Покажем, что при таком преобразовании (/\) плоскость круга α и окружность круга α переходят в себя. Действительно, если бы плоскость круга α при преобразовании (/\) поворачивалась вокруг точки O (точка O остается при преобразовании (/\) на месте), то, например, линия наибольшего ската этой повернутой плоскости образовала бы с конусом K хорду $M'ON'$ такую, что O не является ее серединой, а между тем в эту хорду преобразовалась бы некоторая хорда MON круга α, у которой точка O — середина. А это невозможно, так как при аффинном преобразовании отношение, в котором точка делит отрезок, сохраняется.



Черт. 24.

Итак, при рассматриваемом преобразовании (/\) круг α переходит как целое в себя, окружность его переходит как целое в себя и центр O его остается на месте. А так как, по предположению, репер G переходит в себя, то и соответствующий ему диаметр AB круга α как целое переходит в себя, и притом концы его остаются на месте, а не меняются местами, так как полупрямая репера G переходит в себя.

Но в таком случае и все точки этого диаметра AB (черт. 24) остаются на месте, так как при аффинном преобразовании отношение, в котором точка делит отрезок, сохраняется.

Рассмотрим теперь произвольную точку M круга α и ту хорду CD, параллельную диаметру AB, на которой эта точка M лежит. При рассматриваемом преобразовании /\:

1° хорда CD остается параллельной диаметру AB, в силу леммы III § 5 (стр. 39),

2° она окажется с той же стороны от диаметра AB, с которой она лежала до преобразования /\, в силу того, что полуплоскость репера G переходит в себя, 3° длина ее сохраняется, так как, если бы рассмотреть параллелограмм $CDEF$, то он превратился бы в трапецию $C'D'EF$ (точки E, F остаются на месте, так как отношения, в которых они делят диаметр AB, сохраняются), а это невозможно, ибо тогда параллельные CF и DE переходили бы в непараллельные. Хорда CD, следовательно, преобразуется в себя и точка M, таким образом, остается на месте, так как отношение, в котором она делит хорду CD, сохраняется.

Преобразование $\wedge$, следовательно, тождественное.

Теорема 9. *При любом преобразовании $\wedge$ любая данная хорда круга α переходит в некоторую его хорду, на которой лежат образы точек данной хорды.*

Доказательство следует из того же рассуждения, как и в теореме 6.

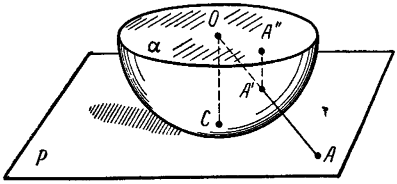
§ 7. Об одной проекции евклидовой плоскости в круг

Для доказательства непротиворечивости планиметрии Лобачевского мы будем (в § 8) «моделировать» ее абстрактную схему в обычном евклидовом круге. При этом вся бесконечная плоскость Лобачевского окажется как бы спроектированной на внутренность круга.

Прежде чем приступить в следующем параграфе к такому моделированию плоскости Лобачевского, мы считаем полезным в настоящем параграфе рассмотреть некоторую специальную проекцию обыкновенной евклидовой плоскости на внутренность круга, которая является аналогичной моделью евклидовой плоскости в круге.

Следует подчеркнуть, что существенной разницей между этими двумя моделированиями является то, что в случае моделирования плоскости Лобачевского реализуется в круге нечто заданное нам лишь абстрактно-аксиоматически, тогда как в настоящем параграфе будет смоделирована в круге обычная евклидова плоскость.

Рассмотрим некоторую обыкновенную евклидову плоскость P, положим на эту плоскость полусферу так, чтобы плоскость круга α, ее обрезающего, была параллельна плоскости P (черт. 25). Будем теперь проектировать любую точку A плоскости P сначала прямолинейным отрезком, соединяющим ее с центром O круга α, в точку A' полусферы, а затем эту точку A' полусферы перпендикуляром, опущенным из нее на плоскость круга α, в некоторую точку A'' круга α. Очевидно, что так вся плоскость P спроектируется внутрь круга α. Чем точка A дальше от точки C касания полусферы с плоскостью P, тем такая ее проекция A'' на круг α ближе к его окружности (α). Любая прямая a плоскости P проектируется таким путем на полусферу в виде полуокружности a', диаметром которой будет тот диаметр UV круга α, который параллелен этой прямой a. А эта полуокружность a'



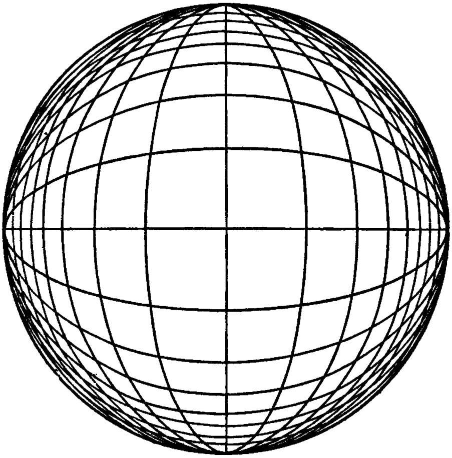
Черт. 25.

перпендикулярами к плоскости круга α спроектируется окончательно на этот круг α в виде некоторого полуэллипса a'', для которого диаметр UV круга α есть большая ось.

Если построить на плоскости P сетку квадратов, один из узлов которой есть точка C, то эта сетка спроектируется на круг α в виде сетки эллипсов (черт. 26). Эта сетка легко позволяет вычерчивать проекцию на круг α любой фигуры плоскости P. Мы получаем, таким образом, способ рассматривать всю бесконечную евклидову плоскость в виде ее проекции внутрь круга, но как бы «в кривом зеркале».

По сетке эллипсов черт. 26 можно находить, имея дело только с этой проекцией, например, расстояние между двумя точками или угол между двумя прямыми. Так, для нахождения расстояния достаточно построить «прямоугольный треугольник», катетами которого будут куски эллипсов сетки, проходящих через рассматриваемые точки, и дальше употреблять теорему Пифагора и т. д.

Мы приводим здесь этот пример проекции бесконечной евклидовой плоскости в круг не потому, конечно, что удобно решать задачи евклидовой плоскости на этой ее проекции.



Черт. 26.

Это можно. Но, конечно, проще решать их на самой евклидовой плоскости. Мы это делаем потому, что аналогичным способом в круге мы будем сейчас изучать плоскость Лобачевского «как бы рассматривая ее в кривом зеркале».

§ 8. Доказательство непротиворечивости аксиоматики плоскости Лобачевского

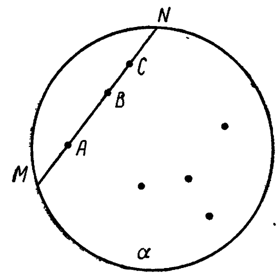
Покажем, что нельзя доказать пятый постулат Евклида при помощи других аксиом планиметрии Евклида, а можно его заменить обратным утверждением и получится другая тоже возможная планиметрия.

1. Модель Кэли — Клейна плоскости Лобачевского

Элементами плоскости Лобачевского будем считать следующие объекты евклидовой плоскости. Возьмем некоторый круг α и будем называть *точками* плоскости

Лобачевского внутренние точки этого круга, *прямыми* плоскости Лобачевского — хорды этого круга без их концов и, наконец, *движениями* плоскости Лобачевского — изученные нами выше преобразования $\bigwedge$ круга α в себя.

Соотношениями между этими элементами будем считать следующие евклидовы соотношения между этими евклидовыми объектами. Будем говорить, что точка Лобачевского лежит на прямой Лобачевского, если соответствующая внутренняя точка круга α в обычном смысле лежит на соответствующей хорде круга α (черт. 27). Будем говорить, что точка Лобачевского B лежит *между* точками Лобачевского A и C, если соответственные внутренние точки круга A, B, C лежат на одной хорде и точка B в обычном смысле лежит между точками A и C. Наконец, будем говорить, что при заданном *движении* Лобачевского $\bigwedge$ точка Лобачевского A переходит в точку Лобачевского A', если при рассматриваемом преобразовании $\bigwedge$ круга α в себя соответственная внутренняя точка A круга α переходит в его точку A', и то же самое будем говорить о хордах.



Черт. 27.

Покажем теперь, что эти евклидовы соотношения между этими также евклидовыми элементами удовлетворяют всем 20 аксиомам Лобачевского.

2. Проверка того, что все 20 аксиом Лобачевского удовлетворяются на модели Кэли — Клейна

I. Аксиомы связи:

1) Через любые две внутренние точки круга α проходит некоторая хорда этого круга.

2) Такая хорда проходит только одна.

3) На всякой хорде круга лежит сколько угодно внутренних точек круга.

4) Какую бы хорду ни взять, всегда есть внутренние точки круга, на ней не лежащие.

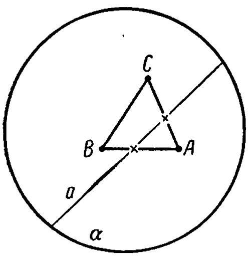
Очевидны.

II. Аксиомы порядка:

1) Если точка B лежит между точками A и C, то она лежит на хорде AC.

2) Если точка B лежит между точками A и C, то она лежит и между точками C и A.

3) Если A и B — две внутренние точки круга, принадлежащие некоторой его хорде, то на этой хорде всегда есть такая внутренняя точка круга C, что B лежит между A и C.



Черт. 28.

4) Из трех внутренних точек круга, лежащих на одной хорде круга, не больше одной лежит между двумя другими.

Очевидны.

5) (Аксиома Паша.) Если внутренние точки круга A, B, C не лежат на одной и той же хорде круга, и хорда a не проходит ни через одну из них и пересекает отрезок AB, то она пересекает еще хоть один из отрезков AC или BC.

Следует из обычной аксиомы Паша, если учесть, что если две точки суть внутренние точки круга, то и все точки соединяющего их отрезка — также внутренние точки круга (черт. 28).

III. Аксиомы движения:

1) Если задано некоторое преобразование $\bigwedge$, то при нем любая внутренняя точка A круга α переходит в одну определенную внутреннюю точку A' круга α.

2) При заданном преобразовании $\bigwedge$ в любую внутреннюю точку круга переходит только одна внутренняя точка этого круга.

3) При заданном преобразовании Λ две разные внутренние точки A и B круга переходят в разные внутренние точки A' и B' круга α.

4) Произведение двух преобразований Λ_1 и Λ_2 есть снова некоторое преобразование Λ_3.

5) Преобразование, обратное преобразованию Λ, есть тоже преобразование Λ.

6) При преобразовании Λ сохраняется порядок точек (см. черт. 19).

7) Если внутри круга α даны два репера A и A', то существует преобразование Λ, при котором первый из них переходит во второй.

8) Такое преобразование Λ существует только одно.

9) При преобразовании Λ всякая хорда a круга α переходит в некоторую его хорду a' и притом в ту, на которой лежат образы точек хорды a.

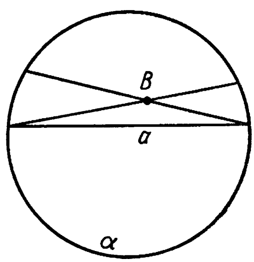
Эти девять свойств представляют собою как раз те девять теорем о преобразованиях Λ, которые были доказаны в § 6.

IV. Аксиома непрерывности (аксиома Дедекинда):

1) Для хорды вытекает из той же аксиомы для прямой на евклидовой плоскости, если дополнить хорду в обе стороны до прямой.

V. Аксиома о параллельных (аксиома Лобачевского):

1) Если a — некоторая хорда и B — некоторая внутренняя точка круга α, на ней не лежащая, *то есть больше одной хорды*, проходящей через точку B и не пересекающей хорды a.



Черт. 29.

Очевидна непосредственно из черт. 29.

3. Непротиворечивость аксиоматики планиметрии Лобачевского и невозможность доказать пятый постулат Евклида при помощи других аксиом планиметрии Евклида

Построенная сейчас «модель» плоскости Лобачевского показывает, что из аксиом плоскости Лобачевского никак нельзя вывести противоречащие друг другу следствия.

Действительно, когда мы вводили аксиоматику плоскости Лобачевского, мы элементы: «точки», «прямые», «движения» и соотношения между ними «связи», «порядка» и «соответствия» точек и прямых при движении только лишь называли, а затем требовали, чтобы эти соотношения между элементами удовлетворяли указанным 20 аксиомам. Теперь же мы нашли такие существующие в евклидовой геометрии объекты (внутренние точки круга α, его хорды без концов и его преобразования $\bigwedge$ в себя) и такие осуществляющиеся в евклидовой геометрии соотношения между этими объектами (инцидентность точки хорде, обычный порядок точек на хорде и соответствие точек и прямых при преобразованиях $\bigwedge$), которые как раз удовлетворяют всем тем же 20 требованиям. Если бы эти 20 аксиом вели к противоречию, то можно было бы об этих евклидовых объектах, пользуясь лишь этими в действительности имеющимися евклидовыми соотношениями между ними, вывести, логически правильно о них рассуждая, противоречащие друг другу факты. Но это значило бы, что, рассуждая логически правильно, в самой евклидовой геометрии можно было бы притти к противоречию.

Вот то соображение, которое не приходило в голову ни Лобачевскому, ни Бóяи, ни Гауссу, ни Риману. Если бы оно пришло им в голову, то уже они, а не Бельтрами и Клейн, доказали бы непротиворечивость геометрии Лобачевского. Повторяем еще раз. Соображение это состоит в том, что можно реализовать, «моделировать» рассматриваемую аксиоматику в математической системе, которую мы считаем непротиворечивой.

Непротиворечивость самой геометрии Евклида в свою очередь может быть доказана, если предполагать непротиворечивость обычной арифметики. Это делается при помощи метода аналитической геометрии.

Для стереометрии Лобачевского также существуют доказательства ее непротиворечивости. Они осуществляются тоже при помощи тех или иных моделирований.

В силу того, что было сказано в начале этой главы, мы видим также, что нельзя, исходя из остальных аксиом планиметрии Евклида, доказать пятый постулат Евклида.

ГЛАВА III

ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ, ДЛИН И ПЛОЩАДЕЙ В ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

В предыдущей главе мы доказали непротиворечивость планиметрии Лобачевского и тем самым показали, что невозможно доказать пятый постулат Евклида, т. е. постулат Евклида о параллельной, исходя из остальных аксиом планиметрии Евклида.

В этой главе мы продолжим изложение планиметрии Лобачевского, а именно рассмотрим три вопроса:

1. Измерение углов.
2. Измерение длин отрезков.
3. Измерение площадей многоугольников.

§ 9. О величине угла в плоскости Лобачевского

Углом в плоскости Лобачевского, так же как и в плоскости Евклида, называется пара полупрямых, исходящих из одной точки и называемых сторонами угла. Такая пара, собственно, образует два угла, дополнительные друг к другу до полного угла вокруг точки. Чтобы отличать тот из них, который мы желаем рассматривать, можно, как это обыкновенно и делается, ставить внутри него небольшую дугу.

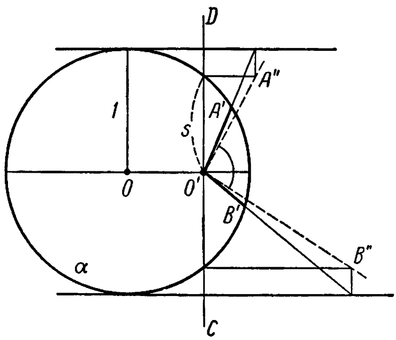
Исходя только из аксиом связи, порядка, движения и непрерывности, но не употребляя аксиомы о параллельных, т. е. в абсолютной геометрии, а поэтому одинаково для геометрии Евклида и для геометрии Лобачевского, можно показать следующее.

Если некоторый (любой) заданный угол принять за единицу для измерения углов, то каждому углу можно поставить в соответствие некоторое положительное число — его меру, по отношению к выбранному единичному углу, так что:

1° мера суммы углов равна сумме их мер (аддитивность меры),

2° мера угла не изменяется, если его подвергнуть движению.

Все это, собственно говоря, уже доказывается в средней школе. При этом оказывается, что если единичный угол выбран, то это сопоставление единственное.



Черт. 30.

Покажем теперь, какой смысл имеет эта мера угла на нашей модели плоскости Лобачевского. Мы покажем, что можно ввести положительную меру угла между двумя полухордами круга α, исходящими из некоторой точки так, чтобы она удовлетворяла условию 1° и условию 2° по отношению к преобразованиям $\bigwedge$ круга α в себя, которые моделируют движения Лобачевского.

Меру угла в нашей модели плоскости Лобачевского введем так. Будем считать мерой угла с вершиной в центре O круга α его евклидову величину, если же вершина O' угла $A'O'B'$ (черт. 30) не лежит в центре, то за его меру будем принимать евклидову величину угла $A''O'B''$, который получается, если равномерно растянуть угол $A'O'B'$ от прямой CD (проходящей через его вершину O' перпендикулярно к тому диаметру OO', на котором она лежит) с коэффициентом $\frac{1}{s}$, где s — длина линии синуса точки O' (радиус круга α предполагается равным 1).

Угол $A''O'B''$ может быть получен из угла $A'O'B'$ построением, указанным на черт. 30.

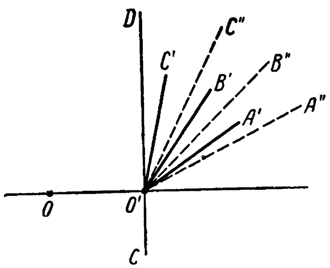
Покажем, что так введенная мера угла удовлетворяет обоим условиям 1° и 2°.

Во-первых, очевидно, что эта мера угла аддитивна. Действительно (см. черт. 31):

$$\angle A''O'B'' + \angle B''O'C' = \angle A''O'C''.$$

Перейдем теперь к доказательству инвариантности этой меры угла при преобразованиях $\wedge$ круга α в себя.

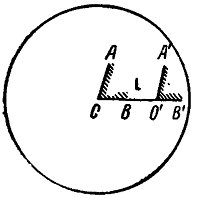
Для этого заметим прежде всего, что из сказанного в § 6, п. 5, главы II следует, что всякое преобразование $\wedge$, которое перемещает вершину рассматриваемого угла из некоторой точки M круга в некоторую другую его точку M', можно составить из преобразования $\llcorner_1$, передвигающего вершину M в центр O круга α, затем поворота ω круга α вокруг его центра, затем, может быть, еще отражения π в некотором его диаметре и, наконец, еще преобразования $\llcorner_1^{-1}$, передвигающего вершину угла из центра O круга α в точку M'.



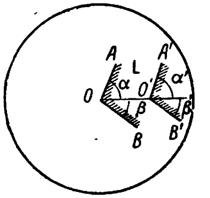
Черт. 31.

Очевидно, что рассматриваемая мера не изменяется ни при повороте ω круга α, ни при его отражении π в диаметре.

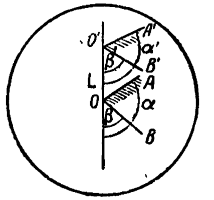
Достаточно, следовательно, показать, что эта мера угла не изменяется ни при каком преобразовании $\llcorner$, передвигающем его вершину из центра O круга α в любую точку O' этого круга. Причем в силу аддитивности введенной меры можно ограничиться случаем, когда передвижение $\llcorner$ происходит вдоль одной из сторон угла. Дело в том, что возможны три случая, а именно, когда отрезок OO' проходит по стороне угла AOB (черт. 32), внутри угла AOB (черт. 33) и вне угла AOB (черт. 34). Второй и третий случаи в силу аддитивности меры угла сводятся на первый, если угол AOB рассматривать как сумму углов α и β (черт. 33) или разность углов α и β (черт. 34).



Черт. 32.

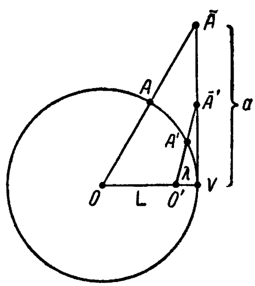


Черт. 33.

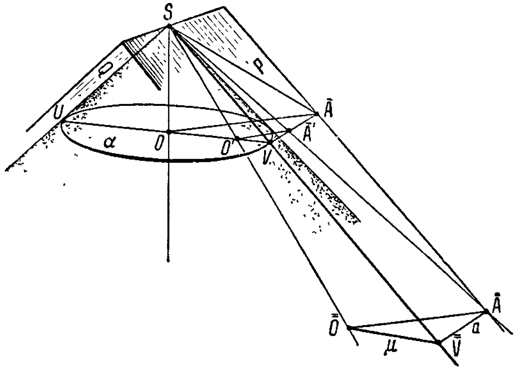


Черт. 34.

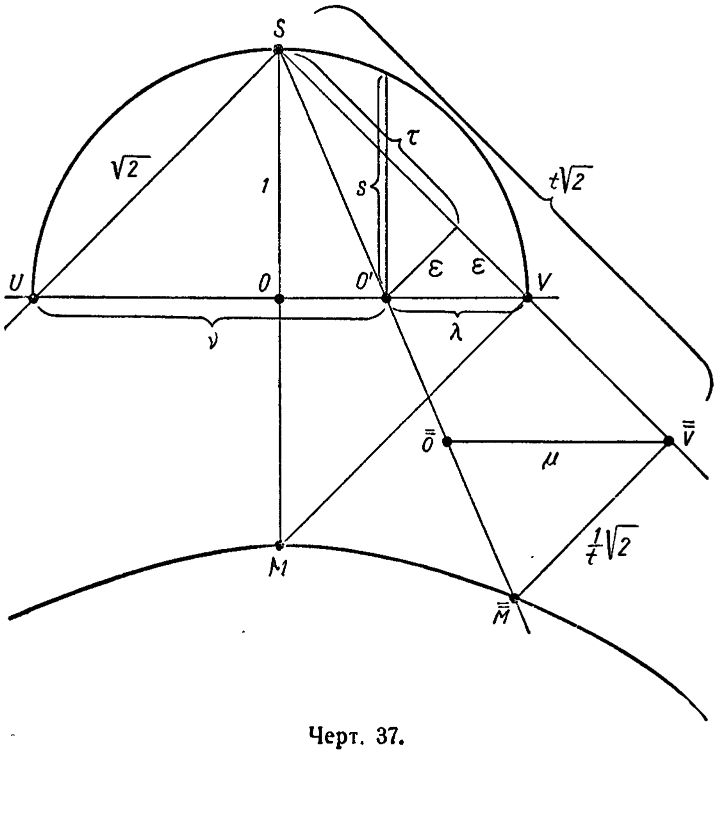
Итак, будем рассматривать только первый случай, и пусть при нем угол AOV переходит в угол $A'O'V$ (черт. 35). Надо доказать, что меры Лобачевского углов $VO\bar{A}$ и $VO'\bar{A}'$ одинаковы. Для доказательства рассмотрим конус K и плоскости P и Q, касающиеся конуса K по образующим SU и SV (черт. 36). Продолжим стороны OA и $O'A'$ (черт. 35, на черт. 36 точки A и A' не обозначены) до пересечения с плоскостью P в точках $\bar{A}$ и $\bar{A}'$. Рассмотрим теперь то преобразование пространства (L), которое индуцирует рассматриваемое преобразование L; пусть его коэффициенты сжатия и растяжения равны t. Точки V и $\bar{A}$ плоскости P при этом преобразовании (L) перейдут в точки $\bar{\bar{V}}$ и $\bar{\bar{A}}$ этой же плоскости такие, что отрезок $\bar{\bar{V}}\bar{\bar{A}}$ равен и параллелен отрезку $V\bar{A}$. Если через точку $\bar{\bar{V}}$ провести плоскость, параллельную плоскости круга α, то она пересечет грани трехгранного угла $SVO'\bar{A}'$ по прямоугольному треугольнику $\bar{\bar{V}}\bar{\bar{O}}\bar{\bar{A}}$, подобному треугольнику $VO'\bar{A}'$. Поэтому угол $\bar{\bar{V}}\bar{\bar{O}}\bar{\bar{A}}$ равен углу $VO'\bar{A}$.



Черт. 35.



Черт. 36.



Черт. 37.

Обозначим длину отрезка $\overline{\overline{O}}\,\overline{\overline{V}}$ через μ. В прямоугольных треугольниках $VO\overline{A}$ и $\overline{\overline{V}}\,\overline{\overline{O}}\,\overline{\overline{A}}$ катеты соответственно равны a и 1 и a и μ, поэтому угол $VO\overline{A}$ получается из угла $\overline{\overline{V}}\,\overline{\overline{O}}\,\overline{\overline{A}}$, если его растянуть от прямой, перпендикулярной к OO' с коэффициентом растяжения $\frac{1}{\mu}$.

Остается показать, что $\mu = s$. Действительно (см. черт. 37), $SV = \sqrt{2}$, а $S\overline{\overline{V}} = t\sqrt{2}$, $\mu = \lambda \cdot t$. Точка M, лежащая на прямой SO на расстоянии $\sqrt{2}$ от плоскости P, при преобразовании ($\llcorner$) переходит по гиперболе в точку $\overline{\overline{M}}$, лежащую на расстоянии $\frac{1}{t}\sqrt{2}$ от плоскости P, поэтому $\frac{\tau}{\varepsilon} = \frac{S\overline{\overline{V}}}{\overline{\overline{M}}\,\overline{\overline{V}}} = \frac{t\sqrt{2}}{\frac{1}{t}\sqrt{2}} = t^2$ (черт. 37). Но $\frac{\tau}{\varepsilon} = \frac{\nu}{\lambda} = \frac{\lambda\nu}{\lambda^2} = \frac{s^2}{\lambda^2}$, поэтому $t = \frac{s}{\lambda}$, т. е. $\lambda t = s$. Таким образом, $\mu = s$.

Инвариантность введенной нами меры угла при движениях Лобачевского $\bigwedge$ таким образом доказана.

§ 10. О расстоянии в плоскости Лобачевского

Исходя только из аксиом связи, порядка, движения и непрерывности, но не используя аксиомы о параллельных, т. е. в абсолютной геометрии, а поэтому одинаково для геометрии Евклида и для геометрии Лобачевского, можно показать следующее: если некоторый (любой) заданный отрезок принять за единицу длины, то каждому отрезку AB можно сопоставить некоторое определенное положительное число $d(AB)$ — его меру (его длину), которое удовлетворяет условиям:

1° мера отрезка аддитивна для отрезков, лежащих на одной прямой, т. е. если A, B, C — три точки, лежащие на одной прямой, и B лежит между A и C, то $d(AB) + d(BC) = d(AC)$,

2° мера отрезка инвариантна по отношению к движениям, т. е. не изменяется при передвижении отрезка.

При выбранном единичном отрезке сопоставление это единственное. Все это, собственно, уже доказывается в средней школе.

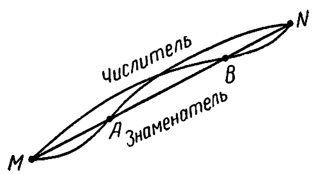
Так же как в случае величины угла, мы покажем, какой смысл имеет это расстояние на нашей модели плоскости Лобачевского.

Если на прямой расположены точки M, A, B, N в том порядке, как они тут написаны (черт. 38), то число

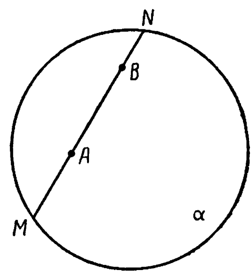
$$\frac{AN}{AM} \cdot \frac{BM}{BN},$$

где AN, AM, BM, BN — обычные евклидовы длины соответственных отрезков, называется двойным отношением точек M, A, B, N.

Пусть даны две внутренние точки A и B круга α



Черт. 38.



Черт. 39.

и M и N — концы той хорды, на которой они лежат (черт. 39), причем точки расположены в том порядке, как сейчас написаны: M — конец хорды, более близкий к A, а N — более близкий к B. Тогда расстоянием Лобачевского между точками A и B будет число

$$d(AB) = \ln\left(\frac{AN}{AM} \cdot \frac{BM}{BN}\right),$$

т. е. логарифм двойного отношения точек M, A, B, N. Докажем это.

Если точки A и B совпадают, получаем:

$$\ln\left(\frac{AN}{AM} \cdot \frac{AM}{AN}\right) = \ln(1) = 0.$$

Если A и B не совпадают, то число $\frac{AN}{AM}\cdot\frac{BM}{BN}$ больше, чем 1, так как $AN > BN$ и $BM > AM$. Поэтому, если точки A и B не совпадают, то

$$\ln\left(\frac{AN}{AM}\cdot\frac{BM}{BN}\right) > 0.$$

1°. Аддитивность введенного расстояния для точек, лежащих на одной прямой, следует из того, что сумма логарифмов

$$\ln\left(\frac{AN}{AM}\cdot\frac{BM}{BN}\right)+\ln\left(\frac{BN}{BM}\cdot\frac{CM}{CN}\right)$$

есть логарифм произведения $\ln\left(\frac{AN}{AM}\cdot\frac{BM}{BN}\cdot\frac{BN}{BM}\cdot\frac{CM}{CN}\right)$; сократив средние отношения, получим $\ln\left(\frac{AN}{AM}\cdot\frac{CM}{CN}\right)$, т. е. $d(AC)$.

2°. Перейдем теперь к доказательству инвариантности введенного расстояния по отношению к движениям Лобачевского, т. е. преобразованиям $\wedge$ круга α в себя.

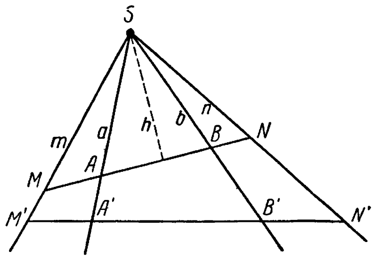
Для этого прежде всего докажем лемму:

Лемма. *Если из некоторой точки S плоскости выходят четыре полупрямые и имеются две секущие, из которых первая пересекает эти полупрямые в точках M, A, B, N, причем порядок их таков, как мы сейчас написали, а вторая пересекает рассматриваемые полупрямые в точках $\overline{M}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{N}$, то*

$$\frac{AN}{AM}\cdot\frac{BM}{BN}=\frac{\overline{A}\overline{N}}{\overline{A}\overline{M}}\cdot\frac{\overline{B}\overline{M}}{\overline{B}\overline{N}},$$

т. е. двойное отношение, образуемое точками пересечения секущей с рассматриваемыми полупрямыми, для всех секущих одно и то же.

Для доказательства опустим из точки S перпендикуляр h на прямую MN (черт. 40). Площадь треугольника SAN, с одной стороны, равна $\frac{h}{2}\cdot AN$, а с другой стороны, равна $\frac{a\cdot n\cdot \sin(a, n)}{2}$, где через a и n мы обозначаем длины соответственных сторон треугольника, исходящих из точки S, а через $\sin(a, n)$ — синус угла между ними.



Черт. 40.

Аналогичные выражения мы получаем для AM, BM и BN. Подставляя их в первое двойное отношение, получаем:

$$\frac{AN}{AM}\cdot\frac{BM}{BN}=\frac{a\cdot n\cdot\sin(a, n)\cdot b\cdot m\cdot\sin(b, m)}{a\cdot m\cdot\sin(a, m)\cdot b\cdot n\cdot\sin(b, n)},$$

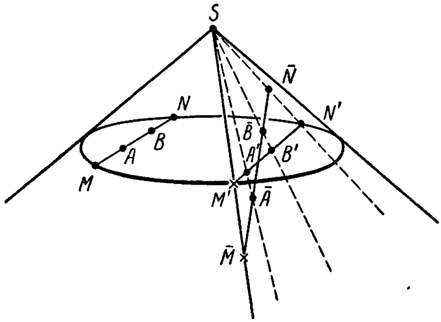
h мы не пишем, так как они сокращаются. Но тут, кроме того, как можно заметить, сокращаются m, a, b, n, и мы поэтому получаем:

$$\frac{AN}{AM}\cdot\frac{BM}{BN}=\frac{\sin(a, n)\cdot\sin(b, m)}{\sin(a, m)\cdot\sin(b, n)}.$$

Оказывается, что двойное отношение, соответствующее некоторой секущей, зависит только от углов между полупрямыми и не зависит от выбора секущей. Оно при заданных полупрямых для всех секущих одно и то же.

Перейдем теперь к самому доказательству инвариантности по отношению к преобразованиям $\wedge$ введенного нами выражения $d(AB)$. Покажем, что оно не изменяется при любом преобразовании $\wedge$ круга α в себя.

Сделаем преобразование $(\wedge)$ пространства, индуцирующее рассматриваемое преобразование $\wedge$ (черт. 41). Хорда MN круга α при этом, вообще говоря, перестанет быть хордой этого круга, но останется некоторой хордой конуса $\overline{M}\overline{N}$, так как точки конуса M и N перейдут опять в некоторые точки $\overline{M}$ и $\overline{N}$ этого же конуса. Точки A и B отрезка MN перейдут в некоторые точки $\overline{A}$ и $\overline{B}$ отрезка $\overline{M}\overline{N}$, причем не только рассматриваемое двойное отношение при этом не изменится, но даже не изменятся и составляющие его простые отношения, так как



Черт. 41.

преобразование ($\bigwedge$) — аффинное, а при аффинном преобразовании не изменяются отношения, в которых точки делят отрезки. Поэтому

$$\frac{AN}{AM}\cdot\frac{BM}{BN}=\frac{\overline{A}\overline{N}}{\overline{A}\overline{M}}\cdot\frac{\overline{B}\overline{M}}{\overline{B}\overline{N}}.$$

Точками, в которые перейдут точки $\overline{M}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{N}$ при преобразовании $\bigwedge$ круга в себя, будут точки M', A', B', N', в которых четыре полупрямые $S\overline{M}$, $S\overline{A}$, $S\overline{B}$ и $S\overline{N}$ (лежащие в одной плоскости) пересекают плоскость круга α. Применяя доказанную лемму, мы получаем:

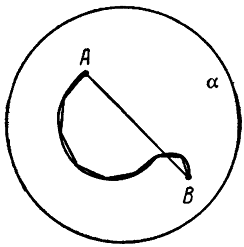
$$\frac{\overline{A}\overline{N}}{\overline{A}\overline{M}}\cdot\frac{\overline{B}\overline{M}}{\overline{B}\overline{N}}=\frac{A'N'}{A'M'}\cdot\frac{B'M'}{B'N'}.$$

Мы видим, таким образом, что при любом преобразовании $\bigwedge$ круга α в себя двойное отношение $\frac{AN}{AM}\cdot\frac{BM}{BN}$ не изменяется, а следовательно, не изменяется и его логарифм

$$\ln\left(\frac{AN}{AM}\cdot\frac{BM}{BN}\right),$$

который представляет собой расстояние Лобачевского $d(AB)$ между точками A и B.

На плоскости Лобачевского, так же как и на плоскости Евклида, имеет место неравенство треугольника, т. е. сумма длин двух сторон треугольника больше длины третьей его стороны, так как доказательство этого факта на плоскости Евклида не опирается на аксиому о параллельных.



Черт. 42.

Из неравенства треугольника следует, что из всех линий, соединяющих две точки A и B, кратчайшей является соединяющий их прямолинейный отрезок (черт. 42). Это получается, если под длиной кривой, как всегда, понимать предел длины «вписанной» в нее ломаной, так же как и на евклидовой плоскости, ибо, так же как и на евклидовой плоскости, из неравенства треугольника легко доказать, что прямолинейный отрезок короче всякой ломаной, соединяющей точки A и B.

Замечание. Если точку A на хорде MN закрепить, а точку B передвигать по хорде MN, приближая ее к точке N, то отношение $\frac{AN}{AM}$ не будет изменяться, а отношение $\frac{BM}{BN}$ будет бесконечно увеличиваться, а следовательно, будет бесконечно возрастать и $d(AB) = \ln\left(\frac{AN}{AM}\cdot\frac{BM}{BN}\right)$, т. е. точка B будет бесконечно удаляться от точки A в смысле Лобачевского. Точки окружности круга α поэтому будут, так сказать, «бесконечно удаленными точками» плоскости Лобачевского, совершенно аналогично тому, как это было в случае модели плоскости Евклида в круге, рассмотренной в § 7. Многие авторы называют окружность круга α «абсолютом». Мы видим, что, как и плоскость Евклида, плоскость Лобачевского бесконечна.

§ 11. Площадь многоугольника в плоскости Лобачевского

Мы покажем, что всякому многоугольнику плоскости Лобачевского, все равно — выпуклому или невыпуклому, можно сопоставить положительное число, меру его площади, удовлетворяющую условиям:

1° мера площади аддитивна, т. е. площадь суммы многоугольников равна сумме их площадей,

2° мера площади инвариантна относительно передвижений многоугольника движениями Лобачевского.

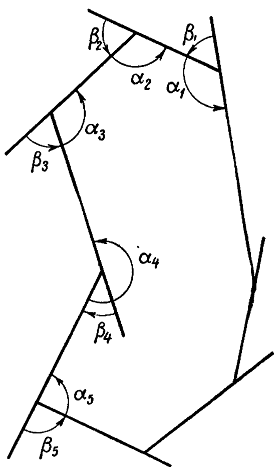
Такой мерой площади многоугольника в плоскости Лобачевского, оказывается, является так называемый его «дефект» («недостаток»), т. е. величина того угла, на который меньше сумма мер Лобачевского внутренних углов этого многоугольника, чем сумма внутренних углов многоугольника Евклида с таким же числом сторон. Тут под величиной внутреннего угла понимается тот угол, измеренный против часовой стрелки, на который надо повернуть последующую сторону, чтобы она совпала с предыдущей. В отношении евклидовой суммы углов многоугольника мы здесь говорим только о числе сторон многоугольника, так как в случае многоугольника Евклида сумма его внутренних углов равна $180°(N-2)$, где N — число его сторон, т. е. зависит не от того, каковы величины его сторон и углов, а только от числа его сторон.

Действительно, если $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$ — внешние углы, соответствующие внутренним углам $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$, то $(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2)+\ldots+(\alpha_N+\beta_N)=180° N$ (черт. 43). Но сумма всех внешних односторонних углов $\beta_1+\beta_2+\ldots$ $\ldots+\beta_N=360°$, так как соответствует одному полному повороту стрелки $\rightarrow$, и поэтому $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_N=$

$=180°N-360°=180°(N-2)$. В частном случае треугольника, т. е. когда $N=3$, получаем:

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=180°(3-2)=180°.$$

Покажем теперь, что сумма мер Лобачевского внутренних углов многоугольника в плоскости Лобачевского всегда меньше суммы внутренних углов многоугольника с тем же числом сторон в обычной плоскости Евклида, т. е. что дефект многоугольника плоскости Лобачевского всегда положительное число.

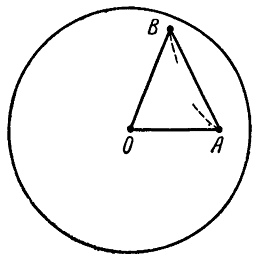


Черт. 43.

Докажем это сначала для треугольника, тогда уже будет легко перейти к многоугольнику. Достаточно рассмотреть вопрос в модели Кэли — Клейна. Так как меры Лобачевского углов не изменяются при передвижении их движениями Лобачевского, можно передвинуть исследуемый треугольник так, как нам нужно. Сделаем поэтому такое преобразование $\wedge$ круга α в себя, чтобы в центре O круга оказалась вершина такого угла треугольника, который больше или равен каждому из двух других углов этого треугольника.

Прямым углом в мере Лобачевского называется угол, мера Лобачевского которого равна 90° (т. е. четверти полного угла вокруг точки). Если прямой в смысле Лобачевского угол рассматривать на модели, он может быть в евклидовом смысле и не прямой, а острый или тупой. Острым углом в мере Лобачевского называется угол, меньший прямого в смысле Лобачевского, а тупым — угол, больший прямого в мере Лобачевского. Напомним, что меры Евклида и Лобачевского угла, вершина которого лежит в центре O круга α, равны между собой. Заметим еще, что если одна из сторон угла идет по диаметру круга α, то он прямой по Лобачевскому тогда и только тогда, когда он прямой по Евклиду (это непосредственно следует из смысла на модели меры угла в смысле Лобачевского), а потому, если такой угол острый в смысле Евклида, то он — часть прямого, т. е. острый и в смысле Лобачевского и обратно, и если он тупой в смысле Евклида, то он тупой и в смысле Лобачевского и обратно.

Учитывая сказанное, легко видеть, что если треугольник OAB расположен так, что вершина того из его углов, который больше или равен в смысле Лобачевского каждому из двух других его углов, расположена в центре O круга α, то углы его A и B острые в смысле Евклида.



Черт. 44.

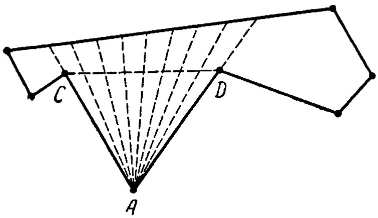
Действительно, если угол O тупой в смысле Евклида, то углы A и B острые в смысле Евклида, так как в евклидовом треугольнике не может быть больше одного тупого угла. Если же угол O острый в смысле Евклида, то он острый и в смысле Лобачевского, так как его вершина — в центре круга α и потому его меры Евклида и Лобачевского совпадают. Но, по предположению, углы A и B равны ему или меньше в смысле Лобачевского, т. е. они тоже острые в смысле Лобачевского, а следовательно, так как одна из сторон каждого из этих углов идет по диаметру, они, в силу сделанного замечания, острые и в смысле Евклида (черт. 44).

Но тогда мера Лобачевского каждого из них, в силу смысла этой меры на модели, меньше его меры Евклида.

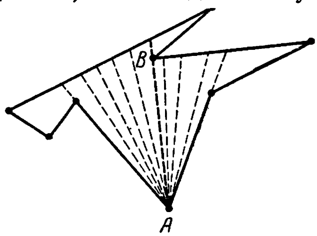
Итак, мера Лобачевского угла O равна его мере Евклида, а меры Лобачевского углов A и B меньше их мер Евклида. Сумма мер Лобачевского углов треугольника, таким образом, меньше суммы их мер Евклида, т. е. меньше двух прямых.

Перейдем теперь к многоугольникам.

Докажем прежде всего, что если многоугольник самонепересекающийся (а только такие мы и будем рассматривать), все равно выпуклый или невыпуклый, и не является треугольником, то он всегда имеет хотя бы одну внутреннюю диагональ, т. е. можно всегда провести такой отрезок, соединяющий две его вершины, который весь проходит внутри [1]) многоугольника и разрезает его на два многоугольника. У невыпуклого многоугольника, вообще говоря, не из всякой вершины можно провести такую внутреннюю диагональ (черт. 45). Но когда это бу-



Черт. 45.



Черт. 46.

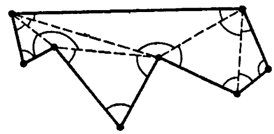
дет? Это будет только, если все внутренние лучи, исходящие из этой вершины A, упираются в одну и ту же противоположную сторону, так как если бы они до некоторого места упирались в одну сторону, а дальше в другую, то само это место было бы вершиной B, соответствующей этой или другой стороне, и мы получили бы внутреннюю диагональ AB (черт. 46).

Если все внутренние лучи, исходящие из вершины A, упираются в одну и ту же противоположную сторону, но рассматриваемый многоугольник — не треугольник, то отрезок CD будет такой внутренней диагональю (черт. 45).

Пусть теперь задан некоторый самонепересекающийся многоугольник. Разрежем его, если он не треугольник, на два многоугольника внутренней диагональю. Каждую из его половин, если она не треугольник, снова разре-

[1]) Теорему Жордана о том, что любой самонепересекающийся многоугольник разделяет плоскость на две части — внутреннюю ему и внешнюю ему, мы будем принимать без доказательства.

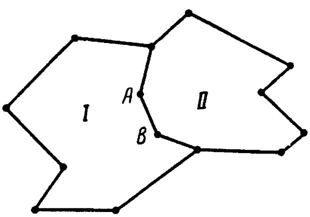
жем внутренней диагональю и т. д. Так в конце концов весь многоугольник окажется разрезанным на треугольники (черт. 47), причем вершинами этих треугольников будут все вершины исходного многоугольника и только они, а суммой внутренних его углов будет сумма всех внутренних углов всех этих треугольников. Но так как сумма мер Лобачевского внутренних углов треугольника, как мы доказали, меньше суммы евклидовых мер этих углов, то и сумма мер Лобачевского внутренних углов многоугольника меньше суммы евклидовых мер этих углов.



Черт. 47.

Итак, дефект многоугольника всегда положительное число.

1°. Докажем теперь аддитивность дефекта. Рассмотрим для этого многоугольник, составленный из двух многоугольников, смежных по одной или нескольким сторонам[1]), причем будем предполагать, что получившийся многоугольник опять все равно выпуклый или невыпуклый, но имеет одну границу (черт. 48). Пусть $\sum_{1Е}$ и $\sum_{2Е}$ суть суммы внутренних углов, вычисленные по Евклиду для составляющих многоугольников *I* и *II*, а $\sum_{1Л}$ и $\sum_{2Л}$ — соответственные суммы внутренних углов по Лобачевскому. Очевидно, что тогда сумма внутренних углов по Евклиду получившегося составного многоугольника *I* + *II* равна



Черт. 48.

$$\sum_{1Е} + \sum_{2Е} - k \cdot 360°,$$

[1]) Стороны могут между собою образовывать углы и в 180°, и поэтому случай, когда многоугольники смежны не по целым сторонам, не надо рассматривать отдельно.

где k — число таких точек, как A и B, а та же сумма по Лобачевскому равна

$$\Sigma_{1Л} + \Sigma_{2Л} - k \cdot 360^\circ.$$

Дефект составного многоугольника поэтому равен

$$\Sigma_{1Е} + \Sigma_{2Е} - k \cdot 360^\circ - \{\Sigma_{1Л} + \Sigma_{2Л} - k \cdot 360^\circ\},$$

т. е. равен сумме дефектов составляющих его многоугольников

$$(\Sigma_{1Е} - \Sigma_{1Л}) + (\Sigma_{2Е} - \Sigma_{2Л}).$$

2°. Инвариантность дефекта многоугольника следует просто из инвариантности при движениях Лобачевского мер Лобачевского его углов.

§ 12. Другое толкование меры площади Лобачевского при помощи гиперболоида

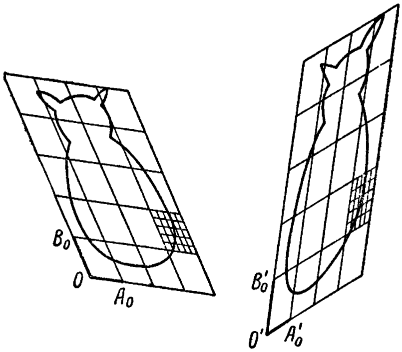
Теорема. *При заданном аффинном преобразовании пространства величины объемов всех тел изменяются одинаково.*

Это сейчас же следует из теоремы п. 2 § 14 (см. стр. 93). Действительно, возьмем в преобразуемом пространстве координатную систему с основным параллелепипедом $OA_0B_0C_0$ и разобьем все пространство на решетку таких равных друг другу параллелепипедов, вершинами которых будут все точки с целыми рациональными координатами относительно системы $OA_0B_0C_0$.

Если рассматриваемое тело окажется сложенным из целых таких параллелепипедов, т. е. не будет совсем таких параллелепипедов, которые перерезаются поверхностью этого тела и поэтому лишь частично входят в тело, то дело совсем просто. Если число таких параллелепипедов, которые составляют исследуемое тело, есть N, а объем основного параллелепипеда $OA_0B_0C_0$ есть v_0, то объем v тела равен

$$v = N \cdot v_0. \tag{1}$$

Если сделать любое аффинное преобразование пространства, то, в силу теоремы п. 2 § 14, совокупность точек с целыми рациональными координатами относительно системы $OA_0B_0C_0$ перейдет в такую же совокупность точек относительно образа $O'A_0'B_0'C_0'$ этой системы, а рассматриваемая решетка параллелепипедов — в совершенно аналогичную решетку для системы $O'A_0'B_0'C_0'$.



Черт. 49.

Кроме того, те параллелепипеды исходной решетки, из которых составлено наше тело, очевидно, перейдут в те параллелепипеды преобразованной решетки, из которых составлено преобразованное тело, и поэтому его объем v' будет равен

$$v' = N \cdot v_0',$$

где v_0' — объем основного параллелепипеда преобразованной системы. Отсюда получается, что

$$v' = \Delta \cdot v,$$

где $\Delta = \frac{v_0'}{v_0}$ при данном аффинном преобразовании для всех тел одно и то же.

Если же тело таково, что есть такие параллелепипеды, которые входят в него лишь частично (черт. 49) [1], т. е.

[1]) Ради простоты черт. 49 дан не для пространства, а для плоскости.

перерезаются его поверхностью, то формула (1) лишь приближенная.

В этом случае рассмотрим совокупность I_0 тех параллелепипедов решетки параллелепипедов, построенной на основном параллелепипеде $OA_0B_0C_0$, которые целиком, всеми своими точками, входят в тело, объем которого исследуется, и совокупность II_0 тех, которые либо входят целиком, либо имеют хотя бы одну свою точку, общую с рассматриваемым телом.

Разделим затем все параллелепипеды решетки, каждый, например, на 1000 одинаковых параллелепипедов (уменьшив в 10 раз каждое из ребер), и рассмотрим для этой в 1000 раз более мелкой решетки параллелепипедов опять совокупность I_1 тех ее параллелепипедов, которые целиком входят в наше тело, и совокупность II_1 тех, которые имеют с ними хотя бы одну общую точку, и т. д.

И пусть V_{I_0}, $V_{II_0}, \ldots$, V_{I_1}, $V_{II_1}, \ldots$ — объемы этих совокупностей все более и более мелких параллелепипедов. Очевидно, что

$$V_{I_0} \leqslant V_{I_1} \leqslant V_{I_2} \leqslant \ldots \leqslant V_{II_2} \leqslant V_{II_1} \leqslant V_{II_0}.$$

Если разность $V_{II_n} - V_{I_n}$ стремится при увеличении индекса n к нулю, то обе последовательности чисел

$$V_{I_0},\ V_{I_1},\ V_{I_2}$$

и

$$V_{II_0},\ V_{II_1},\ V_{II_2}, \ldots$$

стремятся, одна возрастая, а другая убывая, к одному и тому же пределу V, который, по определению, и называется объемом рассматриваемого тела.

После аффинного преобразования пространства совокупности I_0, I_1, $I_2, \ldots$ и II_0, II_1, $II_2, \ldots$ переходят в аналогичные совокупности I'_0, I'_1, $I'_2, \ldots$ и II'_0, II'_1, $II'_2, \ldots$ для преобразованной системы $O'A'_0B'_0C'_0$ и преобразованного тела. Объемы $V_{I'_0}$, $V_{I'_1}$, $V_{I'_2}, \ldots$, $V_{II'_0}, V_{II'_1}$, $V_{II'_2}, \ldots$ отличаются поэтому от объемов V_{I_0}, V_{I_1}, $V_{I_2}, \ldots$, V_{II_0}, V_{II_1}, $V_{II_2}, \ldots$ множителем $\frac{v'_0}{v_0} = \Delta$, а поэтому и объем V' преобразованного тела отличается от объема V преобразуемого тела этим же множителем Δ, который зависит лишь от заданного аффинного преобразования, но не зависит от выбора тела, т. е. для всех тел один и тот же.

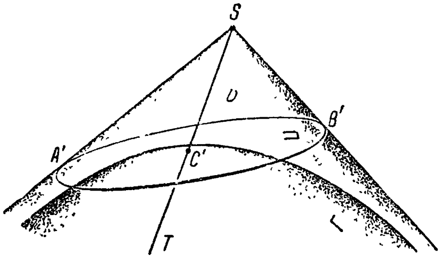
Определение. Такие аффинные преобразования, при которых не изменяются объемы, мы будем называть *эквиаффинными*.

Мы обозначили через $(\bigwedge)$ аффинные преобразования, при которых точка S остается на месте и конус K переходит в себя. Мы будем сейчас рассматривать только те из этих преобразований, которые эквиаффинны, и будем их обозначать через $((\bigwedge))$. Такие преобразования $((\bigwedge))$ называются *преобразованиями Лоренца* по отношению к конусу K. Преобразования Лоренца $((\bigwedge))$ это, таким образом, эквиаффинные преобразования пространства, при которых конус K переходит в себя.

Если преобразование $(\bigwedge)$ не эквиаффинное, то, домножая его на соответственную гомотетию по отношению к точке S, мы получаем «соответствующее ему» эквиаффинное преобразование $((\bigwedge))$. Очевидно, что оба эти преобразования индуцируют одно и то же преобразование $\bigwedge$. Поэтому любое преобразование $\bigwedge$ можно рассматривать как индуцированное некоторым преобразованием Лоренца $((\bigwedge))$.

Будем теперь производить все возможные преобразования $((\bigwedge))$. Возьмем какую-нибудь плоскость Π, перпендикулярную к оси конуса и пересекающую его поэтому по окружности, и будем смотреть, что происходит с этим сечением при всех возможных преобразованиях $((\bigwedge))$. Получающиеся при этом из плоскости Π плоскости пересекают конус по так называемым *эллипсам*. Так будут получаться все возможные секущие плоскости Π', отрезающие от конуса K постоянные объемы (так как преобразования $((\bigwedge))$ не изменяют объемов) и делающие углы с осью конуса большие 45°. Внутри окружности имеется одна и только одна такая точка, ее центр — C, что любая хорда окружности, через нее проходящая, делится ею пополам, так как если точка C^* — не центр, то та хорда, которая через нее проходит и является диаметром круга, очевидно, ею уже не делится пополам.

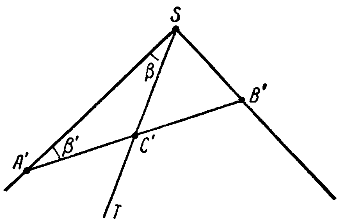
Так как преобразования $((\wedge))$ аффинны, а при любом аффинном преобразовании прямолинейный отрезок переходит в прямолинейный отрезок и его середина — в его середину и обратно, то всякий из рассматриваемых эллипсов имеет также одну и только одну точку такую,



Черт. 50.

что любая его хорда, через нее проведенная, ею делится пополам, а именно образ C' центра C той окружности, из которой он получился преобразованием $((\wedge))$. Это так называемый центр эллипса (черт. 50).

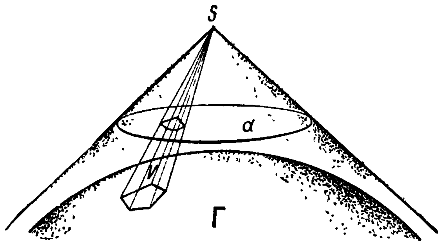
На каждой внутренней к конусу полупрямой ST, исходящей из вершины S, имеется центр такого эллипса для одной и только одной секущей плоскости Π'. Действительно, в силу симметрии центр такого эллипса, очевидно, лежит на секущей плоскости на ее линии наибольшего ската, проходящей через ось конуса (черт. 51). А чтобы эта линия наибольшего ската



Черт. 51.

$A'B'$ имела свою середину на данной полупрямой ST, необходимо и достаточно, чтобы углы β и β' были равны. Значит, если дана полупрямая ST, то уже направление соответственной линии наибольшего ската, а следовательно, и секущей плоскости Π' предопределено. Но ведь, кроме того, и объем, отрезаемый ею от конуса, тоже задан, а именно равен объему, отрезаемому от конуса K плоскостью П, и поэтому сама эта плоскость П′ вполне определена.

Геометрическое место центров рассмотренных эллипсов образует, таким образом, некоторую поверхность Г, так называемый *двухполосный гиперболоид* (собственно одну полу этого гиперболоида). Поверхность эта, как видно из сказанного выше, имеет то свойство, что всякая внутренняя к конусу K полупрямая ST пересекает



Черт. 52.

ее в одной и только одной ее точке. По самому ее построению видно, что поверхность эта преобразуется любым преобразованием $((\bigwedge))$ в себя. Рассмотрим какую-либо площадку в круге α и то «коническое» («пирамидальное», если эта площадка — многоугольник) тело, которое образовано кусками всех полупрямых ST, проходящих через точки этой площадки до поверхности (черт. 52). Величина v объема этого тела будет, очевидно, мерой рассматриваемой площадки, которая положительна, аддитивна и инвариантна по отношению к преобразованиям $\bigwedge$ круга α в себя. Последнее — потому, что эти преобразования будут индуцироваться преобразованиями $((\bigwedge))$ пространства, не изменяющими любых объемов, т. е. и объема этого конического тела, и преобразующими гиперболоид Г в себя.

В заключение отметим, что для меры площадки, так же как и для мер длины и угла, может быть установлено следующее [1]): если всякому самонепересекающемуся многоугольнику плоскости Лобачевского можно сопоставить так положительное число — его меру, что: 1° мера эта аддитивна и 2° инвариантна по отношению к движениям Лобачевского, то эта мера единственна, с точностью до общего для всех многоугольников положительного постоянного множителя, т. е. с точностью до выбора единицы измерения.

Эта же теорема верна и для плоскости Евклида.

Из этой теоремы следует, что обе введенные нами в предыдущем и настоящем параграфах меры площади многоугольников в плоскости Лобачевского одинаковы, с точностью до постоянного множителя.

Замечание I. Дефект треугольника плоскости Лобачевского, очевидно, никак не больше 180°. Поэтому, в отличие от того, что имеет место в плоскости Евклида, площади треугольников плоскости Лобачевского не могут быть сколь угодно большими, все они меньше 180°. Дефект наибольший (а именно равен 180°) у так называемых предельных треугольников плоскости Лобачевского, т. е. у треугольников, вписанных в круг α, у которых все три «вершины» бесконечно удалены. Это «треугольники» (если их только можно так называть) плоскости Лобачевского с наибольшей площадью. Площади всех остальных (обычных) треугольников плоскости Лобачевского меньше.

Что же касается многоугольников плоскости Лобачевского, то их площади могут быть сколь угодно велики, что, например, видно, если рассмотреть дефект правильного многоугольника с достаточно большим числом сторон, вершины которого достаточно близки к абсолюту (т. е. к окружности круга α).

Площадь всей плоскости Лобачевского поэтому, как и площадь всей плоскости Евклида, бесконечна.

Замечание II. В плоскости Лобачевского существует сколько угодно таких треугольников, вокруг которых нельзя описать круг.

---

[1]) См. Н. В. Ефимов, Основания геометрии, М.—Л., Гостехиздат, 1945, стр. 192 или В. И. Костин, Основания геометрии, М.—Л., Учпедгиз, 1948, гл. VII.

Действительно, во-первых, перпендикулярными в смысле Лобачевского прямыми к прямым Лобачевского, проходящим через центр O круга α, являются прямые, перпендикулярные к ним в смысле Евклида. Это следует из того смысла меры Лобачевского угла, которую она имеет в нашей модели. Во-вторых, для двух точек A и B круга α, симметричных по отношению к центру O круга α, геометрическое место точек круга α, равно удаленных от них в смысле Лобачевского, как и в плоскости Евклида, есть перпендикуляр к отрезку AB, проведенный через его середину. Потому что для точек этого перпендикуляра, в силу симметрии, их расстояния Лобачевского от точек A и B одинаковы. Если же точка C' не лежит на этом перпендикуляре и отрезок AC' пересекает этот перпендикуляр в точке C, то $AC' = AC + CC' = BC + CC' > BC'$ в силу неравенства треугольника. Для отрезка AB, лежащего в круге α как-либо иначе, интересующее нас обстоятельство доказывается, если отрезок передвинуть при помощи преобразования Λ в рассматривавшееся сейчас положение, так как при движении Лобачевского ни расстояния Лобачевского, ни углы Лобачевского не меняются.

Рассмотрим теперь треугольник AOB, лежащий в круге α, стороны OA и OB которого не очень малы, а угол которого при O достаточно близок к 180°. Середины Лобачевского его сторон OA и OB будут дальше от точки O, чем их середины Евклида, как это легко следует из формулы расстояния. Перпендикуляры a и b к сторонам OA и OB, проведенные через их середины Лобачевского, будут поэтому при достаточной близости угла AOB к 180° и не слишком малых сторонах OA и OB пересекаться вне круга α, т. е. внутри круга α нет точки, одинаково удаленной от вершин треугольника, а следовательно, около треугольника OAB нельзя описать окружность.

§ 13. Абсолютные единицы длины в плоскости Лобачевского

Всем известные употребляемые единицы длины, например, метр, фут, аршин и т. д., оказывается, принципиально никак не могут быть определены чисто геометрически. Действительно, что такое, например, метр? Метр — это отрезок, равный (т. е. каждый движением может быть с ним совмещен) отрезку между определенными черточками эталона, сделанного из сплава платины и иридия, который хранится в Всесоюзном институте метрологии имени Д. И. Менделеева. Правда, что когда в 1791 году комиссия Парижской академии наук впервые вводила метрическую систему мер, то за метр было решено принять одну десятимиллионную часть половины (некоторые почему-то говорят «четверти»), т. е. от экватора до полюса, земного меридиана. Но ведь и это значило, что для указания единицы длины был указан определенный материальный эталон, а она не была определена геометрически. В силу существования в геометрии Евклида преобразований подобия в ней, оказывается, и нельзя задать единицу длины чисто геометрически, т. е. исходя из аксиом геометрии.

Совсем иное имеет место в геометрии Лобачевского. Поясним, в чем дело.

Если дано описание некоторой фигуры, сделанное в терминах аксиоматики плоскости Лобачевского, и это описание таково, что любые две фигуры, построенные соответственно этому описанию, могут быть друг с другом совмещены при помощи некоторого движения, то эти фигуры называются абсолютными или абсолютно заданными. Фигуры, не удовлетворяющие этим двум условиям, называются неабсолютными. Примеры абсолютных фигур:

1) точка,

2) прямая,

3) весь угол вокруг точки,

4) прямой угол, т. е. четвертая часть всего угла вокруг точки,

5) угол данной величины, т. е. угол, являющийся данной частью всего угла вокруг точки.

Действительно, каждая из этих фигур может быть описана, исходя из семи основных понятий и аксиом о них, и каждые две фигуры одного и того же из этих классов могут быть совмещены друг с другом при помощи движений — любая точка с любой точкой, любая прямая с любой прямой, любой угол, который, например, равен $2/5$ полного угла вокруг точки, с любым другим таким же углом.

Примеры неабсолютных фигур:

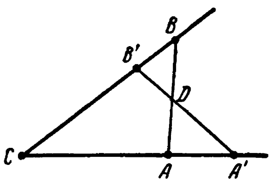
1) пара точек A и B,

2) треугольник ABC.

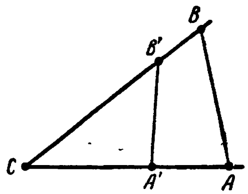
Пара точек — неабсолютная фигура, так как если взять одну пару точек AB и какую-нибудь другую пару точек CD, то если $d(AB) \neq d(CD)$, нет такого движения, которое совмещает пару AB с парой CD. То же самое для треугольника.

В плоскости Лобачевского, в отличие от плоскости Евклида, оказывается, не только углы, но и отрезки могут быть заданы абсолютно. Дело в том, что в плоскости Лобачевского треугольник с заданными углами есть абсолютная фигура, т. е. любые два таких треугольника могут быть совмещены друг с другом при помощи некоторого движения Лобачевского.

Действительно, треугольник есть тройка точек ABC, не лежащих на одной прямой; это высказывание сделано только через основные понятия аксиоматики: «точка»,



Черт. 53.



Черт. 54.

«прямая» и «лежать на». Углы A, B, C треугольника суть такие-то части полного угла вокруг точки. Это тоже такое высказывание, которое можно свести только на основные понятия и аксиомы, их регулирующие. С другой стороны, *на плоскости Лобачевского, оказывается, треугольники с соответственно равными углами равны*, т. е. совместимы друг с другом движениями Лобачевского. Действительно, пусть даны два треугольника ABC и $A'B'C'$, соответственные углы которых равны. Совместим их при помощи некоторого движения Лобачевского так, чтобы углы их C и C' совпали. Если при этом треугольники окажутся не совмещенными, то будет одно из двух: либо из точек A' и B' одна лежит внутри соответствующей стороны треугольника ABC, а другая на продолжении (черт. 53) (или совпадает с соответствующей вершиной), но это невозможно, так как внешний угол A треугольника $AA'D$ должен быть больше внутреннего угла A', ему не смежного, а он ему равен; либо обе точки A' и B' лежат внутри соответствующих сторон треугольника ABC (черт. 54) (или обе на их продолжении), но тогда площадь треугольника $A'B'C'$ была бы частью площади треугольника ABC (или наоборот), и, следовательно, его дефект был бы меньше, чем дефект треугольника ABC, что невозможно, так как дефекты этих треугольников равны.

Таким образом, треугольники ABC и $A'B'C'$ при сделанном движении совмещаются.

Следствие I. В плоскости Лобачевского не может быть подобных, но не равных треугольников.

Следствие II. Любой отрезок, являющийся стороной треугольника с заданными углами, лежащий против такого-то его угла, есть, таким образом, абсолютно заданный отрезок, и длина его может быть выбрана за единицу для измерения длин, причем за единицу абсолютно заданную.

ГЛАВА IV

КЛАССИФИКАЦИЯ ДВИЖЕНИЙ ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Для того чтобы изучить классификацию движений плоскости Лобачевского, или, что то же самое, классификацию преобразований Лоренца, придется сначала рассмотреть теорию неподвижных прямых центроаффинных преобразований пространства.

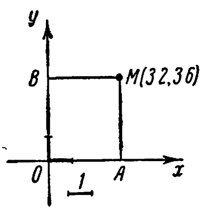
§ 14. Доказательство существования хотя бы одной неподвижной прямой у всякого центроаффинного преобразования пространства

Аффинное преобразование пространства, при котором некоторая точка S пространства остается на месте, как мы уже говорили, называется центроаффинным. Преобразования Лоренца, которые мы рассматривали в главе II, были некоторыми специальными центроаффинными преобразованиями пространства, а именно они не только 1° оставляли на месте вершину S конуса K, но еще 2° преобразовывали этот конус в себя и 3° были эквиаффинными, т. е. не изменяли объемов.

Мы докажем в этом параграфе следующую теорему: *какое бы центроаффинное преобразование пространства ни взять, всегда есть такая прямая, проходящая через точку S, которая при этом преобразовании как* *целое переходит в себя.* Всякую такую прямую мы будем называть неподвижной прямой рассматриваемого центроаффинного преобразования.

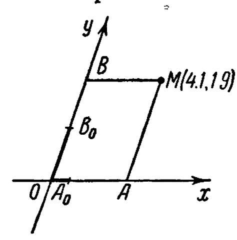
1. Общие декартовы координаты в пространстве

Как известно уже из средней школы, точки плоскости можно задавать при помощи прямоугольных координат. Делается это так. На плоскости раз навсегда выбираются две взаимно перпендикулярные прямые — координатные оси X и Y. На этих прямых указываются стрелками их положительные направления. Если дана точка плоскости M, то через нее проводят прямые, параллельные координатным осям, до пересечения с этими осями (черт. 55). Так получается координатный прямоугольник точки M. Стороны его OA и OB измеряются некоторой общей для обеих осей масштабной единицей, и тогда получаются два числа x и y. Числам этим, кроме того, придается тот или иной знак, в зависимости от того, в положительном или отрицательном направлении от точки O лежат на соответственной оси отрезки OA и OB, и тогда числа эти называются координатами точки M. Это так называемая декартова прямоугольная система координат на плоскости.



Черт. 55.

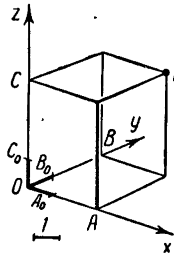
Ее можно обобщить. А именно, можно не предполагать, что оси x и y взаимно перпендикулярны, а допускать, чтобы они образовали какой-нибудь иной угол между собой (черт. 56). Каждой точке M тогда соответствует ее координатный параллелограмм. Затем можно измерять координатные отрезки OA и OB не одной и той же масштабной единицей, а для разных осей выбрать разные масштабные единицы



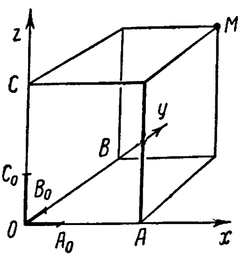
Черт. 56.

OA_0 и OB_0. Остальное же все делать, как указано выше. Так получаются так называемые общие декартовы координаты на плоскости.

Аналогичное имеет место и в пространстве. В случае декартовой прямоугольной координатной системы в пространстве задают три взаимно перпендикулярные координатные плоскости, которые, следовательно, пересекаются по трем взаимно перпендикулярным прямым, называемым координатными осями X, Y, Z, на каждой из которых задается стрелкой ее положительное направление. Тогда, если задана некоторая точка пространства M, то проводят мысленно через нее плоскости, параллельные координатным плоскостям. Получается координатный (в данном случае прямоугольный) параллелепипед точки M (черт. 57). Ребра его OA, OB и OC измеряют общей для всех трех осей масштабной единицей и получают три числа x, y и z. Числам этим придается тот или иной знак, в зависимости от того, в положительном или отрицательном направлении на соответственной оси лежит рассматриваемый отрезок OA, OB и OC, и тогда числа эти называются координатами точки M.



Черт. 57.



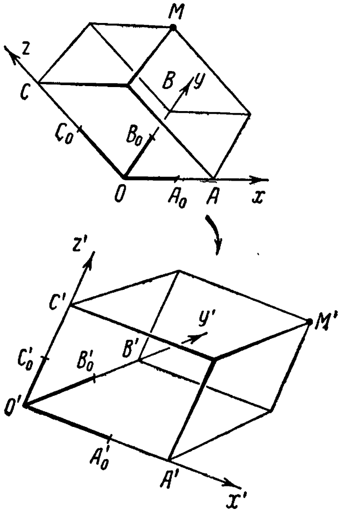
Черт. 58.

Общие декартовы координаты в пространстве те же самые, как и прямоугольные, но в общем случае координатные плоскости (а следовательно, и оси) не обязательно взаимно перпендикулярны и для измерения отрезков OA, OB и OC на каждой оси выбирается, вообще говоря, своя масштабная единица OA_0, OB_0 и OC_0 (черт. 58).

Общая декартова координатная система в пространстве, очевидно, вполне дана, если задана тройка единичных отрезков OA_0, OB_0 и OC_0, исходящих из общей точки O — начала координат. Совокупность таких трех отрезков поэтому мы, ради краткости, и будем называть координатной системой. Конечно, отрезки эти не должны лежать в одной плоскости, а должны быть ребрами некоторого, вообще говоря, не прямоугольного, параллелепипеда. В остальном как расположение точки O в пространстве, так и направления и длины этих отрезков могут быть произвольны. Направления, в которых они исходят из точки O, указывают положительные направления координатных осей.

2. Теорема об аффинных преобразованиях

Теорема. *При аффинном преобразовании пространства любая декартова координатная система переходит в некоторую другую декартову координатную систему, а любая точка переходит в точку, координаты которой относительно новой системы таковы же, каковы координаты ее прообраза относительно старой системы.*



Черт. 59.

Для доказательства рассмотрим некоторую декартову координатную систему $OA_0B_0C_0$ и произвольную точку пространства M (черт. 59). При аффинном преобразовании пространства точка O перейдет в некоторую точку O', отрезки OA_0, OB_0 и OC_0, исходящие из точки O, перейдут в некоторые отрезки $O'A_0'$, $O'B_0'$ и $O'C_0'$, исходящие из точки O', причем эти новые отрезки тоже не будут лежать в одной плоскости, так как иначе, делая обратное аффинное преобразование, мы получили бы, что и отрезки OA_0, OB_0 и OC_0 лежали бы в одной плоскости.

Так как параллельные плоскости переходят в параллельные же плоскости, то координатный параллелепипед точки M по отношению к системе $OA_0B_0C_0$ перейдет в координатный параллелепипед ее образа M' по отношению к образу $O'A_0'B_0'C_0'$ этой системы. Но отношения, в которых точки делят отрезки, сохраняются при аффинных преобразованиях и потому: $O'A' : O'A_0' = OA : OA_0$; $O'B' : O'B_0' = OB : OB_0$; $O'C' : O'C_0' = OC : OC_0$, т. е. координаты точки M' по отношению к системе $O'A_0'B_0'C_0'$ такие же, как координаты точки M по отношению к системе $OA_0B_0C_0$, причем и знаки те же самые, так как при аффинном преобразовании сохраняется порядок точек. Поэтому если A на прямой OA_0, например, с той же стороны от точки O, где лежит точка A_0, то и A' на прямой $O'A_0'$ с той же стороны от точки O', где лежит точка A_0', и т. д.

Доказанная теорема показывает, что аффинные преобразования могут быть описаны совсем наглядно, а именно так, как их описывает эта теорема.

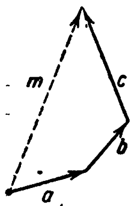
3. Формулы координат x, y, z преобразованной точки M' относительно старой системы координат

Выберем некоторую декартову систему координат $SA_0B_0C_0$ с началом в точке S. Пусть после рассматриваемого центроаффинного преобразования, оставляющего точку S на месте, эта координатная система перейдет в систему $SA_0'B_0'C_0'$, причем координаты точек A_0', B_0', C_0' относительно исходной системы $SA_0B_0C_0$ суть

$$(a_1,\ a_2,\ a_3),\quad (b_1,\ b_2,\ b_3)\quad \text{и}\quad (c_1,\ c_2,\ c_3).$$

По теореме п. 2 любая точка M пространства, если координаты ее относительно исходной системы $SA_0B_0C_0$ были x, y, z, перейдет в точку M', имеющую те же координаты x, y, z относительно преобразованной систéмы $SA_0'B_0'C_0'$. Найдем выражения координат x', y', z' преобразованной точки M' по отношению к исходной координатной системе $SA_0B_0C_0$ через числа a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3, характеризующие рассматриваемое аффинное преобразование, и через числа x, y, z, задающие преобразуемую точку M.

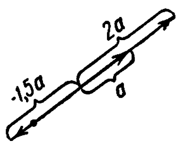
Используем свойства векторов. Напомним, что *вектором* называется отрезок, имеющий определенную длину и направления. При этом безразлично, где рассматривается в пространстве данный вектор; важно только то, какова его длина и каково его направление, указываемое на нем стрелкой. Поэтому два вектора, имеющих одинаковую длину и одинаковое направление, называются *равными*. Векторы складываются по следующему правилу (черт. 60). Если, например, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — некоторые векторы, то вектор $\boldsymbol{m}$, который есть их сумма, получается так: надо где-либо взять вектор $\boldsymbol{a}$, из его конца построить вектор $\boldsymbol{b}$, из конца вектора $\boldsymbol{b}$ построить вектор $\boldsymbol{c}$; так получается так называемая векторная ломаная (вообще говоря, не лежащая в одной плоскости). Вектор $\boldsymbol{m}$, начало которого лежит в начале вектора $\boldsymbol{a}$, а конец — в конце вектора $\boldsymbol{c}$, называется суммой векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$



Черт. 60.

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}.$$

Так, например, складываются в механике силы, скорости, ускорения и т. д. Легко показать, что сумма векторов не зависит от порядка слагаемых.



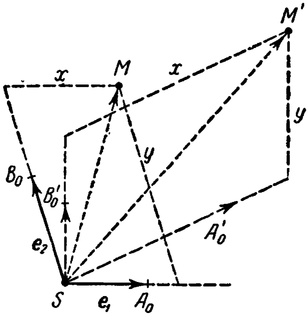
Черт. 61.

Если λ — действительное число (т. е. целое, дробное или иррациональное, положительное или отрицательное число), то *произведением* вектора $\boldsymbol{a}$ на это число λ

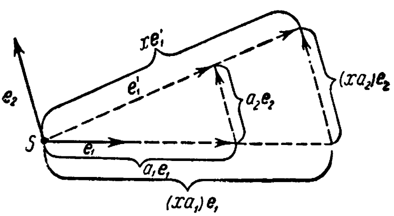
$$\lambda \cdot \boldsymbol{a}$$

называется вектор, длина которого равна $|\lambda| \cdot |\boldsymbol{a}|$, где $|\lambda|$ — абсолютная величина числа λ, а $|\boldsymbol{a}|$ — длина вектора $\boldsymbol{a}$; направление вектора $\lambda\boldsymbol{a}$ такое же, как у $\boldsymbol{a}$, если λ — положительное, и обратное направлению $\boldsymbol{a}$, если λ — отрицательное (черт. 61).

Из этих определений сразу следует, что если координатные отрезки SA_0, SB_0 и SC_0 рассматривать как векторы e_1, e_2, e_3, исходящие из точки S, то вектор $\overrightarrow{SM} = xe_1 + ye_2 + ze_3$. Аналогично, если координатные отрезки SA'_0, SB'_0, SC'_0 рассматривать как векторы e'_1, e'_2, e'_3, то вектор $\overrightarrow{SM'} = xe'_1 + ye'_2 + ze'_3$ (черт. 62)[1]). По этой же причине мы имеем:



Черт. 62.



Черт. 63.

$$e'_1 = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3;$$
$$e'_2 = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3;$$
$$e'_3 = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3.$$

Легко видеть, что:

$$xe'_1 = x(a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) = (xa_1)e_1 + (xa_2)e_2 + (xa_3)e_3;$$

это следует из того, что если мы удлиним вектор e'_1, исходящий из точки S, в x раз, то координатный параллелепипед его конца подобно увеличится в x раз в том смысле, что все его ребра увеличатся в x раз (черт. 63).

Аналогично будем иметь:

$$ye'_2 = y(b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3) = (yb_1)e_1 + (yb_2)e_2 + (yb_3)e_3,$$
$$ze'_3 = z(c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3) = (zc_1)e_1 + (zc_2)e_2 + (zc_3)e_3.$$

---

[1]) Ради упрощения мы даем черт. 62 и черт. 63 не для пространства, а для плоскости.

Поэтому

$$\overrightarrow{SM'}=(xa_1)\,e_1+(xa_2)\,e_2+(xa_3)\,e_3+(yb_1)\,e_1+(yb_2)\,e_2+\\+(yb_3)\,e_3+(zc_1)\,e_1+(zc_2)\,e_2+(zc_3)\,e_3,$$

или, так как можно переставлять слагаемые и, кроме того, из определения произведения вектора на число следует, что

$$(a_1x)\,e_1+(b_1y)e_1=(a_1x+b_1y)\,e_1 \text{ и т. д.,}$$

то

$$\overrightarrow{SM'}=(a_1x+b_1y+c_1z)\,e_1+(a_2x+b_2y+c_2z)\,e_2+\\+(a_3x+b_3y+c_3z)\,e_3.$$

Другими словами, что координаты точки M' по отношению к исходной координатной системе $SA_0B_0C_0$ суть

$$(a_1x+b_1y+c_1z,\quad a_2x+b_2y+c_2z,\quad a_3x+b_3y+c_3z).$$

4. О решении однородной системы уравнений 1-й степени

Рассмотрим произвольную систему трех уравнений первой степени с тремя неизвестными, не содержащую постоянных членов

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z=0,\\ A_3x+B_3y+C_3z=0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Составим так называемый определитель системы, т. е. число

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1B_1C_1\\ A_2B_2C_2\\ A_3B_3C_3 \end{vmatrix}=(A_1B_2-A_2B_1)\,C_3+(A_3B_1-A_1B_3)\,C_2+\\+(A_2B_3-A_3B_2)\,C_1,$$

и покажем, что если определитель Δ системы (1) равен нулю, то система эта имеет не чисто нулевое решение, т. е. решение x, y, z, у которого по крайней мере одно из чисел x, y или z не равно нулю.

Для доказательства предположим сначала, что определитель равен нулю, но не все три входящие в него скобки равны нулю, например, что $A_1B_2-A_2B_1 \neq 0$. В таком случае, умножая первое из уравнений на B_2, а второе на B_1 и вычитая, а затем второе на A_1, а первое на A_2 и вычитая, получим, что числа

$$X=\frac{C_1B_2-C_2B_1}{A_1B_2-A_2B_1},$$

$$Y=\frac{C_2A_1-C_1A_2}{A_1B_2-A_2B_1}$$

дают решение системы

$$\left.\begin{aligned} A_1X+B_1Y=C_1,\\ A_2X+B_2Y=C_2.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Но тогда из $\Delta=0$ получается, что те же X и Y дают решение уравнения

$$A_3X+B_3Y=C_3, \tag{3}$$

так как из $\Delta=0$ выходит

$$-C_3=\frac{(A_3B_1-A_1B_3)C_2+(A_2B_3-A_3B_2)C_1}{A_1B_2-A_2B_1},$$

что после перегруппировки в числителе дает

$$C_3=\frac{A_3(C_1B_2-C_2B_1)+B_3(C_2A_1-C_1A_2)}{A_1B_2-A_2B_1},$$

или

$$C_3=A_3X+B_3Y.$$

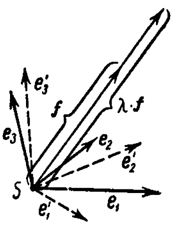
Итак, если $\Delta=0$ и хоть одна из скобок не равна нулю, то имеют место равенства (2) и (3). Но тогда, если взять за z любое, не равное нулю число и взять $x=-zX$ и $y=-zY$, то такие x, y, z дают не чисто нулевое решение нашей системы (1).

Если все три разности $A_1B_2-A_2B_1$, $A_3B_1-A_1B_3$, $A_2B_3-A_3B_2$ равны нулю, причем числа A_1, A_2, A_3 все три одновременно не равны нулю, то непосредственно убеждаемся, что B_1, B_2, B_3 пропорциональны A_1, A_2, A_3.

Если одно или два из трех чисел A_1, A_2 и A_3 равны нулю, то и соответствующие из чисел B_1, B_2, B_3 тоже равны нулю, а отличные от нуля пропорциональны, в этом нетрудно убедиться. Но если $B_1 = A_1k$, $B_2 = A_2k$, $B_3 = A_3k$, то, положив z равным 0, y — какому угодно числу, не равному нулю, а $x = -ky$, получим не чисто нулевое решение нашей системы (1).

5. Доказательство теоремы о существовании неподвижной прямой

Теорема о существовании у каждого центроаффинного преобразования по крайней мере одной неподвижной прямой, очевидно, состоит в том, что существует такой вектор $f = xe_1 + ye_2 + ze_3$, не равный нулю, который после рассматриваемого центроаффинного преобразования преобразуется в вектор f', лежащий на той же прямой, как и вектор f, т. е. в вектор $f' = \lambda f = \lambda xe_1 + \lambda ye_2 + \lambda ze_3$, где λ — некоторое, не равное нулю положительное или отрицательное число (черт. 64). Между прочим, можно не оговаривать, что λ не равно нулю, так как при аффинном преобразовании любой не равный нулю вектор f преобразуется непременно в вектор, не равный нулю, ибо при нем разные точки (начало S и конец M вектора f) переходят непременно в разные же точки (начало S' и конец M' вектора f'). Для того чтобы вектор f был не равен нулю, достаточно, чтобы хотя бы одно из чисел x, y, z было не равно нулю. Действительно, тогда точка M с координатами (x, y, z), являющаяся концом вектора f, уже не совпадает с его началом S, имеющим координаты (0, 0, 0).



Черт. 64.

Достаточно поэтому показать, что есть такие координаты x, y, z, не равные одновременно нулю, что координаты x', y', z' вектора f' относительно исходной системы $SA_0B_0C_0$ будут равны λx, λy и λz, где λ — некоторое действительное число.

В силу формул п. 3 для этого достаточно, чтобы при каком-либо действительном λ система

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z&=\lambda x,\\ a_2x+b_2y+c_2z&=\lambda y,\\ a_3x+b_3y+c_3z&=\lambda z,\end{aligned}\right\}$$

т. е. система

$$\left.\begin{aligned} (a_1-\lambda)x+b_1y+c_1z&=0,\\ a_2x+(b_2-\lambda)y+c_2z&=0,\\ a_3x+b_3y+(c_3-\lambda)z&=0,\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

имела не чисто нулевое решение. Но в силу результата п. 4 это непременно будет, если определитель ее равен нулю.

Определитель этой системы равен

$$[(a_1-\lambda)(b_2-\lambda)-a_2b_1](c_3-\lambda)+[a_3b_1-(a_1-\lambda)b_3]c_2+ \\ +[a_2b_3-a_3(b_2-\lambda)]c_1.$$

Расположив его по степени λ и приравняв нулю, мы получаем для определения тех λ, при которых этот определитель равен нулю, кубическое уравнение

$$\lambda^3+P\lambda^2+Q\lambda+R=0,$$

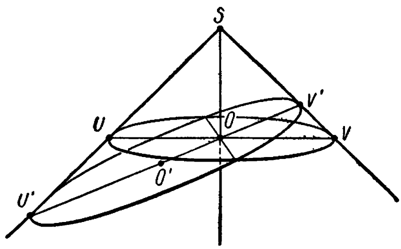
где P, Q, R — некоторые коэффициенты, составленные из a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3. Но кубическое уравнение с действительными коэффициентами P, Q, R всегда имеет по крайней мере один действительный корень. Ибо, если взять λ очень большим положительным, левая часть этого уравнения будет положительна, так как кубы λ^3 растут быстрее квадратов λ^2, а тем более первых степеней λ. Если же взять λ отрицательным, но очень большим по абсолютной величине, левая часть этого уравнения по аналогичной причине будет отрицательна. В силу того, что при непрерывном изменении λ многочлен от λ изменяется непрерывно, если непрерывно изменять λ между указанными пределами, для какого-то промежуточного значения λ левая часть этого кубического уравнения переходит от отрицательных значений к положительным через нуль.

При этом значении λ наша система (4) имеет, следовательно, определитель, равный нулю, т. е. имеет не чисто нулевое решение x, y, z.

§ 15. Классификация движений плоскости Лобачевского

Пусть теперь задано некоторое преобразование Лоренца $((\Lambda))$, т. е. эквиаффинное преобразование пространства, оставляющее на месте вершину S конуса K и преобразующее конус K в себя.

Рассмотрим три случая: 1° преобразование $((\Lambda))$ имеет неподвижную прямую, проходящую внутри конуса K; 2° оно имеет неподвижную прямую, проходящую вне конуса, но



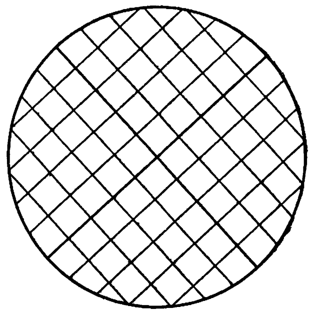
Черт. 65.

не имеет неподвижной прямой внутри конуса K; 3° оно не имеет неподвижных прямых ни внутри, ни вне конуса K.

1°. Итак, пусть преобразование $((\Lambda))$ имеет неподвижную прямую, проходящую внутри конуса K. Рассмотрим сначала частный случай, когда этой прямой будет сама ось конуса. При таком преобразовании $((\Lambda))$ точка S остается на месте, конус K переходит в себя и, кроме того, ось его SO (черт. 65) переходит в себя, но мы не знаем еще, не растягивается ли или не сжимается ли эта ось. Поэтому домножим наше преобразование S, если это нужно, на такую гомотетию пространства относительно точки S, чтобы ось оставалась неизменной, т. е.

чтобы точка O оставалась на месте. (Дальше окажется, что этого делать не нужно, но мы пока что этого не знаем.)

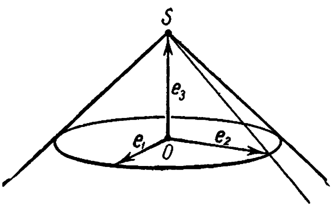
Рассмотрим плоскость П, проходящую через точку O и перпендикулярную к оси конуса. Она пересекает конус по окружности с центром в точке O. Преобразование $((\bigwedge))$ («подправленное», если это было нужно, указанной гомотетией) преобразует плоскость П в себя, так как, если бы оно ее преобразовало в некоторую плоскость П′, то центр O' эллипса, получаемого в сечении П′, получался бы из центра O круга α, а между тем точка O остается на месте. В таком случае исходное преобразование $((\bigwedge))$, если бы его надо было подправлять, преобразовало бы плоскость П в некоторую ей параллельную плоскость $\overline{П}$ и изменяло бы объем, отрезанный плоскостью П от конуса K, а между тем исходное преобразование $((\bigwedge))$, по предположению, эквиаффинно, т. е. не изменяет объемов, следовательно, как мы видим, его не надо было и подправлять.



Черт. 66.

Рассмотрим теперь два взаимно перпендикулярных диаметра получаемого круга. При преобразовании $((\bigwedge))$ круг этот преобразуется в себя и центр его остается на месте и, следовательно, эти диаметры преобразуются опять в некоторые его диаметры (черт. 66). Покажем, что новые диаметры тоже взаимно перпендикулярны. Действительно, два взаимно перпендикулярных диаметра круга это такие, что один делит пополам хорды, параллельные другому, и обратно. Но при аффинном преобразовании круга в себя хорды переходят в хорды, параллельные хорды — в параллельные и середины хорд — в середины. Поэтому взаимно перпендикулярные диаметры круга переходят во взаимно перпендикулярные.

Рассмотрим теперь координатную систему e_1, e_2, e_3 с началом в центре O этого круга, векторами e_1 и e_2 которого являются какие-нибудь два взаимно перпендикулярных радиуса этого круга, а третьим вектором e_3 — отрезок OS (черт. 67). Если взаимно перпендикулярные радиусы e_1', e_2', являющиеся образами e_1 и e_2, образуют пару той же ориентации, как и e_1, e_2 (т. е., например, если e_1, e_2 расположены против часовой стрелки, то и e_1', e_2' расположены против часовой стрелки, если смотреть из точки S), то рассматриваемое преобразование $((\wedge))$ есть просто поворот (ω) вокруг оси конуса. Если же ориентация пары e_1', e_2' противоположна той, которая у пары e_1, e_2, то преобразование $((\wedge))$ есть произведение некоторого поворота (ω) на отражение (π) в некоторой плоскости, проходящей через ось конуса.

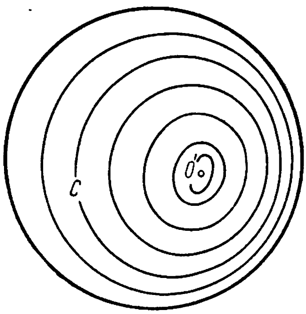


Черт. 67.

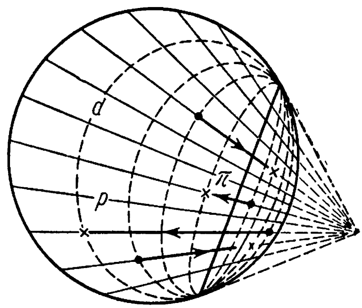
Но произведение поворота вокруг оси на отражение в некоторой плоскости, проходящей через ось, сводится, как легко видеть, к одному отражению в некоторой (уже другой) плоскости, проходящей через ось. Таким образом, если неподвижной прямой преобразования $((\wedge))$ является ось конуса K, то преобразование $((\wedge))$ есть либо поворот вокруг оси конуса, либо отражение в плоскости, проходящей через ось.

Пусть теперь неподвижной прямой рассматриваемого преобразования $((\wedge))$ будет некоторая внутренняя прямая конуса SO', отличная от его оси. Пусть преобразование $(\llcorner)$ такое, при котором эта прямая превратится в ось конуса. Тогда преобразование $((\wedge))$, очевидно, можно получать так. Сначала сделать преобразование $(\llcorner)$, затем либо некоторый поворот (ω), либо некоторое отражение (π) и, наконец, преобразование $(\llcorner)^{-1}$, т. е. $((\wedge)) = (\llcorner)(\omega)(\llcorner)^{-1}$ или $((\wedge)) = (\llcorner)(\pi)(\llcorner)^{-1}$. Геометрически в круге α преобразование $\wedge$, индуцируемое таким преобразованием $((\wedge))$, будет иметь вид, показанный на черт. 68 или черт. 69, где в первом случае O' — центр вращения Лобачевского, а во втором π' — ось симметрии в плоскости Лобачевского. Линии c суть концентрические окружности Лобачевского с центром O', d — эквидистанты прямой π', а p — перпендикуляры Лобачевского к прямой π'.

2°. Пусть теперь рассматриваемое преобразование $((\wedge))$ имеет неподвижную прямую, проходящую вне конуса K, но не имеет неподвижных прямых внутри конуса. Рассмотрим



Черт. 68.

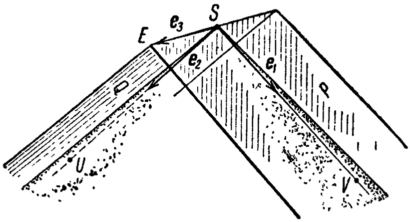


Черт. 69.

сначала (черт. 70) случай, когда прямая эта SE перпендикулярна к оси конуса. Проведем через нее плоскости P и Q, касающиеся конуса. При рассматриваемом преобразовании $((\wedge))$ эти плоскости P и Q преобразуются опять в касательные плоскости к конусу, проходящие через прямую SE.

Поэтому при рассматриваемом преобразовании $((\wedge))$ либо каждая из образующих SU и SV преобразуется в себя, либо они преобразуются друг в друга. Рассмотрим сначала первый случай. В этом случае плоскость USV преобразуется аффинно в себя, причем полупрямые SU и SV преобразуются в себя.

Подправим, в случае нужды, преобразование $((\wedge))$, сейчас рассматриваемое, гомотетией в точке S такой, чтобы прямая SE этим подправленным преобразованием не растягивалась и не сокращалась, и рассмотрим координатную систему e_1, e_2, e_3 (черт. 70), векторы e_1 и e_2 которой идут из точки S по полупрямым SU и SV, а вектор e_3 по полупрямой SE. В таком случае при подправленном преобразовании $((\wedge))$ вектор e_3 не изменится, либо преобразуется в себе обратный — e_3. Предположим первое. Векторы e_1 и e_2 превратятся в векторы te_1 и qe_2, где t и q — некоторые числа. Любая плоскость, параллельная плоскости USV, но с ней не совпадающая, пересекает конус K по гиперболе, рассмотренной в § 6. При подправленном преобразовании $((\wedge))$ эта плоскость

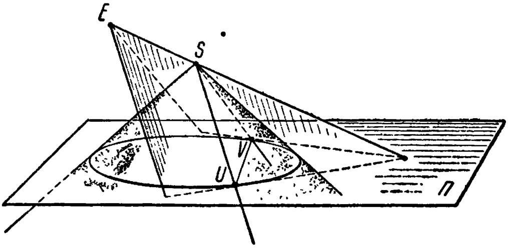


Черт. 70.

переходит в себя, а следовательно, и эта гипербола переходит в себя, поэтому числа t и q положительны и число $t \cdot q$ равняется 1. Подправленное преобразование $((\wedge))$ есть, следовательно, преобразование $(\llcorner)$, соответствующее плоскости P и Q с некоторым коэффициентом t. Это преобразование эквиаффинное. Отсюда следует, что подправлять и не надо было, так как иначе исходное преобразование $((\wedge))$ выходило бы, против предположения, неэквиаффинным. Если вектор e_3' будет равен — e_3, т. е. направлен обратно вектору e_3, то рассматриваемое преобразование $((\wedge))$ есть произведение преобразования $(\llcorner)$ на отражение в плоскости USV.

Оставшийся случай, когда образующие SU и SV рассматриваемым преобразованием $((\wedge))$ преобразуются друг в друга, невозможен, так как тогда точка с координатами $M(x, y, 0)$ относительно системы e_1, e_2, e_3 преобразовывалась бы в точку с координатами $M'(ty, kx, 0)$ относительно этой же координатной системы. Можно так подобрать координаты x, y точки M, чтобы векторы $\overrightarrow{SM}$ и $\overrightarrow{SM'}$ были коллинеарны; для этого достаточно, чтобы было $x:ty=y:kx$, т. е. чтобы $\frac{x^2}{y^2}=\frac{t}{k}$ или $\frac{x}{y}=\sqrt{\frac{t}{k}}$. Полупрямая, проходящая через так выбранную точку M, внутренняя и переходит при рассматриваемом преобразовании в себя. А мы уже рассмотрели случай неподвижной внутренней прямой.

Итак, если преобразование $((\Lambda))$ имеет неподвижной прямой прямую, перпендикулярную оси конуса, и не имеет



Черт. 71.

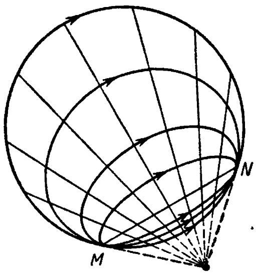
неподвижных прямых, внутренних конусу, то оно есть либо преобразование (L), либо его произведение на отражение в плоскости USV.

Всех неподвижных прямых в обоих этих случаях три: одна, проходящая вне конуса, и две образующие конуса.

Пусть теперь неподвижная прямая, проходящая вне конуса, не перпендикулярна оси конуса (черт. 71). Произведем тогда преобразование $(\overline{\text{L}})$ такое, чтобы эта прямая сделалась перпендикулярной оси конуса. Это преобразование $(\overline{\text{L}})$ будет, очевидно, иметь «конек» «крыши», перпендикулярный плоскости, проходящей через ось конуса и рассматриваемую неподвижную прямую изучаемого преобразования $((\Lambda))$. В таком случае, как выше, получаем, что это преобразование равно

$$((\Lambda))=(\overline{\text{L}})(\text{L})(\overline{\text{L}})^{-1} \text{ или } (\overline{\text{L}})(\text{L})(\pi)(\overline{\text{L}})^{-1}.$$

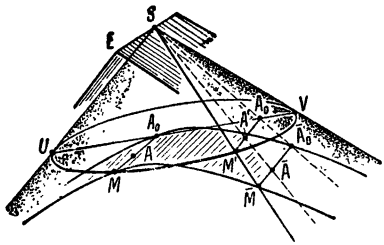
В обоих случаях преобразование это имеет три и только три неподвижные прямые — одну внешнюю и две образующие конуса (фиг. 71). Преобразование $\bigwedge$, индуцируемое этим преобразованием $((\bigwedge))$ в круге α, будет иметь вид, изображенный на черт. 72.



Черт. 72.

Это так называемый перенос плоскости Лобачевского по эквидистантам вдоль прямой MN или перенос, сопровождаемый еще отражением Лобачевского в прямой MN (черт. 72).

Изучим более подробно преобразование $\llcorner$. Мы это могли сделать уже в § 6, где мы впервые ввели преобразование $\llcorner$. Но там мы ограничились лишь в точности тем, что нам было необходимо для доказательства непротиворечивости аксиоматики Лобачевского, а именно тем, что при преобразовании $\llcorner$ относительно данного диаметра UV (т. е. когда «конек» «крыши» перпендикулярен этому диаметру) точки, лежащие на этом диаметре, передвигаются по нему. И, кроме того, еще то, что, подбирая величину t должным образом, можно любую внутреннюю точку диаметра UV передвинуть преобразованием $\llcorner$ в любую другую его внутреннюю точку.



Черт. 73.

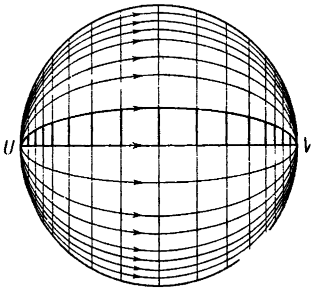
Вопрос же о том, как при преобразовании $\llcorner$ передвигаются точки круга α, не лежащие на диаметре UV, мы там не рассматривали. Рассмотрим это сейчас.

Пусть MA_0 — некоторая полухорда круга α, перпендикулярная диаметру UV. И пусть A — некоторая ее внутренняя точка, а A_0 — точка этой хорды на диаметре UV (черт. 73). После преобразования $(\llcorner)$ отрезок MA_0, параллельный «коньку» ES «крыши», перейдет в равный и параллельный ему отрезок $\overline{M}\,\overline{A}_0$, так как при сжатии к плоскости P и растяжении от плоскости Q (или обратно) всякий отрезок, параллельный этим плоскостям, остается им параллельным и не изменяет своей длины. При этом точка A отрезка MA_0 перейдет в точку $\overline{A}$ отрезка $\overline{M}\,\overline{A}_0$, делящую его в таком же отношении, в каком точка A делила отрезок MA_0. Отрезок $M'A'_0$, в который проектируется отрезок $\overline{M}\,\overline{A}_0$ полупрямыми, исходящими из точки S, на плоскость круга α, будет поэтому тоже параллелен отрезку MA_0 и проекция A' точки $\overline{A}$ будет его тоже делить в том же отношении, в каком точка A делит отрезок MA_0.

Из этого замечания мы видим следующее:

1°. При преобразовании $\llcorner$ хорды, перпендикулярные диаметру UV, переходят опять в хорды, ему перпендикулярные.

2°. Если, не меняя крыши, т. е. и диаметра UV, изменять величину параметра t, то в преобразовании $\llcorner$ всякая внутренняя точка круга α будет описывать половину эллипса, имеющего своею большою осью диаметр UV.



Черт. 74.

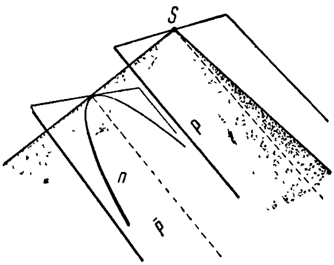
Хорды, перпендикулярные в смысле Евклида диаметру UV, перпендикулярны к нему и в смысле Лобачевского (черт. 74). Это следует из той меры Лобачевского угла, которая нами была введена в § 9. Длины Лобачевского отрезков этих хорд от диаметра UV до какого-либо из рассматриваемых полуэллипсов одинаковы, так как эти отрезки получаются друг из друга движениями Лобачевского $\llcorner$. Каждый из таких полуэллипсов есть, следовательно, геометрическое место концов перпендикуляров Лобачевского одинаковой длины Лобачевского, восставленных по одну сторону от прямой

Лобачевского UV. Поэтому эти эллипсы называются *эквидистантами* (*равноотстоящими*) прямой Лобачевского UV.

Мы видим, что тогда как в плоскости Евклида эквидистанта к прямой есть тоже прямая, а именно параллельная прямая, в плоскости Лобачевского эквидистанта к прямой не есть прямая.

3°. Рассмотрим, наконец, последний случай, когда изучаемое преобразование $((\Lambda))$ не имеет ни внутренних, ни внешних неподвижных прямых.

В таком случае его неподвижная прямая (а хотя бы одна такая прямая в силу результата предыдущего параграфа должна непременно иметься) есть некоторая образующая конуса. Если образующая конуса переходит при рассматриваемом преобразовании $((\Lambda))$ в себя, то, как мы видели, и плоскость P, касающаяся конуса по этой образующей, также переходит в себя.



Черт. 75.

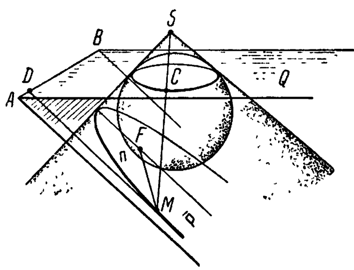
Рассмотрим некоторую секущую плоскость $\overline{P}$ конуса, параллельную плоскости P (черт. 75). При рассматриваемом преобразовании $((\Lambda))$ она переходит опять в некоторую параллельную к ней секущую плоскость $\overline{\overline{P}}$. Подправим, если это необходимо, наше преобразование $((\Lambda))$ домножением на некоторую гомотетию в точке S такую, чтобы плоскость $\overline{\overline{P}}$ совпадала с плоскостью $\overline{P}$, т. е. чтобы подправленным преобразованием $((\Lambda))$ секущая плоскости $\overline{P}$ преобразовывалась в себя.

Секущая плоскость $\overline{P}$, как параллельная некоторой касательной плоскости к конусу, пересекает конус по некоторой бесконечной кривой П, называемой *параболой*. При рассматриваемом подправленном преобразовании $((\Lambda))$, таким образом, эта парабола П преобразуется в себя.

Далее все сводится к изучению тех аффинных преобразований плоскости, при которых некоторая парабола плоскости переходит в себя.

Рассмотрим те аффинные преобразования плоскости $\overline{P}$, при которых парабола П переходит в себя.

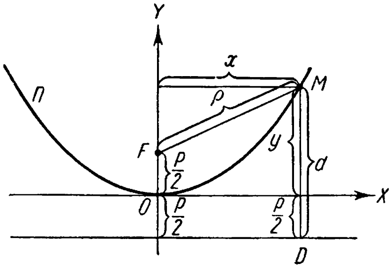
В случае эллипса или гиперболы группа аффинных преобразований плоскости, которые переводят данный эллипс или данную гиперболу в себя, как мы видели, однопараметрическая и все эти преобразования — эквиаффинные преобразования плоскости. В случае же параболы группа таких преобразований двухпараметрическая и они не все эквиаффинные. А именно, во-первых, есть однопараметрическая группа эквиаффинных преобразований параболы в себя, называемых *«параболическими поворотами»*, и, во-вторых, другая однопараметрическая группа неэквиаффинных ее преобразований в себя, которые можно называть *«растяжениями»* параболы. Любое же аффинное преобразование параболы в себя есть произведение параболического поворота на растяжение параболы.



Черт. 76.

Для того чтобы все это показать, прежде всего надо вывести уравнение параболы. Для этого воспользуемся известным построением Данделена. Напомним, что линия П называется параболой, если секущая плоскость $\overline{P}$ образует с осью конуса K такой же угол, как образующая конуса, т. е. параллельна некоторой касательной плоскости P к конусу. Впишем шар, касающийся конуса по некоторой окружности R и касающийся секущей плоскости $\overline{P}$ в некоторой ее точке F (черт. 76). Точка F называется *фокусом* параболы П, а прямая AB пересечения секущей плоскости $\overline{P}$ плоскостью Q, в которой лежит окружность R, называется *директрисой* параболы П.

Возьмем произвольную точку M параболы Π и докажем, что ее расстояние ρ от фокуса F равно длине d перпендикуляра, опущенного из нее на директрису, т. е. что $\rho = d$ (черт. 77). Действительно, $MF = MC$ (см. черт. 76) как две касательные к одному и тому же шару, проведенные из одной и той же внешней к нему точки M. Но $MC = MD$, так как это две наклонные к плоскости Q, проведенные



Черт. 77.

к ней из одной точки M, делающие одинаковые углы с перпендикуляром к плоскости Q, а именно углы, равные углу оси конуса с его образующей.

Возьмем теперь за ось Y ось симметрии параболы Π, а за ось X касательную к параболе Π в точке O пересечения оси Y с параболой и обозначим через p расстояние от фокуса до директрисы (черт. 77). В таком случае мы будем иметь

$$d^2 = \left(y + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 = \rho^2$$

или

$$y^2 + py + \frac{p^2}{4} = x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4},$$

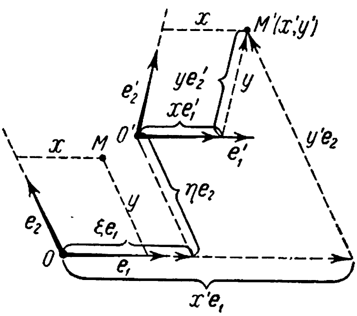
т. е.

$$y = \frac{x^2}{2p},$$

или, обозначая $\frac{1}{2p}$ через q,

$$y = qx^2.$$

Пусть задано некоторое аффинное преобразование плоскости OXY в себя, и пусть координатная система Oe_1e_2 с началом в точке O, векторы которой идут по осям OX и OY, при этом преобразовании переходит в систему $O'e_1'e_2'$ с началом O', имеющим относительно системы Oe_1e_2 координаты (ξ, η), и векторы e_1', e_2' которого имеют координаты (a_1, a_2) и (b_1, b_2). В таком случае любая точка с координатами (x, y) по отношению к системе Oe_1e_2 переходит в точку, имеющую по отношению к этой системе координаты (x', y'), где



Черт. 78.

$$x' = a_1x + b_1y + \xi,$$
$$y' = a_2x + b_2y + \eta,$$

что, приняв во внимание основную теорему об аффинных преобразованиях (п. 2 § 14), легко видеть из черт. 78. Действительно, суммы векторов

$$x'e_1 + y'e_2 \quad \text{и} \quad \xi e_1 + \eta e_2 + xe_1' + ye_2'$$

равны. Но

$$e_1' = a_1e_1 + a_2e_2 \quad \text{и} \quad e_2' = b_1e_1 + b_2e_2,$$

поэтому

$$x'e_1 + y'e_2 = a_1xe_1 + a_2xe_2 + b_1ye_1 + b_2ye_2 + \xi e_1 + \eta e_2$$

или

$$x'e_1 + y'e_2 = (a_1x + b_1y + \xi)\,e_1 + (a_2x + b_2y + \eta)\,e_2.$$

Если рассматриваемое аффинное преобразование преобразует параболу П в себя, то из того, что

$$y = qx^2,$$

следует

$$a_2x + b_2y + \eta = q\,(a_1x + b_1y + \xi)^2,$$

т. е. что для любых x, y, для которых $y=qx^2$, будет

$$a_2x+b_2y+\eta=$$
$$=qa_1^2x^2+qb_1^2y^2+q\xi^2+2qa_1b_1xy+2qa_1\xi x+2qb_1\xi y.$$

Подставляя сюда $y=qx^2$, мы получаем:

$$a_2x+b_2qx^2+\eta=$$
$$=qa_1^2x^2+qb_1^2q^2x^4+q\xi^2+2qa_1b_1qx^3+2qa_1\xi x+2qb_1\xi qx^2,$$

или

$$q^3b_1^2x^4+2q^2a_1b_1x^3+q(a_1^2+2b_1q\xi-b_2)x^2+$$
$$+(2qa_1\xi-a_2)x+(q\xi^2-\eta)=0$$

при любых значениях x. Но это может быть только тогда, когда все коэффициенты при x^4, x^3, x^2, x, 1 равны нулю. Отсюда получаем: $b_1=0$; $a_1{}^2=b_2$; $a_2=2a_1\xi q$; $\eta=q\xi^2$, т.е.

$$x'=a_1x+\xi,$$
$$y'=2a_1\xi qx+a_1^2y+q\xi^2.$$

Очевидно, что это преобразование есть произведение преобразований

$$\left.\begin{aligned} x'&=x+\xi,\\ y'&=2\xi qx+y+q\xi^2 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

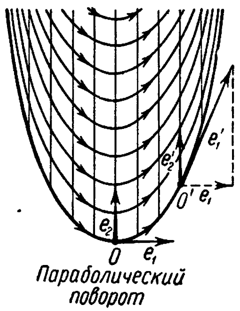
и

$$\left.\begin{aligned} x'&=a_1x,\\ y'&=a_1{}^2y. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

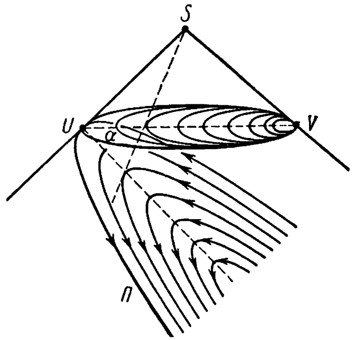
Первое из этих преобразований эквиаффинное, так как оно преобразует векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ в векторы $\boldsymbol{e}_1+2\xi q\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_2$ и, следовательно, превращает квадрат, построенный на $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, в равновеликий параллелограмм (черт. 79).

Так как при этом преобразовании вектор $\boldsymbol{e}_2$, параллельный оси симметрии параболы, не изменяется, прямые, параллельные оси симметрии, т. е. оси Y, остаются параллельными ей и не растягиваются. Все их абсциссы, как это видно из (1), изменяются на одну и ту же величину ξ.

Второе — аффинное, но не эквиаффинное. Оно превращает векторы e_1, e_2 в векторы a_1e_1 и $a_1^2e_2$, т. е. растягивает параболу вдоль оси X в a_1 раз и вдоль оси Y в a_1^2 раз и увеличивает площади в a_1^3 раз.

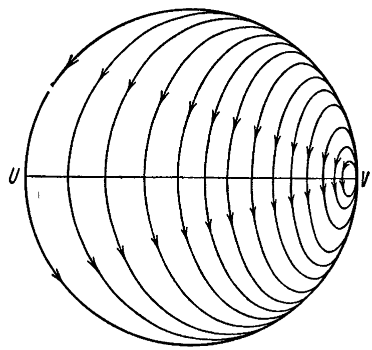


Черт. 79.



Черт. 80.

Вернемся теперь к случаю 3° преобразования Лоренца, когда неподвижной прямой является образующая SV и секущая плоскость $\overline{P}$, параллельная плоскости P, касательной к конусу K по образующей SV, преобразуется в себя. Мы получили, что при таком преобразовании парабола П преобразуется в себя.



Черт. 81.

Рассматривая все это в проекции из вершины S конуса на плоскость круга α, т. е. преобразования $\bigwedge$, индуцированные такими преобразованиями Лоренца $((\bigwedge))$ в круге α, мы видим, что «параболические повороты» (1) дают так называемые повороты плоскости Лобачевского вокруг ее бесконечно удаленной точки V (черт. 80). При этом точки ее двигаются по начерченным эллипсам, касающимся окружности (α) в точке V, называемым *орициклами* (черт. 81). А «растяжения» (2) дают уже нам известные переносы плоскости Лобачевского вдоль прямой UV по эквидистантам к ней, при которых орициклы переходят друг в друга.

Произвольное преобразование случая 3° есть произведение некоторого «поворота» по орициклам вокруг «бесконечно удаленной» точки V, не равного нулю, на некоторый такой «перенос». Если «поворот» равен нулю, это уже не преобразование 3°, а преобразование 2°. В случае преобразования 3° неподвижная прямая только одна — SV.

Более подробное исследование показывает, что в рассматриваемой нами модели Кэли — Клейна плоскости Лобачевского в круге орициклы суть эллипсы. И притом, чем орицикл более внутренний, тем эллипс меньший и более сжатый вдоль диаметра UV. Все эти эллипсы касаются окружности круга α изнутри в точке V.

ГЛАВА V

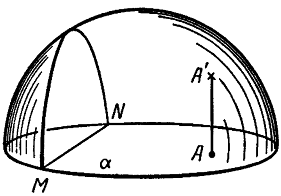
МОДЕЛЬ ПУАНКАРЕ (В КРУГЕ) ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Модель Кэли — Клейна в круге плоскости Лобачевского, которую мы рассматривали до сих пор, выгодна тем, что прямые плоскости Лобачевского изображаются на ней наиболее просто, а именно: просто хордами круга. Кроме того, модель Кэли — Клейна тесно связана с теорией преобразований Лоренца и может быть изложена, как это выше и было сделано, при помощи аффинных соображений. У самого Клейна она излагалась при помощи соображений проективной геометрии. Мера Лобачевского углов в этой модели, как мы видели, однако, не очень простая. Модель Пуанкаре в круге мы сейчас получим очень просто из модели Кэли — Клейна. Она может быть, впрочем, построена и непосредственно при помощи теории преобразований по обратным радиусам-векторам. Прямые Лобачевского в модели Пуанкаре не такие простые, как в модели Кэли — Клейна, — это дуги окружностей, ортогональные к окружности круга α. Зато в модели Пуанкаре мерой Лобачевского угла, образуемого двумя такими прямыми, является просто евклидова величина этого угла. Отображение плоскости Лобачевского на внутренность евклидова круга α в модели Пуанкаре, таким образом, как говорят, конформно, т. е. происходит с сохранением величины углов.

Отображения $\bigwedge$ внутренности круга α на себя переходят в этой модели в конформные (т. е. сохраняющие величины углов) отображения внутренности этого круга на себя. Можно показать, что никаких других конформных отображений круга α на себя, кроме тех, в которые при переходе от модели Кэли — Клейна к модели Пуанкаре переходят отображения $\wedge$, нет. Совокупность всех конформных отображений круга α на себя совпадает, следовательно, с совокупностью всех движений плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре. Это обстоятельство сближает два, с первого взгляда столь разных, вопроса — геометрию Лобачевского и теорию функций комплексной переменной, которая есть в большей мере теория конформных отображений. Эта связь ведет к чрезвычайно важным следствиям из геометрии Лобачевского для теории функций комплексной переменной.

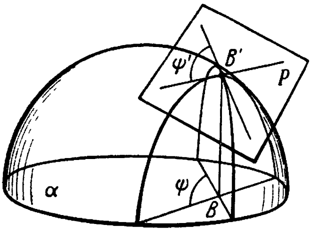
§ 16. Промежуточная модель плоскости Лобачевского на полусфере

Накроем круг α полусферой и будем точки A круга α проектировать в точки A' на эту полусферу прямыми, перпендикулярными к плоскости этого круга (черт. 82). В таком случае всякая хорда круга α спроектируется на полусферу в виде некоторой вертикальной полуокружности (т. е. лежащей в вертикальной плоскости, если предположить, что плоскость круга α горизонтальна) этой сферы. Прямые Лобачевского модели Кэли — Клейна превратятся, таким образом, на полусфере в такие вертикальные полуокружности.

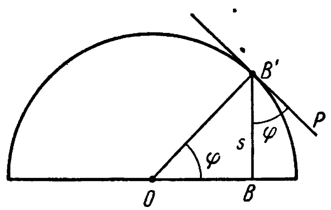


Черт. 82.

Рассмотрим теперь какой-нибудь угол ψ с вершиной в некоторой точке B, составленный двумя хордами круга α. Касательные к вертикальным полуокружностям полусферы, соответствующим этим хордам в точке пересечения B' этих полуокружностей, будут лежать в плоскости P, касающейся полусферы в точке B' (черт. 83). Угол ψ является ортогональной проекцией на плоскость круга α угла ψ' между этими касательными, лежащими в плоскости P. Угол φ, который образует плоскость P с перпендикуляром $B'B$ к плоскости α, равен углу $Б'OB$ (черт. 84).

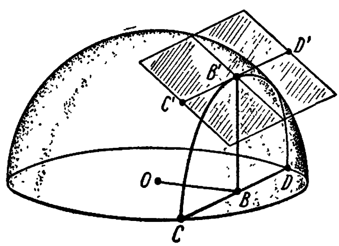


Черт. 83.



Черт. 84.

Но чтобы получить угол, евклидова величина которого равна величине Лобачевского угла ψ, надо растянуть угол ψ от прямой CD, проходящей через его вершину B, перпендикулярной к тому радиусу круга α, на котором она лежит, причем коэффициент этого растяжения равен величине синуса s угла $B'OB$. Угол ψ' как раз и получается таким растяжением из угла ψ. Дело в том, что при проектировании плоскости α на плоскость P перпендикулярами к плоскости α получается растяжение с коэффициентом $\frac{1}{\sin\varphi}=\frac{1}{s}$ (черт. 85) от прямой $C'D'$, являющейся проекцией прямой CD. Евклидова величина угла ψ' равна, таким образом, величине Лобачевского угла ψ.



Черт. 85.

Мы видим, что в этой проекции на полусферу модели Кэли — Клейна плоскости Лобачевского величины Лобачевского углов между вертикальными полуокружностями этой полусферы, изображающими на ней прямые Лобачевского, равны просто евклидовым величинам этих углов. Другими словами, на полусфере получается уже конформная модель плоскости Лобачевского.

§ 17. Стереографическая проекция

Чтобы получить из рассмотренной выше промежуточной модели на полусфере модель Пуанкаре плоскости Лобачевского в круге, достаточно эту модель на полусфере стереографически спроектировать на круг. Надо поэтому объяснить, что такое стереографическая проекция сферы на плоскость, и вывести некоторые ее свойства.

Стереографической проекцией сферы на плоскость называется проекция точек сферы прямыми из некоторой точки S сферы, называемой полюсом, на любую плоскость Q, параллельную экватору этого полюса, т. е. перпендикулярную к диаметру сферы, проходящему через точку S. При таком проектировании, очевидно, всякая точка сферы, кроме полюса, спроектируется в одну и только одну определенную точку плоскости Q; при этом, чем ближе проектируемая точка B к полюсу, тем ее проекция B' дальше лежит на плоскости Q, а сам полюс «уходит на бесконечность».

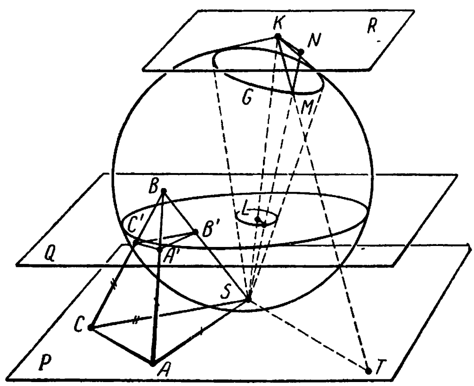
Докажем две основные теоремы о стереографической проекции, которые нам понадобятся дальше.

Теорема I. *При стереографической проекции сохраняются величины углов* (*т. е. стереографическая проекция конформна*).

Доказательство. Для доказательства рассмотрим некоторую точку B сферы и две касательные к сфере AB и CB, образующие некоторый данный угол ABC (черт. 86). Проекцией его из точки S на плоскость Q будет угол $A'B'C'$. Построим вспомогательную плоскость P, касающуюся сферы в ее полюсе S, и пусть A и C — точки пересечения этой плоскости с рассматриваемыми касательными. $AB = AS$ как две касательные к сфере, проведенные из одной и той же точки A. По той же причине $CB = CS$. Отсюда треугольники ABC и ASC равны друг другу (по трем сторонам, из которых одна общая). Поэтому $\angle ABC = \angle ASC$. Но углы $A'B'C'$ и ASC равны друг другу как углы с взаимно параллельными сторонами; следовательно, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, и теорема доказана.

Теорема II. *Всякая окружность сферы переходит в окружность плоскости* (*или, в частных случаях,* *в прямую, т. е. в окружность бесконечного радиуса) и обратно.*

Доказательство. Для доказательства теоремы рассмотрим на сфере некоторую окружность G, и пусть G' — ее стереографическая проекция на плоскость Q (черт. 86, буква G' на чертеже не указана). Построим конус, касающийся сферы по окружности G, и пусть K — его вершина. Обозначим через L точку пересечения прямой SK с плоскостью Q. Пусть теперь M — произвольная точка



Черт. 86.

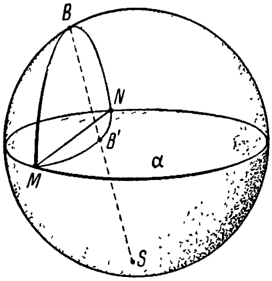
окружности G, M' — ее стереографическая проекция на плоскость Q (на черт. 86 буква M' отсутствует) и R — плоскость, проходящая через вершину K построенного конуса параллельно плоскости Q. Проведем прямые SM и KM и обозначим через N и T точки их пересечений с плоскостями R и P. Треугольники KMN и TMS подобны, так как имеют попарно параллельные стороны. Но $TM = TS$ как две касательные к сфере, проведенные из одной и той же точки T. Поэтому, в силу указанного подобия треугольников, $KM = KN$. Но где бы ни брать точку M на окружности G, отрезки KM как образующие одного и того же конуса будут одной и той же длины, и поэтому и равные им отрезки KN также будут одной и той же длины. Но из подобия треугольников $LM'S$ и KNS мы имеем: $LM' : KN = LS : KS$, т. е. $LM' = \frac{KN \cdot LS}{KS}$. Тут длины написанных в правой части отрезков KN, LS и KS не зависят от выбора точки M на окружности G, и поэтому и длина LM' не зависит от этого выбора, т. е. постоянна. Линия G' есть, следовательно, окружность с центром в точке L, и теорема доказана.

Стереографическая проекция применяется в картографии, в теории функций комплексной переменной, в кристаллографии и во многих других разделах науки.

§ 18. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского в круге

Для того чтобы получить модель Пуанкаре, достаточно спроектировать стереографически рассмотренную промежуточную модель плоскости Лобачевского на полусфере снова на круг α.

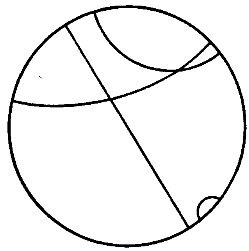
Всякая прямая Лобачевского, которая в модели на полусфере есть вертикальная полуокружность MBN этой полусферы, в силу теоремы II о стереографической проекции спроектируется на круг α теперь в виде некоторой дуги окружности $MB'N$ (черт. 87). В силу же теоремы I о стереографической проекции эта дуга окружности будет встречать окружность круга α под прямым углом; так как полуокружность MBN встречала окружность круга α под прямым углом, углы сохраняются, и при рассматриваемой стереографической проекции окружность круга α переходит в себя (черт. 88).



Черт. 87.

Всякая прямая Лобачевского является в модели Пуанкаре, следовательно, дугой окружности, ортогональной к окружности круга α (черт. 88). Легко видеть, что, обратно, всякая такая дуга есть проекция некоторой полуокружности MBN, т. е. некоторая прямая Лобачевского.

Так как промежуточная модель на полусфере была конформная, а стереографическая проекция, при помощи которой из нее получена модель Пуанкаре, сохраняет величины углов, то и модель Пуанкаре тоже конформная.



Черт. 88.

При всяком движении плоскости Лобачевского сохраняются меры Лобачевского всех углов, но меры Лобачевского углов в модели Пуанкаре — это просто евклидовы величины этих углов; поэтому всякое движение Лобачевского, т. е. преобразование $\bigwedge$ круга α в себя, дает в модели Пуанкаре некоторое точечное взаимно однозначное отображение круга α на себя, при котором сохраняются евклидовы величины всех углов. Всякое движение Лобачевского в модели Пуанкаре представляет собою, таким образом, некоторое конформное отображение круга α на себя. Мы будем эти конформные отображения круга α на себя обозначать через П. Можно показать, что верно и обратное, а именно, что всякое конформное отображение круга α на себя есть некоторое движение Лобачевского в модели Пуанкаре, т. е. такое отображение П.

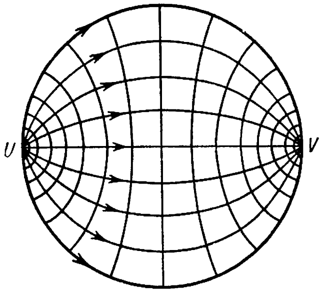
§ 19. Перенос плоскости Лобачевского вдоль диаметра круга α в модели Пуанкаре

Простейшие преобразования $\bigwedge$ круга α в себя, которые мы обозначили в § 6, п. 4, через ω и π, как легко видеть, и при переходе к модели Пуанкаре остаются, как и раньше, просто поворотом круга α на некоторый угол ω вокруг его центра и отражением его в некотором его диаметре. Мы сохраним для них поэтому прежние обозначения ω и π.

Рассмотрим теперь третье простейшее преобразование $\bigwedge$ круга α в себя, которое мы обозначили через $\llcorner$, т. е.

передвижение Лобачевского точек круга α вдоль некоторого его диаметра UV по эквидистантам к этому диаметру.

Как мы видели в § 15, эквидистанты эти суть полуэллипсы, общей большой осью которых является рассматриваемый диаметр круга α. После их спроектирования прямыми, перпендикулярными к плоскости круга α, на накрывающую его полусферу эти эквидистанты, как легко видеть, перейдут на этой полусфере в большие полуокружности, проходящие через концы U и V рассматриваемого диаметра. Переходящие же при отображении друг в друга хорды круга α, перпендикулярные к диаметру, перейдут на полусфере в вертикальные полуокружности ее, плоскости которых перпендикулярны к диаметру UV.



Черт. 89.

После дальнейшей стереографической проекции полусферы на круг α, дающей уже модель Пуанкаре, большие полуокружности полусферы, проходящие через точки U и V, спроектируются на круг α в виде некоторых дуг окружностей, проходящих через точки U и V, а эти вертикальные полуокружности — в дуги окружностей, ортогональных к окружности круга α и симметричных по отношению к диаметру UV (черт. 89).

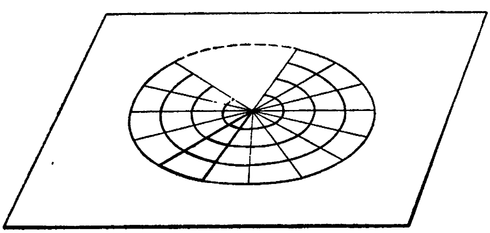
Ввиду того, что обе системы полуокружностей на полусфере были взаимно ортогональны, а при стереографической проекции величины углов сохраняются, то и начерченные две системы дуг окружностей в круге α также взаимно ортогональны, т. е. каждая дуга одной из этих систем пересекает любую дугу другой под прямым углом.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

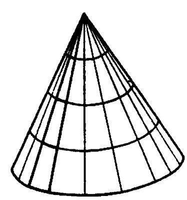
ПСЕВДОСФЕРА БЕЛЬТРАМИ

Возьмем обыкновенную плоскость (черт. 90) и вычертим на ней круговой сектор. Если вырезать его из плоскости ножницами и затем, согнув, склеить, получается боковая поверхность обыкновенного круглого конуса (черт. 91).

Возьмем теперь сферу, т. е. поверхность шара, и начертим на ней круговой сектор, вырежем его из этой сферы



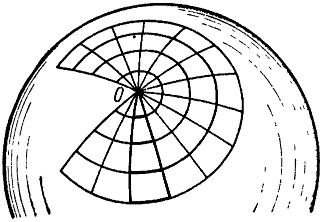
Черт. 90.



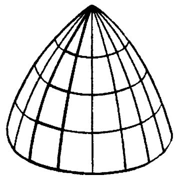
Черт. 91.

и, согнув, склеим (черт. 92). Что получится? Легко видеть, что получится «выпуклый конус», нечто вроде поверхности головки снаряда. Почему? Если внимательно проанализировать этот вопрос, то дальше нетрудно уже будет понять, что такое псевдосфера.

При изгибании и склеивании сферического сектора получается поверхность, аналогичная поверхности головки снаряда, потому что, в то время как у плоского сектора длины дуг концентрических окружностей с центрами в вершине сектора увеличиваются пропорционально их радиусам, у сферического сектора они увеличиваются медленнее, чем «радиус» (черт. 93). Дело в том, что отношение длины окружности к ее диаметру, число «пи», на обык-

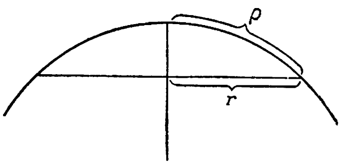


Черт. 92.



Черт. 93.

новенной плоскости постоянно, т. е. оно одно и то же для окружностей любых радиусов, на данной же сфере это отношение, которое мы будем обозначать π^*, уже не постоянно. Оно уменьшается с увеличением «радиуса» окружности на сфере, если, конечно, длиной ее радиуса считать длину дуги большого круга сферы от центра O этой окружности на сфере до какой-нибудь ее точки. Действительно, мы имеем $2\pi^*\rho = 2\pi r$, где 2ρ — длина дуги, а $2r$ — длина стягивающей ее хорды (черт. 94). Но длина дуги растет быстрее, чем длина стягивающей ее хорды. И, следовательно, ввиду того что π постоянно, π^* убывает с возрастанием ρ. Очевидно, что «меридиан» (образующая поверхности вращения, получаемой при сгибании и склеивании сферического сектора) должен быть не прямой, а соответственно изогнут для того, чтобы было учтено это уменьшение числа π^* для сферы. В случае такого «выпуклого конуса», как поверхность головки снаряда, как раз и получается уменьшение этого π^* с увеличением «радиуса». Можно

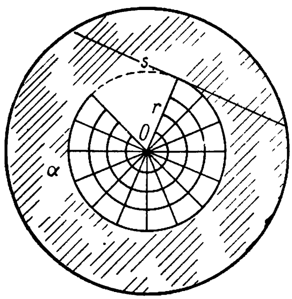


Черт. 94.

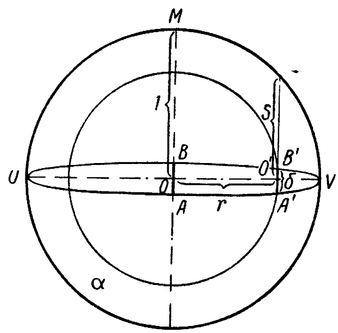
найти уравнение этого меридиана, но мы этим заниматься не будем.

Перейдем теперь к плоскости Лобачевского и рассмотрим ее модель Кэли — Клейна. Возьмем на этой модели круговой сектор Лобачевского с центром в центре O круга α. В таком случае он и в евклидовом смысле будет иметь вид обычного евклидова кругового сектора (черт. 95).

Посмотрим, как ведет себя число «пи» на плоскости Лобачевского, которое мы будем обозначать в этом слу-



Черт. 95.



Черт. 96.

чае через π'. Для этого достаточно рассмотреть только окружности с центром в центре O круга α, так как каждую окружность Лобачевского, т. е. совокупность всех точек плоскости Лобачевского, находящихся на некотором данном постоянном расстоянии ρ от некоторой точки этой плоскости, можно при помощи движения Лобачевского передвинуть так, чтобы ее центр оказался в точке O. При этом ни длина Лобачевского ρ ее радиуса, ни ее собственная длина Лобачевского не изменятся, т. е. не изменится ее «пи». В силу же симметрии окружность Лобачевского с центром в центре O круга α будет выглядеть на этом круге как обыкновенная окружность Евклида.

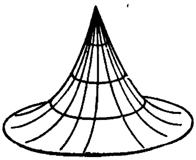
Подсчитаем число π' для этой окружности. Пусть ее евклидов радиус имеет длину r. Заметим, что 1° длина Лобачевского достаточно малого отрезка AB (черт. 96), расположенного у центра круга α, сколь угодно мало отличается от его евклидовой (что легко получить из формулы $d(AB) = \ln\left(\frac{AM}{AN} \cdot \frac{BN}{BM}\right)$) и 2° что длины Лобачевского отрезков AB и $A'B'$ одинаковы. Учитывая это, мы получим, что если евклидова длина элемента $A'B'$ окружности с центром в O и евклидова радиуса r равна δ, то длина Лобачевского δ' этого элемента равна $\frac{\delta}{s}$. Поэтому длина Лобачевского этой окружности равна $\frac{2\pi r}{s}$. Но $s = \sqrt{1-r^2}$, поэтому длина Лобачевского этой окружности равна $\frac{2\pi r}{\sqrt{1-r^2}}$. Вычисляя же длину Лобачевского ее радиуса по формуле $d(OO') = \ln \frac{OV}{OU} \cdot \frac{O'U}{O'V}$, мы видим, что он равен

$$\ln\left(\frac{1}{1} \cdot \frac{1+r}{1-r}\right).$$

Поэтому

$$\pi' = \frac{\pi r}{\sqrt{1-r^2} \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)}.$$

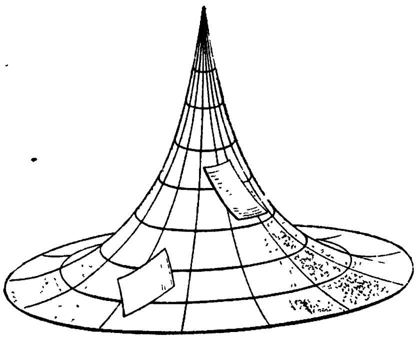
Можно, например, при помощи дифференциального исчисления показать, что при возрастании r это π' растет, и поэтому, если «склеить» из сектора плоскости Лобачевского «конус» такой, чтобы длины Лобачевского его параллелей и меридианов и их частей были обыкновенные их евклидовы длины на этом конусе, то, в противоположность тому, как для конуса, склеенного из сферического сектора, этот конус будет «вогнутый». Это и есть *псевдосфера Бельтрами* (черт. 97).



Черт. 97.

Нетрудно показать, что длина Лобачевского любой линии плоскости Лобачевского равна евклидовой длине ее образа на псевдосфере. А так как прямолинейный отрезок, как мы видели в § 10, есть кратчайшая в смысле

Лобачевского линия, соединяющая две точки A и B плоскости Лобачевского, то образом прямолинейного отрезка AB плоскости Лобачевского будет кратчайшая в смысле ее евклидовой длины линия на псевдосфере, соединяющая образы A' и B' этих точек. Нетрудно также отсюда показать, что евклидовы величины углов на псевдосфере равны мерам Лобачевского соответственных углов и т. д.



Черт. 98.

Любой кусок псевдосферы, если он достаточно мал, например, можно как угодно передвигать по ней, лишь изгибая его, но не сжимая и не растягивая его (черт. 98).

К сожалению, псевдосфера дает такую «изометрическую» модель только для сектора плоскости Лобачевского и то при данном его угле лишь до некоторой величины его «радиуса», так как, как только поверхность «вогнутого» конуса становится перпендикулярной к его оси, дальнейшее увеличение π' становится невозможным.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

СВЯЗЬ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО СО СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИЕЙ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В самом конце XIX в. в физике было обнаружено фундаментальное противоречие. Известный опыт Майкельсона, при котором измерялась скорость света (которая составляет около 300 000 *км/сек*) в направлении движения Земли по ее орбите вокруг Солнца (скорость Земли по орбите около 30 *см/сек*) и в перпендикулярном к этому направлении, с неопровержимостью доказал, что все тела природы при своем движении хотя бы в пустоте как бы сокращаются в направлении движения. Теорию этого сокращения подробно исследовал голландский физик Лоренц. Оказалось, что это сокращение тем больше, чем скорость движущегося тела ближе к скорости света в пустоте, причем при скорости, равной скорости света, сокращение становится бесконечным. Лоренц выписал формулы этого сокращения. Однако скоро физик Эйнштейн встал во всем этом вопросе на совсем иную точку зрения, к которой был близок тогда уже и Пуанкаре.

Если считать, что для распространения света, как для обычного движения материального тела, верен закон сложения скоростей Галилея, то скорость света $c' = c + v$, где v — скорость наблюдателя, движущегося навстречу распространению света, а c — скорость света неподвижного наблюдателя. А между тем из опытов Майкельсона следует, что $c'=c$. Закон $c'=c+v$ основывается на преобразовании

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + v_x \cdot t, \\ t' &= t, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

связывающем координату x некоторой точки по отношению к некоторой системе координат I с ее координатой x' по отношению с системе координат II, оси которой остаются параллельными осям системы I и которая движется в направлении оси x со скоростью v_x по отношению к системе I. Эти-то формулы, очевидно, говорит Эйнштейн, и должны быть изменены.

Можно показать (это сделал А. Д. Александров), что только из того, что скорость света в обеих координатных системах x, y, z, t и x', y', z', t' одинакова, следует уже, что формулы преобразования от координат x, y, z, t к координатам x', y', z', t' линейные и однородные, т. е. имеют вид

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1t, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2t, \\ z' &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3t, \\ t' &= a_4x + b_4y + c_4z + d_4t. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Из других соображений можно показать, что определитель их равен 1.

Если точка в системе I движется в произвольном заданном направлении прямолинейно и равномерно со скоростью света c, то

$$x = v_x \cdot t, \quad y = v_y \cdot t, \quad z = v_z \cdot t \quad \text{и} \quad v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = c^2,$$

откуда

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0. \qquad (3)$$

Но, согласно опыту Майкельсона, эта точка и во второй системе II должна двигаться с той же скоростью c, и следовательно, должно быть также

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0.$$

Формулы (2), таким образом, не являются произвольными линейными однородными преобразованиями с определителем единица, а должны подчиняться еще условию, что если x, y, z, t удовлетворяют уравнению

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0,$$

то и результаты их преобразования x', y', z', t' также удовлетворяют этому же уравнению. Такие преобразования (2) называются *преобразованиями Лоренца.*

Рассмотрим сначала наиболее простой случай, когда точка движется вдоль оси x. В этом случае формулы (2) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_1x+d_1t, \\ t' &= a_2x+d_2t, \end{aligned}\right\} \qquad (2')$$

а уравнение (3) будет

$$x^2-c^2t^2=0. \qquad (3')$$

Введем обозначение $ct=u$; тогда формулы (2′) и (3′) примут вид

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_1x+\frac{d_1}{c}u, \\ u' &= a_2cx+\frac{d_2c}{c}u \end{aligned}\right\} \qquad (2_1)$$

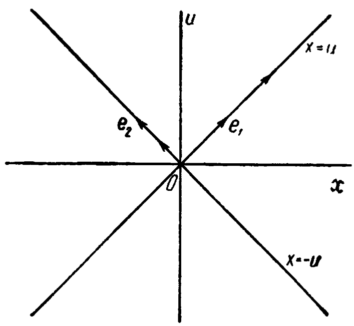
и

$$x^2-u^2=0. \qquad (3_1)$$

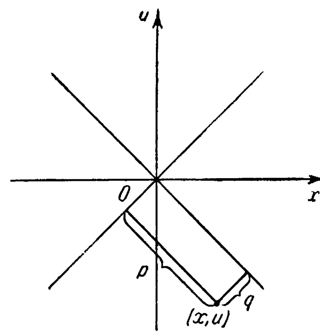
Рассмотрим x и u как декартовы прямоугольные координаты на плоскости, т. е. рассмотрим вопрос геометрически, причем будем считать, что формулы (2_1) суть формулы аффинного преобразования плоскости xu. Определитель их, в силу сказанного выше, равен 1.

Замечание. Абсолютная величина определителя формул аффинного преобразования, как это можно показать, есть отношение объема v_0' основного параллелепипеда $O'A_0'B_0'C_0'$ преобразованной координатной системы к объему v_0 основного параллелепипеда $OA_0B_0C_0$ преобразуемой системы (см. курсы аналитической геометрии Делоне — Райкова или Мусхелишвили). Поэтому равенство определителя аффинного преобразования единице и означает, что преобразование это эквиаффинное.

Преобразование (2_1), таким образом, эквиаффинное. Кроме того, для него, в силу сказанного выше, из $x^2-u^2=0$ следует $x'^2-u'^2=0$, т. е. преобразование это переводит крест прямых $(x-u)(x+u)=0$ в себя. Преобразование (2_1) есть, следовательно, комбинация сжатия и растяжения с одинаковыми коэффициентами



Черт. 99.



Черт. 100.

вдоль этих прямых. Действительно, будем рассматривать репер Oe_1e_2 (черт. 99) с началом в точке O и векторами, идущими по прямым $x-u=0$ и $x+u=0$ в сторону $u>0$. Тогда начало этих векторов при рассматриваемом преобразовании остается в точке O, концы их остаются на рассматриваемых прямых и, как можно показать из одного дополнительного требования, каждый остается на своей полупрямой, а площадь прямоугольника, на них построенного, сохраняется при эквиаффинных преобразованиях. Поэтому, если один из рассматриваемых векторов удлиняется в τ раз, то другой сокращается в τ раз.

Из черт. 100 получаем:

$$x=\frac{p}{\sqrt{2}}-\frac{q}{\sqrt{2}},$$

$$u=\frac{p}{\sqrt{2}}+\frac{q}{\sqrt{2}},$$

и так как после преобразования p и q перейдут в $p' = \frac{p}{\tau}$, $q' = q\tau$, то

$$x'\sqrt{2} = \frac{p}{\tau} - q\tau,$$

$$u'\sqrt{2} = \frac{p}{\tau} + q\tau.$$

Найдем p и q через x и u из первой пары уравнений; подставляя во вторую и упрощая, получаем:

$$x' = \frac{x - \frac{\tau^2 - 1}{\tau^2 + 1} ct}{\frac{2\tau}{\tau^2 + 1}},$$

$$t' = \frac{t - \frac{1}{c}\frac{\tau^2 - 1}{\tau^2 + 1} x}{\frac{2\tau}{\tau^2 + 1}};$$

обозначая здесь

$$\frac{\tau^2 - 1}{\tau^2 + 1} c = v,$$

получаем:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Это — знаменитые *формулы Лоренца* Они суть не что иное, как формулы преобразования (L), написанные в таких координатах, при которых начало находится в вершине S конуса K, ось t идет по оси конуса K, а ось x параллельна диаметру UV.

Если взять здесь, в частности, $x=0$, т. е. рассматривать движение начала системы координат I, то мы получим:

$$x' = \frac{-vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

и

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

или

$$x' = -vt',$$

откуда видно, что v есть скорость движения системы координат II по отношению к системе I.

Пусть, например, заданы две точки оси x с координатами x_1 и x_2 относительно системы I, расстояние между которыми относительно системы I есть $r=|x_1-x_2|$. Посмотрим, каково расстояние между ними по отношению к системе II:

$$x'_1 = \frac{x_1-vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

$$x'_2 = \frac{x_2-vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

откуда

$$r' = |x'_1-x'_2| = \frac{|x_1-x_2|}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Множитель $\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$ есть, очевидно, как раз коэффициент сокращения Лоренца. Так как c очень велико, то при не очень бо́льших v этот коэффициент весьма близок к 1 и сокращения поэтому не заметно. Однако такие элементарные частицы, как электроны или позитроны или «осколки» урана, разлетающиеся при цепной реакции урана, движутся часто со скоростями, сравнимыми со скоростью света, и поэтому при изучении их движений приходится учитывать эти обстоятельства, как говорят, приходится учитывать релятивистский эффект.

Рассмотрим теперь следующий по сложности случай, когда точка движется в плоскости xy. Для этого случая преобразования (2) будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + d_1t, \\ y' &= a_2x + b_2y + d_2t, \\ t' &= a_3x + b_3y + d_3t, \end{aligned}\right\} \qquad (2'')$$

где

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = 1,$$

а уравнение (3) будет

$$x^2 + y^2 - c^2t^2 = 0. \qquad (3'')$$

Это — формулы Лоренца для движения в плоскости xy.

Опять положим $ct = u$; тогда получим:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + \frac{d_1}{c}\,u, \\ y' &= a_2x + b_2y + \frac{d_2}{c}\,u, \\ u' &= a_3cx + b_3cy + \frac{d_3c}{c}\,u, \end{aligned}\right\} \qquad (2_2)$$

причем определитель их опять равен 1, а уравнение (3″) примет вид

$$x^2 + y^2 - u^2 = 0. \qquad (3_2)$$

Будем считать x, y, u декартовыми прямоугольными координатами точки обыкновенного трехмерного пространства и будем рассматривать формулы (2_2) как формулы аффинных преобразований этого пространства. В силу требования, чтобы определитель их равнялся 1, преобразования эти эквиаффинны. Уравнение ($З_2$) выражает прямой круговой конус K с углом $90°$ при вершине.

Мы видим, что получаются как раз те преобразования $((\wedge))$, которые мы рассматривали в § 12, т. е. все эквиаффинные преобразования $((\wedge))$ конуса K в себя. Но всякое такое преобразование, как мы видели, взаимно однозначно соответствует некоторому преобразованию $\wedge$ круга α в себя, т. е. некоторому движению в плоскости Лобачевского.

Таким образом, специальная теория относительности для движений в плоскости с ее геометрической точки зрения совпадает с теорией плоскости Лобачевского.

Аналогичным образом связана специальная теория относительности для случая движений в трехмерном пространстве с теорией движений пространства Лобачевского.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Делоне Борис Николаевич.
Элементарное доказательство
непротиворечивости
планиметрии Лобачевского.

Редактор *А. Ф. Лапко.*

Техн. редактор *С. Н. Ахламов.*

Корректор *Л. О. Сечейко.*

Сдано в набор 25/II 1956 г. Подписано к печати 12/VI 1956 г. Бумага 84 × 108/32. Физ. печ. л. 4,38. Условн. печ. л. 7,17. Уч. изд. л. 6,14. Тираж 6 000 экз. Т-04427. Цена книги 3 руб. 05 коп. Заказ № 948.

Государственное издательство
технико-теоретической литературы
Москва, В — 71,
Б. Калужская ул., 15

Министерство культуры СССР.
Главное управление полиграфической промышленности.
2-я типография «Печатный Двор»
им. А. М. Горького.
Ленинград, Гатчинская, 26.

Цена 3 р. 05 к.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1956