

**Г.Т. ТАРАБРИН**

# **МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

**Г.Т. ТАРАБРИН**

**МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

**ДЛЯ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ**



**Г.Т. ТАРАБРИН**

**МЕТОДЫ  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ  
ФИЗИКИ**

**ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ**

*Рекомендовано Федеральным агентством по образованию  
Российской Федерации  
в качестве учебного пособия  
для студентов высших технических учебных заведения*



**Издательство Ассоциации строительных вузов  
Москва  
2009**

**УДК 517(075)**

**Рецензенты:**

Заведующий кафедрой информатики и прикладной математики Московского государственного строительного университета профессор, доктор технических наук, *В.Н. Сидоров*

Профессор кафедры информатики и прикладной математики Московского государственного строительного университета профессор, доктор технических наук, *В.А. Акимов*

**Тарабрин Г.Т.**

Методы математической физики. Учебное пособие. Издательство АСВ, – М.: 2009 г., - 208 с

**ISBN 978-5-93093-614-8**

*Содержание пособия отвечает требованиям современных программ по математике для технических вузов, предусматривающих изучение методов математической физики.*

*Пособие состоит из четырех частей. В первой части дается краткое изложение теории функций комплексной переменной, включающее в себя дифференциальное и интегральное исчисления, конформные отображения, ряды, вычеты и их приложение. Во второй части излагаются теоретические основы интегральных преобразований Лапласа, Фурье, Ханкеля и приемы решения с их помощью дифференциальных и интегральных уравнений. В третьей части на классических примерах изучаются методы решения задач основных дифференциальных уравнений математической физики. В четвертой части даются основы метода вариаций в задачах с неподвижными границами.*

*Пособие рассчитано на студентов старших курсов технических специальностей, завершивших изучение линейной алгебры, аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчисления.*

Ил. 56. Библиогр. 52 назв.

**ISBN 978-5-93093-614-8**

© Тарабрин Г.Т., 2009

© Издательство АСВ., 2009



## ОГЛАВЛЕНИЕ

От автора .....	5
-----------------	---

### Часть 1. Теория функций комплексной переменной

<b>Глава 1. Комплексные числа и функции</b> .....	7
1.1. Комплексные числа и действия над ними .....	7
1.2. Ряды с комплексными членами .....	13
1.3. Основные элементарные функции комплексной переменной .....	16
1.4. Понятие функции комплексной переменной .....	19
1.5. Производная функции комплексной переменной .....	20
<b>Глава 2. Конформные отображения</b> .....	23
2.1. Понятие об отображениях .....	23
2.2. Геометрический смысл модуля и аргумента производной .....	25
2.3. Два примера отображения дробно-линейной функцией .....	27
<b>Глава 3. Интегральное исчисление</b> .....	30
3.1. Определенный интеграл .....	30
3.2. Теоремы Коши .....	32
3.3. Неопределенный интеграл .....	34
3.4. Интеграл Коши .....	36
<b>Глава 4. Изолированные особые точки и вычеты</b> .....	39
4.1. Ряды аналитических функций .....	39
4.2. Нули и изолированные особые точки аналитической функции ..	46
4.3. Теория вычетов .....	50
4.4. Приложение теории вычетов .....	52

### Часть 2. Интегральные преобразования

<b>Глава 5. Операционное исчисление</b> .....	57
5.1. Определение преобразования Лапласа .....	57
5.2. Изображения некоторых функций .....	59
5.3. Свойства изображений .....	60
5.4. Теорема обращения преобразования Лапласа .....	67
5.5. Примеры применения операционного исчисления .....	69
<b>Глава 6. Преобразования Фурье</b> .....	73
6.1. Тригонометрические ряды Фурье .....	73
6.2. Преобразования Фурье на конечном интервале .....	76
6.3. Функция Грина .....	79
6.4. Интеграл Фурье .....	81
6.5. Преобразования Фурье на бесконечном интервале .....	84
<b>Глава 7. Преобразование Ханкеля</b> .....	91
7.1. Гамма-функция и ее свойства .....	91
7.2. Функции Бесселя .....	92
7.3. Ряд Фурье-Бесселя .....	95
7.4. Конечное преобразование Ханкеля .....	98

### **Часть 3. Задачи математической физики**

<b>Глава 8. Классификация уравнений в частных производных.....</b>	<b>103</b>
8.1. Дифференциальные уравнения математической физики .....	103
8.2. Классификация уравнений второго порядка .....	104
<b>Глава 9. Задачи уравнений параболического типа .....</b>	<b>109</b>
9.1. Уравнение теплопроводности .....	109
9.2. Распространение тепла в стержнях конечной длины .....	110
9.3. Распространение тепла в неограниченно длинных стержнях. ....	115
9.4. Осесимметричное распространение тепла .....	121
<b>Глава 10. Задачи уравнений гиперболического типа .....</b>	<b>123</b>
10.1. Колебания струны конечной длины .....	123
10.2. Уравнение колебаний мембраны .....	128
10.3. Осесимметричные колебания мембраны .....	129
10.4. Уравнения гидродинамики и звуковых волн .....	132
10.5. Радиальные колебания газа в сфере .....	137
10.6. Осесимметричные колебания газа в трубке .....	141
10.7. Волны упругих деформаций в стержне .....	144
10.8. Удар упругого стержня о преграду .....	150
10.9. Продольные колебания стержня .....	152
10.10. Численная реализация метода характеристик .....	154
<b>Глава 11. Задачи уравнений эллиптического типа .....</b>	<b>157</b>
11.1. Классификация задач уравнений эллиптического типа .....	157
11.2. Статический прогиб прямоугольной мембраны .....	157
11.3. Статический прогиб полукруглой мембраны .....	159
11.4. Связь аналитических и гармонических функций .....	161
11.5. Задача Дирихле для круга .....	167
11.6. Задача Дирихле для полуплоскости .....	171
11.7. Уравнения плоского установившегося течения жидкости .....	174
11.8. Примеры течений, описываемых комплексным потенциалом...	176

### **Часть 4. Вариационное исчисление**

<b>Глава 12. Задачи с неподвижными границами .....</b>	<b>180</b>
12.1. Понятие о вариационном исчислении .....	180
12.2. Вариация и ее свойства .....	181
12.3. Функционал от одной функции одной переменной .....	185
12.4. Функционалы от многих функций одной переменной .....	191
12.5. Функционалы от функции нескольких переменных .....	194
12.6. Эквивалентность дифференциальных и вариационных задач ...	197
12.7. Метод Ритца .....	197
12.8. Задачи на условный экстремум .....	204
<b>Литература .....</b>	<b>206</b>

## ОТ АВТОРА

*В каждой естественной науке  
заключено столько истины,  
сколько в ней есть математики.*

*Иммануил Кант (1724-1804)*

Развитие современной техники требует от инженера такого уровня математической подготовки, при котором знание основных методов решения задач дифференциальных уравнений математической физики является совершенно необходимым.

Предлагаемое учебное пособие состоит из четырех частей. Первые две из них подготавливают математический аппарат для третьей и последовательно связаны друг с другом. Вместе с тем эти три части достаточно самостоятельны и могут быть подвергнуты сокращениям и изменениям, обусловливаемым нуждами учебного процесса. Четвертая часть стоит особняком от первых трех и может изучаться совершенно независимо от них.

Часть первая представляет собой изложение теории функций комплексной переменной, адаптированной к уровню математической подготовки студентов технических направлений и специальностей. Главная задача, которая ставится в этой части, - сформировать у студента знания о конформных отображениях, интеграле Коши и методах вычисления контурных и несобственных интегралов с помощью вычетов.

Часть вторая содержит теоретические основы и руководство к практическому применению интегральных преобразований: Лапласа, Фурье и Ханкеля. Основная цель этой части - выработать у студента навыки решения методами интегральных преобразований задач обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем с начальными и граничными условиями и интегральных уравнений.

Часть третья посвящена решению задач дифференциальных уравнений с частными производными. Дается сравнительно подробное изложение теоретической основы классификации уравнений с частными производными второго порядка функций двух независимых переменных.

Методы интегральных преобразований демонстрируются на примерах решения задач уравнений всех трех типов – параболического, гиперболического и эллиптического. Этими методами решаются задачи теплопроводности стержней конечной и бесконечной длин и круглой пластины, задачи свободных и вынужденных колебаний струны конечной длины и продольные колебания стержня, задачи статического прогиба прямоугольной и круглой мембран, задачи свободных и вынужденных осесимметричных колебаний мембраны.

Метод разделения переменных дается как фундаментальный метод, лежащий в основе метода интегральных преобразований. Он иллюстрируется на решениях задач об акустических колебаниях газа в сферической оболочке и в круглой трубке.

Методом характеристик решаются задачи о распространении волн упругих деформаций в стержне и задачи соударения стержней. Излагаются основы построения разностных схем на характеристической сетке для решения краевых задач Коши, Гурса и смешанной квазилинейных дифференциальных уравнений гиперболического типа.

Метод конформных отображений применяется в решении задач Дирихле для круга и полуплоскости.

Знакомство с методом комплексного потенциала ограничивается примерами исследования течения жидкости, описываемого его простейшими видами.

В четвертой части (ее не было в первом издании пособия) излагаются теоретические основы вариационного исчисления задач с неподвижными границами и на классических примерах иллюстрируются методы их решения. В качестве прямого вариационного метода достаточно подробно с примерами дается метод Ритца. Для простейшего случая рассматриваются методы решения задачи на условный экстремум.

Предполагается, что в результате освоения излагаемого в книге учебного материала изучающий получит возможность самостоятельно расширять и углублять свои знания в области методов решения задач уравнений математической физики и применять их для чтения соответствующей технической и научной литературы.

Пособие написано на основе лекций (повторяет их практически слово в слово), читаемых автором студентам специальности «Физика» Волгоградского государственного технического университета на 2-м курсе осеннего и весеннего семестров.

Концепция принятого в пособии построения учебного материала и уровня его подачи была поддержана профессором, доктором технических наук А.Б. Золотовым (МГСУ, кафедра информатики и прикладной математики). Во многом благодаря его усилиям книга получила рекомендательный гриф Федерального агентства по образованию Российской Федерации.

Автор выражает искреннюю благодарность профессору, доктору физико-математических наук В.М. Миклюкову (ВолГУ, кафедра математического анализа и теории функций) за чрезвычайно тщательное прочтение рукописи книги в процессе ее рецензирования. Сделанные им замечания существенно способствовали улучшению ее текста.

**Г. Тарабрин**



# Часть 1

## ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

### Глава 1

### КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ФУНКЦИИ

#### 1.1. Комплексные числа и действия над ними

До сих пор, когда речь заходила о числах, подразумевались так называемые *вещественные* (или их называют еще *действительные*) числа, которые взаимно однозначно ассоциируются с точками числовой оси.

**Определение 1.** Число  $i = \sqrt{-1}$  называется *мнимой единицей*.

**Определение 2.** *Комплексным числом*  $z$  называется упорядоченная пара вещественных чисел  $x, y$ , записываемая в виде

$$z = x + iy, \quad (1)$$

первое из которых  $x$  называется *вещественной* (или *действительной*) *частью* комплексного числа  $z$ , а второе  $y$  называется *мнимой частью* комплексного числа  $z$ .

Принято обозначать:  $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$ .

(1) называется *алгебраической формой комплексного числа*.

**Определение 3.** Два комплексных числа  $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$  равны друг другу тогда и только тогда, когда равны их соответственно действительные и мнимые части:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2.$$

**Определение 4.** Комплексное число  $z = x + iy$  равно нулю тогда и только тогда, когда равны нулю его действительная  $x$  и мнимая  $y$  части:

$$z = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0.$$

**Теорема 1.** В декартовой системе координат  $x, y$  комплексное число  $z = x + iy$  необходимо и достаточно определяет единственную точку на координатной плоскости (рис.1).

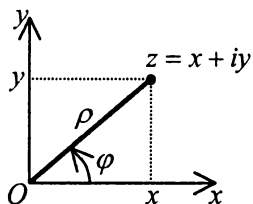


Рис.1

**Доказательство.** Между упорядоченными парами вещественных чисел и точками декартовой плоскости существует взаимно однозначное соответствие. Из этого непосредственно следует, что между комплексными числами и точками плоскости декартовых координат также имеет место взаимно однозначное соответствие. #

Применительно к комплексным числам плоскость декартовых координат называют

комплексной плоскостью. При этом ось абсцисс  $x$  называют *вещественной* (действительной) осью, а ось ординат  $y$  - *мнимой осью*.

**Определение 5.** Неотрицательное число

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

называется *модулем* комплексного числа  $z = x + iy$ .

Число  $\varphi$ , принимающее значение в пределах от 0 до  $2\pi$  и удовлетворяющее каждому из уравнений

$$\cos \varphi = \frac{x}{\rho}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\rho}, \quad (3)$$

называется *аргументом* этого комплексного числа.

Принято обозначать:  $\rho = |z|$ ,  $\varphi = \arg z$ .

Геометрический смысл модуля и аргумента:  $\rho$  - расстояние от начала координат до точки  $z$ ,  $\varphi$  - полярный угол точки  $z$  (рис.1).

Обратим внимание, что числа  $\arg z \pm 2k\pi$ , где  $k = 1, 2, 3, \dots$ , являются решениями системы уравнений (3) и также могут рассматриваться как аргументы комплексного числа.

**Теорема 2.** Комплексное число  $z = x + iy$  может быть записано в виде

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (4)$$

где  $\rho$  - модуль комплексного числа,  $\varphi$  - его аргумент.

**Доказательство.** По формулам (3)  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ . Подставив эти выражения в равенство (1), получим формулу (4). #

(4) называется *тригонометрической формой комплексного числа*.

**Лемма.** Справедливо равенство

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad (5)$$

называемое *формулой Эйлера*.

**Доказательство.** Запишем натуральные степени мнимой единицы

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad i^6 = -1, \quad i^7 = -i, \quad i^8 = 1, \dots$$

Разложение  $e^{i\varphi}$  в ряд Тейлора

$$e^{i\varphi} = 1 + \frac{i\varphi}{1!} + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \frac{(i\varphi)^6}{6!} + \frac{(i\varphi)^7}{7!} + \frac{(i\varphi)^8}{8!} + \dots$$

с учетом значений натуральных степеней  $i$  преобразуется к виду

$$e^{i\varphi} = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \frac{\varphi^8}{8!} - \dots + i \left( \frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots \right).$$

Замечая, что в этом равенстве справа ряды Тейлора

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \frac{\varphi^8}{8!} - \dots, \quad \sin \varphi = \frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots,$$

приходим к равенству (5). #

**Теорема 3.** Комплексное число  $z = x + iy$  может быть записано в виде

$$z = \rho e^{i\varphi}, \quad (6)$$

где  $\rho$  - модуль комплексного числа,  $\varphi$  - его аргумент.

**Доказательство.** Подставив формулу (5) в (4), получим формулу (6). #  
(6) называется *показательной формой комплексного числа*.

**Определение 6.** Сумма, разность и произведение комплексных чисел  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$  определяются следующим образом:

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2),$$

$$z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2),$$

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

**Теорема 4.** Произведение двух комплексных чисел  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$  может быть вычислено по любой из равносильных формул:

в алгебраической форме

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1), \quad (7)$$

в тригонометрической форме

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \quad (8)$$

в показательной форме

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (9)$$

где  $\rho_1 = |z_1|$ ,  $\rho_2 = |z_2|$ ,  $\varphi_1 = \arg z_1$ ,  $\varphi_2 = \arg z_2$ .

**Доказательство.** Перемножая, согласно определению 6, комплексные числа, как двучлены, и учитывая, что  $ii = -1$ , получаем

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= z_1 (x_2 + iy_2) = z_1 x_2 + z_1 iy_2 = (x_1 + iy_1)x_2 + (x_1 + iy_1)iy_2 = \\ &= x_1 x_2 + iy_1 x_2 + x_1 iy_2 + iy_1 iy_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned}$$

Из уравнений (3) имеем

$$x_1 = \rho_1 \cos \varphi_1, \quad y_1 = \rho_1 \sin \varphi_1, \quad x_2 = \rho_2 \cos \varphi_2, \quad y_2 = \rho_2 \sin \varphi_2.$$

Подставив эти выражения в (7), вынеся за скобки общий множитель  $\rho_1 \rho_2$ , отделив действительную и мнимую части и воспользовавшись формулами косинуса и синуса суммы двух углов, получим формулу (8).

Применив к формуле (8) формулу Эйлера (5), получим (9). #

**Следствие 1.** При умножении комплексных чисел их модули умножаются, а аргументы складываются:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2.$$

**Доказательство.** Видно из формулы (8). #

**Теорема 5.** Возведение комплексного числа  $z$  в целую положительную степень  $n$  осуществляется следующими равносильными формулами:

в тригонометрической форме

$$z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad (10)$$

в показательной форме

$$z^n = \rho^n e^{in\varphi}, \quad (11)$$

где  $\rho = |z|$ ,  $\varphi = \arg z$ .

Формулы (10), (11) называются *формулами Муавра*.

**Доказательство.** Формулы (10), (11) вытекают непосредственно из формул (8), (9), записанных для  $n$  одинаковых сомножителей. #

**Определение 7.** Комплексное число  $\bar{z} = x - iy$  называется *сопряженным* комплексному числу  $z = x + iy$ .

Можно доказать, что

$$z\bar{z} = x^2 + y^2, \quad |\bar{z}| = |z|, \quad \arg \bar{z} = -\arg z,$$

$$\bar{z} = |z| [\cos(\arg z) - i \sin(\arg z)].$$

**Теорема 6.** Деление комплексного числа  $z_1 = x_1 + iy_1$  на комплексное число  $z_2 = x_2 + iy_2$  выполняется по любой из равносильных формул:

в алгебраической форме

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad (12)$$

в тригонометрической форме

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)], \quad (13)$$

в показательной форме

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad (14)$$

где  $\rho_1 = |z_1|$ ,  $\rho_2 = |z_2|$ ,  $\varphi_1 = \arg z_1$ ,  $\varphi_2 = \arg z_2$ .

**Доказательство.** 
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} \Rightarrow (12).$$

Подставив  $x_1 = \rho_1 \cos \varphi_1$ ,  $y_1 = \rho_1 \sin \varphi_1$ ,  $x_2 = \rho_2 \cos \varphi_2$ ,  $y_2 = \rho_2 \sin \varphi_2$  в формулу (12) и воспользовавшись формулами косинуса и синуса разности двух углов, получим формулу (13).

Применив в формуле (13) формулу Эйлера (5), получим (14). #

**Следствие 2.** При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются:

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2.$$

**Доказательство.** Видно из формулы (13). #



**Теорема 7.** Корень целой положительной степени  $n$  из комплексного числа  $z = x + iy$  имеет ровно  $n$  различных значений - комплексных чисел, имеющих равные модули, определяемые формулой

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}, \quad (15)$$

и различные аргументы, определяемые формулой

$$\arg \sqrt[n]{z} = \frac{\arg z + 2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (16)$$

Таким образом, в тригонометрической форме корень  $n$ -й степени из комплексного числа  $z$  вычисляется по формуле

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{|z|} \left[ \cos \frac{\arg z + 2\pi(k-1)}{n} + i \sin \frac{\arg z + 2\pi(k-1)}{n} \right], \quad (17)$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

Подчеркнем, что здесь  $\sqrt[n]{|z|} > 0$  - арифметический корень.

**Доказательство.** Пусть  $z = \rho e^{i\varphi}$  и  $\xi = \eta e^{i\alpha}$  - комплексные числа такие, что

$$z = \xi^n \Leftrightarrow \xi = \sqrt[n]{z}.$$

Тогда

$$z = \rho e^{i\varphi} = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \xi^n = \eta^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha).$$

Отсюда, приравнивая действительные и мнимые части, имеем

$$\rho \cos \varphi = \eta^n \cos n\alpha, \quad \rho \sin \varphi = \eta^n \sin n\alpha.$$

Эти два равенства выполняются одновременно при условии, что

$$\rho = \eta^n, \quad \varphi + 2\pi k = n\alpha, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Так как  $\rho > 0$  и  $\eta > 0$ , то из первого из этих равенств следует, что  $\eta = \sqrt[n]{\rho}$ . А учитывая, что  $\rho = |z|$  и  $\eta = |\xi| = \left|\sqrt[n]{z}\right|$ , получаем (15).

Второе равенство из рассматриваемой пары можно переписать в виде  $\alpha = (\varphi + 2\pi k)/n$ . Если здесь учесть, что  $\alpha = \arg \xi = \arg \sqrt[n]{z}$  и  $\varphi = \arg z$ , то получится формула (16).

Осталось доказать, что в формуле (17)  $k = 1, 2, \dots, n$ .

При  $k = 1, 2, \dots, n$  выражение в квадратных скобках правой части равенства (17) принимает  $n$  различных значений. При  $k < 1$  и при  $k > n$  квадратные скобки формулы (17) дают значения, представляющие собой числа, уже полученные при  $k = 1, 2, \dots, n$ . Поэтому значения  $k < 1$  и  $k > n$  можно отбросить. #

Вместо  $k = 1, 2, \dots, n$  можно взять любую непрерывную последовательность из  $n$  целых чисел.

**Пример.** Найти все корни уравнения  $z^4 + 1 = 0$  и построить их на комплексной плоскости.

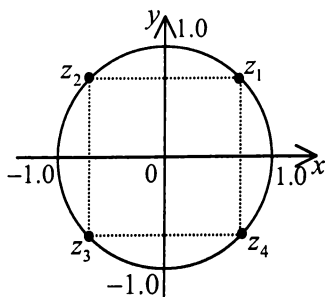


Рис. 2

**Решение.**

$$z_k = \left(\sqrt[4]{-1}\right)_k, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Запишем  $-1$  в комплексной форме и вычислим модуль и аргумент этого комплексного числа.

$$-1 = -1 + i0, \quad |-1| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1.$$

Точка  $-1 + i0$  лежит на отрицательной половине вещественной оси, поэтому  $\arg(-1) = \pi$ .

По формуле (17)

$$\left(\sqrt[4]{-1}\right)_k = \sqrt[4]{1} \left[ \cos \frac{\pi + 2\pi(k-1)}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi(k-1)}{4} \right], \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Отсюда имеем следующее:

$$\text{при } k = 1 \quad z_1 = \left(\sqrt[4]{-1}\right)_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{при } k = 2 \quad z_2 = \left(\sqrt[4]{-1}\right)_2 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{при } k = 3 \quad z_3 = \left(\sqrt[4]{-1}\right)_3 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{при } k = 4 \quad z_4 = \left(\sqrt[4]{-1}\right)_4 = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Найденные значения корней уравнения построены на рис. 2. Это точки

$$z_1 \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad z_2 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad z_3 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad z_4 \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

**Определение 8.** Комплексное число  $z^{-1}$  называется *обратным* числу  $z$ , если эти числа связаны равенством

$$zz^{-1} = 1. \quad (18)$$

Числа  $z$  и  $z^{-1}$  называются *взаимно обратными*.

**Теорема 8.** Модули и аргументы взаимно обратных чисел связаны равенствами

$$|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}, \quad \arg z^{-1} = -\arg z. \quad (19)$$

**Доказательство.** Используя равенство (18) и следствие 2,

$$z^{-1} = \frac{1}{z} \Rightarrow |z^{-1}| = \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}, \quad \arg z^{-1} = \arg \frac{1}{z} = \arg 1 - \arg z = -\arg z. \#$$

**Определение 9.** Возведение комплексного числа  $z$  в целую отрицательную степень  $n$  определяется формулой

$$z^{-n} = (z^{-1})^n. \quad (20)$$

**Теорема 9.** Значения комплексного числа в целой отрицательной степени и в той же положительной степени связаны равенством

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n}. \quad (21)$$

**Доказательство.** По формулам (20), (19) (10)

$$\begin{aligned} |z| = \rho, \arg z = \varphi, \quad z^{-n} &= (z^{-1})^n = \left( \frac{\cos \varphi - i \sin \varphi}{\rho} \right)^n = \frac{\cos n\varphi - i \sin n\varphi}{\rho^n} = \\ &= \frac{(\cos n\varphi - i \sin n\varphi)(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)}{\rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)} = \frac{\cos^2 n\varphi + \sin^2 n\varphi}{\rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)} = \frac{1}{z^n}. \# \end{aligned}$$

**Следствие 3.** Если  $n$  - целое положительное число и  $z$  - комплексное число, то  $z^n, z^{-n}$  - взаимно обратные комплексные числа, т.е.

$$z^n z^{-n} = 1. \quad (22)$$

## 1.2. Ряды с комплексными членами

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n, \quad (1)$$

члены которого  $z_n = x_n + iy_n$  - комплексные числа.

Комплексные числа

$$S_1 = z_1, \quad S_2 = z_1 + z_2, \quad \dots, \quad S_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n, \dots,$$

называемые *частичными суммами* ряда, образуют *последовательность*, обозначаемую  $\{S_n\}$ .

**Определение 1.** Если существует предел последовательности  $\{S_n\}$  при  $n \rightarrow \infty$ , равный конечному числу  $S$ , то этот предел называют *суммой ряда* (1), пишут  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  и говорят, что ряд (1) *сходится*.

Сумма ряда с комплексными членами есть число комплексное.

**Теорема 1.** Если ряд (1) с комплексными членами сходится и его сумма равна  $S = X + iY$ , то сходятся ряды с действительными членами, составленные из действительных и мнимых частей членов ряда (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n, \quad (2)$$

их суммы равны соответственно  $X$  и  $Y$ . И, наоборот, если ряды (2) сходятся, то сходится и ряд (1).

**Доказательство.** Пусть ряд (1) сходится.  $\Leftrightarrow$  Согласно определению 1,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ .  $\Leftrightarrow$  Так как  $S_n = X_n + iY_n$ , где  $X_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$  и  $Y_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = X + iY$ .  $\Leftrightarrow$  Используя определение 3/1.1,  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = Y$ .  $\Leftrightarrow$  Согласно определению 1, ряды

(2) сходятся. Так как в выполненном доказательстве всюду стоит знак взаимно обратного соответствия  $\Leftrightarrow$ , то оно справедливо и в обратном направлении, т.е. из сходимости рядов (2) следует сходимость ряда (1). #

**Теорема 2.** Если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|, \quad (3)$$

составленный из модулей членов ряда (1), то ряд (1) также сходится, что называется *абсолютной сходимостью* ряда (1).

$$\text{Доказательство. } |z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \Rightarrow |z_n| \geq |x_n|, \quad |z_n| \geq |y_n|.$$

Пусть ряд (3) сходится. Тогда, согласно этим неравенствам, по признаку сравнения рядов с неотрицательными членами сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|.$$

Из сходимости этих рядов следует сходимость, причем абсолютная, рядов (2), что достаточно, согласно теореме 1, для сходимости ряда (1). #

Рассмотрим теперь *комплексную переменную*  $z = x + iy$ , где  $x, y$  - независимые друг от друга вещественные переменные.

Ряд

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (4)$$

где  $z$  - комплексная переменная и  $a_0, a_1, a_2, \dots$  - комплексные числа, называется *степенным рядом с комплексными членами*.

Любая его частичная сумма

$$S_n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n \quad (5)$$

является *комплексной функцией* вида

$$S_n = u_n(x, y) + i v_n(x, y), \quad (6)$$

где  $u_n(x, y), v_n(x, y)$  - вещественные функции вещественных переменных



$x, y$ . Действительно. Согласно формуле (10)/1.1,  $z^n$  - комплексная переменная. Тогда и  $a_n z^n$ , как произведение комплексных величин, является комплексной переменной и, следовательно, частичная сумма (5), как сумма комплексных переменных, также является комплексной переменной.

При фиксированных значениях  $x, y$  ряд (4) превращается в числовой ряд (1) и можно говорить о его сходимости.

Совокупность точек  $(x, y)$ , в которых ряд (4) сходится, называется *областью сходимости* степенного ряда с комплексными членами.

Докажем, что ряды

$$\left. \begin{aligned} &1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \dots, \\ &1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!} + \dots, \\ &\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

абсолютно сходятся на всей комплексной плоскости.

Так как  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$  - действительная переменная, то ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\rho^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\rho^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad (8)$$

являются рядами с действительной переменной  $\rho$  и представляют собой известные разложения в ряд Тейлора функций  $e^\rho$ ,  $\cos \rho$ ,  $\sin \rho$ . Ряды Тейлора этих функций действительной переменной сходятся, причем абсолютно, на всей числовой оси и, следовательно, ряды (8) сходятся при всех значениях  $|z| \in [0, \infty)$ .

Из абсолютной сходимости рядов (8) следует сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^{n-1}}{(n-1)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad (9)$$

при  $|z| \in [0, \infty)$ , т.е. при  $x \in (-\infty, +\infty)$  и  $y \in (-\infty, +\infty)$ .

Эти ряды представляют собой также ряды, составленные из модулей членов рядов (7). Поэтому из сходимости рядов (9), согласно теореме 2, следует абсолютная сходимость рядов (7) при  $x \in (-\infty, +\infty)$  и  $y \in (-\infty, +\infty)$ , что означает абсолютную сходимость рядов (7) на всей комплексной плоскости. #

Очевидно, что, аналогично частичной сумме (6), сумма степенного ряда (4) будет иметь вид

$$S = u(x, y) + iv(x, y),$$

где  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  - вещественные функции.

### 1.3. Основные элементарные функции комплексной переменной

Если в вещественной функции, например показательной  $a^x$ , вещественную переменную  $x$  заменить на комплексную переменную  $z = x + iy$ , то функция  $a^z$  будет иметь уже совершенно иной смысл, чем  $a^x$ . Поэтому элементарные функции в ТФКП определяются заново. Причем таким образом, чтобы при  $\text{Im } z = 0$   $f(z) = f(x)$ , что называется *аналитическим продолжением с вещественной оси на комплексную плоскость*.

**Определение функций  $e^z$ ,  $\cos z$ ,  $\sin z$  :**

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \dots, \quad (1)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!} + \dots, \quad (2)$$

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots. \quad (3)$$

В предыдущем параграфе показано, что ряды, суммами которых являются определяемые функции, сходятся. Следовательно, эти функции определены на всей комплексной плоскости.

Заменив в формуле (1)  $z$  на  $iz$ , получим

$$e^{iz} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!} + i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Отсюда, сопоставляя это выражение с формулами (2), (3), получаем

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \quad (4)$$

Так как ряд (2) содержит только четные степени  $z$ , а (3) - только нечетные, то  $\cos z$  - четная функция, а  $\sin z$  - нечетная.

Заменив в формуле (4)  $z$  на  $-z$  и учитывая четность  $\cos z$  и нечетность  $\sin z$ , получаем

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z. \quad (5)$$

**Определение гиперболических функций:**

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \quad (6)$$

$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}). \quad (7)$$

Сравнение полусуммы и полуразности выражений (4), (5) с формулами (6), (7), приводит к соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \cos z &= \cosh iz, \\ \sin z &= -i \sinh iz. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

**Лемма.** Справедливо равенство

$$e^{u+v} = e^u e^v,$$

называемое *основным алгебраическим тождеством*.

**Доказательство.** Применяя формулу (1),

$$e^u e^v = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{u^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^n}{n!} = \{ \text{перемножая ряды} \} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(u+v)^k}{k!} = e^{u+v}. \#$$

Полагая в алгебраическом тождестве  $u = x$ ,  $v = iy$  и используя формулу Эйлера, получаем равенство

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (9)$$

Эта формула позволяет доказать, что  $e^z$  - периодическая функция с периодом  $2\pi i$ , т.е.

$$e^{z+i2\pi k} = e^z, \text{ где } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10)$$

Применяя формулу (9),

$$\begin{aligned} e^{z+i2\pi k} &= e^{x+i(y+2\pi k)} = e^x [\cos(y+2\pi k) + i \sin(y+2\pi k)] = \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) = e^z. \# \end{aligned}$$

Из формул (6), (7) в свете формулы (10) следует, что гиперболические функции являются периодическими с периодом  $2\pi i$ :

$$\cosh(z+i2\pi k) = \cosh z, \quad \sinh(z+i2\pi k) = \sinh z. \quad (11)$$

А равенства (8) при этом позволяют заключить, что  $\cos z, \sin z$  - периодические функции с периодом  $2\pi$ .

Возведя обе части равенств (6), (7) в квадрат и вычтя из первого второе, получим *основное гиперболическое тождество*

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1. \quad (12)$$

Заменив в этом тождестве  $z$  на  $iz$  и воспользовавшись соотношениями (8), получим *основное тригонометрическое тождество*

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1. \quad (13)$$

**Определение тангенсов и котангенсов:**

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}; \quad (14)$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}. \quad (15)$$

**Логарифмическая функция** определяется как функция, обратная показательной, т.е. если  $z = e^w$ , где  $w = u(x, y) + iv(x, y)$ , то  $w$  называют *логарифмом переменной  $z$*  при основании  $e$  и пишут

$$w = \ln z.$$

Докажем равенство

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z. \quad (16)$$

По определению  $z = e^{u+iv} = \{ \text{ по формуле (9) } \} = e^u (\cos v + i \sin v)$ .

По формуле (4)/1.1  $z = |z|(\cos \arg z + i \sin \arg z)$ .

Сравнивая эти два равенства, получаем

$$e^u = |z|, \quad v = \arg z.$$

Логарифмируя первое из этих равенств, находим

$$u = \ln |z|.$$

По определению  $\ln z = w = u + iv$ . Подставив сюда найденные выражения  $u = \ln |z|$  и  $v = \arg z$ , получим равенство (16). #

Так как  $e^w = e^{w+i2\pi k} = z \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ , то  $w + i2\pi k$  так же является логарифмом  $z$  при основании  $e$ , который принято обозначать  $\text{Ln} z$ .

Аналогично формуле (16) можно доказать, что

$$\text{Ln} z = \ln |z| + i(\arg z + 2\pi k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (17)$$

$\ln z$  называют *главным значением логарифма*.

**Обратные тригонометрические функции** комплексной переменной определяются по тому же правилу, что и вещественной переменной. Например, если  $z = x + iy = \sin w$ , где  $w = u + iv$ , то  $w$  называют *арксинусом* комплексной переменной  $z$  и пишут

$$w = \arcsin z.$$

Справедлива формула

$$\arcsin z = -i \ln \left( iz \pm \sqrt{1 - z^2} \right). \quad (18)$$

Докажем это. Равенство  $z = \sin w$  при помощи соотношений (7), (8) преобразуется к виду

$$z = -i \frac{1}{2} (e^{iw} - e^{-iw}).$$

Умножив обе части этого равенства на  $e^{iw}$ , получим

$$(e^{iw})^2 - 2iz(e^{iw}) - 1 = 0.$$

Решив это уравнение, как квадратное относительно  $e^{iw}$ , будем иметь

$$e^{iw} = iz \pm \sqrt{-z^2 + 1}.$$

Логарифмируя это равенство и умножая после этого обе его части на мнимую единицу  $i$ , получим доказываемую формулу (18). ∴



**Обобщенная показательная функция**  $a^z$ , где основание  $a$  - комплексное число,  $a \neq 0$ , определяется формулой

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}. \quad (19)$$

**Обобщенная степенная функция**  $z^\alpha$ , где показатель степени  $\alpha$  - комплексное число, определяется формулой

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}. \quad (20)$$

#### 1.4. Понятие функции комплексной переменной

**Определение 1.** Рассмотрим две комплексные плоскости: плоскость  $Z$  точек  $z = x + iy$  и плоскость  $W$  точек  $w = u + iv$  (рис.3), где  $x, y, u, v$  - вещественные переменные.

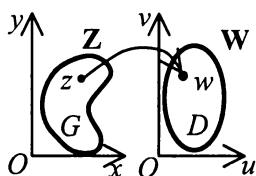


Рис.3

Говорят, что на некотором множестве  $G$  комплексной плоскости  $Z$  определена функция  $w$  комплексной переменной  $z$ , если каждой точке  $z \in G$  по какому-то закону ставится в соответствие точка  $w \in D$  на плоскости  $W$ , и пишут  $w = f(z)$ .

Так как  $z = x + iy$  и  $w = u + iv$ , то

$$f(z) = u + iv \Rightarrow u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

**Определение 2.** Функция  $w = f(z)$  называется *однозначной*, если каждому значению  $z \in G$  она ставит в соответствие единственное значение  $w \in D$ . Если  $w = f(z)$  устанавливает взаимно однозначное соответствие между значениями  $z \in G$  и  $w \in D$ , то она называется *однолистной*.

**Определение 3.** Рассмотрим ситуацию, когда переменная  $z$ , изменяясь по произвольному закону, приближается к числу  $z_0$ , а значение

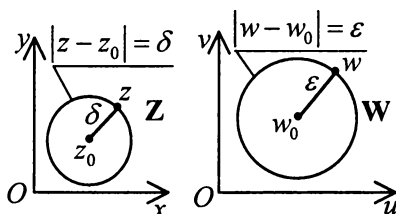


Рис.4

функции  $w$  при этом приближается к некоторому числу  $w_0$ . Число  $w_0$  называют *пределом функции*  $w = f(z)$  при  $z$ , стремящимся к  $z_0$ , и пишут

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0,$$

если для как угодно малого вещественного числа  $\varepsilon > 0$  можно подобрать такое вещественное число  $\delta > 0$ , что для всех  $z \neq z_0$ , удовлетворяющих неравенству  $|z - z_0| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ .

**Геометрическая интерпретация предела.** На рис.4  $\delta$ -окрестность точки  $z_0$  и  $\varepsilon$ -окрестность точки  $w_0$  - это круги с граничными окружностями соответственно  $|z - z_0| = \delta$  и  $|w - w_0| = \varepsilon$ . Точка  $w_0$  является пределом функции  $f(z)$  при  $z \rightarrow z_0$ , если для как угодно малой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $w_0$  можно найти такую  $\delta$ -окрестность точки  $z_0$ , что в любой точке  $z$  из  $\delta$ -окрестности значение функции  $f(z) = w$  будет представлять собой точку в  $\varepsilon$ -окрестности.

**Определение 4.** Функция  $w = f(z)$  называется непрерывной в точке  $z_0$ , если она определена в этой точке и некоторой ее окрестности и если бесконечно малому приращению аргумента  $\Delta z$  соответствует бесконечно малое приращение функции  $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$ , т.е. если

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta w = 0. \quad (1)$$

Если сюда подставить  $\Delta w = f(z) - f(z_0)$  и  $\Delta z = z - z_0$ , то равенство (1) можно преобразовать к виду

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0). \quad (2)$$

Отсюда следует: если функция  $f(z)$  непрерывна в точке  $z_0$ , то ее предел при  $z \rightarrow z_0$  существует и равен ее значению при  $z = z_0$ .

Так как  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , то (2) можно переписать в виде

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) + i \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0),$$

что равносильно следующим двум равенствам:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u(x_0, y_0), \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v(x_0, y_0),$$

из которых вытекает следующая теорема.

**Теорема.** Функция  $f(z)$  комплексной переменной  $z = x + iy$  непрерывна необходимо и достаточно, если непрерывны ее действительная  $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$  и мнимая  $\operatorname{Im} f(z) = v(x, y)$  части.

## 1.5. Производная функции комплексной переменной

**Определение 1.** Пусть функция  $w = f(z)$  определена и непрерывна в области  $G$  комплексной плоскости  $Z$  переменной  $z = x + iy$ . Производной функции  $f(z)$  в точке  $z_0 \in G$  называется предел, обозначаемый  $f'(z_0)$ , равный отношению приращения функции  $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$  к приращению аргумента  $\Delta z = z - z_0$ , когда  $\Delta z$  стремится к нулю при стремлении  $z$  к  $z_0$  по любому пути,

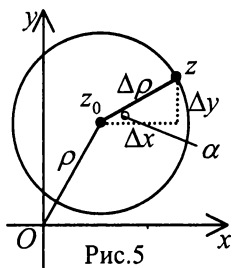


Рис.5

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}, \quad (1)$$

если такой предел существует.

На рис.5 изображена окрестность точки  $z_0$ , в которой определяется производная,  $\Delta \rho$  - радиус этой окрестности,  $\alpha$  - угол, задающий направление, по которому точка  $z$  стремится к точке  $z_0$ .

По определению производной требуется, чтобы угол  $\alpha$  мог быть любым в пределах от 0 до  $2\pi$ .

**Теорема.** Если функция  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  дифференцируема, то ее действительная  $u(x, y)$  и мнимая  $v(x, y)$  части удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2)$$

**Доказательство.** Вычислим  $f'(z_0)$ , полагая, что точка  $z = x + iy$  стремится к точке  $z_0 = x_0 + iy_0$  по прямой (рис.5).

$$\begin{aligned} \Delta z &= z - z_0 = x - x_0 + i(y - y_0) = \Delta x + i\Delta y = \\ &= \Delta \rho \cos \alpha + i\Delta \rho \sin \alpha = \Delta \rho (\cos \alpha + i \sin \alpha) = \Delta \rho e^{i\alpha}, \\ \Delta w &= u(x, y) + iv(x, y) - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)] = \Delta u + i\Delta v. \end{aligned}$$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta \rho e^{i\alpha}} = e^{-i\alpha} \left( \lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta \rho} + i \lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta \rho} \right).$$

Пределы в скобках определяют производные по направлению  $\alpha$ .

$$\lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta \rho} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \alpha, \quad \lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta \rho} = \frac{\partial v}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \sin \alpha.$$

Согласно этому,

$$f'(z_0) = e^{-i\alpha} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \alpha + i \left( \frac{\partial v}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \sin \alpha \right) \right]. \quad (3)$$

Отсюда при  $\alpha = 0$  и при  $\alpha = \pi/2$  имеем соответственно

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}, \quad f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Так как по определению значение производной в данной точке не зависит от направления, по которому вычисляется предел (1), то левые части этих равенств равны, а поэтому равны и правые, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Приравняв здесь действительные и мнимые части, получим (2). #

Равенства (2) называют, обычно, *условиями Коши-Римана*. Некоторые источники называют их *условиями Д'Аламбера-Эйлера*.

**Определение 2.** Функция  $f(z) = u + iv$ , удовлетворяющая условиям (2) во всех точках некоторой области  $G$ , называется *аналитической* в этой области.

**Пример.** Показать, что функция  $\cos 2z$  является аналитической на всей комплексной плоскости.

**Решение.** Используя вначале первую формулу (8), потом формулу (6), а потом (9) параграфа 1.3, отделим действительную и мнимую части:

$$\cos 2z = \cosh i2z = \cos 2x \cosh 2y - i \sin 2x \sinh 2y \Rightarrow$$

$$u = \operatorname{Re} \cos 2z = \cos 2x \cosh 2y, \quad v = \operatorname{Im} \cos 2z = -\sin 2x \sinh 2y.$$

Частные производные функций  $u, v$ :

$$\partial u / \partial x = -2 \sin 2x \cosh 2y, \quad \partial u / \partial y = 2 \cos 2x \sinh 2y;$$

$$\partial v / \partial x = -2 \cos 2x \sinh 2y, \quad \partial v / \partial y = -2 \sin 2x \cosh 2y.$$

Эти частные производные удовлетворяют соотношениям Коши-Римана при всех значениях  $x, y$ . Следовательно, функция  $\cos 2z$  является аналитической на всей комплексной плоскости.

Производные элементарных функций комплексной переменной такие же, как производные элементарных функций вещественной переменной.

**Пример.** Доказать, что  $(\cos 2z)' = -2 \sin 2z$ .

**Решение.** Из предыдущего примера берем

$$u = \operatorname{Re} \cos 2z = \cos 2x \cosh 2y, \quad v = \operatorname{Im} \cos 2z = -\sin 2x \sinh 2y.$$

Согласно определению 1 этого параграфа, в формуле (3) направление, определяемое углом  $\alpha$ , может быть любым. Возьмем  $\alpha = 0$ . Тогда (3) примет вид  $f'(z) = \partial u / \partial x + i \partial v / \partial x$ . По этой формуле

$$(\cos 2z)' = -2(\sin 2x \cosh 2y + i \cos 2x \sinh 2y).$$

Подставляя сюда  $\sinh 2y = (e^{2y} - e^{-2y})/2$ ,  $\cosh 2y = (e^{2y} + e^{-2y})/2$  и используя формулу Эйлера и формулу (9)/1.3, получаем

$$\begin{aligned} (\cos 2z)' &= -\left[ e^{2y} (\sin 2x + i \cos 2x) + e^{-2y} (\sin 2x - i \cos 2x) \right] = \\ &= -i \left( e^{-i^2 2y} e^{-i2x} - e^{i^2 2y} e^{i2x} \right) = 2i \sinh i2z = -2 \sin 2z. \end{aligned}$$

## Глава 2

# КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

### 2.1. Понятие об отображениях

**Пример 1.** Дана функция

$$w = 3z + \frac{1}{z}. \quad (1)$$

Эта функция однозначная. Поэтому она каждой точке  $z = x + iy$  плоскости  $Z$  ставит в соответствие единственную точку  $w = u + iv$  плоскости  $W$ . Решим вопрос, какие точки плоскости  $W$  ставит в соответствие функция (1) точкам окружности единичного радиуса на плоскости  $Z$  с центром в начале координат?

**Решение.** Запишем уравнение единичной окружности на плоскости  $Z$  с центром в начале координат

$$z = 1 \cdot e^{i\varphi}, \text{ где } 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (2)$$

Подставим выражение (2) в функцию (1)

$$w = u + iv = 3e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 3(\cos \varphi + i \sin \varphi) + \cos \varphi - i \sin \varphi =$$

$$= 4\cos \varphi + i2\sin \varphi \Rightarrow$$

$$u = 4\cos \varphi, \quad v = 2\sin \varphi.$$

Последние два равенства являются параметрическими уравнениями некоторой кривой на плоскости  $W$ . У этих уравнений параметр  $\varphi$  является полярным углом точек единичной окружности на плоскости  $Z$ . Таким образом, эти параметрические уравнения определяют на плоскости  $W$  кривую, точки которой ставятся в соответствие точкам единичной окружности (2) на плоскости  $Z$  функцией (1). Что это за кривая?

Исключая в системе параметрических уравнений параметр  $\varphi$  (умножая второе уравнение на 2, возводя после этого оба уравнения в квадрат и суммируя их друг с другом), получаем

$$\frac{u^2}{4^2} + \frac{v^2}{2^2} = 1. \quad (3)$$

Это - уравнение эллипса с полуосями 4 и 2.

Следовательно, точкам единичной окружности (2) на плоскости  $Z$  функция (1) ставит в соответствие эллипс (3) на плоскости  $W$  (рис.6).

В этом случае принято говорить, что функция (1) *отображает* единичную окружность (2) на эллипс (3). При этом эллипс называют *образом*, а окружность - *прообразом*.

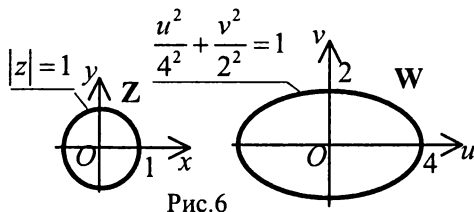


Рис.6

Возьмем теперь на плоскости  $Z$  окружность большего радиуса. Например,  $|z| = 2$ . Подставив уравнение этой окружности  $z = 2e^{i\varphi}$  в уравнение (1) и повторив предыдущие преобразования, получим

$$\frac{u^2}{(6,5)^2} + \frac{v^2}{(5,5)^2} = 1.$$

Этот эллипс окружает снаружи эллипс (3).

Аналогично, взяв окружность  $|z| = r < 1$ , получим эллипс, лежащий внутри эллипса (3).

Таким образом, функция (1) точкам каждой окружности с центром в начале координат на плоскости  $Z$  ставит в соответствие точки эллипса на плоскости  $W$ . Причем точки внешности окружности (2) отображаются на точки внешности эллипса (3), а точки внутренности окружности (2) отображаются на точки внутренности эллипса (3).

На примере покажем, что одна и та же функция  $w = f(z)$  отображает различные кривые плоскости  $Z$  на различные кривые плоскости  $W$ .

**Пример 2.** На какую кривую плоскости  $W$  отображает функция (1) биссектрису первого координатного угла плоскости  $Z$  (рис. 7)?

**Решение.** Запишем уравнение биссектрисы первого координатного угла плоскости  $Z$

$$z = \rho e^{i\pi/4}. \quad (4)$$

Подставим выражение (4) в функцию (1) и выполним преобразования

$$\begin{aligned} w = u + iv &= 3\rho e^{i\pi/4} + (1/\rho)e^{-i\pi/4} = \\ &= 3\rho[\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)] + (1/\rho)[\cos(\pi/4) - i\sin(\pi/4)] = \\ &= (\sqrt{2}/2)[3\rho + (1/\rho)] + i(\sqrt{2}/2)[3\rho - (1/\rho)]. \end{aligned}$$

Отсюда

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( 3\rho + \frac{1}{\rho} \right), \quad v = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( 3\rho - \frac{1}{\rho} \right). \quad (5)$$

Это - параметрические уравнения искомой кривой – уравнения образа на плоскости  $W$ , прообразом которой является биссектриса (4).

Исключив параметр  $\rho$  (возведя оба уравнения в квадрат и вычтя одно из другого), получим

$$\frac{u^2}{(\sqrt{6})^2} - \frac{v^2}{(\sqrt{6})^2} = 1. \quad (6)$$

Это - уравнение равнобокой гиперболы. Следовательно, функция (1) отображает биссектрису первого координатного угла плоскости  $Z$  на пра-

вую ветвь гиперболы (6): при  $\rho \in [0, \infty)$ , согласно (5),  $u \in [\sqrt{6}, \infty)$ ,  $v \in (-\infty, \infty)$ . Причем точка

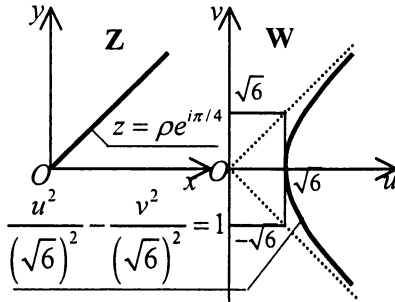


Рис.7

$(0, 0) \in Z$  отображается на точку  $(-\infty, \infty) \in W$ , точка  $(\sqrt{3}, \sqrt{3}) \in Z$  отображается на точку  $(\sqrt{6}, 0) \in W$ , точка  $(\infty, \infty) \in Z$  отображается на точку  $(\infty, \infty) \in W$ .

Когда говорят об отображении, аналогичных рассмотренным, функцию  $w = f(z)$  называют *отображающей функцией*.

## 2.2. Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Пусть  $w = f(z)$  - аналитическая функция, отображающая кривую  $L_z$  на плоскости  $Z$  на кривую  $L_w$  на плоскости  $W$  (рис.8).

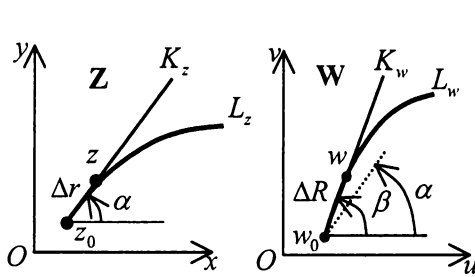


Рис.8

Возьмем на кривой  $L_z$  две близкие друг к другу точки  $z_0$  и  $z = z_0 + \Delta z$ , которые отображаются данной функцией  $w = f(z)$  на точки  $w_0 = f(z_0)$  и  $w = w_0 + \Delta w = f(z_0 + \Delta z)$ , лежащие на кривой  $L_w$ .

$\alpha$  - угол наклона касательной  $K_z$  к кривой  $L_z$  в точке  $z_0$ ,  $\beta$  - угол наклона касательной  $K_w$  к кривой  $L_w$  в точке  $w_0$ ,  $\Delta r = |\Delta z|$  - расстояние между точками  $z, z_0$ ,  $\Delta R = |\Delta w|$  - расстояние между точками  $w, w_0$ .

Точки  $z$  и  $z_0$  на кривой  $L_z$  возьмем так близко друг к другу, чтобы касательные  $K_z$  и  $K_w$  совпадали с секущими, проходящими через точки  $z, z_0$  и  $w, w_0$  соответственно. В этом случае

$$\left. \begin{aligned} \Delta z &= \Delta x + i\Delta y = \Delta r \cos \alpha + i\Delta r \sin \alpha = \Delta r (\cos \alpha + i \sin \alpha) = \Delta r e^{i\alpha}, \\ \Delta w &= \Delta u + i\Delta v = \Delta R \cos \beta + i\Delta R \sin \beta = \Delta R (\cos \beta + i \sin \beta) = \Delta R e^{i\beta}; \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Delta z = \Delta r e^{i\alpha}, \quad \Delta w = \Delta R e^{i\beta}. \quad (1)$$

Вычислим производную функции  $f(z)$  в точке  $z_0$  при  $z \rightarrow z_0$  по прямой  $K_z$ . По формулам (1)/1.5, (1)

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta R e^{i\beta}}{\Delta r e^{i\alpha}} = e^{i(\beta-\alpha)} \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta r} \Rightarrow$$

$$f'(z_0) = e^{i(\beta-\alpha)} \frac{dR}{dr}, \quad (2)$$

где  $dR$  - дифференциал длины дуги образа  $L_w$ ,  $dr$  - дифференциал длины дуги прообраза  $L_z$ . Из равенства (2) находим

$$\arg f'(z_0) = \beta - \alpha, \quad (3)$$

$$|f'(z_0)| = \frac{dR}{dr}. \quad (4)$$

**Обратим внимание**,  $\beta - \alpha$  - угол поворота касательной при переходе от прообраза к образу,  $dR/dr$  - коэффициент деформации прообраза при отображении (при  $dR/dr > 1$  растяжение, при  $dR/dr < 1$  сжатие).

**Теорема 1.** Модуль производной аналитической функции равен коэффициенту деформации при отображении, а аргумент производной аналитической функции равен углу поворота касательной при отображении.

**Доказательство.** Следует из формул (3), (4). #

**Определение.** Если при отображении углы между пересекающимися образами равны углам между их прообразами, то такое отображение называется *конформным*. Иначе говоря, при конформном отображении функцией  $w = f(z)$  образ в виде кривой  $L_w$ , проходящей через точку  $w_0 = f(z_0)$ , любого прообраза в виде кривой  $L_z$ , проходящей через точку  $z_0$ , поворачивается на один и тот же угол.

**Теорема 2.** Аналитические функции отображают конформно.

**Доказательство.** Пусть  $L_1, L_2$  - кривые на плоскости  $Z$ , пересекающиеся в точке  $z_0$ . Запишем производные аналитической функции  $f(z)$  в точке  $z_0$ , вычисленные по направлениям кривых  $L_1, L_2$ . По формуле (2)

$$f'(z_0)_1 = e^{i(\beta_1 - \alpha_1)} \left( \frac{dR}{dr} \right)_1, \quad f'(z_0)_2 = e^{i(\beta_2 - \alpha_2)} \left( \frac{dR}{dr} \right)_2.$$

Согласно определению производной 1/1.5, значение производной аналитической функции в точке  $z_0$  не зависит от направления, по которому она вычислена. Поэтому

$$f'(z_0)_1 = f'(z_0)_2 \Leftrightarrow e^{i(\beta_1 - \alpha_1)} \left( \frac{dR}{dr} \right)_1 = e^{i(\beta_2 - \alpha_2)} \left( \frac{dR}{dr} \right)_2.$$

Из равенства этих комплексных чисел следует равенство их модулей и



аргументов (с точностью до не имеющего в данном случае значения постоянного слагаемого  $2k\pi$ , где  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )

$$(dR/dr)_1 = (dR/dr)_2, \quad \beta_1 - \alpha_1 = \beta_2 - \alpha_2.$$

Равенство углов поворота  $\beta_1 - \alpha_1, \beta_2 - \alpha_2$  образов кривых  $L_1, L_2$  и называется конформным отображением. #

Попутно доказано равенство коэффициентов деформации по любому направлению в данной точке при конформном отображении.

### 2.3. Два примера отображения дробно-линейной функцией

Функция

$$w = \lambda \frac{z - a}{z - b}, \quad (1)$$

у которой  $\lambda$  - вещественная постоянная и  $a, b$  - комплексные постоянные, называется *дробно-линейной*.

Можно доказать, что функция (1) удовлетворяет условиям Коши-Римана (2)/1.5, т.е. является аналитической функцией. А это значит, что она, согласно теореме 2/2.2, осуществляет конформное отображение.

Решив уравнение (1) относительно  $z$ , получим

$$z = \frac{bw - \lambda a}{w - \lambda}. \quad (2)$$

Легко видеть, что функции (1), (2) являются однозначными. Следовательно, дробно-линейная функция (1) является однолистной. Отображение такой функцией также называется однолистным. В этом случае можно равнозначно говорить, как об отображении плоскости  $Z$  на плоскость  $W$ , так и, наоборот, об отображении плоскости  $W$  на плоскость  $Z$ .

**Отображение круга на круг.** Возьмем функцию (1) в виде

$$w = \lambda \frac{z - z_0}{z - \lambda^2 z_0}, \quad (3)$$

где  $z_0 = r e^{i\alpha}$  - фиксированная точка на плоскости  $Z$ ,  $\lambda = R/r$  - отношение вещественных положительных чисел, причем  $R > r$ .

Решим вопрос, на какую область плоскости  $W$  отображает функция (3) область плоскости  $Z$ , ограниченную окружностью  $\Gamma$  радиуса  $R$  с центром в начале координат?

**Решение.** Уравнение окружности  $\Gamma$

$$z = R e^{i\varphi}, \text{ где } 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (4)$$

Подставив  $z = R e^{i\varphi}$  в формулу (3), получим функцию, отображающую  $\Gamma \in Z$  на  $\gamma \in W$ . Выполнив эту подстановку вместе с подстановкой

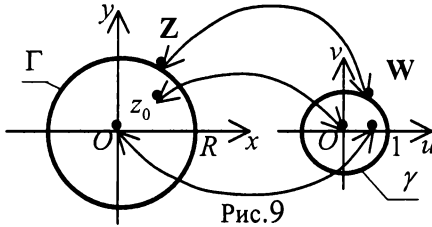
$z_0 = r e^{i\alpha}$ ,  $\lambda = R/r$ , получим

$$w = \frac{R}{r} \frac{R e^{i\varphi} - r e^{i\alpha}}{R e^{i\varphi} - (R/r)^2 r e^{i\alpha}} = \frac{(R \cos \varphi - r \cos \alpha) + i(R \sin \varphi - r \sin \alpha)}{(r \cos \varphi - R \cos \alpha) + i(r \sin \varphi - R \sin \alpha)}.$$

Квадрат модуля числителя этой дроби равен

$$R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi - \alpha)$$

и равен квадрату модуля ее знаменателя. Следовательно, модуль этой дроби равен единице, т.е.  $|w| = 1$ . Последнее означает, что кривая  $\gamma \in W$ , являющаяся образом окружности  $\Gamma \in Z$ , представляет собой единичную окружность с центром в начале координат плоскости  $W$  (рис.9).



Подставляя  $z = z_0$  в отображающую функцию (3), получаем  $w = 0$ . Это означает, что точка  $z_0$  отображается на точку начала координат плоскости  $W$ .

Подставляя  $z = 0$  в отображающую функцию (3), получаем  $w = r/R < 1$ . Это означает, что

начало координат плоскости  $Z$  отображается на точку, лежащую на вещественной оси  $u$ , причем внутри окружности  $\gamma$ .

Пусть  $0 < k < 1$ . Тогда  $z = k R e^{i\varphi}$  - уравнение окружности  $\Gamma_1 \in Z$ , лежащей внутри окружности  $\Gamma$ . Подставив уравнение  $z = k R e^{i\varphi}$  и  $z_0 = r e^{i\alpha}$ ,  $\lambda = R/r$  в отображающую функцию (3), получим функцию

$$w = \frac{R}{r} \frac{k R e^{i\varphi} - r e^{i\alpha}}{k R e^{i\varphi} - (R/r)^2 r e^{i\alpha}} = \frac{(k R \cos \varphi - r \cos \alpha) + i(k R \sin \varphi - r \sin \alpha)}{(k r \cos \varphi - R \cos \alpha) + i(k r \sin \varphi - R \sin \alpha)},$$

отображающую окружность  $\Gamma_1 \in Z$  на некоторое множество точек  $\gamma_1 \in W$ .

Выясним, где располагается множество точек  $\gamma_1 \in W$ ?

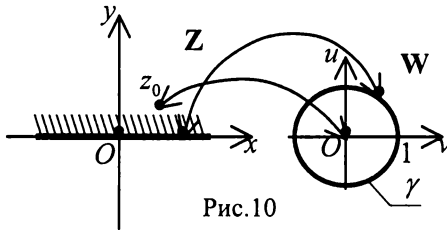
Вычисляя квадраты модулей числителя и знаменателя этой дроби и вычитая их друг из друга, получаем, что их разность равна  $-(1 - k^2)(R^2 - r^2) < 0$ . Из чего следует, что  $|w| < 1$ . А это означает, что множество точек  $\gamma_1$  располагается внутри единичной окружности  $\gamma$ .

Следовательно, точки внутренности  $\Gamma \in Z$  отображаются на точки внутренности  $\gamma \in W$ .

**Отображение полуплоскости на круг.** Возьмем функцию (1) в виде

$$w = \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}, \quad (5)$$

где  $z_0 = x_0 + iy_0$  - фиксированная точка верхней полуплоскости комплексной плоскости  $Z$ , т.е.  $\text{Im } z_0 = y_0 > 0$ .



На какую область плоскости  $W$  отображает функция (5) полуплоскость  $\text{Im } z \geq 0$  плоскости  $Z$ ?

**Решение.**  $y = 0$  - уравнение границы полуплоскости  $\text{Im } z \geq 0$  (рис.10). Подставив  $y = 0$  в функцию (5), получим функцию, отображающую

прямоугольную  $y = 0$  на плоскости  $Z$  на некоторую линию  $\gamma$  на плоскости  $W$ . Итак, подставляя  $y = 0$  и  $z_0 = x_0 + iy_0$  в функцию (5), получаем

$$w = \frac{x - x_0 - iy_0}{x - x_0 + iy_0}.$$

$$\text{Здесь } |x - x_0 - iy_0| = |x - x_0 + iy_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + y_0^2}.$$

Поэтому  $|w| = 1$ , т.е. модуль этой функции, отображающей прямую  $y = 0 \in Z$  на линию  $\gamma \in W$ , равен единице. Следовательно, линия  $\gamma \in W$  является единичной окружностью с центром в начале координат.

Подставляя  $z = z_0$  в функцию (5), получаем  $w = 0$ . Это означает, что точка  $z_0$  отображается на точку начала координат плоскости  $W$ .

Возьмем произвольную точку  $z_1 = x_1 + iy_1 \in \text{Im } z > 0$ ,  $z_1 \neq z_0$ .

Подставив  $z = z_1$  в отображающую функцию (5), получим

$$w = \frac{x_1 - x_0 + i(y_1 - y_0)}{x_1 - x_0 + i(y_1 + y_0)}.$$

Здесь

$$|y_1 - y_0| < |y_1 + y_0| \Rightarrow |x_1 - x_0 + i(y_1 - y_0)| < |x_1 - x_0 + i(y_1 + y_0)| \Rightarrow |w| < 1.$$

Это означает, что точка  $z_1 \in \text{Im } z > 0$  отображается на точку, расположенную внутри единичной окружности  $\gamma \in W$ . А так как точка  $z_1$  является произвольной точкой полуплоскости  $\text{Im } z > 0$ , то, следовательно, все точки полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  отображаются на точки внутренности единичной окружности  $\gamma \in W$ .

## Глава 3 ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

### 3.1. Определенный интеграл

**Определение.** Пусть на комплексной плоскости  $Z$  задана кривая  $C$  (замкнутая или незамкнутая). В каждой точке этой кривой определена непрерывная функция  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  комплексной переменной  $z = x + iy$ . Вследствие непрерывности функций  $u$  и  $v$  на кривой  $C$  могут быть вычислены криволинейные интегралы

$$\int_C u dx, \quad \int_C u dy, \quad \int_C v dx, \quad \int_C v dy.$$

Эти интегралы - вещественные числа. Составим из них комплексное число следующим образом:

$$\int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy.$$

Выполним преобразования

$$\begin{aligned} \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy &= \int_C u dx + i^2 v dy + i v dx + i u dy = \\ &= \int_C (u + iv) dx + (u + iv) i dy = \int_C (u + iv)(dx + i dy) = \int_C f(z) dz. \end{aligned}$$

Таким образом, получили

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy. \quad (1)$$

Левая часть этого равенства, определяемая его правой частью, называется *определенным интегралом от функции комплексной переменной*.

**Теорема 1.** Интеграл от функции комплексной переменной обладает всеми свойствами криволинейных интегралов.

**Доказательство.** Следует из того, что, согласно формуле (1), определенный интеграл от функции комплексной переменной является линейной комбинацией криволинейных интегралов второго рода от вещественных функций вещественных аргументов. #

Кривая  $C$  на комплексной плоскости может быть задана параметрическим уравнением  $z = z(t)$ , где  $t$  - вещественный параметр.

Действительно. Известно, что кривая на плоскости декартовых координат  $x, y$  может быть задана системой параметрических уравнений  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ . Образуя из них комплексную переменную  $z = x(t) + iy(t) = z(t)$ , получаем тем самым параметрическое уравнение кривой в комплексной форме.

Например,  $x = r \cos t$ ,  $y = r \sin t$ , где  $0 \leq t \leq 2\pi$ , являются параметрическими уравнениями окружности с центром в начале координат  $x, y$ . Образуя из этих уравнений комплексную переменную, получаем параметрическое уравнение окружности в комплексной форме:

$$z = x + iy = r \cos t + ir \sin t = r(\cos t + i \sin t) = re^{it} \Leftrightarrow z = re^{it}.$$

**Теорема 2.** Если кривая  $C$  задана параметрическим уравнением в комплексной форме  $z = z(t)$ , у которого параметр  $t$  изменяется в пределах от  $\alpha$  до  $\beta$ , то справедлива следующая формула:

$$\int_C f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)] z'(t) dt. \quad (2)$$

**Доказательство.** По формуле вычисления криволинейных интегралов второго рода имеем

$$\int_C u dx - v dy = \int_{\alpha}^{\beta} \{u[x(t), y(t)]x'(t) - v[x(t), y(t)]y'(t)\} dt,$$

$$\int_C v dx + u dy = \int_{\alpha}^{\beta} \{v[x(t), y(t)]x'(t) + u[x(t), y(t)]y'(t)\} dt.$$

Подставив эти выражения в формулу (1) и выполнив очевидные преобразования, получим формулу (2). #

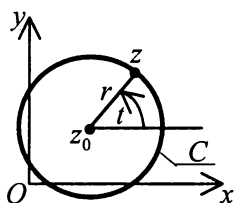


Рис. 11

**Пример.** Вычислить  $\int_C \frac{dz}{z - z_0}$ ,  $C$  - окружность радиуса  $r$  с центром в точке  $z_0$  (рис. 11).

**Решение.**  $z = z_0 + re^{it}$ , где  $t \in [0, 2\pi]$ , - уравнение окружности  $C$ . По формуле (2)

$$\int_C \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{r e^{it} i dt}{r e^{it}} = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

**Пример.** Вычислить  $\int_C \operatorname{Re} z dz$ ,  $C$  - отрезок

прямой, соединяющей точки  $z = 0$  и  $z_0 = 1 + i$ .

**Решение.**  $z = \rho e^{i\pi/4}$ , где  $\rho \in [0, \sqrt{2}]$ , - уравнение отрезка  $C$ .

$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} \rho e^{i\pi/4} = \rho \sqrt{2}/2$ . По формуле (2)

$$\int_C \operatorname{Re} z dz = \int_0^{\sqrt{2}} \rho \left( \sqrt{2}/2 \right) e^{i\pi/4} d\rho =$$

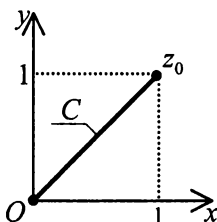


Рис. 12

$$= \sqrt{2} e^{i\pi/4} \rho^2 / 4 \Big|_0^{\sqrt{2}} = \sqrt{2} e^{i\pi/4} / 2 = (1+i)/2 .$$

### 3.2. Теоремы Коши

**Теорема 1.** Если функция  $f(z)$  является аналитической в односвязной области  $G$  и в точках ее границы  $\Gamma$ , то

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0 . \quad (1)$$

**Доказательство.** Известно, что если функции  $P = P(x, y)$ ,  $Q = Q(x, y)$  связаны равенством

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} , \quad (2)$$

то выражение

$$Pdx + Qdy \quad (3)$$

является полным дифференциалом от некоторой функции.

Так как  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  - аналитическая по условию теоремы функция, то ее действительная  $u$  и мнимая  $v$  части удовлетворяют условиям Коши-Римана (2)/1.5

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} . \quad (4)$$

Если принять  $u = Q$ ,  $v = P$ , то первое из равенств (4) примет вид (2), а выражение  $vdx + udy$  примет вид (3).

Если принять  $u = P$ ,  $v = -Q$ , то второе из равенств (4) примет вид (2), а выражение  $udx - vdy$  примет вид (3).

Следовательно, выражения  $vdx + udy$  и  $udx - vdy$  являются полными дифференциалами.

По формуле (1)/3.1

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \oint_{\Gamma} udx - vdy + i \oint_{\Gamma} vdx + udy .$$

Известно, что криволинейный интеграл от полного дифференциала по замкнутому контуру равен нулю. Справа в последнем равенстве - криволинейные интегралы по замкнутому контуру от полных дифференциалов. Следовательно, справедливо равенство (1). #

**Теорема 2.** Если в многосвязной области  $G$ , ограниченной извне контуром  $\Gamma$ , а изнутри контурами  $C_1, C_2, \dots, C_n$ ,  $f(z)$  - аналитическая функция, то

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz + \dots + \oint_{C_n} f(z) dz. \quad (5)$$

**Доказательство.** Рассмотрим трехсвязную область  $G$  (рис.13).

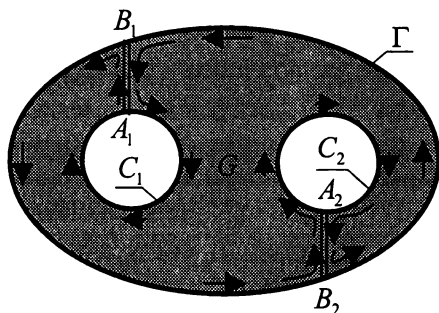


Рис.13

Разрежем область  $G$  линиями  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$ , соединяющими контуры соответственно  $C_1$  и  $C_2$  с контуром  $\Gamma$ . В результате этого получим односвязную область. Интеграл по границе, указанной на рисунке стрелками, согласно теореме 1, равен нулю и равен сумме интегралов по участкам этого замкнутого контура. Полагая положительным направление интегрирования, при котором область, ограни-

ченная этим контуром, остается слева от движущейся по контуру точки, и, начиная с точки  $A_1$ , получим

$$\int_{A_1B_1} + \int_{B_1A_1} + \int_{A_2B_2} - \oint_{C_2} + \int_{A_2B_2} + \int_{B_2A_1} + \int_{B_1A_1} - \oint_{C_1} = 0.$$

Интегралы по  $A_1B_1$ ,  $B_1A_1$  и  $A_2B_2$ ,  $B_2A_2$  попарно взаимно уничтожаются, так как представляют собой криволинейные интегралы второго рода по одной и той же кривой, по взаимно противоположным направлениям.

Сумма интегралов по кривым  $B_1B_2$  и  $B_2B_1$  равна интегралу по контуру  $\Gamma$  с положительным знаком.

В результате предыдущее равенство преобразуется к виду

$$\oint_{\Gamma} = \oint_{C_1} + \oint_{C_2}, \text{ что и требовалось доказать. \#}$$

Теоремы 1, 2 принято называть *теоремами Коши*.

**Теорема 3.** Если  $f(z)$  - аналитическая функция в односвязной области  $G$ ,

то интеграл от этой функции не зависит от формы пути интегрирования, а зависит только от точек начала и конца пути интегрирования, принадлежащих области  $G$ .

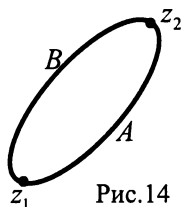


Рис.14

**Доказательство.** Проведем через точки  $z_1, z_2 \in G$  замкнутый контур  $\Gamma$ , составленный из двух кривых  $z_1Az_2$  и  $z_2Bz_1$  (рис.14). По теореме 1

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0 \Rightarrow \oint_{\Gamma} f(z) dz = \int_{z_1Az_2} f(z) dz + \int_{z_2Bz_1} f(z) dz =$$

$$= \int_{z_1 A z_2} f(z) dz - \int_{z_1 B z_2} f(z) dz = 0 \Rightarrow \int_{z_1 A z_2} f(z) dz = \int_{z_1 B z_2} f(z) dz . \#$$

### 3.3. Неопределенный интеграл

**Определение 1.** Пусть  $f(z)$  - функция, аналитическая в односвязной области  $G$ . От этой функции в  $G$  может быть вычислен определенный интеграл по любой кривой  $C$ . Причем, согласно теореме 3/3.2, этот интеграл не зависит от формы пути интегрирования, а зависит только от точек начала и конца кривой  $C$ . Пусть  $z_0$  и  $z$  - точки из  $G$ , представляющие собой начало и конец пути интегрирования  $C$ . Положим, что  $z_0$  - фиксированная, а  $z$  - текущая точки. Интеграл по кривой  $C$ , соединяющей точки  $z_0$  и  $z$ , обозначают  $\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$  и называют *неопределенным интегралом*.

Для удобства, что проявится позже, комплексная переменная  $z$  под знаком интеграла переобозначена в комплексную переменную  $\zeta$ .

Очевидно, что неопределенный интеграл является функцией комплексной переменной  $z$

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta . \quad (1)$$

**Определение 2.** Функция  $F(z)$ , определяемая равенством (1), называется *первообразной* функции  $f(z)$ .

**Теорема 1.** Если функция  $f(z) = u + iv$  является аналитической в односвязной области  $G$ , то ее первообразная  $F(z)$  также является аналитической в области  $G$  функцией и справедливо равенство

$$F'(z) = f(z) . \quad (2)$$

**Доказательство.** Пусть точки  $z_0, z$  лежат внутри области  $G$ . По формуле (1)/3.1

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} u dx - v dy + i \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} v dx + u dy .$$

Как установлено при доказательстве теоремы 1/3.2, оба последних интеграла являются интегралами от полных дифференциалов. Поэтому

$$u dx - v dy = dP, \quad v dx + u dy = dQ . \quad (3)$$

Сделав замену подынтегральных выражений при помощи этих равенств и интегрируя, получим

$$F(z) = P(x, y) - P(x_0, y_0) + i[Q(x, y) - Q(x_0, y_0)] .$$



Обозначая

$$P(x, y) = U + P(x_0, y_0), \quad Q(x, y) = V + Q(x_0, y_0), \quad (4)$$

получаем

$$F(z) + U + iV. \quad (5)$$

Запишем полные дифференциалы от  $P$  и  $Q$ .

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy, \quad dQ = \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy.$$

Сравнивая эти равенства с равенствами (3), находим

$$u = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial P}{\partial y}; \quad v = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad u = \frac{\partial Q}{\partial y}. \quad (6)$$

Отсюда

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}.$$

Подставив сюда выражения  $P$  и  $Q$  по формулам (4), получим

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

Эти равенства представляют собой соотношения Коши-Римана для функции (5). Следовательно,  $F(z)$  - аналитическая функция.

Докажем теперь справедливость равенства (2).

Так как (5) - аналитическая функция, то производная от нее, согласно определению 1/1.5 может быть вычислена по любому пути. Возьмем путь  $y = const$ . Тогда

$$F'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Подставив сюда  $U, V$ , найденные из равенств (4), будем иметь

$$F'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Подстановка  $\partial P / \partial x = u$ ,  $\partial Q / \partial x = v$  из равенств (6) дает

$$F'(z) = u + iv = f(z), \text{ что и требовалось доказать. \#}$$

**Теорема 2.** Если  $f(z)$  - аналитическая в односвязной области  $G$  функция, точки  $z_1, z_2$  лежат в области  $G$  и функция  $F(z)$  является первообразной функции  $f(z)$ , то справедлива формула

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta) d\zeta = F(z_2) - F(z_1), \quad (7)$$

называемая формулой Ньютона-Лейбница.

**Доказательство.** Пусть  $z_0 \in G$ . Тогда по формуле (1)

$$F(z_2) = \int_{z_0}^{z_2} f(\zeta) d\zeta, \quad F(z_1) = \int_{z_0}^{z_1} f(\zeta) d\zeta.$$

Вычитая из первого равенства второе и применяя разбиение пути интегрирования на участки, согласно которому

$$\int_{z_0}^{z_2} f(\zeta) d\zeta = \int_{z_0}^{z_1} f(\zeta) d\zeta + \int_{z_1}^{z_2} f(\zeta) d\zeta \Leftrightarrow$$

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta) d\zeta = \int_{z_0}^{z_2} f(\zeta) d\zeta - \int_{z_0}^{z_1} f(\zeta) d\zeta,$$

учитывая теорему 1, получим формулу (7). #

### 3.4. Интеграл Коши

**Теорема 1.** Пусть  $\Gamma$  - замкнутая кривая, целиком лежащая в односвязной области  $G$ , и окружающая точку  $z_0$ ;  $f(z)$  - аналитическая в области  $G$  функция. Тогда справедливо равенство

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z - z_0}. \quad (1)$$

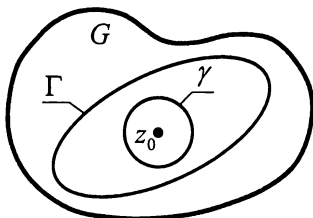


Рис.15

**Доказательство.** Образует двусвязную область, ограниченную снаружи контуром  $\Gamma$ , а изнутри - окружностью  $\gamma$  с центром в точке  $z_0$  (рис.15). Так как  $f(z)$  - аналитическая в области  $G$  функция, то  $f(z)/(z - z_0)$  - также аналитическая в области  $G$  функция за исключением точки  $z_0$ . Следовательно, функция  $f(z)/(z - z_0)$  является аналитической в кольцевой области, ограниченной контурами  $\Gamma$  и  $\gamma$ . По теореме

2/3.2

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z - z_0} = \oint_{\gamma} \frac{f(z) dz}{z - z_0}. \quad (2)$$

Вычислим правую часть этого равенства по формуле (2)/3.1.  $z = z_0 + re^{it}$  - уравнение окружности  $\gamma$ , где  $r$  - ее радиус и  $t \in [0, 2\pi]$ .

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z) dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} re^{it} i dt = i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

Равенство (2) справедливо для окружности  $\gamma$  с как угодно малым радиусом  $r$ . Полагая  $r \rightarrow 0$ , получаем

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0).$$

Подставив этот результат в (2), получим формулу (1). #

Равенство (1) справедливо для любых точек  $z_0 \in G$ , которые можно окружить замкнутым контуром  $\Gamma$ , целиком лежащим внутри  $G$ . Чтобы подчеркнуть это, формулу (1) записывают в виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}, \quad (3)$$

где  $z$  - любая точка внутри  $\Gamma$ .

Эта формула называется *интегралом Коши*.

**Теорема 2.** Производная  $n$ -го порядка от интеграла Коши определяется формулой

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}. \quad (4)$$

**Доказательство.** Производная от интеграла (3) по  $z$  получается по правилу дифференцирования определенного интеграла по параметру, которым в данном случае является переменная  $z$ . Поэтому, заменив в формуле (3) дробь  $1/(\zeta - z)$  на ее  $n$ -ю частную производную по  $z$

$$\left( \frac{1}{\zeta - z} \right)^{(n)} = \frac{n!}{(\zeta - z)^{n+1}},$$

получим формулу (4). #

**Пример.** Вычислить  $I = \oint_{\Gamma} \frac{e^z dz}{z^3(z-1)}$ , где  $\Gamma: |z-1|=2$ .

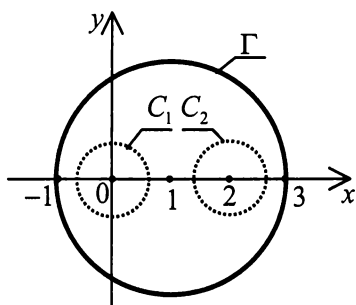


Рис.16

**Решение.** Внутри контура интегрирования  $\Gamma$  знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль в точках  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 1$ . Поэтому будем рассматривать область, ограниченную снаружи окружностью  $\Gamma$ , а изнутри двумя окружностями

$$C_1: |z| = r_1, \quad C_2: |z-1| = r_2,$$

радиусы которых  $r_1, r_2$  таковы, что между всеми тремя окружностями  $C_1, C_2, \Gamma$

имеются зазоры. Получилась трехсвязная область (рис.16). В ней подынте-

гральная функция является аналитической. Поэтому по теореме Коши 2/3.2

$$I = \oint_{\Gamma} \frac{e^z dz}{z^3(z-1)} = \oint_{C_1} \frac{e^z dz}{z^3(z-1)} + \oint_{C_2} \frac{e^z dz}{z^3(z-1)}.$$

Применяя формулы (3), (4), находим

$$\oint_{C_1} \frac{e^z dz}{z^3(z-1)} = \oint_{C_1} \frac{e^z / z^3}{z-1} dz = 2\pi i e^z / z^3 \Big|_{z=1} = i2\pi e,$$

$$\begin{aligned} \oint_{C_2} \frac{e^z dz}{z^3(z-1)} &= \oint_{C_2} \frac{e^z / (z-1)}{(z-0)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left( \frac{e^z}{z-1} \right) \Bigg|_{z=0} = \\ &= i\pi \frac{e^z (z^2 - 4z + 5)}{(z-1)^3} \Bigg|_{z=0} = -i5\pi. \end{aligned}$$

Ответ:  $I = i\pi(2e - 5)$ .

**Теорема 3.** Пусть замкнутый контур  $\Gamma$  целиком лежит в области, во всех точках которой функция  $f(z)$  является аналитической, а точка  $z_1$  лежит вне области, ограниченной контуром  $\Gamma$ . Тогда

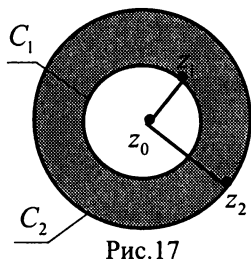
$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z - z_1} = 0. \quad (5)$$

**Доказательство.** По условию теоремы  $f(z)$  - аналитическая функция в области, ограниченной контуром  $\Gamma$ . Так как  $z_1$  лежит вне области, ограниченной контуром  $\Gamma$ , то во всех точках этой области  $z - z_1 \neq 0$ . Поэтому во всех точках области, ограниченной контуром  $\Gamma$ , функция  $f(z)/(z - z_1)$  является аналитической. Согласно теореме Коши 1 параграфа 3.2, имеет место равенство (5). #

## Глава 4

# ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ И ВЫЧЕТЫ

### 4.1. Ряды аналитических функций



Возьмем concentric окружности  $C_1, C_2$  с центром в точке  $z_0$  (рис. 17).

Внутренняя окружность  $C_1$  проходит через точку  $z_1$ . Ее уравнение

$$|z - z_0| = |z_1 - z_0|.$$

Внешняя окружность  $C_2$  проходит через точку  $z_2$ . Ее уравнение

$$|z - z_0| = |z_2 - z_0|.$$

**Теорема 1.** Если степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (1)$$

где  $c_n$  - коэффициенты ряда - комплексные постоянные, сходится в некоторой точке  $z_1$ , то он абсолютно сходится при всех  $z$ , удовлетворяющих неравенству  $|z - z_0| \leq |z_1 - z_0|$ . Если ряд (1) расходится в точке  $z_2$ , то он расходится при всех  $z$ , удовлетворяющих неравенству  $|z - z_0| \geq |z_2 - z_0|$ .

**Доказательство.** Пусть ряд (1) сходится в точке  $z_1$ . Это значит, что сходится числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_1 - z_0)^n. \quad (2)$$

Из сходимости этого ряда следует ограниченность его членов, т.е. существование такого вещественного числа  $M > 0$ , что для всех членов ряда (2) выполняется неравенство

$$|c_n (z_1 - z_0)^n| \leq M. \quad (3)$$

Рассмотрим случай, когда точка  $z$  располагается строго внутри окружности  $|z - z_0| = |z_1 - z_0|$ . Тогда  $z$  удовлетворяет неравенство

$$|z - z_0| < |z_1 - z_0| \Leftrightarrow \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right| < 1. \quad (4)$$

Числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n \quad (5)$$

является рядом геометрической прогрессии со знаменателем (4), меньшим 1. Поэтому он сходится.

Преобразуем ряд (1) к виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_1 - z_0)^n \left( \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right)^n. \quad (6)$$

Рассмотрим ряд, составленный из модулей членов этого ряда,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| c_n (z_1 - z_0)^n \right| \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n. \quad (7)$$

Согласно (3), члены рядов (5) и (7) подчинены неравенству

$$\left| c_n (z_1 - z_0)^n \right| \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n \leq M \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n,$$

Отсюда по признаку сравнения рядов с неотрицательными членами из сходимости ряда (5) следует сходимость ряда (7). Последнее означает (по признаку абсолютной сходимости) абсолютную сходимость ряда (6) или, что равносильно, ряда (1).

Негативная часть теоремы доказывается от противного. #

Рассмотренная теорема называется *теоремой Абеля*.

На рис.17 изображены окружности, о которых идет речь в теореме Абеля. В точках окружности меньшего радиуса и внутри нее ряд сходится, в точках окружности большего радиуса и вне нее ряд расходится. Естественно заключить, что между этими двумя окружностями располагается третья окружность, внутри которой ряд сходится, а вне нее расходится.

**Следствие 1.** Область сходимости степенного ряда с комплексными членами (1) представляет собой круг с центром в точке  $z_0$ , называемый *кругом сходимости*, а его центр  $z_0$  - *центром сходимости*.

**Определение 1.** Функциональный ряд с комплексными членами

$$\sum_{i=1}^{\infty} F_i(z) \quad (8)$$

называется *равномерно сходящимся* к функции  $f(z)$  в области  $G$ , если для как угодно малого вещественного числа  $\varepsilon > 0$  можно указать такой номер  $N$ , что для любого  $z \in G$  при  $n \geq N$  выполняется неравенство

$$|f(z) - S_n(z)| < \varepsilon, \quad (9)$$

где  $S_n(z) = \sum_{i=1}^n F_i(z)$  - частичная сумма ряда (8).

**Определение 2.** Сходящийся числовой ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \quad (10)$$

с вещественными положительными членами  $a_i$  называется *мажорантой* ряда (8) в области  $G$ , если для любого  $z \in G$  выполняется неравенство

$$|F_i(z)| \leq a_i. \quad (11)$$

**Теорема 2.** Мажорируемые ряды сходятся равномерно. (Признак Вейерштрасса.)

**Доказательство.** Пусть числовой ряд (10) является мажорантой ряда (8) в области  $G$ .

Остаточные члены рядов (8) и (10) соответственно

$$R_n(z) = \sum_{i=n+1}^{\infty} F_i(z), \quad r_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i.$$

Из сходимости ряда (10) следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ . А это значит, что для как угодно малого  $\varepsilon > 0$  можно указать такой номер  $N$ , что при  $N > n$  будет выполняться неравенство

$$r_n < \varepsilon. \quad (12)$$

Из неравенства (11) следует неравенство

$$|R_n(z)| \leq r_n,$$

которое с учетом неравенства (12) преобразуется в неравенство

$$|R_n(z)| < \varepsilon. \quad (13)$$

Остаточный член ряда  $R_n(z)$  равен разности между суммой ряда и его частичной суммой, т.е.  $R_n(z) = f(z) - S_n(z)$ . Подставив это выражение в неравенство (13), получим неравенство (9), означающее, что рассматриваемый ряд (8) сходится равномерно. #

**Следствие 2.** Степенные ряды (1) во внутренних точках круга сходимости сходятся равномерно.

**Доказательство.** Обратимся к доказательству теоремы 1 - теоремы Абеля. Пусть  $|z - z_0| \leq |z_1 - z_0|$  - круг сходимости ряда (1). Тогда ряд (5) является мажорантой ряда (1) и, следовательно, согласно признаку Вейерштрасса, степенной ряд (1) сходится равномерно. #

**Теорема 3.** Если ряд (8) равномерно сходится к  $f(z)$  в  $G$  и  $C$  - любая кривая, целиком лежащая в  $G$ , то интеграл от функции  $f(z)$  по  $C$  можно вычислить почленным интегрированием ряда (8), т.е.

$$\int_C f(z) dz = \sum_{i=1}^{\infty} \int_C F_i(z) dz. \quad (14)$$

**Теорема 4.** Пусть в области  $G$  все члены ряда (8)  $F_i(z)$  являются аналитическими функциями, и ряд (8) равномерно сходится к функции  $f(z)$ . Тогда  $f(z)$  является аналитической в области  $G$  функцией, ее производная любого порядка  $k$  может быть получена почленным дифференцированием ряда (8), т.е.

$$f^{(k)}(z) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i^{(k)}(z), \quad (15)$$

а ряд (15) равномерно сходится в области  $G$ .

В качестве нестрогого доказательства этих двух теорем можно предложить следующие соображения. Обратим внимание, что равномерно сходящийся ряд - это такой функциональный ряд, который в области его сходимости может быть заменен его частичной суммой, которая может аппроксимировать сумму ряда с какой угодно точностью. Причем, чем больше членов в частичной сумме, тем выше точность аппроксимации. Это дает возможность заменять равномерно сходящийся ряд частичной суммой и, как следствие этого, поступать с ним как с обыкновенной суммой. В частности, почленно интегрировать и дифференцировать, а также оценивать аналитичность его суммы.

**Теорема 5.** Если функция  $f(z)$  является аналитической в круге

$$|z - z_0| < R, \quad (16)$$

то она может быть представлена в этом круге сходящимся рядом

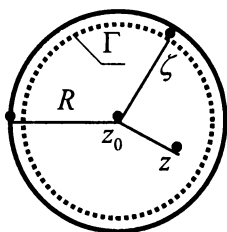


Рис.18

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad (17)$$

называемым *рядом Тейлора*.

**Доказательство.** Внутри круга (16) проведем окружность  $\Gamma$  с центром в точке  $z_0$  (рис.18). Пусть  $z$  - любая точка внутри окружности  $\Gamma$  и  $\zeta$  - текущая точка на ней. По формуле (3)/3.4

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \quad (18)$$

Выполним тождественное преобразование

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}. \quad (19)$$

Так как  $z$  - точка внутри  $\Gamma$ , а  $\zeta$  - точка на ней, то

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1. \quad (20)$$



Ряд геометрической прогрессии со знаменателем (20), меньшим 1, сходится. Запишем такой ряд с первым членом, равным 1. Воспользовавшись формулой суммы ряда геометрической прогрессии, будем иметь

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right|^n = \frac{1}{1 - \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right|}. \quad (21)$$

Отсюда по теореме 2/1.2 об абсолютной сходимости ряда имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}. \quad (22)$$

Используя полученное равенство для подстановки в выражение (19), преобразуем подынтегральную функцию в формуле (18) к виду

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n. \quad (23)$$

Умножив обе части равенства (21) на  $|f(\zeta)/(\zeta - z_0)|$ , получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \right| = \frac{\left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \right|}{1 - \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right|}. \quad (24)$$

Этот ряд сходится во всех точках  $\zeta$ , лежащих на окружности  $\Gamma$ , так как его сумма - правая часть этого равенства - принимает только конечные значения. Из сходимости ряда (24), согласно теореме 2/1.2, следует абсолютная сходимость ряда (23) при всех  $\zeta \in \Gamma$ .

Пусть  $z_1$  - точка, лежащая внутри окружности  $\Gamma$ . Тогда при всех  $z$ , удовлетворяющих неравенство  $|z - z_0| \leq |z_1 - z_0|$ , выполняется неравенство

$$\left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \right| \leq \left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z_1 - z_0)^n \right|$$

означающее, что если в равенстве (24) положить  $z = z_1$ , то ряд (24) окажется мажорантой ряда (23) при  $|z - z_0| \leq |z_1 - z_0|$ . Поэтому ряд (23), согласно признаку Вейерштрасса, сходится равномерно и поэтому, согласно теореме 3, его можно почленно интегрировать. Интегрируя, получаем

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}. \quad (25)$$

Подставив этот результат в (18) и воспользовавшись формулой  $n$ -й производной от интеграла Коши (формула (4)/3.4), получим формулу (17). #

**Теорема 6.** Если функция  $f(z)$  является аналитической в кольцевой области

$$r < |z - z_0| < R, \quad (26)$$

то она может быть представлена в этом кольце сходящимся рядом

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (27)$$

называемым *рядом Лорана*, где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \quad (28)$$

$\Gamma$  - окружность с центром в точке  $z_0$ , лежащая внутри кольца (26).

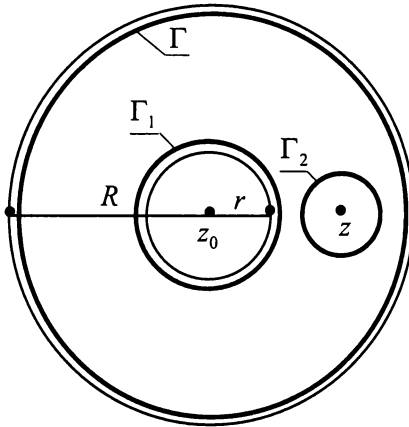


Рис.19

**Доказательство.** В кольцевой области (26) проведем две concentric окружности  $\Gamma$  и  $\Gamma_1$  с центром в точке  $z_0$  (рис.19). В кольцевой области между  $\Gamma$  и  $\Gamma_1$  возьмем произвольную точку  $z$  и выделим ее окрестность контуром  $\Gamma_2$ . Рассмотрим трехсвязную область, ограниченную снаружи контуром  $\Gamma$ , а изнутри - контурами  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Пусть  $\zeta$  - текущая точка этой области, включая ее границы  $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ . По теореме 2/3.2

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \oint_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \oint_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \quad (29)$$

Рассмотрим интеграл по контуру  $\Gamma_2$ .

Так как  $z$  - точка внутри области, ограниченной контуром  $\Gamma_2$ , то по интегральной формуле Коши (3)/3.4

$$\oint_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i f(z). \quad (30)$$

Рассмотрим интеграл по контуру  $\Gamma$ .

Так как точки  $z$  и  $z_0$  лежат внутри окружности  $\Gamma$ , точка  $\zeta$  лежит на  $\Gamma$ , то справедливо неравенство

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1,$$

которое совпадает с неравенством (20) в доказательстве предыдущей теоремы. Следовательно, над интегралом по контуру  $\Gamma$  в равенстве (29) можно выполнить такое же преобразование, как и над интегралом (18). В результате чего получим формулу (25). Запишем ее

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}. \quad (31)$$

Рассмотрим интеграл по контуру  $\Gamma_1$ .

Точка  $z$  лежит во внешности окружности  $\Gamma_1$ , точка  $z_0$  лежит внутри нее, а точка  $\zeta$  лежит на контуре  $\Gamma_1$ . Поэтому справедливо неравенство

$$\left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| < 1.$$

Выполним преобразование, аналогичное преобразованию (19),

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}}.$$

Очевидно, что так же, как при доказательстве предыдущей теоремы было получено равенство (22), можно получить

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}}$$

(для этого достаточно в (22)  $z$  и  $\zeta$  поменять ролями).

В результате подынтегральная функция преобразуется к виду

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = -\sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^{-(n+1)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n}} = -\sum_{n=-1}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Приемом, аналогичным примененному при доказательстве предыдущей теоремы, можно доказать, что полученный ряд сходится равномерно и, следовательно, его можно почленно интегрировать. Что дает

$$\oint_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = -\sum_{n=-1}^{\infty} (z - z_0)^n \oint_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} (z - z_0)^n \oint_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Окружности  $\Gamma$  и  $\Gamma_1$  являются границами двусвязной области, внутри которой  $f(z)$  - аналитическая функция. Точка  $z_0$  лежит вне этой кольцевой области, поэтому  $f(z)/(z - z_0)^{n+1}$  - аналитическая функция в рассмат-

риваемой двусвязной кольцевой области при любом целом  $n \in (-\infty, -1)$ . Вследствие чего, согласно теореме Коши для многосвязной области (теорема 2/3.2), имеем

$$\oint_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

С учетом этого предыдущее равенство принимает вид

$$\oint_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} (z - z_0)^n \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}. \quad (32)$$

Подставив выражения (30), (31), (32) в (29), получим ряд (27). #

## 4.2. Нули и изолированные особые точки аналитической функции

**Определение 1.** Пусть  $f(z)$  - аналитическая функция в области  $G$ . Точка  $z_0 \in G$  называется нулем функции  $f(z)$ , если  $f(z_0) = 0$ .

Если  $f(z_0) = 0$ ,  $f'(z_0) = 0$ ,  $f''(z_0) = 0, \dots, f^{(k-1)}(z_0) = 0$ , то точка  $z_0$  называется нулем  $k$ -го порядка.

Ноль 1-го порядка называется также *простым нулем*.

**Теорема 1.** Пусть  $z_0$  - нуль  $k$ -го порядка аналитической функции  $f(z)$ . Тогда  $f(z)$  представима в виде

$$f(z) = (z - z_0)^k \varphi(z), \quad (1)$$

где  $\varphi(z)$  - аналитическая функция в точке  $z_0$  и ее окрестности.

**Доказательство.** Так как  $f(z)$  аналитическая функция в окрестности точки  $z_0$ , то, согласно теореме 5/4.1, ее можно представить рядом Тейлора

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}. \quad (2)$$

По условию теоремы

$$f(z_0) = 0, \quad f'(z_0) = 0, \quad f''(z_0) = 0, \dots, \quad f^{(k-1)}(z_0) = 0.$$

С учетом этого ряд (2) принимает вид

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^k \left[ c_k + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n+k} (z - z_0)^n \right].$$

Отсюда, обозначив

$$\varphi(z) = c_k + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n+k} (z - z_0)^n,$$

получим формулу (1).

Записанный ряд сходится, так как получен делением всех членов схо-

дящегося ряда (2) на один и тот же бином  $(z - z_0)^k$ . Он является степенным рядом и поэтому, согласно следствию 2/4.1, сходится равномерно. Биномиальные множители его членов  $(z - z_0)^n$  являются аналитическими функциями. Это позволяет заключить, опираясь на теорему 4/4.1, что  $\varphi(z)$  - аналитическая в некоторой круговой окрестности точки  $z_0$  функция. #

**Определение 2.** Точки  $z$ , в которых функция  $f(z)$  определена, непрерывна и является аналитической, называются *правильными точками* этой функции. Точки  $z$ , в которых хотя бы одно из трех перечисленных условий не выполняется, называются *особыми точками* функции  $f(z)$ .

**Определение 3.** Если особую точку  $z_0$  функции  $f(z)$  можно окружить окружностью ненулевого радиуса, внутри которой все точки правильные за исключением точки  $z_0$ , то точка  $z_0$  называется *изолированной особой точкой* функции  $f(z)$ .

Из этого определения следует, что около изолированной особой точки  $z_0$  функции  $f(z)$  можно выделить кольцевую область, в которой все точки правильные и поэтому в этой кольцевой области, согласно теореме 5/4.1, функция  $f(z)$  представима рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (3)$$

где коэффициенты  $c_n$  определяются формулой (28)/4.1.

Возможны 3 случая.

**Случай 1.** Функция  $f(z)$  не определена в точке  $z_0$  и ряд (3) не содержит членов с отрицательными степенями, т.е.

$$c_{-1} = c_{-2} = \dots = c_{-n} = \dots = 0.$$

В этом случае значению  $f(z)$  в точке  $z_0$  присваивается значение коэффициента  $c_0$ , т.е. принимается, что  $f(z_0) = c_0$ . После этого точка  $z_0$  перестает быть особой.

Такая особая точка называется *устранимой*.

**Пример.** Функция  $f(z) = (\sin z) / z$  в точке  $z = 0$  не определена, так как  $f(0) = \frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0} = ?$ .

Разложение  $(\sin z) / z$  в ряд (3) в окрестности точки  $z = 0$ :

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2(n-1)}}{(2n-1)!} + \dots.$$

Ряд не содержит членов с отрицательными степенями. Приняв

$(\sin 0) / 0 = 1$ , устраним тем самым особую точку  $z = 0$ .

**Случай 2.** Характеризуется тем, что  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$  при  $z \rightarrow z_0$  и разложение функции в ряд (3) содержит конечное число  $k$  членов с отрицательными степенями, т.е. разложение (3) имеет вид

$$f(z) = c_{-k}(z - z_0)^{-k} + \dots + c_{-2}(z - z_0)^{-2} + c_{-1}(z - z_0)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n. \quad (4)$$

**Определение 4.** Изолированная особая точка  $z_0$  функции  $f(z)$  называется *полюсом  $k$ -го порядка*, если разложение  $f(z)$  в ряд Лорана в окрестности точки  $z_0$  имеет вид (4).

Полюс первого порядка называется *простым полюсом*.

**Теорема 2.** Если  $z_0$  является полюсом  $k$ -го порядка функции  $f(z)$ , то функция  $f(z)$  представима в виде

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} \psi(z), \quad (5)$$

где  $\psi(z)$  - аналитическая функция в точке  $z_0$  и ее окрестности.

**Доказательство.** Ряд (4) можно преобразовать к виду

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-k}(z - z_0)^n.$$

Если в этом равенстве обозначить

$$\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-k}(z - z_0)^n,$$

то получится равенство (5). Осталось доказать, что  $\psi(z)$  - аналитическая функция в точке  $z_0$  и некоторой ее окрестности.

Ряд, обозначенный  $\psi(z)$ , сходится. Это следует из того, что он получен путем умножения сходящегося ряда (4) на  $(z - z_0)^k$ . Он является степенным рядом и поэтому, согласно следствий 1,2/4.1, в некотором круге с центром в точке  $z_0$  сходится равномерно. А так как его члены - аналитические в этом круге функции, то по теореме 4/4.1 его сумма  $\psi(z)$  - аналитическая в круге сходимости функция. #

**Теорема 3.** Если точка  $z_0$  - нуль  $k$ -го порядка функции  $g(z)$ , то эта точка является полюсом  $k$ -го порядка функции  $f(z) = 1/g(z)$ .

**Доказательство.** Пусть  $z_0$  - нуль  $k$ -го порядка функции  $g(z)$ . Тогда по формуле (1)

$$g(z) = (z - z_0)^k \varphi(z), \quad (6)$$

где  $\varphi(z_0) \neq 0 \Rightarrow 1/|\varphi(z_0)| \neq \infty$ , и поэтому  $z_0$  - правильная точка функции  $1/\varphi(z)$ . Положим  $f(z) = 1/g(z)$ ,  $\psi(z) = 1/\varphi(z)$ . Тогда равенство (6) преобразуется к виду (5), где  $z_0$  - правильная точка функции  $\psi(z)$ . Поэтому, согласно теореме 2,  $z_0$  - полюс  $k$ -го порядка функции  $f(z)$ . #

Таким образом, чтобы найти полюсы функции  $f(z)$ , надо найти нули функции  $1/f(z)$ .

**Пример.** Найти полюсы функции  $f(z) = z/(e^z - 1)^2$ .

**Решение.** Ищем нули функции  $g(z) = (e^z - 1)^2/z$ . Для этого представим  $g(z)$  в виде (1). Так как

$$e^z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} \right],$$

то

$$g(z) = \frac{(e^z - 1)^2}{z} = z \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} \right]^2 = (z-0) \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} \right]^2.$$

Отсюда  $z=0$  - простой нуль функции  $g(z)$  и, следовательно, простой полюс данной функции  $f(z) = 1/g(z)$ .

**Случай 3.** Характеризуется тем, что  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$  при  $z \rightarrow z_0$  и ряд (3) содержит бесконечное множество членов с отрицательными степенями.

**Определение 5.** Изолированная особая точка  $z_0$  функции  $f(z)$  называется *существенно особой точкой*, если разложение функции  $f(z)$  в ряд Лорана в окрестности точки  $z_0$  содержит бесконечное множество членов с отрицательными степенями.

**Пример.** Доказать, что  $z=0$  - существенно особая точка функции  $z^2 \cos(\pi/z)$ .

$$\text{Решение. } \cos \frac{\pi}{z} = 1 - \frac{(\pi/z)^2}{2!} + \frac{(\pi/z)^4}{4!} - \dots = 1 - \frac{\pi^2 z^{-2}}{2!} + \frac{\pi^4 z^{-4}}{4!} - \dots,$$

$$z^2 \cos \frac{\pi}{z} = (z-0)^2 - \frac{\pi^2}{2!} (z-0)^0 + \frac{\pi^4}{4!} (z-0)^{-2} - \frac{\pi^6}{6!} (z-0)^{-4} + \dots$$

Разложение  $z^2 \cos(\pi/z)$  в ряд Лорана (3) в окрестности точки  $z=0$  содержит бесконечное множество членов с отрицательными степенями. Поэтому  $z=0$  - существенно особая точка этой функции.

### 4.3. Теория вычетов

**Определение 1.** Вычетом функции  $f(z)$  в изолированной особой точке  $z_0$  называется число  $\text{res}[f(z), z_0]$ , вычисляемое по формуле

$$\text{res}[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta, \quad (1)$$

где  $\Gamma$  - любой замкнутый контур, окружающий точку  $z_0$ , проходимый в положительном направлении и лежащий целиком в области, в которой функция  $f(z)$  является аналитической.

**Теорема 1.** Справедливо равенство

$$\text{res}[f(z), z_0] = c_{-1}, \quad (2)$$

$c_{-1}$  - коэффициент разложения  $f(z)$  в ряд Лорана в окрестности точки  $z_0$ .

**Доказательство.** Сравнив формулу (1) с коэффициентом  $c_{-1}$ , определяемым формулой (28)/4.1 при  $n = -1$ , придем к равенству (2). #

**Теорема 2.** Если  $z_0$  - полюс  $k$ -го порядка функции  $f(z)$ , то

$$\text{res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[ (z - z_0)^k f(z) \right]. \quad (3)$$

**Доказательство.** В случае, когда  $z_0$  - полюс  $k$ -го порядка функции  $f(z)$ , имеет место разложение  $f(z)$  по формуле (4)/4.2

$$f(z) = c_{-k}(z - z_0)^{-k} + \dots + c_{-2}(z - z_0)^{-2} + c_{-1}(z - z_0)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n.$$

Умножив обе части этого равенства на  $(z - z_0)^k$ , будем иметь

$$(z - z_0)^k f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-k}(z - z_0)^n.$$

Дифференцируя это равенство  $k-1$  раз, получим

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[ (z - z_0)^k f(z) \right] = (k-1)! c_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{(n+1)!} c_n (z - z_0)^{n+1}.$$

Предел этого равенства при  $z \rightarrow z_0$ , с учетом равенства (2), приводит к формуле (3). #

В частности, если  $z_0$  - простой полюс, то

$$\text{res}[f(z), z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z). \quad (4)$$

**Пример.** Найти вычеты функции  $f(z) = z^2 / (z - 2)$ .

**Решение.** Находим нули функции  $g(z) = 1 / f(z) = (z - 2) / z^2$ .



$$(z-2)/z^2=0 \Rightarrow z=2.$$

Функция  $f(z)$  имеет один простой полюс  $z=2$ . По формуле (4)

$$\operatorname{res}\left[z^2/(z-2), 2\right]=\lim_{z \rightarrow 2}(z-2)\left[z^2/(z-2)^2\right]=4.$$

**Пример.** Найти вычеты функции  $f(z)=z^2/(z-i)^2$ .

**Решение.** Находим нули функции  $g(z)=1/f(z)=(z-i)^2/z^2$ .

$(z-i)^2/z^2=0 \Rightarrow z=i$  - полюс 2-го порядка. Он единственный у данной функции  $f(z)$ . По формуле (3)

$$\operatorname{res}\left[z^2/(z-i)^2, i\right]=\lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz}\left[(z-i)^2\left(z^2/(z-i)^2\right)\right]=\lim_{z \rightarrow i} 2z=2i.$$

В том случае, когда  $f(z)$  допускает представление в виде

$$f(z)=\frac{\psi(z)}{\varphi(z)}, \quad (5)$$

где  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  - аналитические функции в точке  $z_0$ , и точка  $z_0$  - простой полюс функции  $f(z)$ , вычет удобно вычислять по формуле

$$\operatorname{res}[f(z), z_0]=\frac{\psi(z_0)}{\varphi'(z_0)}. \quad (6)$$

Докажем ее справедливость. По теореме 3/4.2, если  $z_0$  - полюс функции  $f(z)$ , то  $z_0$  - нуль функции  $1/f(z)$ . Отсюда, если  $f(z)$  представима в виде (5), то ее полюс является нулем функции  $\varphi(z)$ . Воспользуемся этим.

Учитывая, что  $\varphi(z_0)=0$ , находим

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{z-z_0}=\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{z-z_0}=\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta z}=\varphi'(z_0). \quad (7)$$

По формулам (4), (5) и (7) последовательно

$$\begin{aligned} \operatorname{res}[f(z), z_0] &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)f(z)=\lim_{z \rightarrow z_0} [(z-z_0)\psi(z)/\varphi(z)]= \\ &= \psi(z_0)/\lim_{z \rightarrow z_0} [\varphi(z)/(z-z_0)]=\psi(z_0)/\varphi'(z_0). \# \end{aligned}$$

**Пример.** Вычислить  $\operatorname{res}[\cot z, 0]$ .

**Решение.**  $z=0$  - простой полюс функции  $\cot z$ . По формуле (6)

$$\operatorname{res}[\cot z, 0]=\operatorname{res}[\cos z/\sin z, 0]=\cos z/(\sin z)'|_{z=0}=\cos 0/\cos 0=1.$$

**Теорема 3.** (Основная теорема вычетов.) Пусть в односвязной области  $G$ , ограниченной контуром  $\Gamma$ ,  $f(z)$  является аналитической функцией всюду за исключением конечного числа  $n$  изолированных особых точек

$z_1, z_2, \dots, z_n$ . Тогда справедливо равенство

$$\oint_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}[f(z), z_k] \quad (8)$$

при положительном направлении интегрирования по границе  $\Gamma$ .

**Доказательство.** Окружим изолированные особые точки  $z_1, z_2, \dots, z_n$  непересекающимися контурами  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ . Получится многосвязная область со всеми правильными, относительно  $f(z)$ , точками. Например, на рис.

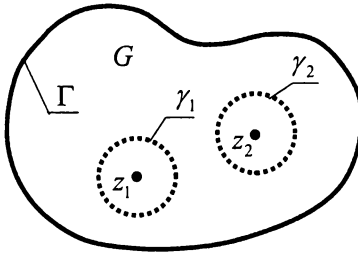


Рис.20

20 область  $G$  с двумя изолированными особыми точками превращена в трехсвязную область. По теореме Коши 2/3.2 для многосвязной области

$$\oint_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta = \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_k} f(\zeta) d\zeta.$$

В этом равенстве справа интегралы по контурам  $\gamma_k$ . После деления их на  $2\pi i$  они, согласно определению 1, будут равны вычетам функции  $f(z)$  в точках  $z_1, z_2, \dots, z_n$ . С учетом этого полученное равенство преобразуется в формулу (8). #

#### 4.4. Приложение теории вычетов

В качестве приложения вычетов рассмотрим методы вычисления некоторых важных в практике применения математики несобственных интегралов.

**Лемма 1.** Пусть  $f(z)$  - аналитическая функция в полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$  всюду за исключением конечного числа изолированных особых точек и ее разложение в ряд Лорана в окрестности точки  $z = 0$  имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_{-n} z^{-n}, \quad k \geq 2. \quad (1)$$

При этом  $\gamma$  - полуокружность радиуса  $R$ , лежащая в полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$ , с центром в точке  $z = 0$  (рис.21). Тогда

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = 0. \quad (2)$$

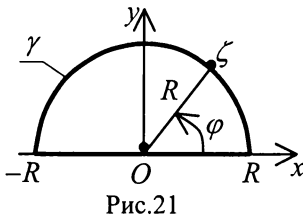


Рис.21

**Доказательство.** Уравнение  $\gamma: z = Re^{i\varphi}$ , где  $\varphi \in [0, \pi]$ . Интегрируя  $f(z)$  по  $\gamma$ , подставляя (1) и используя (2)/3.1, получаем

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta &= \sum_{n=k}^{\infty} c_{-n} \int_{\gamma} \zeta^{-n} d\zeta = \sum_{n=k}^{\infty} c_{-n} \int_0^{\pi} (R^{-n} e^{-in\varphi}) (R e^{i\varphi} i) d\varphi = \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{ic_{-n}}{R^{n-1}} \int_0^{\pi} e^{-i(n-1)\varphi} d\varphi = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{c_{-n}}{R^{n-1}(n-1)} [1 - e^{-i(n-1)\pi}].\end{aligned}$$

Учитывая, что при нечетном и четном номерах  $n$

$$e^{-i(n-1)\pi} = \cos[(n-1)\pi] - i \sin[(n-1)\pi] = \pm 1,$$

окончательно имеем

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = 2 \sum_{n=k}^{\infty} \frac{c_{-n}}{R^{n-1}(n-1)}, \quad k - \text{четное число и } n - \text{четные номера.}$$

Переходя здесь к пределу при  $R \rightarrow \infty$ , получим равенство (2). #

**Теорема 1.** Пусть функция  $f(z)$  определена во всей полуплоскости  $\text{Im } z \geq 0$ , удовлетворяет условиям леммы 1 и не имеет особых точек на действительной оси, тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}[f(z), z_k], \quad (3)$$

где  $z_1, z_2, \dots, z_n$  - изолированные особые точки функции  $f(z)$  в полуплоскости  $\text{Im } z > 0$ .

**Доказательство.** Возьмем интеграл от функции  $f(z)$  по замкнутому контуру  $\Gamma$ , образованному полуокружностью  $\gamma$ , лежащей в полуплоскости  $\text{Im } z > 0$ , и ее диаметром на вещественной оси от  $x = -R$  до  $x = R$  (рис.21). Предел этого интеграла при  $R \rightarrow \infty$  выражается равенством

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta.$$

Первое слагаемое левой части этого равенства равно интегралу левой части формулы (3). Второе слагаемое, согласно лемме 1, равно нулю. Интеграл в правой части может быть записан по формуле (8)/4.3 и при  $R \rightarrow \infty$  становится равен правой части формулы (3). В результате это равенство преобразуется в формулу (3). #

**Замечание 1.** К функциям, удовлетворяющим условиям леммы 1, относятся, в частности, правильные рациональные дроби, у которых степень знаменателя больше степени числителя не менее, чем на 2.

**Пример.** Вычислить интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} dx / (x+a)^2 \quad (a > 0)$ .

**Решение.** Функция  $1/(z^2 + a^2)^2$  в полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  имеет

один полюс второго порядка  $ia$ . Используя формулу (3)/4.3, получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx / (x^2 + a^2)^2 &= 2\pi i \operatorname{res} \left[ 1 / (z^2 + a^2)^2, ia \right] = \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow ia} \frac{d}{dz} \left[ (z - ia)^2 / (z^2 + a^2)^2 \right] = 2\pi i \lim_{z \rightarrow ia} \left[ -2 / (z + ia)^3 \right] = \frac{\pi}{2a^3}. \end{aligned}$$

**Лемма 2.** (Лемма Жордана.) Пусть функция  $f(z)$  является аналитической всюду в полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$  за исключением конечного числа изолированных особых точек и обладает следующим свойством: существует вещественная функция

$$M(R) > 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} M(R) = 0 \quad (4)$$

такая, что для любых  $z \in \operatorname{Im} z > 0$  выполняется неравенство

$$|f(z)| \leq M(|z|). \quad (5)$$

Тогда при  $\omega = \text{const} > 0$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma} e^{i\omega\zeta} f(\zeta) d\zeta = 0, \quad (6)$$

где  $\gamma$  - полуокружность в полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$  радиуса  $R$  с центром в начале координат (рис.21).

**Доказательство.**  $\zeta = Re^{i\varphi}$ , где  $\varphi \in [0, \pi]$ , - уравнение полуокружности  $\gamma$ . Применяя формулу (2)/3.1, получаем

$$\left| \int_{\gamma} e^{i\omega\zeta} f(\zeta) d\zeta \right| = \left| \int_0^{\pi} e^{i\omega Re^{i\varphi}} f(Re^{i\varphi}) Re^{i\varphi} i d\varphi \right| = \int_0^{\pi} e^{i\omega R \cos \varphi} \left| f(Re^{i\varphi}) \right| R |e^{i\varphi}| |i| d\varphi.$$

Используя неравенство (5)  $|f(Re^{i\varphi})| \leq M(R)$ , учитывая, что

$$|i| = 1, \quad |e^{i\varphi}| = 1, \quad \left| e^{i\omega R e^{i\varphi}} \right| = \left| e^{i\omega R (\cos \varphi + i \sin \varphi)} \right| = \left| e^{i\omega R \cos \varphi} \right| \left| e^{-\omega R \sin \varphi} \right| = e^{-\omega R \sin \varphi},$$

и используя неравенство  $e^{-\omega R \sin \varphi} \leq e^{-2\omega R \varphi / \pi}$  при  $\varphi \in [0, \pi/2]$ , которое выполняется так как  $\sin \varphi \geq 2\varphi / \pi$  при  $\varphi \in [0, \pi/2]$ , приходим к неравенству

$$\left| \int_{\gamma} e^{i\omega\zeta} f(\zeta) d\zeta \right| < 2RM(R) \int_0^{\pi/2} e^{-2\omega R \varphi / \pi} d\varphi = \frac{\pi}{\omega} M(R) \left( 1 - \frac{1}{e^{\omega R}} \right).$$

Переходя к пределу при  $R \rightarrow \infty$  и учитывая (4), получаем

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\gamma} e^{i\omega\zeta} f(\zeta) d\zeta \right| = 0, \quad \text{что равносильно равенству (6). \#}$$

**Теорема 2.** Пусть функция  $f(z)$  определена во всей полуплоскости

$\text{Im } z \geq 0$ , удовлетворяет условиям леммы Жордана и не имеет особых точек на действительной оси. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res} \left[ e^{i\omega z} f(z), z_k \right], \quad (7)$$

где  $z_1, z_2, \dots, z_n$  - изолированные особые точки функции  $f(z)$  в полуплоскости  $\text{Im } z > 0$ .

**Доказательство.** Аналогично доказательству теоремы 1. #

**Замечание 2.** К функциям, удовлетворяющим лемме Жордана, относятся, в частности, все правильные рациональные дроби.

**Пример.** Вычислить  $\int_{-\infty}^{\infty} \left[ x \sin ax / (x^2 + b^2) \right] dx \quad (a > 0, \quad b > 0)$ .

**Решение.**  $\int_{-\infty}^{\infty} \left[ x \sin ax / (x^2 + b^2) \right] dx = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ x e^{iax} / (x^2 + b^2) \right] dx$ .

Функция  $ze^{iaz} / (z^2 + a^2)$  при  $\text{Im } z > 0$  имеет простой полюс  $z = ib$ .

Используя для вычисления вычета формулу (6)/4.3, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{iax}}{x^2 + b^2} dx = 2\pi i \text{res} \left[ \frac{ze^{iaz}}{z^2 + b^2}, ib \right] = 2\pi i \left. \frac{ze^{iaz}}{2z} \right|_{z=ib} = 0 + i\pi e^{-ab}.$$

Ответ:  $\int_{-\infty}^{\infty} \left[ x \sin ax / (x^2 + b^2) \right] dx = \pi e^{-ab}$ .

**Замечание 3.** Лемма Жордана может быть сформулирована и доказана для других полуплоскостей.

Для  $\text{Im } z < 0$  при  $\omega > 0$  утверждение теоремы 2 для  $f(z)$ , определенной во всей полуплоскости  $\text{Im } z < 0$ , примет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx = -2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res} \left[ e^{-i\omega z} f(z), z_k \right], \quad (8)$$

где  $z_1, z_2, \dots, z_n$  - изолированные особые точки функции  $f(z)$  в полуплоскости  $\text{Im } z < 0$ .

Лемма Жордана останется справедливой и для полуплоскостей со сдвигом относительно начала координат. В частности, для полуплоскости  $\text{Re } z < x = \text{const}$  при  $t > 0$  справедливо равенство

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma} e^{t\zeta} f(\zeta) d\zeta = 0 \quad (9)$$

где  $\gamma$  - полуокружность радиуса  $R$  в этой полуплоскости с центром в точке  $(x, 0)$ . Используя равенство (9), может быть выведена формула

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t(x+iy)} f(x+iy) dy = 2\pi \sum_{k=1}^n \operatorname{res} [e^{tz} f(z), z_k], \quad (10)$$

где  $x = \text{const}$ , а  $z_1, z_2, \dots, z_n$  - изолированные особые точки функции  $f(z)$  в полуплоскости  $\operatorname{Re} z < x$ .

**Обратим внимание**, что так как в формуле (10)  $x$  - произвольная конечная константа - параметр, то (если исключить бесконечно удаленную особую точку) она может быть выбрана так, что  $z_1, z_2, \dots, z_n$  будут изолированные особые точки функции  $f(z)$  на всей комплексной плоскости.

**Интеграл Меллина.** Так называется формула, которая связывает функцию  $f(t)$  вещественной переменной  $t$  с функцией  $F(p)$  комплексной переменной  $p = x + iy$ . При  $t \geq 0$  интеграл Меллина имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp. \quad (11)$$

Здесь пределы интегрирования указывают на то, что интегрирование выполняется по переменной  $y$ , а  $x$  является параметром. Поэтому, переходя к интегрированию по  $y$  подстановкой

$$p = x + iy, \quad dp = i dy, \quad y = \pm\infty \text{ при } p = x \pm i\infty$$

и используя формулу (10), получаем

$$\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp = i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(x+iy)t} F(x+iy) dy = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} [e^{pt} F(p), p_k],$$

где  $p_1, p_2, \dots, p_n$  - изолированные особые точки функции  $F(p)$  на всей комплексной плоскости.

Подставляя полученный результат в (11), получаем формулу вычисления интеграла Меллина

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{res} [e^{pt} F(p), p_k]. \quad (12)$$

Эта формула часто используется в операционном исчислении.

## Часть 2

# ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

## Глава 5

### ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

#### 5.1. Определение преобразования Лапласа

Операционным исчислением принято называть теорию, в основе которой лежит *интегральное преобразование Лапласа*.

**Определение 1.** Преобразованием Лапласа над заданной функцией  $f(t)$  действительной переменной  $t$  называется интегральное преобразование

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad (1)$$

ставящее в соответствие заданной функции  $f(t)$  функцию  $F(p)$  комплексной переменной  $p = x + iy$ , называемой *параметром преобразования*.

В преобразовании Лапласа заданная функция  $f(t)$  называется *оригиналом*, а  $F(p)$  - ее *изображением*.

Для краткости преобразование (1) принято обозначать

$$F(p) = L[f(t)].$$

То, что оригиналу  $f(t)$  ставится в соответствие изображение  $F(p)$  и наоборот, условимся записывать в виде

$$f(t) \div F(p).$$

**Определение 2.** Функция  $f(t)$  называется *функцией с ограниченной степенью роста* при  $t \rightarrow \infty$ , если можно подобрать такие два числа  $M > 0$  и  $a > 0$ , что для любого  $t > 0$  выполняется неравенство

$$|f(t)| \leq Me^{at}. \quad (2)$$

Число  $a$  называется *показателем степени роста*.

**Теорема.** Если функция  $f(t)$  определена при всех  $t \geq 0$ , имеет конечное число точек конечных разрывов на любом конечном отрезке оси  $t$  при  $t > 0$  и имеет ограниченную степень роста при  $t \rightarrow \infty$ , то интеграл (1) сходится при всех значениях  $\operatorname{Re} p > a$ , где  $a$  - показатель степени роста.

**Доказательство.**  $e^{-pt} = e^{-(x+iy)t} = e^{-xt} (\cos yt - i \sin yt)$ .

Подставив это выражение в интеграл (1), будем иметь

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-xt} \cos yt f(t) dt - i \int_0^{\infty} e^{-xt} \sin yt f(t) dt. \quad (3)$$

Рассмотрим несобственные интегралы правой части равенства.

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-xt} \cos yt f(t) dt \right| \leq \int_0^{\infty} e^{-xt} |\cos yt| |f(t)| dt.$$

Учитывая, что  $e^{-xt} > 0$ ,  $|\cos yt| \leq 1$ , а функция  $f(t)$  удовлетворяет неравенству (2), получаем

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-xt} \cos yt f(t) dt \right| < \int_0^{\infty} e^{-xt} 1 M e^{at} dt = M \int_0^{\infty} e^{-(x-a)t} dt = \frac{M}{x-a} \left[ 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(x-a)t} \right].$$

Пусть  $\operatorname{Re} p = x > a$ . Тогда

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-xt} \cos yt f(t) dt \right| < \frac{M}{x-a} \text{ при } \operatorname{Re} p > a.$$

Совершенно аналогично

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-xt} \sin yt f(t) dt \right| < \frac{M}{x-a} \text{ при } \operatorname{Re} p > a.$$

Квадрат модуля интеграла (1), согласно равенству (3), равен

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \right|^2 = \left| \int_0^{\infty} e^{-xt} \cos yt f(t) dt \right|^2 + \left| \int_0^{\infty} e^{-xt} \sin yt f(t) dt \right|^2.$$

Из этого, используя полученные неравенства, имеем

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \right| < \sqrt{2} \frac{M}{x-a} \text{ при } \operatorname{Re} p > a,$$

что является признаком сходимости интеграла (1). #

Известно, что алгебраические операции с различными функциями возможны лишь на пересечении областей их существования. Например, если  $G_1$  и  $G_2$  - области существования функций  $F_1(p)$  и  $F_2(p)$  соответственно, то, например, сумма  $F_1(p) + F_2(p)$  имеет смысл лишь при  $p \in G_1 \cap G_2$ , если  $G_1 \cap G_2$  - непустое множество. В связи с этим возникает вопрос, всегда ли пересечение областей существования изображений совокупности рассматриваемых функций будет непустым множеством, чтобы алгебраические операции над этими изображениями имели смысл? Ответ на этот вопрос утвердительный всегда для любой совокупности функций, каждая из которых имеет изображение, т.е. для каждой из которых интеграл (1) сходится.

Докажем это. Заметим, что область сходимости интеграла (1), опреде-



ляемая неравенством  $\operatorname{Re} p > a$ , является областью существования функции  $F(p)$ .

Пусть  $F_1(p), F_2(p), \dots, F_n(p)$  - изображения совокупности  $n$  различных функций, преобразования Лапласа (1) над которыми сходятся при  $\operatorname{Re} p > a_1, \operatorname{Re} p > a_2, \dots, \operatorname{Re} p > a_n$  соответственно. Предположим, что изображения пронумерованы так, что  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ . Тогда неравенство  $\operatorname{Re} p > a_n$  определяет пересечение областей существования функций  $F_1(p), F_2(p), \dots, F_n(p)$  и это пересечение не является пустым множеством.

Таким образом, совершенно не важно при каких значениях  $\operatorname{Re} p$  преобразование (1) над заданной функцией сходится. Важно, что сходимость имеет место.

В дальнейшем будет доказана так называемая *теорема обращения преобразования Лапласа*. Из определения преобразования Лапласа в совокупности с этой теоремой следует, что между оригиналом  $f(t)$  и его изображением  $F(p)$  существует взаимно однозначное соответствие.

## 5.2. Изображения некоторых функций

**Определение.** Функция Хевисайда обозначается  $\eta(t)$  и определяется следующим образом:

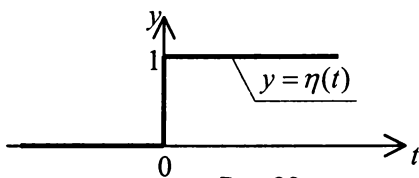


Рис.22

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Функцию Хевисайда называют еще *единичной функцией* или просто *единицей*. Ее график показан на рис.22.

**Изображение единицы.** Докажем вначале, что

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-p\tau} = 0 \text{ при } \operatorname{Re} p > 0. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-p\tau} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-(x+iy)\tau} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-x\tau} (\cos y\tau - i \sin y\tau) = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-x\tau} \cos y\tau - i \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-x\tau} \sin y\tau = \{ \text{при } x = \operatorname{Re} p > 0 \} = 0 - i0 = 0. \# \end{aligned}$$

$$L[\eta(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} \eta(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^{-pt} dt = \frac{1}{p} \left( 1 - \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-p\tau} \right).$$

Отсюда, учитывая (2), при  $\operatorname{Re} p > 0$   $L[\eta(t)] = 1/p \Leftrightarrow$

$$1 \div \frac{1}{p}. \quad (3)$$

**Изображение экспоненты.** Пусть  $b$  - вещественное число. Аналогично тому, как было доказано равенство (2), можно доказать, что

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-(p-b)\tau} = 0 \text{ при } \operatorname{Re} p > b. \quad (4)$$

$$L[e^{bt}] = \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{bt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-b)t} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^{-(p-b)t} dt = \frac{1}{p-b} \left[ 1 - \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-(p-b)\tau} \right].$$

Отсюда, учитывая (4), имеем при  $\operatorname{Re} p > b$   $L[e^{bt}] = 1/(p-b) \Leftrightarrow$

$$e^{bt} \div \frac{1}{p-b}. \quad (5)$$

**Изображения косинуса и синуса.** Интегрируя по частям и полагая  $\operatorname{Re} p > 0$ , что обеспечивает выполнение равенства (2), получаем

$$\begin{aligned} L[\cos t] &= \int_0^{\infty} e^{-pt} \cos t dt = \left\{ \begin{aligned} u &= e^{-pt}, dv = \cos t dt \Rightarrow \\ du &= -pe^{-pt} dt, v = \sin t \end{aligned} \right\} = e^{-pt} \sin t \Big|_0^{\infty} + \\ + p \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin t dt &= \left\{ \begin{aligned} u &= e^{-pt}, dv = \sin t dt \Rightarrow \\ du &= -pe^{-pt} dt, v = -\cos t \end{aligned} \right\} = p(1 - e^{-pt} \cos t) \Big|_0^{\infty} - \\ - p^2 \int_0^{\infty} e^{-pt} \cos t dt &= -p^2 L[\cos t] \Rightarrow L[\cos t] = \frac{p}{p^2 + 1} \Rightarrow \\ \cos t &\div \frac{p}{p^2 + 1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Аналогично предыдущему,

$$\sin t \div \frac{1}{p^2 + 1}. \quad (7)$$

### 5.3. Свойства изображения

**Теорема 1.** (Линейность изображения.) Если  $C_1, C_2$  - постоянные и  $f_1(t) \div F_1(p)$ ,  $f_2(t) \div F_2(p)$ , то

$$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \div C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p). \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Доказательство. } L[C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-pt} [C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)] dt = \\ &= C_1 \int_0^{\infty} e^{-pt} f_1(t) dt + C_2 \int_0^{\infty} e^{-pt} f_2(t) dt = C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p). \# \end{aligned}$$

**Пример.** Найти изображение функции  $f(t) = 4e^{5t} + 6 \cos t - 7$ .

**Решение.** Используя свойство линейности преобразования Лапласа и формулы изображений (3), (5), (6)/5.2, получаем

$$F(p) = 4L[e^{5t}] + 6L[\cos t] - 7L[1] = \frac{4}{p-5} + \frac{6p}{p^2+1} - \frac{7}{p}.$$

**Пример.** Найти изображения функций  $\cosh t$ ,  $\sinh t$ .

**Решение.** Используя свойство линейности изображения (1) и изображение экспоненты (5)/5.2,

$$\left. \begin{aligned} \cosh t &= \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \div \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1}\right) = \frac{p}{p^2-1} \Rightarrow \cosh t \div \frac{p}{p^2-1}; \\ \sinh t &= \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \div \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}\right) = \frac{1}{p^2-1} \Rightarrow \sinh t \div \frac{1}{p^2-1}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

**Теорема 2.** (Подобие изображения.) Если  $f(t) \div F(p)$  и  $b > 0$  - вещественная постоянная, то

$$f(bt) \div \frac{1}{b} F\left(\frac{p}{b}\right). \quad (3)$$

**Доказательство.** Применяя замену переменной интегрирования,

$$\begin{aligned} L[f(bt)] &= \int_0^\infty e^{-pt} f(bt) dt = \left\{ \begin{aligned} \tau = bt &\Rightarrow d\tau = b dt, \\ \text{при } t=0 \quad \tau=0, &\quad \text{при } t=\infty \quad \tau=\infty \end{aligned} \right\} = \\ &= \frac{1}{b} \int_0^\infty e^{-\frac{p}{b}\tau} f(\tau) d\tau = \frac{1}{b} F\left(\frac{p}{b}\right). \# \end{aligned}$$

**Пример.** Найти изображения функций  $\cos bt$ ,  $\sin bt$ .

**Решение.** По формулам (6), (7)/5.2  $\cos t \div \frac{p}{p^2+1}$ ,  $\sin t \div \frac{1}{p^2+1}$ .

По формуле (3)

$$\left. \begin{aligned} \cos bt \div \frac{1}{b} \frac{p/b}{(p/b)^2+1} &= \frac{p}{p^2+b^2} \Leftrightarrow \cos bt \div \frac{p}{p^2+b^2}; \\ \sin bt \div \frac{1}{b} \frac{1}{(p/b)^2+1} &= \frac{b}{p^2+b^2} \Leftrightarrow \sin bt \div \frac{b}{p^2+b^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Аналогично формулам (4), можно получить

$$\cosh bt \div \frac{p}{p^2-b^2}, \quad \sinh bt \div \frac{b}{p^2-b^2}. \quad (5)$$

**Теорема 3.** (Сдвиг изображения.) Если  $f(t) \div F(p)$  и  $a$  - вещественная постоянная, то

$$e^{-at} f(t) \div F(p+a). \quad (6)$$

**Доказательство.**

$$L[e^{-at} f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} [e^{-at} f(t)] dt = \int_0^{\infty} e^{-(p+a)t} f(t) dt = F(p+a) \cdot \#$$

**Пример.** Найти изображения функций

$$e^{-at} \cos bt, \quad e^{-at} \sin bt, \quad e^{-at} \cosh bt, \quad e^{-at} \sinh bt.$$

**Решение.** Применяя формулу (6) к формулам (4), (5), получаем

$$\left. \begin{aligned} e^{-at} \cos bt &\div \frac{p+a}{(p+a)^2 + b^2}, & e^{-at} \sin bt &\div \frac{b}{(p+a)^2 + b^2}; \\ e^{-at} \cosh bt &\div \frac{p+a}{(p+a)^2 - b^2}, & e^{-at} \sinh bt &\div \frac{b}{(p+a)^2 - b^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

**Пример.** Найти изображение функции  $e^{-3t} \sin 3t \cos 4t$ .

**Решение.** Сначала произведение  $\sin 3t \cos 4t$  представим в виде разности синусов. После этого применим теорему о линейности изображения и воспользуемся одной из формул (7).

$$\begin{aligned} e^{-3t} \sin 3t \cos 4t &\div L[e^{-3t} \sin 3t \cos 4t] = L\left[e^{-3t} \frac{1}{2}(\sin 7t - \sin t)\right] = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ L[e^{-3t} \sin 7t] - L[e^{-3t} \sin t] \right\} = \frac{1}{2} \left[ \frac{7}{(p+3)^2 + 49} - \frac{1}{(p+3)^2 + 1} \right]. \end{aligned}$$

**Определение 1.** Пусть дана функция  $f(t)$ , обладающая следующими свойствами:  $f(t) = 0$  при всех значениях  $t < 0$  и  $f(t) \neq 0$  хотя бы при некоторых значениях  $t \geq 0$ . Преобразование этой функции в функцию  $f(t - \tau)$ , где  $\tau$  - любая неотрицательная постоянная, называется *преобразованием сдвига*.

Например, единичная функция со сдвигом  $y = \eta(t - \tau)$  имеет значения 0 при  $t < \tau$  и имеет значения 1 при  $t \geq \tau$ .

**Теорема 4.** (Сдвиг оригинала.) Если  $f(t) \div F(p)$  и  $f(t) = 0$  при  $t < 0$ , то

$$f(t - \tau) \div e^{-p\tau} F(p). \quad (8)$$

**Доказательство.**

$$L[f(t - \tau)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t - \tau) dt = \int_0^{\tau} e^{-pt} f(t - \tau) dt + \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f(t - \tau) dt.$$

Так как, согласно определению 1,  $f(t - \tau) = 0$  при  $t < \tau$ , то интеграл на отрезке  $[0, \tau]$  равен нулю. Во втором слагаемом сделаем замену переменной:  $t - \tau = \theta \Rightarrow dt = d\theta$ , при  $t = \tau$   $\theta = 0$ , при  $t = \infty$   $\theta = \infty$ .

В результате получим

$$L[f(t-\tau)] = \int_0^{\infty} e^{-p(\tau+\theta)} f(\theta) d\theta = e^{-p\tau} \int_0^{\infty} e^{-p\theta} f(\theta) d\theta = e^{-p\tau} F(p). \#$$

**Пример.** Найти изображение единичной функции  $\eta(t-\tau)$ .

**Решение.** По формуле (3)/5.2  $\eta(t) \div 1/p$ . Применяя формулу (8),

$$\eta(t-\tau) \div \frac{e^{-p\tau}}{p}. \quad (9)$$

**Пример.** Найти оригинал по изображению  $F(p) = e^{-5p}/(p+3)$ .

**Решение.** По формуле (5)/5.2 находим  $1/(p+3) \div e^{-3t}$ . Применяя теорему 4, получаем  $e^{-5p}/(p+3) \div e^{-3(t-5)}$ . Отсюда, в свете определения 1, находим  $f(t-5) = e^{-3(t-5)}$ , причем  $f(t-5) = 0$  при  $t < 5$ .

**Определение 2.** Дельта-функция (или функция Дирака) обозначается  $\delta(t-\tau)$  и определяется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \delta(t-\tau) &= 0 \text{ при } t < \tau, \\ \delta(t-\tau) &= \infty \text{ при } t = \tau, \\ \delta(t-\tau) &= 0 \text{ при } t > \tau; \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\int_a^b \delta(t-\tau) dt = 1, \quad \tau \in [a, b]. \quad (11)$$

**Теорема 5.** Если функция  $\varphi(t)$  определена и интегрируема на отрезке  $[a, b]$  и постоянная  $\tau \in [a, b]$ , то

$$\int_a^b \varphi(t) \delta(t-\tau) dt = \varphi(\tau). \quad (12)$$

**Доказательство.** Пусть число  $\varepsilon > 0$  так мало, что при значениях  $t \in [\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon]$   $\varphi(t) \approx \varphi(\tau) = \text{const}$ . Тогда

$$\int_a^b \varphi(t) \delta(t-\tau) dt = \int_a^{\tau-\varepsilon} \varphi(t) \delta(t-\tau) dt + \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \varphi(t) \delta(t-\tau) dt + \int_{\tau+\varepsilon}^b \varphi(t) \delta(t-\tau) dt.$$

Учитывая, что первый и третий интегралы справа равны нулю вследствие равенства нулю дельта-функции, а во втором интеграле множитель  $\varphi(t) \approx \varphi(\tau) = \text{const}$  можно вынести за знак интеграла, с учетом свойства (11) приходим к равенству (12). #

**Пример.** Найти изображение функции Дирака.

**Решение.** При  $\tau \geq 0$ , используя свойство (12),

$$L[\delta(t-\tau)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} \delta(t-\tau) dt = e^{-p\tau} \Leftrightarrow \delta(t-\tau) \div e^{-p\tau}. \quad (13)$$

В частности, при  $\tau = 0$

$$\delta(t) \div 1. \quad (14)$$

**Теорема 6.** (Дифференцирование изображения.)

$$f(t) \div F(p) \Rightarrow -tf'(t) \div F'(p). \quad (15)$$

**Доказательство.** Так как  $e^{-pt}$  - функция, дифференцируемая по  $p$ , то определенный интеграл (1)/5.1, определяющий преобразование Лапласа, можно продифференцировать по параметру  $p$ . Воспользовавшись этим, получим

$$F'(p) = \int_0^{\infty} \partial [e^{-pt} f(t)] / \partial p dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} [-tf'(t)] dt = L[-tf'(t)]. \#$$

**Пример.** Найти изображения функций:  $t, t^2, t^3, \dots, t^n, e^{-at}t^n$ .

**Решение.** По формуле (3)/5.2  $1 \div 1/p$ . Применяя формулу (15) поочередно  $n$  раз, получаем

$$-t \div -1/p^2 \Leftrightarrow t \div 1/p^2,$$

$$-tt \div -2/p^3 \Leftrightarrow t^2 \div 2/p^3,$$

$$-tt^2 \div -6/p^4 \Leftrightarrow t^3 \div 6/p^4, \dots$$

$$t^n \div \frac{n!}{p^{n+1}}. \quad (16)$$

Применяя к этой формуле формулу (6), получаем

$$e^{-at}t^n \div \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}. \quad (17)$$

**Теорема 7.** (Изображение производных.) Если  $f(t) \div F(p)$ , то

$$\left. \begin{aligned} f'(t) \div pF(p) - f(0), \\ f''(t) \div p^2F(p) - pf(0) - f'(0), \\ f'''(t) \div p^3F(p) - p^2f(0) - pf'(0) - f''(0), \\ f^{IV}(t) \div p^4F(p) - p^3f(0) - p^2f'(0) - pf''(0) - f'''(0) \\ \text{и т.д.} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

**Доказательство.** Докажем, прежде всего, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt} f(t) = 0 \text{ при } \operatorname{Re} p > a, \quad (19)$$

где  $a$  - показатель степени роста функции  $f(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ .

По формуле (9)/1.3, учитывая, что  $|\cos yt - i \sin yt| = 1$ , имеем

$$|e^{-pt}| = |e^{-(x+iy)t}| = |e^{-xt}(\cos yt - i \sin yt)| = e^{-xt} |\cos yt - i \sin yt| = e^{-xt}.$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-pt} f(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-pt}| |f(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-xt} |f(t)|.$$

$$\text{Используя (2)/5.1, } \lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-pt} f(t)| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-xt} M e^{at} = M \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(x-a)t}.$$

$$\text{Отсюда при } \operatorname{Re} p = x > a \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-pt} f(t)| = 0 \Leftrightarrow (19).$$

Применяя интегрирование по частям,

$$\begin{aligned} L[f'(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt = \left\{ \begin{array}{l} u = e^{-pt}, \quad dv = f'(t) dt \Rightarrow \\ du = -p e^{-pt} dt, \quad v = f(t) \end{array} \right\} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt} f(t) - f(0) + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt} f(t) - f(0) + pF(p). \end{aligned}$$

Учитывая здесь (19), получаем первую из формул (18).  
Обозначим  $\phi(t) = f'(t)$ . По первой из формул (18)

$$\begin{aligned} L[f''(t)] &= L[\phi'(t)] = pL[\phi(t)] - \phi(0) = pL[f'(t)] - f'(0) = \\ &= p\{pL[f(t)] - f(0)\} - f'(0) = p^2 L[f(t)] - pf(0) - f'(0). \end{aligned}$$

Это – вторая из формул (18).

Аналогичны доказательства для производных других порядков. #

**Пример.** Доказать, что функции Хевисайда и Дирака связаны дифференциальным равенством

$$\frac{d\eta(t-\tau)}{dt} = \delta(t-\tau). \quad (20)$$

**Решение.** По формуле (9)  $\eta(t-\tau) \div e^{-p\tau} / p$ . По первой из формул (18)  $\eta'(t-\tau) \div p(e^{-p\tau} / p) - \eta(0-\tau)$ . Отсюда, учитывая, что  $\eta(0-\tau) = 0$ , получаем  $\eta'(t-\tau) \div e^{-p\tau}$ . По формуле (13)  $\delta(t-\tau) \div e^{-p\tau}$ . Сравнение последних двух формул приводит к равенству (20):

**Теорема 8.** (Изображение интегралов.) Если  $f(t) \div F(p)$ , то

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \div \frac{F(p)}{p}. \quad (21)$$

**Доказательство.** Обозначим  $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ . Интеграл с переменным верхним пределом является неопределенным интегралом. Поэтому  $g'(t) = f(t)$ . По первой формуле (18)  $g'(t) \div pL[g(t)] - g(0)$ . Учитывая,

что  $g(0) = 0$  и  $g'(t) = f(t)$ , имеем  $f(t) \div pL[g(t)]$ . По условию теоремы  $f(t) \div F(p)$ . Сравнивая последние две формулы, получаем

$$L[g(t)] = F(p) / p \Leftrightarrow (21). \#$$

**Пример.** Найти решение интегрального уравнения

$$\int_0^t f(\tau) d\tau = f(t) - 1.$$

**Решение.** Пусть  $f(t) \div F(p)$ . Над обеими частями данного уравнения, используя формулу (21), выполним преобразование Лапласа

$$L\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = L[f(t) - 1] \Rightarrow \frac{F(p)}{p} = F(p) - \frac{1}{p} \Rightarrow F(p) = \frac{1}{p-1}.$$

Восстанавливая оригинал по найденному изображению, получим искомое решение  $f(t) = e^t$ .

**Определение 3.** Если даны две функции  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$ , то интеграл

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \quad (22)$$

называется *сверткой* этих функций.

**Пример.** Найти свертку функций  $\sin t$  и  $\cos t$ .

**Решение.** Преобразуя произведение  $\sin \tau \cos(t-\tau)$  в сумму синусов,

$$\text{находим } \int_0^t \sin \tau \cos(t-\tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t [\sin t + \sin(2\tau - t)] d\tau = \frac{1}{2} t \sin t.$$

**Теорема 9.** (Коммутативность свертки.)

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau. \quad (23)$$

**Доказательство.** Применяя замену переменной интегрирования,  $t-\tau = \theta \Rightarrow \tau = t-\theta$ ,  $d\tau = -d\theta$ , при  $\tau = 0$   $\theta = t$ , при  $\tau = t$   $\theta = 0$ , получаем

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = - \int_t^0 f_1(t-\theta) f_2(\theta) d\theta = \int_0^t f_1(t-\theta) f_2(\theta) d\theta. \#$$

**Теорема 10.** (Изображение свертки.)

Если  $f_1(t) \div F_1(p)$ ,  $f_2(t) \div F_2(p)$ , то

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \div F_1(p) F_2(p). \quad (24)$$

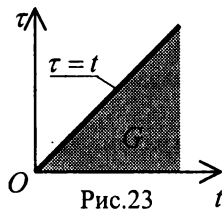


Рис.23



$$\begin{aligned} \text{Доказательство. } L \left[ \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] &= \\ &= \int_0^\infty e^{-pt} \left[ \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] dt = \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau . \end{aligned}$$

Это - повторный интеграл для двойного интеграла по области  $G$  (рис.23). В нем первым выполняется интегрирование по  $\tau$ , а потом – интегрирование по  $t$ . Изменив порядок интегрирования, будем иметь

$$L \left[ \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] = \int_0^\infty f_1(\tau) d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt} f_2(t-\tau) dt .$$

Заменим переменную интегрирования  $t$  на  $\theta = t - \tau$ . Подставляя  $t = \theta + \tau$ ,  $dt = d\theta$  и учитывая, что  $\theta = 0$  при  $t = \tau$  и  $\theta = \infty$  при  $t = \infty$ , получаем

$$\begin{aligned} L \left[ \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] &= \int_0^\infty f_1(\tau) d\tau \int_0^\infty e^{-p(\tau+\theta)} f_2(\theta) d\theta = \\ &= \int_0^\infty e^{-p\tau} f_1(\tau) d\tau \int_0^\infty e^{-p\theta} f_2(\theta) d\theta = F_1(p) F_2(p) . \# \end{aligned}$$

**Пример.** Найти оригинал по изображению  $p / (p^2 + 1)^2$  с помощью свертки.

**Решение.** Данное изображение можно рассматривать как произведение изображений  $1 / (p^2 + 1) \div \sin t$  и  $p / (p^2 + 1) \div \cos t$ . По формуле (30)

$$p / (p^2 + 1)^2 \div \int_0^t \sin \tau \cos(t-\tau) d\tau .$$

Используя результат примера, решенного для определения 3, находим

$$p / (p^2 + 1)^2 \div \frac{1}{2} t \sin t .$$

## 5.4. Теорема обращения преобразования Лапласа

**Теорема.** Если заданная функция  $F(p)$  является изображением функции  $f(t)$  в преобразовании Лапласа, то при  $t \geq 0$  справедливо равенство

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp , \quad (1)$$

называемое *интегралом Меллина*.

**Доказательство.** Если функция  $\varphi(t)$  определена на бесконечном интервале  $(-\infty, \infty)$  и интегрируема на нем, и на любом отрезке оси  $t$  она разлагается в тригонометрический ряд Фурье, то справедливо равенство

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{iy(t-\tau)} \varphi(\tau) d\tau,$$

называемое *интегралом Фурье*.

Если функция  $f(t)$  удовлетворяет условиям сходимости преобразования Лапласа (1)/5.1, то функция  $f(t)e^{-xt}\eta(t)$  представима интегралом Фурье, т.е.

$$f(t)e^{-xt}\eta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{iy(t-\tau)} [f(\tau)e^{-x\tau}\eta(\tau)] d\tau$$

или, учитывая, что  $\eta(t) = 0$  при  $t < 0$  и  $\eta(t) = 1$  при  $t \geq 0$ ,

$$f(t)e^{-xt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_0^{\infty} e^{iy(t-\tau)} f(\tau)e^{-x\tau} d\tau.$$

Умножая обе части этого равенства на  $e^{xt}$ , получаем

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_0^{\infty} e^{(x+iy)(t-\tau)} f(\tau) d\tau.$$

Вместо переменной интегрирования  $y$  введем комплексную переменную  $p = x + iy$ , в которой  $x = \text{const}$ . Тогда  $dy = dp/i$  и изменяются пределы интегрирования:  $p = x - i\infty$  вместо  $y = -\infty$ ,  $p = x + i\infty$  вместо  $y = \infty$ . В результате имеем

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} dp \int_0^{\infty} e^{p(t-\tau)} f(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} dp \int_0^{\infty} e^{-p\tau} f(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp. \# \end{aligned}$$

Во многих практически важных случаях интеграл Меллина (1) может быть взят с помощью формулы (12)/4.4

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \text{res} [e^{pt} F(p), p_k], \quad (2)$$

где  $p_1, p_2, \dots, p_n$  - полюсы функции  $F(p)$  на всей комплексной плоскости.

**Пример.** Найти оригинал  $f(t)$  по изображению  $F(p) = \frac{b}{p^2 + b^2}$ .

**Решение.** Приравнявая знаменатель изображения  $F(p)$  нулю, нахо-

дим полюсы  $p_1 = -ib, p_2 = ib$ . Так как  $p_1 = -ib, p_2 = ib$  - простые полюсы и  $e^{pt}F(p)$  представляет собой дробь, для вычисления вычетов можно воспользоваться формулой (6)/4.3.

$$\operatorname{res}\left[e^{pt}b/(p^2+b^2), -ib\right] = e^{pt}b/2p\Big|_{p=-ib} = ie^{-ibt}/2,$$

$$\operatorname{res}\left[e^{pt}b/(p^2+b^2), ib\right] = e^{pt}b/2p\Big|_{p=ib} = -ie^{ibt}/2.$$

По формуле (2)

$$\begin{aligned} f(t) &= \operatorname{res}\left[\frac{e^{pt}b}{p^2+b^2}, -ib\right] + \operatorname{res}\left[\frac{e^{pt}b}{p^2+b^2}, ib\right] = \\ &= \frac{ie^{-ibt}}{2} - \frac{ie^{ibt}}{2} = -i\frac{1}{2}(e^{ibt} - e^{-ibt}) = -i\sinh(ibt) = \sin bt. \end{aligned}$$

## 5.5. Примеры применения операционного исчисления

Таблица изображений

оригинал $f(t)$	изображение $F(p)$	оригинал $f(t)$	изображение $F(p)$
1	$\frac{1}{p}$	$\sinh bt$	$\frac{1}{p^2 - b^2}$
$\delta(t - \tau)$	$e^{-p\tau}$	$e^{-at} \cos bt$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + b^2}$
$\eta(t - \tau)$	$\frac{e^{-p\tau}}{p}$	$e^{-at} \sin bt$	$\frac{b}{(p+a)^2 + b^2}$
$e^{bt}$	$\frac{1}{p-b}$	$e^{-at} \cosh bt$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 - b^2}$
$\cos bt$	$\frac{p}{p^2 + b^2}$	$e^{-at} \sinh bt$	$\frac{b}{(p+a)^2 - b^2}$
$\sin bt$	$\frac{b}{p^2 + b^2}$	$t^n \quad n=1, 2, \dots$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\cosh bt$	$\frac{p}{p^2 - b^2}$	$e^{-at} t^n \quad n=1, 2, \dots$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$

## Решение линейных дифференциальных уравнений с начальными условиями

**Пример.** Найти решение дифференциального уравнения

$$f''(t) + 9f(t) = 3 \sin 2t,$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0.$$

**Решение.** Над обеими частями данного дифференциального уравнения выполняем преобразование Лапласа

$$L[f''(t) + 9f(t)] = L[3 \sin 2t] \Rightarrow$$

$$p^2 F(p) - f'(0) - pf(0) + 9F(p) = 3 \frac{2}{p^2 + 2^2}.$$

Отсюда с учетом начальных условий находим

$$F(p) = \frac{6}{(p^2 + 4)(p^2 + 4)}.$$

Полученное изображение искомого решения можно представить как произведение изображений двух функций

$$\frac{2}{p^2 + 2^2} \div \sin 2t, \quad \frac{3}{p^2 + 3^2} \div \sin 3t.$$

Это дает возможность записать оригинал – искомое решение – в виде свертки

$$f(t) = \int_0^t \sin 2\tau \sin 3(t - \tau) d\tau.$$

Выполняя интегрирование, находим искомое решение

$$f(t) = \frac{1}{5} (3 \sin 2t - 2 \sin 3t).$$

## Решение систем линейных дифференциальных уравнений с начальными условиями

**Пример.** Решить систему дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} f_1'(t) - f_2(t) - f_3(t) &= 0, \\ f_1(t) - f_2'(t) + f_3(t) &= 0, \\ f_1(t) + f_2(t) - f_3'(t) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

с начальными условиями

$$f_1(0) = 3, \quad f_2(0) = -1, \quad f_3(0) = 2.$$

**Решение.** Обозначим:  $f_1(t) \div F_1(p)$ ,  $f_2(t) \div F_2(p)$ ,  $f_3(t) \div F_3(p)$ .

Над каждым уравнением заданной системы дифференциальных уравнений выполняем преобразование Лапласа

$$\left\{ \begin{array}{l} [pF_1(p) - f_1(0)] - F_2(p) - F_3(p) = 0, \\ F_1(p) - [pF_2(p) - f_2(0)] + F_3(p) = 0, \\ F_1(p) + F_2(p) - [pF_3(p) - f_3(0)] = 0. \end{array} \right.$$

Учитывая начальные условия, получаем линейную систему трех алгебраических уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{bmatrix} p & -1 & -1 \\ 1 & -p & 1 \\ 1 & 1 & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1(p) \\ F_2(p) \\ F_3(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Решаем ее по формулам Крамера

$$F_1(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad F_2(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad F_3(p) = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где  $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  - определители основной и дополнительных матриц. Вычисляя определители, находим

$$\Delta = (p+1)^2(p-2), \quad \Delta_1 = (p+1)(3p+2),$$

$$\Delta_2 = -(p+1)(p-6), \quad \Delta_3 = 2p(p+1).$$

Подставляя определители в формулы Крамера, получаем

$$F_1(p) = \frac{3p-2}{(p+1)(p-2)}, \quad F_2(p) = -\frac{p-6}{(p+1)(p-2)}, \quad F_3(p) = \frac{2p}{(p+1)(p-2)}.$$

Полученные дроби разложим на элементарные

$$F_1(p) = \frac{5}{3} \frac{1}{p+1} + \frac{4}{3} \frac{1}{p-2}, \quad F_2(p) = -\frac{7}{3} \frac{1}{p+1} + \frac{4}{3} \frac{1}{p-2},$$

$$F_3(p) = \frac{2}{3} \frac{1}{p+1} + \frac{4}{3} \frac{1}{p-2}.$$

Используя таблицу изображений, находим оригиналы

$$f_1(t) = \frac{5}{3}e^{-t} + \frac{4}{3}e^{2t}, \quad f_2(t) = -\frac{7}{3}e^{-t} + \frac{4}{3}e^{2t}, \quad f_3(t) = \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{4}{3}e^{2t}.$$

Это и есть искомое решение.

### Решение интегральных уравнений типа свертки

**Пример.** Найти решение уравнения

$$\int_0^t (t-\tau)f(\tau)d\tau = f(t) - t.$$

**Решение.** Обозначим  $f(t) \div F(p)$ . По таблице изображений находим  $t \div 1/p^2$ . Рассматривая интеграл в заданном уравнении как свертку функций  $t$  и  $f(t)$ , по формуле (30)/5.3 имеем

$$\int_0^t (t-\tau)f(\tau)d\tau \div \frac{1}{p^2}F(p).$$

Выполнив над заданным интегральным уравнением преобразование Лапласа, будем иметь

$$\frac{1}{p^2}F(p) = F(p) - \frac{1}{p^2} \Rightarrow F(p) = \frac{1}{p^2 - 1}.$$

По таблице изображений находим

$$f(t) = \sinh t.$$

Это и есть искомое решение.

## Глава 6 ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

### 6.1. Тригонометрические ряды Фурье

Символом *Кroneкера* принято называть величину, обозначаемую  $\delta_{mn}$ , принимающую значения по следующему правилу:

$$\delta_{mn} = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n, \quad \delta_{nn} = 1.$$

**Определение 1.** Счетное множество функций

$$u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$$

называется *ортгональным* на отрезке  $[a, b]$ , если

$$\int_a^b u_m(x) u_n(x) dx = \lambda_n \delta_{mn}.$$

**Теорема 1.** Пусть  $\omega_n = \frac{n\pi}{l}$ , где  $n$  - натуральное число,  $l$  - конечное

положительное число. Множество функций

$1, \cos \omega_1 x, \sin \omega_1 x, \cos \omega_2 x, \sin \omega_2 x, \dots, \cos \omega_n x, \sin \omega_n x, \dots$ ,  
называемое *тригонометрической системой функций*, является ортогональным на отрезке  $[-l, l]$ .

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l 1 \cdot 1 dx &= 2l, \quad \int_{-l}^l 1 \cdot \cos \omega_n x dx = 0, \quad \int_{-l}^l 1 \cdot \sin \omega_n x dx = 0, \quad \int_{-l}^l \cos \omega_m x \sin \omega_n x dx = 0, \\ \int_{-l}^l \cos \omega_m x \cos \omega_n x dx &= l \delta_{mn}, \quad \int_{-l}^l \sin \omega_m x \sin \omega_n x dx = l \delta_{mn}. \end{aligned}$$

Полученные равенства, согласно определению 1, означают, что рассматриваемая тригонометрическая система функций является ортогональной. #

**Определение 2.** Если на отрезке  $[-l, l]$  выполняется равенство

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n x + b_n \sin \omega_n x), \quad (1)$$

а коэффициенты ряда вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad (2)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \omega_n x dx, \quad (3)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \omega_n x dx, \quad (4)$$

то ряд (1) называется *тригонометрическим рядом Фурье*, а его коэффициенты (2), (3), (4) – *коэффициентами Фурье*.

**Теорема 2.** Если функция  $f(x)$  определена и интегрируема на отрезке  $[-l, l]$  и разлагается в равномерно сходящийся тригонометрический ряд (1), то ряд (1) в этом случае является рядом Фурье, разложение в который этой функции единственное.

**Доказательство.** Интегрируя обе части равенства (1) в пределах от  $-l$  до  $l$  и учитывая, что равномерно сходящийся ряд можно почленно интегрировать, с учетом ортогональности тригонометрической системы получим формулу (2).

Умножив обе части равенства (1) на  $\cos \omega_m x$  и интегрируя почленно в пределах от  $-l$  до  $l$ , с учетом ортогональности получим формулу (3).

Умножив обе части равенства (1) на  $\sin \omega_m x$  и интегрируя почленно в пределах от  $-l$  до  $l$ , с учетом ортогональности получим формулу (4).

Формулы (2), (3), (4) однозначно определяют коэффициенты ряда (1). Следовательно, разложение (1) – единственное. #

**Условие Дирихле.** Периодическая функция  $f(x)$  с периодом  $2l$  на отрезке  $[-l, l]$  обладает следующими свойствами: можно указать конечное число точек  $-l = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = l$  таких, что в интервалах между этими точками  $(x_{i-1}, x_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) функция ограничена, непрерывна и монотонна (или не убывает, или не возрастает), а в каждой точке  $x_j$  разрыва  $f(x)$  ее значение равно полусумме односторонних пределов:  $f(x_j) = [f(x_j - 0) + f(x_j + 0)] / 2$ .

**Теорема 3.** Если периодическая функция  $f(x)$  с периодом  $2l$  удовлетворяет условиям Дирихле, то ее ряд Фурье (1) с коэффициентами (2), (3), (4), сходится при всех значениях  $x \in (-\infty, \infty)$ .

За доказательством этой теоремы отошлем читателя к литературе с подробным изложением теории рядов Фурье.

**Функция  $f(x)$  классифицируется по четности.**

**Пусть  $f(x)$  - четная функция.**

В этом случае  $f(x) \cos \omega_n x$  также четная функция, а  $f(x) \sin \omega_n x$  - нечетная функция. С учетом этого формулы (2), (3) можно записать в виде

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad (5)$$



$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \omega_n x dx. \quad (6)$$

А с учетом того, что  $b_n = 0$ , ряд (1) принимает вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \omega_n x. \quad (7)$$

**Пусть  $f(x)$  - нечетная функция.**

В этом случае  $f(x) \cos \omega_n x$  - нечетная функция  $f(x) \sin \omega_n x$  - четная функция,  $a_0 = 0$ ,  $a_n = 0$ , формулу (4) можно записать в виде

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \omega_n x dx. \quad (8)$$

и ряд (1) принимает вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \omega_n x. \quad (9)$$

**Обратим внимание**, что функция Дирака  $\delta(x - \xi)$ , как она определена равенствами (16)/5.3, не удовлетворяет одному из условий Дирихле - ограниченности при  $x = \xi$ . Из этого, согласно сформулированной выше теореме 3, может сложиться впечатление, что она не представима рядом Фурье. Последнее ставит под сомнение ее представимость интегралом Фурье (смотри доказательство теоремы параграфа 5.4) и, как следствие, возможность выполнения над ней преобразования Лапласа.

Однако это не так. Условия Дирихле сформулированы для классической функции, а функция Дирака является так называемой *обобщенной функцией*. Обобщающую роль играет свойство (17)/5.3 - интегрируемость функции Дирака, что как раз и делает ее применимой в методах интегральных преобразований.

**Обобщенная функция** - математическое понятие, обобщающее классическое понятие функции. Потребность в таком обобщении возникает во многих технических, физических и математических задачах. Понятие обобщенной функции дает возможность выразить в математически корректной форме такие идеализированные понятия, как плотность материальной точки, точечного заряда, точечного диполя, интенсивность сосредоточенной силы, мгновенного источника тепла и т.д. В понятии обобщенной функции находит отражение тот факт, что реально нельзя измерить значение физической величины в точке, а можно измерить лишь ее среднее значение в достаточно малой окрестности этой точки. Техника обобщенных функций служит удобным и адекватным аппаратом для описания распределения различных физических величин.

## 6.2. Преобразование Фурье на конечном интервале

Обозначим  $\omega_n = n\pi / l$ , где  $n = 1, 2, \dots$ ;  $l > 0$  - конечное число.

**Определение 1.** Конечным косинус-преобразованием Фурье над функцией  $f(x)$ , удовлетворяющей условиям Дирихле на отрезке  $[0, l]$ , называется интегральное преобразование

$$\alpha_0 = \int_0^l f(\zeta) d\zeta, \quad \alpha_n = \int_0^l \cos \omega_n \zeta f(\zeta) d\zeta, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

**Теорема 1.** Обратное конечное косинус-преобразование Фурье определяется формулой

$$f(x) = \frac{1}{l} \left( \alpha_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos \omega_n x \right). \quad (2)$$

**Доказательство.** Сопоставив формулы (1) с формулами (5), (6), (7)/6.1, придем к формуле (2). #

**Определение 2.** Конечным синус-преобразованием Фурье над функцией  $f(x)$ , удовлетворяющей условиям Дирихле на отрезке  $[0, l]$ , называется интегральное преобразование

$$\beta_n = \int_0^l \sin \omega_n \zeta f(\zeta) d\zeta, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

**Теорема 2.** Обратное конечное синус-преобразование Фурье определяется формулой

$$f(x) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \omega_n x. \quad (4)$$

**Доказательство.** Сопоставив формулу (3) с формулами (8), (9)/6.1 придем к формуле (4). #

Для краткости условимся обозначать  $\alpha_n = C[f(x)]$ ,  $\beta_n = S[f(x)]$  и говорить, что  $\alpha_n, \beta_n$  - изображения функции  $f(x)$ .

**Теорема 3.** Если  $\alpha_n = C[f(x)]$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), то

$$\left. \begin{aligned} C[f''(x)] &= (-1)^n f'(l) - f'(0) - \omega_n^2 \alpha_n, \\ C[f^{IV}(x)] &= (-1)^n f'''(l) - f'''(0) - \\ &\quad - \omega_n^2 [(-1)^n f'(l) - f'(0)] + \omega_n^4 \alpha_n. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

**Доказательство.** Применяя дважды интегрирование по частям,

$$C[f''(x)] = \int_0^l \cos \omega_n \zeta f(\zeta) d\zeta = \left\{ \begin{aligned} u &= \cos \omega_n \zeta, & dv &= f''(\zeta) d\zeta; \\ du &= -\omega_n \sin \omega_n \zeta d\zeta, & v &= f'(\zeta) \end{aligned} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= f'(\zeta) \cos \omega_n \zeta \Big|_0^l + \omega_n \int_0^l \sin \omega_n \zeta f'(\zeta) d\zeta = \\
&= \left\{ \begin{aligned} u &= \sin \omega_n \zeta, dv = f'(\zeta) d\zeta \Rightarrow \\ du &= \cos \omega_n \zeta d\zeta, v = f(\zeta) \end{aligned} \right\} = (-1)^n f'(l) - f'(0) + \\
&+ \omega_n \sin \omega_n \zeta f(\zeta) \Big|_0^l - \omega_n^2 \int_0^l \cos \omega_n \zeta f(\zeta) d\zeta = (-1)^n f'(l) - f'(0) - \omega_n^2 \alpha_n.
\end{aligned}$$

Обозначим  $\phi(x) = f''(x)$ . Используя первую формулу из (5),

$$\begin{aligned}
C[f^{IV}(x)] &= C[\phi''(x)] = (-1)^n \phi'(l) - \phi'(0) - \omega_n^2 C[\phi(x)] = \\
&= (-1)^n f'''(l) - f'''(0) - \omega_n^2 [(-1)^n f'(l) - f'(0) - \omega_n^2 \alpha_n] = \\
&= (-1)^n f'''(l) - f'''(0) - \omega_n^2 [(-1)^n f'(l) - f'(0)] + \omega_n^4 \alpha_n. \#
\end{aligned}$$

**Теорема 4.** Если  $\beta_n = S[f(x)]$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), то

$$\left. \begin{aligned} S[f''(x)] &= -\omega_n [(-1)^n f(l) - f(0)] - \omega_n^2 \beta_n, \\ S[f^{IV}(x)] &= -\omega_n [(-1)^n f''(l) - f''(0)] + \\ &\quad + \omega_n^3 [(-1)^n f(l) - f(0)] + \omega_n^4 \beta_n. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

**Доказательство.** Применяя дважды интегрирование по частям,

$$\begin{aligned}
S[f''(x)] &= \int_0^l \sin \omega_n \zeta f''(\zeta) d\zeta = \left\{ \begin{aligned} u &= \sin \omega_n \zeta, dv = f''(\zeta) d\zeta \Rightarrow \\ du &= \omega_n \cos \omega_n \zeta d\zeta, v = f'(\zeta) \end{aligned} \right\} = \\
&= f'(\zeta) \sin \omega_n \zeta \Big|_0^l - \omega_n \int_0^l \cos \omega_n \zeta f'(\zeta) d\zeta = \\
&= \left\{ \begin{aligned} u &= \cos \omega_n \zeta, dv = f'(\zeta) d\zeta \Rightarrow \\ du &= -\sin \omega_n \zeta d\zeta, v = f(\zeta) \end{aligned} \right\} = -\omega_n \cos \omega_n \zeta f(\zeta) \Big|_0^l - \\
&\quad - \omega_n^2 \int_0^l \sin \omega_n \zeta f(\zeta) d\zeta = -\omega_n [(-1)^n f(l) - f(0)] - \omega_n^2 \beta_n.
\end{aligned}$$

Обозначим  $\phi(x) = f''(x)$ . Используя первую формулу из (6),

$$\begin{aligned}
S[f^{IV}(x)] &= S[\phi''(x)] = -\omega_n [(-1)^n \phi(l) - \phi(0)] - \omega_n^2 S[\phi(x)] = \\
&= -\omega_n [(-1)^n f''(l) - f''(0)] - \omega_n^2 S[f''(x)] = \\
&= -\omega_n [(-1)^n f''(l) - f''(0)] + \omega_n^3 [(-1)^n f(l) - f(0)] + \omega_n^4 \beta_n. \# \\
C[\delta(x - \xi)] &= \cos \omega_n \xi \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (7)
\end{aligned}$$

$$S[\delta(x-\xi)] = \sin \omega_n \xi \quad (n=1,2,\dots). \quad (8)$$

**Пример.** Найти частное решение уравнения

$$f^{IV}(x) + pf'''(x) + qf'(x) = g(x), \quad (9)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$f'(0) = f'(l) = 0, \quad f'''(0) = f'''(l) = 0, \quad (10)$$

если  $p = \text{const}$ ,  $q = \text{const}$  и функция  $g(x)$  удовлетворяет условиям Дирихле на отрезке  $[0, l]$ .

**Решение.** Формулы (5) позволяют видеть, что граничные условия легко могут быть удовлетворены при решении задачи методом конечного косинус-преобразования Фурье. Выполним его.

Проинтегрируем обе части уравнения (9) в пределах от 0 до  $l$ . По формулам (5) при  $n = 0$  получим

$$f'''(l) - f'''(0) + p[f'(l) - f'(0)] + q\alpha_0 = \int_0^l g(\zeta) d\zeta.$$

Отсюда, учитывая граничные условия (10), находим

$$\alpha_0 = \frac{1}{q} \int_0^l g(\zeta) d\zeta.$$

Умножим обе части уравнения (9) на  $\cos \omega_n x$  и проинтегрируем в пределах от 0 до  $l$ . Согласно формулам (5), получим

$$\begin{aligned} & (-1)^n f'''(l) - f'''(0) - \omega_n^2 [(-1)^n f'(l) - f'(0)] + \omega_n^4 \alpha_n + \\ & + p [(-1)^n f'(l) - f'(0) - \omega_n^2 \alpha_n] + q\alpha_n = \int_0^l \cos \omega_n \zeta g(\zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая граничные условия (10), находим

$$\alpha_n = \frac{1}{\omega_n^4 - p\omega_n^2 + q} \int_0^l \cos \omega_n \zeta g(\zeta) d\zeta.$$

Подставив  $\alpha_0$  и  $\alpha_n$  в формулу (2), получим искомое решение

$$f(x) = \frac{1}{l} \left[ \frac{1}{q} \int_0^l g(\zeta) d\zeta + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \omega_n x}{\omega_n^4 - p\omega_n^2 + q} \int_0^l \cos \omega_n \zeta g(\zeta) d\zeta \right].$$

**Пример.** Найти частное решение уравнения (9), удовлетворяющее граничным условиям

$$f(0) = f(l) = 0, \quad f''(0) = f''(l) = 0, \quad (11)$$

если  $p = \text{const}$ ,  $q = \text{const}$  и функция  $g(x)$  удовлетворяет условиям Дирихле на отрезке  $[0, l]$ .

**Решение.** Формулы (6) позволяют видеть, что граничные условия лег-

ко могут быть удовлетворены при решении задачи методом конечного синус-преобразования Фурье. Выполним это преобразование. Для этого умножим обе части уравнения (9) на  $\sin \omega_n x$  и проинтегрируем в пределах от 0 до  $l$ . Согласно формулам (6), получим

$$-\omega_n \left[ (-1)^n f''(l) - f''(0) \right] + \omega_n^3 \left[ (-1)^n f(l) - f(0) \right] + \omega_n^4 \beta_n + \\ + p \left\{ -\omega_n \left[ (-1)^n f(l) - f(0) \right] - \omega_n^2 \beta_n \right\} + q \beta_n = \int_0^l \sin \omega_n \zeta g(\zeta) d\zeta.$$

Отсюда, учитывая граничные условия (11), находим

$$\beta_n = \frac{1}{\omega_n^4 - p\omega_n^2 + q} \int_0^l \sin \omega_n \zeta f(\zeta) d\zeta.$$

Подставив  $\beta_n$  в формулу (4), получим искомое решение

$$f(x) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_n x}{\omega_n^4 - p\omega_n^2 + q} \int_0^l \sin \omega_n \zeta g(\zeta) d\zeta.$$

### 6.3. Функция Грина

**Пример.** Исследовать прогибы  $f(x)$  упругой балки на линейно деформируемом основании, шарнирно закрепленной на концах, нагруженной нагрузкой, распределенной по балке по закону  $q(x)$ .

**Решение.** Найдем вначале прогибы балки под действием сосредоточенной силы  $P$ , приложенной в сечении  $x = \xi$  (рис.24).

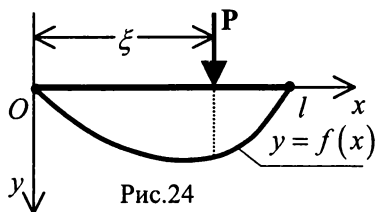


Рис.24

Уравнение прогибов балки от действия сосредоточенной силы

$$EI f''''(x) + k f(x) = P \delta(x - \xi),$$

где  $EI$  - изгибная жесткость балки,  $k$  - коэффициент податливости основания.

Условия закрепления концов балки являются граничными условиями задачи

визиями задачи

$$f(0) = f(l) = 0, \quad f''(0) = f''(l) = 0.$$

Сравнив граничные условия с изображениями производных в конечных преобразованиях Фурье (5), (6) /6.2, приходим к выводу, что в решаемой задаче следует применить синус-преобразование. Выполнив его и учтя граничные условия, найдем

$$b_n = \frac{P}{EI} \frac{\sin \omega_n \xi}{\omega_n^4 + \chi}, \text{ где } \chi = k / EI.$$

Перейдя к оригиналу по формуле (4)/6.2, получим формулу прогибов от действия сосредоточенной силы  $P$

$$f(x) = \frac{2P}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_n \xi}{\omega_n^4 + \chi} \sin \omega_n x.$$

Положим  $P = 1$ . Функция

$$G(x, \xi) = \frac{2}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_n \xi}{\omega_n^4 + \chi} \sin \omega_n x, \quad (1)$$

определяющая прогиб в любом сечении  $x$  от действия единичной сосредоточенной силы, приложенной в сечении  $x = \xi$ , в сопротивлении материалов применительно к расчету балок называется *функцией влияния*, а в математике она называется *функцией Грина*.

Упругие системы, каковой является рассматриваемая балка, обладают свойством, получившим название *принципа независимости действия сил*. Согласно этому свойству, прогиб балки в данном сечении от действия сил, приложенных в разных сечениях, равен сумме прогибов в этом сечении от действия каждой из сил в отдельности.

Разобьем всю длину балки  $l$  на  $k$  элементарных отрезков длины  $\Delta \xi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Внутри каждого отрезка разбиения возьмем точку  $\xi_i$  и вычислим значения  $G(x, \xi_i)$ ,  $q(\xi_i)$ . Ясно, что  $G(x, \xi_i)q(\xi_i)\Delta \xi_i$  - прогиб балки в сечении  $x$  от действия силы  $q(\xi_i)\Delta \xi_i$ . Согласно принципу независимости действия сил, чтобы получить прогиб в этом же сечении  $x$  от действия всей нагрузки на балку, нужно вычислить

$$\sum_{i=1}^k G(x, \xi_i)q(\xi_i)\Delta \xi_i.$$

Полученная сумма является интегральной. Переходя к пределу при  $k \rightarrow \infty$  так, чтобы  $\Delta \xi_i \rightarrow 0$ , получим искомое решение задачи

$$f(x) = \int_0^l G(x, \xi)q(\xi)d\xi \quad (2)$$

или, подставив выражение (1),

$$f(x) = \frac{2}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_n x}{\omega_n^4 + \chi} \int_0^l \sin \omega_n \xi q(\xi)d\xi. \quad (3)$$

**Функция Грина** является фундаментальным решением краевой задачи неоднородного линейного дифференциального уравнения с однородными граничными условиями.

Объясним это на рассмотренном примере. В решении (3) интеграл

представляет собой изображение правой части дифференциального уравнения в конечном синус-преобразовании Фурье при нагрузке  $q(x)$  общего вида. Это значит, что решение (3) можно было получить, не прибегая к промежуточному решению в виде функции Грина (1). В то же время, положив в (3)  $q(x) = \delta(x - \xi)$  вновь придем к функции Грина (1). Следовательно, если получена функция Грина, то решение граничной задачи при самых общих предположениях относительно вида правой части  $q(x)$  дифференциального уравнения получается в виде интеграла (2). Что дает основание называть функцию Грина фундаментальным решением.

В теории дифференциальных уравнений установлено, что при отыскании в интервале  $(a, b)$  решения  $f(x)$  дифференциального уравнения вида

$$\sum_{k=0}^n p_k(x) f^{(k)}(x) = q(x), \quad (4)$$

где  $p_k(x)$  - заданные функции, с граничными условиями

$$A_k f^{(k)}(a) + B_k f^{(k)}(b) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

где  $A_k, B_k$  - заданные числа, если граничная задача для соответствующего однородного уравнения

$$\sum_{k=0}^n p_k(x) f^{(k)}(x) = 0$$

имеет лишь *тривиальное* решение, то для неоднородного уравнения (4) с граничными условиями (5) существует и притом только одна функция Грина  $G(x, \xi)$  такая, что для любой  $q(x)$ , непрерывной на отрезке  $[a, b]$ ,

$$f(x) = \int_a^b G(x, \xi) q(\xi) d\xi.$$

## 6.4. Интеграл Фурье

**Теорема.** Если функция  $f(x)$  определена на бесконечном интервале  $(-\infty, \infty)$ , интегрируема на нем и на любом отрезке  $[-l, l]$  оси  $x$  она разлагается в тригонометрический ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k x + b_k \sin \omega_k x), \quad \text{где} \quad \omega_k = \frac{k\pi}{l}, \quad (1)$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\zeta) d\zeta, \quad a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \cos \omega_k \zeta f(\zeta) d\zeta, \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \sin \omega_k \zeta f(\zeta) d\zeta,$$

то справедливо равенство

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x-\zeta)} f(\zeta) d\zeta. \quad (2)$$

**Доказательство.**  $a_k \cos \omega_k x + b_k \sin \omega_k x =$

$$= \left( \frac{1}{l} \int_{-l}^l \cos \omega_k \zeta f(\zeta) d\zeta \right) \cos \omega_k x + \left( \frac{1}{l} \int_{-l}^l \sin \omega_k \zeta f(\zeta) d\zeta \right) \sin \omega_k x =$$

$$= \frac{1}{l} \int_{-l}^l (\cos \omega_k x \cos \omega_k \zeta + \sin \omega_k x \sin \omega_k \zeta) f(\zeta) d\zeta =$$

$$= \frac{1}{l} \int_{-l}^l \cos \omega_k (x - \zeta) f(\zeta) d\zeta.$$

С учетом этого ряд (1) записывается в виде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l} I(\omega_k), \text{ где } I(\omega_k) = \int_{-l}^l \cos \omega_k (x - \zeta) f(\zeta) d\zeta. \quad (a)$$

$$\omega_k = \frac{k\pi}{l} \Rightarrow \Delta\omega_k = \omega_k - \omega_{k-1} = \frac{\pi}{l} \Leftrightarrow \frac{1}{l} = \frac{\Delta\omega_k}{\pi}. \quad (б)$$

С учетом этого ряд (а) принимает вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} I(\omega_k) \Delta\omega_k = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n I(\omega_k) \Delta\omega_k. \quad (в)$$

Этот ряд представляет собой интегральную сумму функции, которая, как это следует из второго равенства (а), определяется формулой

$$I(\omega) = \int_{-l}^l f(\zeta) \cos \omega(x - \zeta) d\zeta. \quad (г)$$

Найдем область изменения непрерывной переменной  $\omega$ , дискретные значения которой определяются формулой  $\omega_k = k\pi / l$ .

Так как, согласно (б),  $\omega_1 = \pi / l$  и  $\Delta\omega_1 = \pi / l$ , то начальное значение  $\omega$  равно  $\omega_0 = \omega_1 - \Delta\omega_1 = 0$ .

Конечное значение  $\omega = \lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (k\pi / l) = (\pi / l) \lim_{k \rightarrow \infty} k = \infty$ .

Таким образом,  $\omega \in [0, \infty)$ .

По условию теоремы величина  $l$  может принимать любые значения, в том числе и  $l \rightarrow \infty$ . Положим  $l \rightarrow \infty$ .

По условию теоремы  $f(x)$  интегрируема на всем бесконечном интервале  $(-\infty, +\infty)$ . Поэтому  $\int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) d\zeta$  - конечное число. С учетом этого



$$\lim_{l \rightarrow \infty} a_0 = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\zeta) d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) d\zeta \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} = 0. \quad (д)$$

Согласно формуле (б),  $\Delta\omega_k \rightarrow 0$  при  $l \rightarrow \infty$ . Поэтому, переходя в (в) к пределу при  $l \rightarrow \infty$  и учитывая результат (д), получаем

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta\omega_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n I(\omega_k) \Delta\omega_k.$$

Здесь правая часть - предел интегральной суммы функции  $I(\omega)$  на полуинтервале  $[0, \infty)$  - определенный интеграл. Следовательно,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} I(\omega) d\omega$$

или, учитывая (г) при  $l \rightarrow \infty$ ,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega(x - \zeta) f(\zeta) d\zeta. \quad (е)$$

Интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega(x - \zeta) f(\zeta) d\zeta$  представляет собой четную функ-

цию от  $\omega$ , определенную на симметричном интервале  $(-\infty, \infty)$ . Интеграл от этой функции в пределах от 0 до  $\infty$  равен половине интеграла от нее в пределах от  $-\infty$  до  $\infty$ . Поэтому (е) можно записать в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega(x - \zeta) f(\zeta) d\zeta. \quad (3)$$

Это равенство называют *интегралом Фурье в вещественной форме*.

Интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega(x - \zeta) f(\zeta) d\zeta$  представляет собой нечетную

функцию от  $\omega$ , определенную на симметричном интервале  $(-\infty, \infty)$ . Интеграл от нее на этом интервале равен нулю. Поэтому

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} i \sin \omega(x - \zeta) f(\zeta) d\zeta, \quad (ж)$$

где  $i$  - мнимая единица.

Суммируя (3) и (ж) и используя формулу Эйлера, согласно которой

$$\cos \omega(x - \zeta) + i \sin \omega(x - \zeta) = e^{i\omega(x - \zeta)},$$

приходим к равенству (2), которое называется *интегралом Фурье в комплексной форме* или просто *интегралом Фурье*. #

## 6.5. Преобразования Фурье на бесконечном интервале

В основе *интегральных преобразований Фурье на бесконечном интервале* лежит интеграл Фурье (2)/6.4. Преобразуем его к виду

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega \zeta} f(\zeta) d\zeta. \quad (1)$$

**Определение 1.** Экспоненциальным преобразованием Фурье над функцией  $f(x)$  называется интегральное преобразование

$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega \zeta} f(\zeta) d\zeta, \quad (2)$$

ставящее в соответствие заданной функции  $f(x)$  функцию  $\Phi(\omega)$ .

В этом случае, как и ранее в интегральных преобразованиях, функция  $f(x)$  называется оригиналом, а  $\Phi(\omega)$  - ее изображением.

**Теорема 1.** Обратное экспоненциальное преобразование Фурье осуществляется формулой

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \Phi(\omega) d\omega. \quad (3)$$

**Доказательство.** Подставив изображение (2) в формулу обращения (3), получим доказанное равенство (1). #

Для краткости преобразования (2), (3) будем записывать в виде

$$\Phi(\omega) = F_e[f(x)], \quad f(x) = F_e^{-1}[\Phi(\omega)].$$

**Теорема 2.** Если  $f(\pm\infty) = f'(\pm\infty) = f''(\pm\infty) = \dots = f^{(n-1)}(\pm\infty) = 0$  и  $F_e[f(x)] = \Phi(\omega)$ , то

$$F_e[f^{(n)}(x)] = (i\omega)^n \Phi(\omega). \quad (4)$$

**Доказательство.** Найдем изображение первой производной. Применяя интегрирование по частям,

$$\begin{aligned} F_e[f'(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega \zeta} f'(\zeta) d\zeta = \left\{ \begin{aligned} u &= e^{-i\omega \zeta}, & dv &= f'(\zeta) d\zeta; \\ du &= -i\omega e^{-i\omega \zeta}, & v &= f(\zeta) \end{aligned} \right\} = \\ &= e^{-i\omega \zeta} f(\zeta) \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega \zeta} f(\zeta) d\zeta = i\omega \Phi(\omega). \end{aligned}$$

Обозначим  $f'(x) = \phi(x)$  и, пользуясь формулой изображения первой производной, найдем изображение второй производной

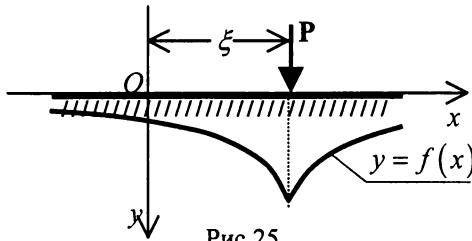
$$F_e[f''(x)] = F_e[\phi'(x)] = i\omega F_e[\phi(x)] =$$

$$= i\omega F_e[f'(x)] = i\omega[i\omega\Phi(\omega)] = (i\omega)^2\Phi(\omega).$$

Аналогично - изображения производных высших порядков. #

Экспоненциальное преобразование Фурье может быть применено для решения задач дифференциальных уравнений на бесконечном интервале с нулевыми граничными условиями, когда решение задачи удовлетворяет условиям существования интеграла Фурье.

**Пример.** Исследовать прогибы бесконечной струны на линейно де-



формируемом основании от действия сосредоточенной нагрузки  $P$ , приложенной в точке  $x = \xi$  (рис.25).

**Решение.** Пусть  $f(x)$  - прогибы струны. Дифференциальное уравнение прогибов струны от действия сосредоточенной силы  $P$  имеет вид

$$sf''(x) - kf(x) = -P\delta(x - \xi), \quad (5)$$

где  $s$  - сила натяжения струны,  $k$  - коэффициент податливости основания, на которое опирается струна,  $\delta(x - \xi)$  - функция Дирака. Знак минус в правой части означает, что сила  $P$  направлена в сторону положительных значений прогибов  $f(x)$ .

Очевидны граничные условия

$$f(\pm\infty) = f'(\pm\infty) = 0. \quad (6)$$

Изображение функции Дирака в экспоненциальном преобразовании Фурье, согласно формуле интегрирования с функцией Дирака (18)/5.3,

$$F_e[\delta(x - \xi)] = e^{-i\omega\xi}.$$

Выполнив над уравнением (5) преобразование Фурье (2), с учетом граничных условий (6) получим

$$-s\omega^2\Phi(\omega) - k\Phi(\omega) = -Pe^{-i\omega\xi} \Rightarrow \Phi(\omega) = \frac{P}{s} \frac{e^{-i\omega\xi}}{\omega^2 + \beta^2}, \quad \text{где } \beta = \sqrt{\frac{k}{s}}.$$

Над полученным изображением  $\Phi(\omega)$  выполним обратное преобразование Фурье (3). В результате получим искомое решение в виде несобственного интеграла

$$f(x) = \frac{P}{2\pi s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(x-\xi)}}{\omega^2 + \beta^2} d\omega. \quad (7)$$

Функция  $e^{i\Omega z} / (z^2 + \beta^2)$  комплексной переменной  $z = \omega + iy$  имеет

два простых полюса  $z_{1,2} = \pm i\beta$ , один из которых  $z_1 = i\beta$  лежит в верхней полуплоскости комплексной плоскости, а другой  $z_2 = -i\beta$  лежит в нижней полуплоскости. Поэтому интеграл (7) можно вычислить, используя формулу (7)/4.4. В рассматриваемом случае, она запишется в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\Omega\omega}}{\omega^2 + \beta^2} d\omega = 2\pi i \operatorname{res} \left[ \frac{e^{i\Omega z}}{z^2 + \beta^2}, i\beta \right], \quad \text{где } \Omega > 0. \quad (8)$$

По формуле (6)/4.3 вычисляем

$$\operatorname{res} \left[ e^{i\Omega z} / (z^2 + \beta^2), i\beta \right] = e^{i\Omega z} / 2z \Big|_{z=i\beta} = e^{-\beta\Omega} / 2i\beta.$$

Подставив этот результат в (8), а после этого (8) в (7), получим

$$f(x) = (P / 2\beta s) e^{-\beta x}.$$

В этой формуле в процессе вычисления несобственного интеграла переменная  $\Omega$  выступала как положительный параметр, что возможно в двух случаях:  $\Omega = x - \xi > 0$  при  $x > \xi$  и  $\Omega = \xi - x > 0$  при  $x < \xi$ . С учетом этого искомое решение записывается в виде

$$f(x) = \begin{cases} (P / 2\beta s) e^{-\beta(x-\xi)} & \text{при } x > \xi, \\ (P / 2\beta s) e^{-\beta(\xi-x)} & \text{при } x < \xi. \end{cases}$$

Обратим внимание, что в рамках применяемого метода значение прогиба в точке  $x = \xi$  осталось неопределенным. Однако его легко определить. Так как односторонние пределы  $f(x)$  при  $x \rightarrow \xi$  существуют, равны друг другу и равны  $P / 2\beta s$ , то  $x = \xi$  - точка устранимого разрыва. Следовательно, можно принять  $f(\xi) = P / 2\beta s$ .

**Функция  $f(x)$  классифицируется по четности.**

Возьмем интеграл Фурье в вещественной форме (3)/6.4 и развернем в нем косинус разности. В результате получим

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega x d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega \zeta f(\zeta) d\zeta + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega x d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega \zeta f(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть  $f(x)$  - четная функция. Тогда  $\int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega \zeta f(\zeta) d\zeta = 0$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega x d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega \zeta f(\zeta) d\zeta = 4 \int_0^{\infty} \cos \omega x d\omega \int_0^{\infty} \cos \omega \zeta f(\zeta) d\zeta.$$

В результате интеграл (9) преобразуется к виду

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega x d\omega \int_0^{\infty} \cos \omega \zeta f(\zeta) d\zeta. \quad (10)$$

**Определение 2.** Косинус-преобразованием Фурье над четной функцией  $f(x)$  называется интегральное преобразование

$$\Phi(\omega) = \int_0^{\infty} \cos \omega \zeta f(\zeta) d\zeta, \quad (11)$$

ставящее в соответствие функции  $f(x)$  функцию  $\Phi(\omega)$ .

**Теорема 3.** Обратное косинус-преобразование Фурье осуществляется формулой

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega x \Phi(\omega) d\omega. \quad (12)$$

**Доказательство.** Подстановка (11) в (12) дает уже доказанное (10). #  
Для краткости вместо (11), (12) условимся писать

$$\Phi(\omega) = F_c[f(x)], \quad f(x) = F_c^{-1}[\Phi(\omega)].$$

**Теорема 4.** Для четных производных функции  $f(x)$ , если

$$f(\infty) = f'(\infty) = \dots = f^{(n-1)}(\infty) = 0 \text{ и } \Phi(\omega) = F_c[f(x)], \text{ то}$$

$$\left. \begin{aligned} F_c[f''(x)] &= -f'(0) - \omega^2 \Phi(\omega), \\ F_c[f^{IV}(x)] &= -f'''(0) + \omega^2 f'(0) + \omega^4 \Phi(\omega) \text{ и т.д.} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

**Доказательство.** Интегрируя два раза по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \cos \omega \zeta f''(\zeta) d\zeta &= \left\{ u = \cos \omega \zeta, \quad dv = f''(\zeta) d\zeta; \right. \\ &\quad \left. du = -\omega \sin \omega \zeta d\zeta, \quad v = f'(\zeta) \right\} = \\ &= f'(\zeta) \cos \omega \zeta \Big|_0^{\infty} + \omega \int_0^{\infty} \sin \omega \zeta f'(\zeta) d\zeta = \left\{ u = \sin \omega \zeta, \quad dv = f'(\zeta) d\zeta; \right. \\ &\quad \left. du = \omega \cos \omega \zeta d\zeta, \quad v = f(\zeta) \right\} = \\ &= -f'(0) + \omega \left[ f(\zeta) \sin \omega \zeta \Big|_0^{\infty} - \omega \int_0^{\infty} \cos \omega \zeta f(\zeta) d\zeta \right] = -f'(0) - \omega^2 \Phi(\omega). \end{aligned}$$

$$\text{Обозначим } f''(x) = \phi(x). \quad F_c[f^{IV}(x)] = F_c[\phi''(x)] =$$

$$= -\phi'(0) - \omega^2 F_c[\phi(x)] = -f'''(0) - \omega^2 F_c[f''(x)] =$$

$$= -f'''(0) - \omega^2 [-f'(0) - \omega^2 \Phi(\omega)] = -f'''(0) + \omega^2 f'(0) + \omega^4 \Phi(\omega). \quad \#$$

**Пример.** Исследовать прогибы  $f(x)$  бесконечной струны на линейно деформируемом основании под действием нагрузки, распределенной по

закону  $q(x) = q_0 e^{-\lambda|x|}$ , где  $q_0 = \text{const} > 0$ ,  $\lambda = \text{const} > 0$  (рис.26).

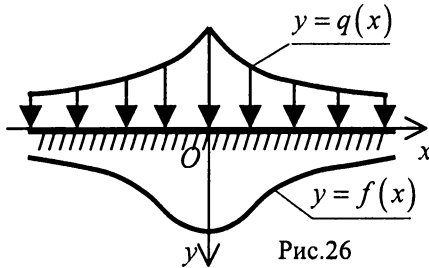


Рис.26

**Решение.** Так как нагрузка  $q(x)$  - четная функция, то и прогиб  $f(x)$  - четная функция. Поэтому решение можно ограничить  $x \in [0, \infty)$ . Уравнение прогибов

$$sf''(x) - kf(x) = -q_0 e^{-\lambda x}. \quad (14)$$

Очевидно, что

$$f(\infty) = f'(\infty) = 0. \quad (15)$$

Из равенства (14) следует, что  $f''(x)$  - непрерывная функция. Отсюда  $f(x)$  - дифференцируемая функция. А так как она четная, то

$$f'(0) = 0. \quad (16)$$

Изображение  $e^{-\lambda x}$  в косинус-преобразовании Фурье

$$F_c[e^{-\lambda x}] = \int_0^{\infty} \cos \omega \zeta e^{-\lambda \zeta} d\zeta = \frac{\lambda}{\omega^2 + \lambda^2}. \quad (17)$$

Выполним над (14) преобразование (11) и учтем (15), (16)

$$s[-f'(0) - \omega^2 \Phi(\omega)] - k\Phi(\omega) = -q_0 \frac{\lambda}{\omega^2 + \lambda^2} \Rightarrow$$

$$\Phi(\omega) = \frac{q_0 \lambda}{s(\omega^2 + \beta^2)(\omega^2 + \lambda^2)}, \quad \text{где } \beta = \sqrt{\frac{k}{s}}.$$

Представим эту дробь в виде суммы элементарных дробей

$$\Phi(\omega) = \frac{q_0 \lambda}{s(\beta^2 - \lambda^2)} \left( \frac{1}{\omega^2 + \lambda^2} - \frac{1}{\omega^2 + \beta^2} \right).$$

Отсюда, используя формулу (16), находим искомое решение

$$f(x) = \frac{q_0 \lambda}{s(\beta^2 - \lambda^2)} \left( \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} - \frac{e^{-\beta x}}{\beta} \right) \quad \text{при } x \in [0, \infty).$$

Пусть  $f(x)$  - нечетная функция. Тогда  $\int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega \zeta f(\zeta) d\zeta = 0$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega x d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega \zeta f(\zeta) d\zeta = 4 \int_0^{\infty} \sin \omega x d\omega \int_0^{\infty} \sin \omega \zeta f(\zeta) d\zeta.$$

В результате интеграл Фурье (9) преобразуется к виду

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \omega x d\omega \int_0^{\infty} \sin \omega \zeta f(\zeta) d\zeta. \quad (18)$$

**Определение 3.** Синус-преобразованием Фурье над нечетной функцией  $f(x)$  называется интегральное преобразование

$$\Phi(\omega) = \int_0^{\infty} \sin \omega \zeta f(\zeta) d\zeta. \quad (19)$$

**Теорема 5.** Обратное синус-преобразование Фурье осуществляется формулой

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \omega x \Phi(\omega) d\omega. \quad (20)$$

**Доказательство.** Подстановка (19) в (20) дает уже доказанное (18). #

Для краткости формулы (19), (20) условимся записывать в виде

$$\Phi(\omega) = F_s[f(x)], \quad f(x) = F_s^{-1}[\Phi(\omega)].$$

**Теорема 6.** Для четных производных функции  $f(x)$ , если

$$\left. \begin{aligned} f(\infty) = f'(\infty) = \dots = f^{(n-1)}(\infty) = 0 \text{ и } \Phi(\omega) = F_s[f(x)], \text{ то} \\ F_s[f''(x)] = \omega f(0) - \omega^2 \Phi(\omega), \\ F_s[f^{IV}(x)] = \omega f''(0) - \omega^3 f(0) + \omega^4 \Phi(\omega) \text{ и т.д.} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

**Доказательство.** Интегрируя два раза по частям,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sin \omega \zeta f''(\zeta) d\zeta &= \left\{ \begin{aligned} u = \sin \omega \zeta, \quad dv = f''(\zeta) d\zeta; \\ du = \omega \cos \omega \zeta d\zeta, \quad v = f'(\zeta) \end{aligned} \right\} = f'(\zeta) \sin \omega \zeta \Big|_0^{\infty} - \\ &- \omega \int_0^{\infty} \cos \omega \zeta f'(\zeta) d\zeta = \left\{ \begin{aligned} u = \cos \omega \zeta, \quad dv = f'(\zeta) d\zeta; \\ du = -\omega \sin \omega \zeta d\zeta, \quad v = f(\zeta) \end{aligned} \right\} = \\ &= -\omega \left[ f(\zeta) \cos \omega \zeta \Big|_0^{\infty} + \omega \int_0^{\infty} \sin \omega \zeta f(\zeta) d\zeta \right] = \omega f(0) - \omega^2 \Phi(\omega). \end{aligned}$$

Обозначим  $f''(x) = \phi(x)$ . Изображение четвертой производной

$$\begin{aligned} F_s[f^{IV}(x)] &= F_s[\phi''(x)] = \omega \phi(0) - \omega^2 F_s[\phi(x)] = \\ &= \omega f''(0) - \omega^2 F_s[f''(x)] = \omega f''(0) - \omega^2 [\omega f(0) - \omega^2 \Phi(\omega)] = \\ &= \omega f''(0) - \omega^3 f(0) + \omega^4 \Phi(\omega). \end{aligned}$$

Аналогично - изображения производных других четных порядков. #

**Пример.** Исследовать прогибы полубесконечной струны на линейно

деформируемом основании, закрепленной одним концом  $x = 0$ , под действием нагрузки  $q(x) = q_0 e^{-\lambda x}$ ,  $q_0 = \text{const} > 0$ ,  $\lambda = \text{const} > 0$  (рис.27).

**Решение.** Уравнение прогибов струны

$$sf''(x) - kf(x) = -q_0 e^{-\lambda x}. \quad (22)$$

Граничные условия

$$f(0) = 0, \quad f(\infty) = f'(\infty) = 0. \quad (23)$$

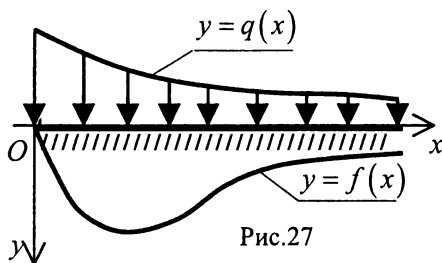


Рис.27

В свете первой из формул (21) очевидно, что в данном случае для отыскания решения  $f(x)$ , определяющего прогиб струны при  $x \in [0, \infty)$ , следует применить синус-преобразование Фурье.

Изображение  $e^{-\lambda x}$  в синус-преобразовании Фурье

$$F_s[e^{-\lambda x}] = \int_0^{\infty} \sin \omega \zeta e^{-\lambda \zeta} d\zeta = \frac{\omega}{\omega^2 + \lambda^2}. \quad (24)$$

Выполнив над (22) преобразование (19) и учитывая (23), получим

$$\Phi(\omega) = \frac{q_0}{s} \frac{\omega}{(\omega^2 + \beta^2)(\omega^2 + \lambda^2)}, \quad \text{где} \quad \beta = \sqrt{\frac{k}{s}}.$$

Представим эту дробь в виде суммы элементарных дробей

$$s[\omega f(0) - \omega^2 \Phi(\omega)] - k\Phi(\omega) = -q_0 \frac{\omega}{\omega^2 + \lambda^2} \Rightarrow$$

$$\Phi(\omega) = \frac{q_0}{s(\beta^2 - \lambda^2)} \left( \frac{\omega}{\omega^2 + \lambda^2} - \frac{\omega}{\omega^2 + \beta^2} \right).$$

Отсюда, используя формулу (24), получаем искомое решение

$$f(x) = \frac{q_0}{s(\beta^2 - \lambda^2)} (e^{-\lambda x} - e^{-\beta x}).$$



## Глава 7 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ХАНКЕЛЯ

### 7.1. Гамма-функция и ее свойства

**Определение.** Гамма-функция  $\Gamma(\nu)$  при положительных значениях переменной  $\nu$  определяется формулой

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\nu-1} dx. \quad (1)$$

Найдем значение гамма-функции при  $\nu = 1$ .

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{1-1} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 1 \Leftrightarrow \Gamma(1) = 1. \quad (2)$$

**Лемма.** При положительных целых и дробных значениях  $\nu$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} x^{\nu} = 0. \quad (3)$$

**Доказательство.** Пусть  $\nu$  - целое число.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} x^{\nu} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\nu}}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{d^{\nu}(x^{\nu}) / dx^{\nu}}{d^{\nu}(e^x) / dx^{\nu}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\nu!}{e^x} = 0.$$

Пусть  $\nu$  - дробное число. Положим  $\nu = n - \mu$ , где  $n$  - целое число,  $0 < \mu < 1$ . Тогда, используя предыдущий результат,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} x^{\nu} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{\mu}} = 0. \#$$

**Теорема 1.** Справедливо соотношение

$$\Gamma(\nu + 1) = \nu \Gamma(\nu). \quad (4)$$

**Доказательство.** Интегрируя по частям и учитывая (3), (1),

$$\begin{aligned} \Gamma(\nu) &= \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\nu-1} dx = \left\{ u = e^{-x}, dv = x^{\nu-1} dx \Rightarrow \right. \\ &\quad \left. du = -e^{-x} dx, v = x^{\nu} / \nu \right\} = \\ &= \frac{e^{-x} x^{\nu}}{\nu} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{\nu} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\nu} dx = \frac{1}{\nu} \Gamma(\nu + 1) \Rightarrow (4). \# \end{aligned}$$

**Теорема 2.** Если  $k$  - целое положительное число, то

$$\Gamma(\nu + k + 1) = (\nu + k)(\nu + k - 1) \cdots (\nu + 2)(\nu + 1) \Gamma(\nu + 1). \quad (5)$$

**Доказательство.** По формуле (4)

$$\Gamma(\nu + 1 + 1) = (\nu + 1) \Gamma(\nu + 1),$$

$$\Gamma(\nu + 2 + 1) = (\nu + 2) \Gamma(\nu + 2) = (\nu + 2)(\nu + 1) \Gamma(\nu + 1),$$

$$\Gamma(\nu + 3 + 1) = (\nu + 3)\Gamma(\nu + 3) = (\nu + 3)(\nu + 2)(\nu + 1)\Gamma(\nu + 1), \dots, (5). \#$$

Из формулы (5) при  $\nu = 0$  вытекает равенство

$$\Gamma(k + 1) = k!. \quad (6)$$

Из этой формулы при  $k = 0$  и формулы (2) следует обобщение понятия факториала:  $0! = 1$ .

## 7.2. Функции Бесселя

При решении многих задач математической физики в полярных координатах приходят к линейному дифференциальному уравнению

$$r^2 y''(r) + r y'(r) + (r^2 - \nu^2) y(r) = 0, \quad (1)$$

где  $\nu = \text{const}$ , называемому *уравнением Бесселя*.

Его общее решение

$$y(r) = C_1 J_\nu(r) + C_2 Y_\nu(r),$$

где  $C_1, C_2$  - произвольные постоянные, представляет собой линейную комбинацию линейно независимых частных решений, которые называются:  $J_\nu(r)$  - функция Бесселя 1-го рода  $\nu$ -го порядка,  $Y_\nu(r)$  - функция Бесселя 2-го рода  $\nu$ -го порядка.

Найдем частное решение  $J_\nu(r)$ .

Уравнение (1) имеет особую точку  $r = 0$ . Поэтому, чтобы обеспечить  $y(0) = 0$ , решение  $y = J_\nu(r)$  будем искать в виде обобщенного степенного ряда

$$J_\nu(r) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^{p+k}, \quad \text{где } p = \text{const}. \quad (a)$$

Найдем коэффициенты этого ряда.

Запишем ряд (a) и его производные в развернутом виде:

$$J_\nu(r) = a_0 r^p + a_1 r^{p+1} + \dots + a_k r^{p+k} + \dots,$$

$$J_\nu'(r) = a_0 p r^{p-1} + a_1 (p+1) r^p + \dots + a_k (p+k) r^{p+k-1} + \dots,$$

$$J_\nu''(r) = a_0 p(p-1) r^{p-2} + a_1 (p+1)p r^{p-1} + \dots + a_k (p+k)(p+k-1) r^{p+k-2} + \dots.$$

Подставив эти выражения в уравнение (1), получим

$$\begin{aligned} & a_0 p(p-1) r^p + a_1 (p+1)p r^{p+1} + \dots + a_k (p+k)(p+k-1) r^{p+k} + \dots + \\ & + a_0 p r^p + a_1 (p+1) r^{p+1} + \dots + a_k (p+k) r^{p+k} + \dots + \\ & + (r^2 - \nu^2) (a_0 r^p + a_1 r^{p+1} + \dots + a_k r^{p+k} + \dots) = 0. \end{aligned}$$

Приравняв нулю коэффициенты при каждой из степеней  $r$ , относительно  $a_0, a_1, \dots, a_k, \dots$  приходим к следующей системе уравнений:

$$a_0(p^2 - \nu^2) = 0, \quad (б)$$

$$a_1[(p+1)^2 - \nu^2] = 0, \quad (в)$$

$$a_k[(p+k)^2 - \nu^2] + a_{k-2} = 0. \quad (г)$$

Примем  $a_0 \neq 0$ . Тогда из равенства (б) следует, что  $p = \pm \nu$ .

Примем  $p = \nu \neq -1/2$ . При этом из равенства (в) находим  $a_1 = 0$ , а из равенства (г) получаем

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(2\nu+k)} \quad k = 2, 3, 4, \dots$$

Отсюда  $a_3 = a_5 = a_7 = \dots = 0$ ,

$$a_2 = -\frac{a_0}{2(2\nu+2)}, \quad a_4 = -\frac{a_2}{4(2\nu+4)}, \quad a_6 = -\frac{a_4}{6(2\nu+6)}, \dots$$

или

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(\nu+1)1!}, \quad a_4 = \frac{a_0}{2^4(\nu+1)(\nu+2)2!},$$

$$a_6 = \frac{a_0}{2^6(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)3!}, \dots$$

Таким образом, для любого четного  $k = 2m$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ )

$$a_k = a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+m)m!}. \quad (д)$$

Постоянная  $a_0$  - величина произвольная. Примем

$$a_0 = 1/2^\nu \Gamma(\nu+1).$$

Подстановка  $a_0$  в (д) дает теперь уже при  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$a_k = a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu} m! (\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+m) \Gamma(\nu+1)}$$

или, с учетом формулы (5)/7.1, при  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$a_k = a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu+m+1)}.$$

Внося эти выражения в (а) и учитывая, что коэффициенты с нечетными номерами равны нулю и что  $p = \nu$ , получим частное решение уравне-

ния Бесселя (1), которое называется функцией Бесселя 1-го рода порядка  $\nu$

$$J_{\nu}(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k+\nu} \quad (2)$$

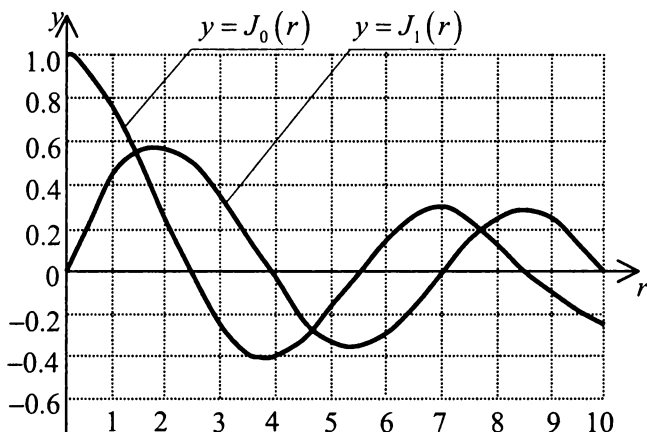


Рис.28

На рис.28 - графики функций Бесселя 1-го рода порядков  $\nu = 0$ ,  $\nu = 1$ .

**Теорема 1.** Функции Бесселя 1-го рода сходятся на всей числовой оси.

**Доказательство.** По признаку Д'Аламбера, ряд сходится, если предел отношения абсолютных величин его  $(k+1)$ -го члена к  $k$ -му члену при  $k \rightarrow \infty$  меньше единицы. Подчиним ряд (2) этому условию

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(r/2)^{2(k+1)+\nu} k! \Gamma(\nu + k + 1)}{(k+1)! \Gamma(\nu + k + 2) (r/2)^{2k+\nu}} = \left(\frac{r}{2}\right)^2 \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(k+1)(\nu + k + 1)} < 1 \Rightarrow$$

$$r^2 < 4 \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1)(\nu + k + 1) = \infty \Rightarrow -\infty < r < \infty.$$

При этих значениях  $r$  выполняется условие Д'Аламбера, т.е. ряд (2) сходится при  $r \in (-\infty, \infty)$ . #

**Теорема 2.** Для функций Бесселя 1-го рода справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$J_{\nu}'(r) = J_{\nu-1}(r) - \frac{\nu}{r} J_{\nu}(r), \quad (3)$$

$$J_{\nu}'(r) = -J_{\nu+1}(r) + \frac{\nu}{r} J_{\nu}(r), \quad (4)$$

$$J_{\nu+1}(r) = \frac{2\nu}{r} J_{\nu}(r) - J_{\nu-1}(r). \quad (5)$$

**Доказательство.** Формулы (3), (4) проверяются дифференцированием ряда (2). Докажем, например, справедливость (4).

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{J_\nu(r)}{r^\nu} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)! \Gamma(\nu+k+1) 2^\nu} \left( \frac{r}{2} \right)^{2k-1}$$

Заменим переменную суммирования  $k$  так, чтобы она начиналась с нуля. После чего, умножив и разделив на  $r^\nu$  правую часть, получим

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{J_\nu(r)}{r^\nu} \right) = -\frac{1}{r^\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu+1+k+1)} \left( \frac{r}{2} \right)^{2k+\nu+1}$$

Сравнивая это выражение с формулой (6), заключаем, что

$$d[J_\nu(r)/r^\nu] / dr = -J_{\nu+1}(r)/r^\nu.$$

Взяв производную левой части этого равенства, получим (4).

Вычитая равенства (3), (4) друг из друга, получим формулу (5). #

### 7.3. Ряд Фурье-Бесселя

Рассмотрим уравнение

$$r^2 y''(r) + r y'(r) + (\lambda^2 r^2 - \nu^2) y(r) = 0, \quad (1)$$

где  $\lambda, \nu$  - некоторые постоянные.

Решим задачу: найти такие значения параметра  $\lambda$ , при которых ненулевые решения этого уравнения будут удовлетворять граничным условиям:

$$y'(0) = 0, \quad (2)$$

$$a y'(R) + b y(R) = 0, \quad (3)$$

где  $a, b$  - заданные константы, не равные нулю одновременно.

Такая задача часто встречается в математической физике и называется *задачей Штурма-Лиувилля*. Значения параметра  $\lambda$  называются *собственными значениями* (или *собственными числами*), а соответствующие им отличные от тождественного нуля решения уравнения (1), удовлетворяющие граничным условиям (2), (3), называются *собственными функциями*.

Новая переменная  $x = \lambda r$  преобразует уравнение (1) к виду

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - \nu^2) y(x) = 0,$$

представляющему собой уравнение Бесселя (1)/7.2. Из чего вытекает, что функция  $y = J_\nu(x)$  является решением этого уравнения. Следовательно, функция  $y = J_\nu(\lambda r)$  является решением уравнения (1), т.е. тождественно выполняется равенство

$$\lambda^2 r^2 J_\nu''(\lambda r) + \lambda r J_\nu^*(\lambda r) + (\lambda^2 r^2 - \nu^2) J_\nu(\lambda r) = 0, \quad (4)$$

где точками на уровне верхнего индекса обозначены производные по всему аргументу в скобках (производные по  $\lambda r$ ).

Запишем первую производную от  $y = J_\nu(\lambda r)$  по  $r$ . Используя формулу (2)/7.2, получаем

$$y(r) = J_\nu(r) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left( \frac{\lambda r}{2} \right)^\nu + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \left( \frac{\lambda r}{2} \right)^{2k+\nu}, \quad (a)$$

$$y'(r) = \frac{\nu \lambda}{\Gamma(\nu+1)2} \left( \frac{\lambda r}{2} \right)^{\nu-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+\nu)(\lambda/2)}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \left( \frac{\lambda r}{2} \right)^{2k+\nu-1}. \quad (б)$$

Отсюда видно, что при  $\nu = 0, 1, 2, \dots$  функция  $y = J_\nu(\lambda r)$  удовлетворяет граничному условию (2)  $y'(0) = 0$ .

Найдем теперь значения параметра  $\lambda$ , при которых будут выполняться граничные условия (3).

Очевидно, что если  $\lambda$  будет корнем уравнения

$$a \lambda J_\nu^*(\lambda R) + b J_\nu(\lambda R) = 0, \quad (5)$$

то вследствие того, что  $y(r) = J_\nu(\lambda r)$ , будет выполняться условие (3).

Таким образом, задача Штурма-Лиувилля для уравнения (1) с граничными условиями (2), (3) решена: собственными значениями  $\lambda_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) являются корни уравнения (5), а собственными функциями – функции Бесселя 1-го рода  $y = J_\nu(\lambda_n r)$ .

**Теорема 1.** Если  $\lambda_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) – корни уравнения (5), то при  $\nu = 0, 1, 2, \dots$  функции Бесселя  $J_\nu(\lambda_n r)$  образуют ортогональную систему функций на отрезке  $[0, R]$  такую, что

$$\int_0^R J_\nu(\lambda_m r) J_\nu(\lambda_n r) r dr = \delta_{mn} \frac{R^2 J_\nu^2(\lambda_n R)}{2a^2 \lambda_n^2} g_n \quad \text{при } a \neq 0, \quad (6a)$$

$$\int_0^R J_\nu(\lambda_m r) J_\nu(\lambda_n r) r dr = \delta_{mn} \frac{R^2 J_\nu^{*2}(\lambda_n R) g_n}{2b^2} \quad \text{при } b \neq 0, \quad (6b)$$

где

$$g_n = b^2 + a^2 (\lambda_n^2 - \nu^2 / R^2). \quad (7)$$

**Доказательство.** Тожество (4) можно преобразовать к виду

$$d[r dJ_\nu(\lambda r) / dr] / dr + (\lambda^2 r - \nu^2 / r) J_\nu(\lambda r) = 0.$$

Возьмем два различных значения параметра  $\lambda$ :  $\lambda_m, \lambda_n$  и запишем это тождество с каждым из них

$$d[rdJ_\nu(\lambda_m r)/dr]/dr + (\lambda_m^2 r - \nu^2/r)J_\nu(\lambda_m r) = 0,$$

$$d[rdJ_\nu(\lambda_n r)/dr]/dr + (\lambda_n^2 r - \nu^2/r)J_\nu(\lambda_n r) = 0.$$

Умножим первое на  $J_\nu(\lambda_n r)$ , а второе - на  $J_\nu(\lambda_m r)$ . Вычитая одно из другого, получаем

$$\begin{aligned} & (\lambda_m^2 - \lambda_n^2)J_\nu(\lambda_m r)J_\nu(\lambda_n r)r = \\ & = \frac{d}{dr} \left[ rJ_\nu(\lambda_m r) \frac{dJ_\nu(\lambda_n r)}{dr} - r \frac{dJ_\nu(\lambda_m r)}{dr} J_\nu(\lambda_n r) \right]. \end{aligned} \quad (в)$$

Если теперь воспользоваться формулами (а), (б), то выражение, стоящее в квадратных скобках (в), может быть представлено разложением по степеням  $r$ . Низшая степень будет  $r^{2(\nu+1)}$ . Отсюда ясно, что это выражение обращается в нуль при  $r = 0$  в случае  $\nu = 0, 1, 2, \dots$ .

Проинтегрируем равенство (в) по  $r$  в пределах от 0 до  $R$ . В результате чего, учитывая, что по нижнему пределу имеем нуль, получим

$$\begin{aligned} & (\lambda_m^2 - \lambda_n^2) \int_0^R J_\nu(\lambda_m r)J_\nu(\lambda_n r)rdr = \\ & = R \left[ \lambda_n J_\nu(\lambda_m R)J_\nu^*(\lambda_n R) - \lambda_m J_\nu^*(\lambda_m R)J_\nu(\lambda_n R) \right]. \end{aligned} \quad (г)$$

Пусть  $\lambda_m \neq \lambda_n$  - корни уравнения (5). Тогда

$$J_\nu^*(\lambda_m R) = -bJ_\nu(\lambda_m R)/a\lambda_m, \quad J_\nu^*(\lambda_n R) = -bJ_\nu(\lambda_n R)/a\lambda_n \quad (д)$$

и равенство (г) дает

$$\int_0^R J_\nu(\lambda_m r)J_\nu(\lambda_n r)rdr = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n. \quad (е)$$

Пусть  $\lambda_n$  - корень уравнения (5) и  $\lambda_m \rightarrow \lambda_n$ . Тогда выполняется второе равенство в формулах (д). С учетом этого из равенства (г) имеем

$$\int_0^R J_n^2(\lambda_n r)rdr = -\frac{R}{a}J_\nu(\lambda_n R) \lim_{\lambda_m \rightarrow \lambda_n} \frac{bJ_\nu(\lambda_m R) + a\lambda_m J_\nu^*(\lambda_m R)}{\lambda_m^2 - \lambda_n^2} = \frac{0}{0}.$$

Дифференцируя, согласно правилу Лопиталя, числитель и знаменатель по  $\lambda_m$  и используя второе равенство из (д) и тождество (4), получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^R J_n^2(\lambda_n r)rdr = -\frac{R}{a}J_\nu(\lambda_n R) \lim_{\lambda_m \rightarrow \lambda_n} \frac{bRJ_\nu^*(\lambda_m R) + aJ_\nu^*(\lambda_m R) + a\lambda_m RJ_\nu^{**}(\lambda_m R)}{2\lambda_m} = \\ & = -\frac{R}{2a\lambda_n}J_\nu(\lambda_n R) \left\{ bRJ_\nu^*(\lambda_n R) + a \left[ \lambda_n RJ_\nu^{**}(\lambda_n R) + J_\nu^*(\lambda_n R) \right] \right\} = \end{aligned}$$

$$= -\frac{R}{2a\lambda_n} J_\nu(\lambda_n R) \left\{ bR \left[ -\frac{b}{a\lambda_n} J_\nu(\lambda_n R) \right] + a \left[ -\left( \lambda_n R - \frac{\nu^2}{\lambda_n R} \right) J_\nu(\lambda_n R) \right] \right\} \Rightarrow$$

$$\int_0^R J_n^2(\lambda_n r) r dr = \frac{R^2 J_\nu^2(\lambda_n R) g_n}{2a^2 \lambda_n^2}. \quad (\text{жа})$$

Заменяя здесь  $J_\nu(\lambda_n R)$  на  $J_\nu^*(\lambda_n R)$  по формуле (д), получаем

$$\int_0^R J_n^2(\lambda_n r) r dr = \frac{R^2 J_\nu^{*2}(\lambda_n R) g_n}{2b^2}. \quad (\text{жб})$$

Формулы (е), (жа), (жб) составляют формулы (6а) и (6б). #

**Теорема 2.** Если функция  $f(r)$  представима равномерно сходящимся на отрезке  $[0, R]$  рядом

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_\nu(\lambda_n r), \quad (8)$$

где  $\lambda_n$  - корни уравнения (5) и  $\nu = 0, 1, 2, \dots$ , то коэффициенты этого ряда определяются формулами

$$B_n = \frac{2a^2 \lambda_n^2}{R^2 J_\nu^2(\lambda_n R) g_n} \int_0^R J_\nu(\lambda_n r) f(r) r dr \quad \text{при } a \neq 0, \quad (9a)$$

$$B_n = \frac{2b^2}{R^2 J_\nu^{*2}(\lambda_n R) g_n} \int_0^R J_\nu(\lambda_n r) f(r) r dr \quad \text{при } b \neq 0. \quad (9b)$$

**Доказательство.** Пусть (8) - равномерно сходящийся на отрезке  $[0, R]$  ряд. Тогда его можно почленно интегрировать. Умножив обе части равенства (8) на  $J_\nu(\lambda_n r) r$  и интегрируя по  $r$  в пределах от 0 до  $R$ , с учетом свойства ортогональности (6) получим формулы (9). #

Ряд (8) с коэффициентами (9), называется *рядом Фурье-Бесселя*.

#### 7.4. Конечное преобразование Ханкеля

**Определение.** Конечным преобразованием Ханкеля порядка  $\nu$  при  $\nu = 0, 1, 2, \dots$  на отрезке  $[0, R]$  над функцией  $f(r)$  называется интегральное преобразование

$$h_\nu(n) = \int_0^R J_\nu(\lambda_n \rho) f(\rho) \rho d\rho, \quad (1)$$

где  $\lambda_n$  - корни уравнения



$$a\lambda J_v^*(\lambda R) + bJ_v(\lambda R) = 0. \quad (2)$$

**Теорема 1.** Обратное конечное преобразование Ханкеля осуществляется формулой

$$f(r) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 h_v(n)}{I_v^2(\lambda_n R) g_n} J_v(\lambda_n r), \quad (3)$$

где

$$I_v(\lambda_n R) = \frac{1}{a} J_v(\lambda_n R) \text{ при } a \neq 0, \quad I_v(\lambda_n R) = -\frac{\lambda_n}{b} J_v^*(\lambda_n R) \text{ при } b \neq 0. \quad (4)$$

**Доказательство.** Пусть  $f(r)$  представима рядом Фурье-Бесселя на отрезке  $[0, R]$ . Подставив (1) в (3), получим доказанное равенство (8)/7.3. #

Для краткости вместо (1) будем писать  $h_v(n) = H_v[f(r)]$ .

**Теорема 2.** Если  $h_v(n) = H_v[f(r)]$ , то

$$\begin{aligned} H_v \left[ f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - \left( \frac{\nu}{r} \right)^2 f(r) \right] = \\ = RI_v(\lambda_n R) [af'(R) + bf(R)] - \lambda_n^2 h_v(n). \end{aligned} \quad (5)$$

**Доказательство.** Применяя интегрирование по частям,

$$\begin{aligned} H_v \left[ f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) \right] &= \int_0^R J_v(\lambda_n \rho) \left[ f''(\rho) + \frac{1}{\rho} f'(\rho) \right] \rho d\rho = \\ &= \left\{ \begin{aligned} u &= J_v(\lambda_n \rho), \quad dv = \left[ f''(\rho) + \frac{1}{\rho} f'(\rho) \right] \rho d\rho = \\ &= d[f'(\rho)\rho] \Rightarrow du = \lambda_n J_v^*(\lambda_n \rho) d\rho, \quad v = f'(\rho)\rho \end{aligned} \right\} = \\ &= Rf'(R)J_v(\lambda_n R) - \lambda_n \int_0^R J_v^*(\lambda_n \rho) f'(\rho) \rho d\rho = \\ &= \left\{ \begin{aligned} u &= J_v^*(\lambda_n \rho)\rho, \quad dv = f'(\rho)d\rho; \\ du &= [\lambda_n \rho J_v^{**}(\lambda_n \rho) + J_v^*(\lambda_n \rho)]d\rho, \quad v = f(\rho) \end{aligned} \right\} = \\ &= Rf'(R)J_v(\lambda_n R) - \lambda_n Rf(R)J_v^*(\lambda_n R) + \\ &+ \lambda_n \int_0^R [\lambda_n \rho J_v^{**}(\lambda_n \rho) + J_v^*(\lambda_n \rho)] f(\rho) d\rho. \end{aligned}$$

Используя уравнение (2) и равенства (4), получаем

$$Rf'(R)J_v(\lambda_n R) - \lambda_n Rf(R)J_v^*(\lambda_n R) = RI_v(\lambda_n R) [af'(R) + bf(R)].$$

Из тождества (4)/7.3 имеем

$$\lambda_n \rho J_v''(\lambda_n \rho) + J_v'(\lambda_n \rho) = -(\lambda_n \rho - \nu^2 / \lambda_n \rho) J_v(\lambda_n \rho).$$

С учетом последних двух равенств

$$\begin{aligned} H_\nu \left[ f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) \right] &= RI_\nu(\lambda_n R) [af'(R) + bf(R)] - \\ &- \lambda_n^2 \int_0^R J_\nu(\lambda_n \rho) f(\rho) \rho d\rho + \int_0^R J_\nu(\lambda_n \rho) \frac{\nu^2}{\rho} \rho d\rho = \\ &= RI_\nu(\lambda_n R) [af'(R) + bf(R)] - \lambda_n^2 h_\nu(n) + H_\nu \left[ \frac{\nu^2}{r^2} f(r) \right]. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что

$$H_\nu \left[ f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - \frac{\nu^2}{r^2} f(r) \right] = H_\nu \left[ f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) \right] - H_\nu \left[ \frac{\nu^2}{r^2} f(r) \right],$$

получаем формулу (5). #

**Обратим внимание**, что при решении задачи дифференциального уравнения методом конечного преобразования Ханкеля значение параметра  $\nu$  принимается равным его значению в интегрируемом уравнении

$$r^2 f''(r) + rf'(r) - (\nu^2 + kr^2) f(r) = q(r), \text{ где } k = \text{const}. \quad (6)$$

**Пример.** Исследовать прогибы  $f(r)$  круглой мембраны радиуса  $R$ , растянутой силой  $s = \text{const}$ , на линейно деформируемом основании с коэффициентом податливости основания  $k = \text{const}$  от действия осесимметричной нагрузки  $q(r)$ , полагая, что мембрана по контуру закреплена.

**Решение.** Уравнение прогибов мембраны

$$s \left[ f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) \right] - kf(r) = -q(r). \quad (7)$$

Условие закрепления мембраны

$$f(R) = 0. \quad (8)$$

Из сравнения уравнения (7) с уравнением (6) видно, что в данном случае  $\nu = 0$ . Поэтому решение надо искать в виде разложения в ряд по функциям Бесселя нулевого порядка  $J_0(\lambda_n r)$ . А так как граничное условие (8) является граничным условием (3)/7.3 при  $a = 0$ ,  $b \neq 0$ , то собственные значения должны быть корнями уравнения (5)/7.3 в виде

$$J_0(\lambda R) = 0.$$

Над уравнением (7) выполним преобразование Ханкеля  $H_0$ . Обозначая  $H_0[f(r)] = h_0(n)$ ,  $H_0[q(r)] = \eta_0(n)$ , учитывая граничное условие

(8) и полагая  $a = 0$  в формуле (5), получаем

$$h_0(n) = \eta_0(n) / (s\lambda_n^2 + k).$$

Выполняя обратное преобразование по формуле (3) и полагая в (7)/7.3 и в (4)  $a = 0$ ,  $b = 1$ , получаем искомое решение

$$f(r) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_0(n)}{(s\lambda_n^2 + k)J_1^2(\lambda_n R)} J_0(\lambda_n r).$$

Здесь выполнена замена  $J_0^*(\lambda_n R) = -J_1(\lambda_n R)$  по формуле (4)/7.2.

Развернув изображение нагрузки  $\eta_0(n)$ , получим окончательный вид искомого решения

$$f(r) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)}{(s\lambda_n^2 + k)J_1^2(\lambda_n R)} \int_0^R J_0(\lambda_n \rho) q(\rho) \rho d\rho. \quad (9)$$

Если принять  $q(r) = \delta(r - \xi)$ , то полученное решение становится функцией Грина

$$G(r, \xi) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)}{(s\lambda_n^2 + k)J_1^2(\lambda_n R)} J_0(\lambda_n \xi) \xi, \quad (10)$$

имеющей смысл прогиба мембраны от действия кольцевой сосредоточенной единичной силы, приложенной по окружности  $r = \xi$ .

Решение (9) через функцию Грина (10) выражается формулой

$$f(r) = \int_0^R G(r, \xi) q(\xi) d\xi. \quad (11)$$

**Пример.** Исследовать прогибы  $f(r)$  круглой мембраны радиуса  $R$ , растянутой силой  $s = \text{const}$ , на линейно деформируемом основании с коэффициентом податливости основания  $k = \text{const}$  от действия осесимметричной нагрузки  $q(r)$ , полагая, что прогиб и угол поворота ее края подчинены равенству

$$f'(R) + \beta f(R) = 0,$$

где  $\beta = \text{const}$ .

**Решение.** Прогибы мембраны описываются уравнением (7). Условие на краю мембраны является граничным условием (3)/7.3 при  $a = 1$ ,  $b = \beta$ . Ход решения задачи повторяет предыдущий пример. Отличие заключается в том, что собственные значения  $\lambda_n$  являются корнями уравнения

$$\lambda J_0^*(\lambda R) + \beta J_0(\lambda R) = 0,$$

а при выполнении обратного преобразования в формулах (7)/7.3 и (4) сле-

дует взять  $a=1$ ,  $b=\beta$ . При этом изображения решений в обоих примерах имеют одинаковый вид. В результате в решаемом примере ответ записывается следующим образом:

$$f(r) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n r)}{(s\lambda_n^2 + k)(\lambda_n^2 + \beta^2) J_0^2(\lambda_n R)} \int_0^R J_0(\lambda_n \rho) q(\rho) \rho d\rho.$$

Если принять  $q(r) = \delta(r - \xi)$ , то получается функция Грина

$$G(r, \xi) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n r)}{(s\lambda_n^2 + k)(\lambda_n^2 + \beta^2) J_0^2(\lambda_n R)} J_0(\lambda_n \xi) \xi.$$

Решение задачи через нее выражается формулой (11).

Физический смысл функции Грина в этом примере такой же, как и в предыдущем.

**Справка.** Справедлива следующая формула интегрирования

$$\int J_\nu(r) r^{\nu+1} dr = r^{\nu+1} J_{\nu+1}.$$

**Доказательство.** Обозначим:  $f(r) = J_\nu(r) r^{\nu+1}$  - подынтегральная функция,  $F(r) = J_{\nu+1}(r) r^{\nu+1}$  - ее первообразная. Тогда должно быть

$$F'(r) = f(r).$$

Проверим выполнение этого равенства, используя равенство (3)/7.2.

$$\begin{aligned} F'(r) &= d[J_{\nu+1}(r) r^{\nu+1}] / dr = (\nu+1) J_{\nu+1}(r) r^\nu + J'_{\nu+1}(r) r^{\nu+1} = \\ &= (\nu+1) \cancel{J_{\nu+1}(r)} r^\nu + [J_\nu(r) - (\nu+1) \cancel{J_{\nu+1}(r)} / r] r^{\nu+1} = \\ &= J_\nu(r) r^{\nu+1} = f(r). \quad \# \end{aligned}$$

В частности,

$$\int J_0(r) r dr = r J_1(r). \quad (12)$$

## Часть 3

# ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

## Глава 8

### КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

#### 8.1. Дифференциальные уравнения математической физики

Здесь и далее условимся частные производные обозначать нижними индексами после запятой. Например,

$$u_{,x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{,t} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_{,xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{,tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad u_{,xt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}.$$

Многие задачи механики и физики приводят к дифференциальным уравнениям с частными производными. Так, например:

1) при изучении различных видов волн – звуковых, электромагнитных, упругих деформаций, а также колебательных процессов приходят к *волновому уравнению*

$$a^2 (u_{,xx} + u_{,yy} + u_{,zz}) = u_{,tt}, \quad (1)$$

где  $a$  – скорость распространения волн в рассматриваемой среде;

2) распространение тепла в однородном изотропном теле и явления диффузии описываются уравнением

$$a^2 (u_{,xx} + u_{,yy} + u_{,zz}) = u_{,t}, \quad (2)$$

называемым *уравнением теплопроводности*;

3) установившееся тепловое состояние однородного изотропного тела описывается *уравнением Пуассона*

$$u_{,xx} + u_{,yy} + u_{,zz} = -f(x, y, z), \quad (3)$$

которое при отсутствии источников тепла внутри тела преобразуется в *уравнение Лапласа*

$$u_{,xx} + u_{,yy} + u_{,zz} = 0. \quad (4)$$

Уравнением Лапласа описываются также потенциал поля тяготения и потенциал электрического поля.

Уравнения (1)–(4) принято называть *основными дифференциальными уравнениями математической физики*. Их изучение дает возможность решать многие физические и технические задачи.

Каждое из вышеназванных уравнений имеет бесчисленное множество частных решений. При решении конкретной физической задачи необходимо из всех этих решений выбрать то, которое удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, вытекающим из ее физического смысла. Эти

дополнительные условия бывают двух типов: *граничные условия* – условия, заданные на границе рассматриваемой среды, и *начальные условия*, определяющие состояние среды в момент времени, с которого начинается изучение данного физического процесса.

Таким образом, задачи математической физики состоят в отыскании решений уравнений в частных производных (1)-(4), удовлетворяющих начальным и граничным условиям.

Последующее изложение задач математической физики ограничивается случаями двух независимых переменных.

## 8.2. Классификация уравнений второго порядка

Рассмотрим уравнение следующего вида:

$$AU_{,xx} + BU_{,xt} + CU_{,tt} = F, \quad (1)$$

где  $U = U(x, t)$  - функция независимых переменных  $x, t$ ;  $A, B, C$  - коэффициенты уравнения и  $F$  - свободный член являются заданными вещественными функциями переменных  $x, t, U, U_{,x}, U_{,t}$ .

Будем полагать, что функция  $U(x, y)$  является непрерывной и имеет непрерывные частные производные  $U_{,x}; U_{,t}; U_{,xt}; U_{,tx}$ . Это обеспечивает обратимость порядка дифференцирования при отыскании смешанной производной, т.е. обеспечивает выполнение равенства

$$U_{,xt} = U_{,tx}, \quad (2)$$

которое позволяет путем введения новых переменных

$$X = U_{,x}; \quad T = U_{,t}, \quad (3)$$

записать систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} AX_{,x} + BX_{,t} + CT_{,t} &= F, \\ X_{,t} - T_{,x} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

эквивалентную уравнению (1).

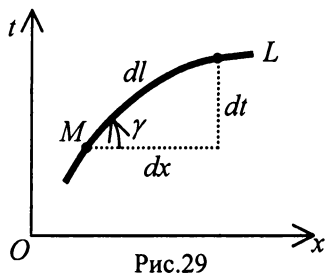


Рис.29

Дифференциальное уравнение любой гладкой кривой  $L$  в декартовых координатах  $x, t$  имеет вид

$$dx/dt = \cot \gamma, \quad (5)$$

где  $\gamma$  - угол между касательной к  $L$  и положительным направлением оси  $x$ .

Докажем это. Выделим на кривой  $L$  отрезок бесконечно малой длины  $dl$  (рис.29),  $dx, dt$  - его проекции на оси  $x$  и

$t$  соответственно. Тогда

$$dx = dl \cos \gamma, \quad dt = dl \sin \gamma. \quad (a)$$

Разделив эти равенства друг на друга, получим уравнение (5). #

Полный дифференциал функции  $V(x, t)$  определяется формулой

$$dV = V_{,x} dx + V_{,t} dt \quad (6)$$

и может рассматриваться как дифференциал этой функции по направлению кривой  $L$ .

Действительно. Пусть  $V_{,x}$ ,  $V_{,t}$  вычислены в некоторой точке  $M$  кривой  $L$  и пусть  $dx, dt$  - проекции на оси  $x$  и  $t$  дифференциала длины дуги  $dl$  этой кривой в точке  $M$ . Пусть  $\gamma$  - угол наклона  $dl$  к оси  $x$ . Тогда справедливы равенства (а). Подставив их в формулу (б), получим

$$dV = (V_{,x} \cos \gamma + V_{,t} \sin \gamma) dl.$$

Отсюда очевидно, что  $dV$  является функцией угла  $\gamma$ , определяющего направление кривой  $L$  в каждой ее точке, т.е. является дифференциалом по направлению кривой  $L$ .

**Определение 1.** *Характеристиками уравнения (1) будем называть линии на плоскости  $x, t$ , по направлению которых уравнение (1) может быть записано эквивалентной системой уравнений в полных дифференциалах. Эти уравнения назовем дифференциальными соотношениями на характеристиках.*

**Теорема 1.** Уравнение (1) с вещественными коэффициентами  $A, B, C$  имеет характеристики при выполнении неравенства

$$B^2 - 4AC \geq 0. \quad (6)$$

**Доказательство.** Пусть  $dx, dt$  - проекции на координатные оси  $x, t$  дифференциала длины дуги некоторой кривой  $L$ . Тогда

$$dX = X_{,x} dx + X_{,t} dt, \quad dT = T_{,x} dx + T_{,t} dt \quad (7)$$

будут полными дифференциалами функций (3) по направлению этой кривой  $L$ . Равенства (7) совместно с уравнениями (4) относительно частных производных образуют неоднородную систему алгебраических уравнений, которая в матричной форме выглядит следующим образом:

$$\begin{bmatrix} A & B & 0 & C \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ dx & dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{,x} \\ X_{,t} \\ T_{,x} \\ T_{,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ dX \\ dT \end{bmatrix}. \quad (в)$$

Так как система уравнений (4) имеет бесконечное множество частных решений, то система уравнений (в) также имеет бесконечное множество решений. Как известно, условием этого является равенство нулю определителей ее основной и всех дополнительных матриц.

Приравнявая нулю определитель основной матрицы, получаем

$$C(dx/dt)^2 - B(dx/dt) + A = 0. \quad (8)$$

Подстановка по формуле (5) дает

$$C \cot^2 \gamma - B \cot \gamma + A = 0. \quad (9)$$

Решив это квадратное уравнение, находим

$$\cot \gamma = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C} \quad (10)$$

Так как  $\cot \gamma$  - вещественное число, то условие (6) будет достаточным для выполнения равенства (10). Таким образом, установлено, что на плоскости  $x, t$  при условии (6) существует хотя бы одно семейство линий  $L$ , углы наклона касательных к которым определяются формулой (10).

Докажем теперь, что эти линии  $L$  являются характеристиками.

Приравняем нулю определитель любой из дополнительных матриц системы (в). Например, определитель матрицы, полученной путем замены первого столбца основной матрицы столбцом свободных членов. В результате будем иметь

$$(Cdx - Bdt)dX - Cdt dT + Fdt^2 = 0.$$

Отсюда, воспользовавшись формулой (5), получаем

$$(B - C \cot \gamma)dX + CdT = Fdt. \quad (11)$$

Из формулы (10) видно, что при  $B^2 - 4AC > 0$  равенство (11) представляет собой систему двух уравнений в полных дифференциалах, а при  $B^2 - 4AC = 0$  - одно уравнение в полных дифференциалах. Надо доказать, что в обоих случаях имеет место эквивалентность уравнения (11) уравнению (1). Тогда, согласно определению 1, (8) - дифференциальные уравнения характеристик, а уравнения (11) - дифференциальные соотношения на них.

Положим, что полные дифференциалы (7) функций  $X, T$  записаны по направлению характеристик. Применяя к ним (5), получаем

$$dX = (X_{,x} \cot \gamma + X_{,t})dt, \quad dT = (T_{,x} \cot \gamma + T_{,t})dt.$$

Подставим эти  $dX, dT$  в уравнение (11). В результате получим

$$(B - C \cot \gamma)(X_{,x} \cot \gamma + X_{,t}) + C(T_{,x} \cot \gamma + T_{,t}) = F.$$

Открыв скобки

$$BX_{,x} \cot \gamma - CX_{,x} \cot^2 \gamma + BX_{,t} - CX_{,t} \cot \gamma + CT_{,t} \cot \gamma + CT_{,t} = F,$$

преобразуем полученное уравнение к виду

$$X_{,x} (B \cot \gamma - C \cot^2 \gamma) + BX_{,t} + C(T_{,x} - X_{,t}) \cot \gamma + CT_{,t} = F.$$

Исключив при помощи (9)  $B \cot \gamma - C \cot^2 \gamma = A$ , и учитывая второе уравнение в (4)  $T_{,x} - X_{,t} = 0$ , придем к первому уравнению в (4)

$$AX_{,x} + BX_{,t} + CT_{,t} = F,$$

которое получено из уравнения (1) введением новых функций  $X, T$  по формулам (3). Поэтому уравнение (11) эквивалентно уравнению (1). #



**Определение 2.** В зависимости от наличия характеристик различают три типа уравнений:

- а) *гиперболический*, если (1) имеет два семейства характеристик;
- б) *параболический*, если (1) имеет одно семейство характеристик;
- в) *эллиптический*, если (1) не имеет характеристик.

Очевидна следующая теорема.

**Теорема 2.** Тип уравнения (1):

гиперболический при  $B^2 - 4AC > 0$ ,

параболический при  $B^2 - 4AC = 0$ ,

эллиптический при  $B^2 - 4AC < 0$ .

**Примеры уравнений всех трех типов.**

1) Волновое уравнение

$$a^2 U_{,xx} - U_{,t} = 0,$$

где  $a$  - вещественное положительное число.

В этом уравнении

$$A = a^2, B = 0, C = -1 \Rightarrow B^2 - 4AC = 4a^2 > 0,$$

что определяет его как уравнение гиперболического типа.

2) Уравнение теплопроводности

$$a^2 U_{,xx} = U_{,t},$$

где  $a$  - вещественное положительное число.

В этом уравнении

$$A = a^2, B = 0, C = 0 \Rightarrow B^2 - 4AC = 0,$$

что определяет его как уравнение параболического типа.

3) Уравнение Лапласа

$$U_{,xx} + U_{,t} = 0.$$

В этом уравнении

$$A = 1, B = 0, C = 1 \Rightarrow B^2 - 4AC = -4 < 0,$$

что определяет его как уравнение эллиптического типа.

В некоторых случаях оказывается удобней пользоваться другим определением характеристик.

**Определение 3.** Пусть решение системы уравнений (4)  $X, T$  являются непрерывными функциями. Характеристиками системы уравнений (4) будем называть линии на плоскости  $x, t$ , по направлению которых производные  $X_{,x}; X_{,t}; T_{,x}; T_{,t}$  являются непрерывными функциями, а при пересечении их эти производные могут скачкообразно изменяться.

Характеристики называют еще *линиями слабых разрывов*.

Под функцией  $\Phi$  будем подразумевать любую из функций  $X, T$ .

Условимся обозначать  $[[\Phi_{,x}]], [[\Phi_{,t}]]$ , - скачки значений производных на характеристике. Пусть  $\Phi_{,x}^+; \Phi_{,t}^+$  - значения производных в точке, распо-

ложенной с одной стороны от характеристики как угодно близко к данной точке на характеристике, и  $\Phi_{,x}^-; \Phi_{,t}^-$  - их значения в точке, расположенной с другой стороны от характеристики как угодно близко к той же самой точке на характеристике. Тогда

$$[\Phi_{,x}] = \Phi_{,x}^+ - \Phi_{,x}^-, \quad [\Phi_{,t}] = \Phi_{,t}^+ - \Phi_{,t}^-.$$

Запишем полные дифференциалы по направлению характеристики с одной и с другой ее стороны как угодно близко к ней

$$d\Phi^+ = \Phi_{,x}^+ dx + \Phi_{,t}^+ dt, \quad d\Phi^- = \Phi_{,x}^- dx + \Phi_{,t}^- dt.$$

Вычитая одно равенство из другого, используя (5) и учитывая, что, согласно определению 3,  $\Phi^+ - \Phi^- = 0$ , получаем

$$[\Phi_{,x}] \cot \gamma + [\Phi_{,t}] = 0. \quad (12)$$

Это равенство называется *условием Адамара*.

Запишем уравнения скачков, отвечающие уравнениям (4),

$$\left. \begin{aligned} A[X_{,x}] + B[X_{,t}] + C[T_{,t}] &= [F], \\ [X_{,t}] - [T_{,x}] &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Исключив здесь скачки производных по  $t$  при помощи (12), получим

$$\begin{bmatrix} (A - B \cot \gamma) & -C \cot \gamma \\ -\cot \gamma & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [X_{,x}] \\ [T_{,x}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F] \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Это - неоднородная система алгебраических уравнений. Она имеет бесконечное множество решений, что является следствием бесконечного множества решений системы уравнений (4). Поэтому определители ее основной и всех дополнительных матриц равны нулю. Приравняв определитель основной матрицы нулю, получим уравнение (9). Следовательно, дифференциальные уравнения характеристик и существование характеристик по определению 3 устанавливаются так же и теми же уравнениями, что и при использовании определения 1.

Во многих случаях определение 3 позволяет выявить физический смысл характеристик и тем самым облегчить решение задачи. Например, в теории пластичности и в статике сыпучей среды характеристики являются так называемыми линиями скольжения, а в динамических задачах теории упругости - волнами деформаций.

## Глава 9

### ЗАДАЧИ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

#### 9.1. Уравнение теплопроводности

Рассмотрим твердое тело, материал которого является однородным и изотропным. Это означает, что физические характеристики материала, такие как  $\rho$  - плотность,  $\lambda$  - теплопроводность,  $c$  - теплоемкость, являются скалярными константами.

Экспериментально установлены следующие два закона.

**Закон теплопроводности Фурье.** Тепло распространяется в виде потока, интенсивность и направление которого определяются *вектором теплового потока*  $\mathbf{q}$ . Вектор теплового потока прямо пропорционален градиенту температуры  $T = T(x, y, z, t)$  по пространственным переменным  $x, y, z$ . Здесь  $t$  - текущее время. Математически этот закон выражается равенством

$$\mathbf{q} = -\lambda \text{grad} T. \quad (1)$$

В декартовом базисе  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , ассоциированном с координатами  $x, y, z$ ,  $\text{grad} T = T_{,x} \mathbf{i} + T_{,y} \mathbf{j} + T_{,z} \mathbf{k}$ .

В равенстве (1) знак минус означает, что вектор  $\mathbf{q}$  противоположно направлен вектору  $\text{grad} T$ . Физически этим учитывается, что тепловой поток направлен от более нагретых частей тела к менее нагретым.

**Закон теплоемкости.** Количество тепла  $dQ$ , накапливаемое элементарным объемом тела  $dV$  за бесконечно малый промежуток времени  $dt$ , прямо пропорционально скорости изменения температуры  $T_{,t}$ :

$$dQ = \rho c T_{,t} dV dt. \quad (2)$$

Положим, что через поверхность рассматриваемого тела в него втекает тепло, а внутренние источники и стоки тепла отсутствуют.

Выделим внутри тела произвольный объем  $V$ , ограниченный поверхностью  $S$ . За время в промежутке от  $t = 0$  до  $t = \tau$ , согласно закону (1), в объем  $V$  поступит тепло в количестве

$$Q = \int_0^\tau dt \iint_S -\mathbf{q} \mathbf{n} dS = \int_0^\tau dt \iint_S \lambda \text{grad} T \mathbf{n} dS. \quad (3)$$

Здесь двойной интеграл означает интегрирование по поверхности  $S$ ,  $\mathbf{n}$  - единичный вектор внешней нормали к поверхности  $S$  в ее текущей точке, знак минус учитывает, что положительное направление потока тепла  $Q > 0$  принято внутрь объема  $V$  при угле  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} > 90^\circ$ .

По теореме Остроградского поток вектора  $\lambda \text{grad} T$  через поверхность  $S$ , ограничивающую объем  $V$ , равен дивергенции этого вектора  $\text{div}(\lambda \text{grad} T)$  по объему  $V$ , что выражается равенством

$$\iint_S \lambda \text{grad} T dS = \iiint_V \text{div}(\lambda \text{grad} T) dV.$$

Согласно этому, формула (3) принимает вид

$$Q = \int_0^{\tau} dt \iiint_V \text{div}(\lambda \text{grad} T) dV. \quad (4)$$

По закону теплоемкости (2) количество тепла  $Q$ , накапливаемое объемом  $V$  в промежутке времени от  $t = 0$  до  $t = \tau$  определяется формулой

$$Q = \int_0^{\tau} dt \iiint_V \rho c T_{,t} dV. \quad (5)$$

Так как внутренних источников и стоков тепла нет, то количество тепла, поступившее в объем  $V$  за время от  $t = 0$  до  $t = \tau$ , определяемое формулой (4), равно количеству тепла, накопленному этим объемом за тот же промежуток времени, определяемому формулой (5). Из чего следует

$$\int_0^{\tau} dt \iiint_V [\text{div}(\lambda \text{grad} T) - \rho c T_{,t}] dV = 0.$$

Так как подынтегральная функция является непрерывной (такова физическая природа входящих в нее величин), отрезок времени начала и конца наблюдения за процессом  $[0, \tau]$  и выделенный объем тела  $V$  произвольные, то для любой точки  $(x, y, z)$  рассматриваемого тела и для любого момента времени  $t$  должно выполняться равенство

$$\text{div}(\lambda \text{grad} T) - \rho c T_{,t} = 0$$

или

$$a^2 (T_{,xx} + T_{,yy} + T_{,zz}) = T_{,t}, \quad (6)$$

где  $a = \sqrt{\lambda / \rho c}$  - коэффициент температуропроводности.

Уравнение (6) называют уравнением теплопроводности.

## 9.2. Распространение тепла в стержнях конечной длины

Ось стержня постоянного поперечного сечения совместим с координатной осью  $x$  так, чтобы стержень располагался со стороны положительной полуоси  $x$  и чтобы его начало совпадало с началом координат. Обозначим через  $l$  длину стержня.

**Задача при отсутствии тепловых потоков на концах.** Известно, что

в начальный момент времени  $t = 0$  температура по длине стержня распределена по закону  $f(x)$ . Теплообмена стержня с окружающей его средой нет. Отсутствуют также внутренние источник и сток тепла. Происходит процесс внутреннего перераспределения тепла с течением времени.

Математически эта задача формулируется следующим образом: найти решение уравнения

$$a^2 T_{,xx} = T_{,t}, \quad (1)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$T(x, 0) = f(x) \quad (2)$$

и граничным условиям

$$T_{,x}(0, t) = T_{,x}(l, t) = 0. \quad (3)$$

Решение будем искать методом интегральных преобразований: по переменной  $t$  - преобразованием Лапласа  $L[T(x, t)]$ , а по переменной  $x$  - конечным косинус-преобразованием Фурье  $C[T(x, t)]$ .

В совокупности оба эти преобразования  $LC[T(x, t)]$ , согласно формулам (1)/5.1 и (1)/6.2, представляют собой повторное интегрирование

$$LC[T(x, t)] = \int_0^\infty e^{-p\tau} d\tau \int_0^l \cos \omega_n \zeta T(\zeta, \tau) d\zeta, \quad \omega_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Порядок интегрирования может быть изменен без изменения пределов интегрирования

$$\int_0^\infty e^{-p\tau} d\tau \int_0^l \cos \omega_n \zeta T(\zeta, \tau) d\zeta = \int_0^l \cos \omega_n \zeta d\zeta \int_0^\infty e^{-p\tau} T(\zeta, \tau) d\tau.$$

Из чего следует, что применяемое двойное интегральное преобразование обладает свойством коммутативности

$$LC[T(x, t)] = CL[T(x, t)].$$

Выполнив над (1) преобразование  $CL$ , получим

$$a^2 CL[T_{,xx}(x, t)] = CL[T_{,t}(x, t)]. \quad (4)$$

Найдем нужные изображения.

По формуле (5)/6.2

$$\begin{aligned} CL[T_{,xx}(x, t)] &= LC[T_{,xx}(x, t)] = \\ &= L[(-1)^n f''(l) - f''(0) - \omega_n^2 C[T(x, t)]] \end{aligned}$$

Учитывая граничные условия (3),

$$CL[T_{,xx}(x, t)] = L[-\omega_n^2 C[T(x, t)]] =$$

$$= -\omega_n^2 LC [T(x, t)] = -\omega_n^2 CL [T(x, t)]. \quad (5)$$

По формуле (24)/5.3

$$CL [T(x, t)] = C [pL [T(x, t)] - T(x, 0)].$$

Учитывая начальное условие (2),

$$\begin{aligned} CL [T(x, t)] &= C [pL [T(x, t)] - f(x)] = \\ &= pCL [T(x, t)] + C [f(x)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставив изображения (5), (6) в равенство (4), получим

$$CL [T(x, t)] = \frac{C [f(x)]}{p + a^2 \omega_n^2}.$$

Над этим равенством выполним обратное преобразование Лапласа.

Так как  $1/(p + a^2 \omega_n^2) \div e^{-a^2 \omega_n^2 t}$ , то

$$C [T(x, t)] = e^{-a^2 \omega_n^2 t} C [f(x)]$$

или, представив  $C [f(x)]$  по формуле (1)/6.2,

$$C [T(x, t)] = e^{-a^2 \omega_n^2 t} \int_0^l \cos \omega_n \zeta f(\zeta) d\zeta, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Выполнив над этим равенством обратное конечное косинус-преобразование Фурье по формуле (2)/6.2, получим искомого решение

$$T(x, t) = \frac{1}{l} \left[ \int_0^l f(\zeta) d\zeta + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a^2 \omega_n^2 t} \cos \omega_n x \int_0^l \cos \omega_n \zeta f(\zeta) d\zeta \right]. \quad (7)$$

Легко видеть, что с течением времени температура в стержне выравнивается и при  $t \rightarrow \infty$  становится одинаковой по всей длине, равной среднему значению функции  $f(x)$  на отрезке  $[0, l]$ .

Функция Грина решаемой задачи получается, если в формуле (7) принять  $f(x) = \delta(x - \xi)$ . Она имеет вид

$$G(x, t, \xi) = \frac{1}{l} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a^2 \omega_n^2 t} \cos \omega_n x \cos \omega_n \xi \right]$$

и представляет собой закон распределения температуры в стержне от сосредоточенного в сечении  $x = \xi$  источника тепла, действовавшего при  $t = 0$  в течение бесконечно малого отрезка времени.

Решение задачи в форме (7) через функцию Грина имеет вид

$$T(x, t) = \int_0^l G(x, t, \xi) f(\xi) d\xi.$$

**Задача с нулевыми температурами на концах.** Пусть известно, что в начальный момент времени  $t = 0$  температура по длине стержня распределена по закону  $f(x)$ , причем  $f(0) = f(l) = 0$ , а концы стержня с течением времени сохраняют нулевую температуру. Теплообмена стержня с окружающей его средой через боковую поверхность нет. Отсутствуют также внутренние источники и стоки тепла. Происходит охлаждение стержня через его концы. Требуется получить закон изменения температуры в стержне с течением времени.

Математически эта задача формулируется следующим образом: найти решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию (2) и граничным условиям

$$T(0, t) = T(l, t) = 0. \quad (8)$$

Решение будем искать методом интегральных преобразований: по  $t$  - преобразованием Лапласа  $L[T(x, t)]$ , а по  $x$  - конечным синус-преобразованием Фурье  $S[T(x, t)]$ . Преобразование  $LS[T(x, t)]$ , согласно формулам (1)/5.1 и (3)/6.2, представляют собой повторное интегрирование

$$LS[T(x, t)] = \int_0^\infty e^{-p\tau} d\tau \int_0^l \sin \omega_n \zeta T(\zeta, \tau) d\zeta, \quad \omega_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Порядок интегрирования может быть изменен без изменения пределов интегрирования

$$\int_0^\infty e^{-p\tau} d\tau \int_0^l \sin \omega_n \zeta T(\zeta, \tau) d\zeta = \int_0^l \sin \omega_n \zeta d\zeta \int_0^\infty e^{-p\tau} T(\zeta, \tau) d\tau.$$

Из чего следует, что применяемое двойное интегральное преобразование обладает свойством коммутативности

$$LS[T(x, t)] = SL[T(x, t)].$$

Выполнив над (1) преобразование  $LS$ , получим

$$a^2 SL[T_{,xx}(x, t)] = SL[T_{,t}(x, t)]. \quad (9)$$

Используя формулу (6)/6.2, с учетом граничных условий (8) находим

$$SL[T_{,xx}(x, t)] = -\omega_n^2 SL[T(x, t)], \quad \text{где } \omega_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Так как начальное условие не изменилось, то в формуле (6) изменится только символ преобразования по переменной  $x$  с  $C$  на  $S$ .

$$SL[T_{,t}(x, t)] = pSL[T(x, t)] + S[f(x)]. \quad (11)$$

Подставив выражения (10), (11) в равенство (9), получим

$$SL[T(x, t)] = \frac{S[f(x)]}{p + a^2 \omega_n^2}.$$

Обратное преобразование Лапласа над этим равенством дает

$$S[T(x, t)] = e^{-a^2 \omega_n^2 t} S[f(x)].$$

Представив изображение  $S[f(x)]$  по формуле (3)/6.2, имеем

$$S[T(x, t)] = e^{-a^2 \omega_n^2 t} \int_0^l \sin \omega_n \zeta f(\zeta) d\zeta, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Выполнив над этим равенством обратное конечное синус-преобразование Фурье по формуле (4)/6.2, получим искомое решение

$$T(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a^2 \omega_n^2 t} \sin \omega_n x \int_0^l \sin \omega_n \zeta f(\zeta) d\zeta. \quad (12)$$

Легко видеть, что с течением времени температура в стержне падает и при  $t \rightarrow \infty$  становится равной нулю во всех его точках.

Функция Грина решаемой задачи получается, если в формуле (12) принять  $f(x) = \delta(x - \xi)$ . Она имеет вид

$$G(x, t, \xi) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a^2 \omega_n^2 t} \sin \omega_n x \sin \omega_n \xi$$

и представляет собой закон распределения температуры в стержне от сосредоточенного в сечении  $x = \xi$  источника тепла, действовавшего при  $t = 0$  в течение бесконечно малого отрезка времени.

Решение задачи (12) через функцию Грина выражается той же формулой, что и в предыдущей задаче.

В обеих решенных задачах функции Грина с физической точки зрения являются функциями влияния, так как позволяют путем изменения параметра  $\xi$  исследовать температурные поля в стержнях с различным расположением сосредоточенных источников тепла.

Зададимся вопросом: чем обусловлен выбор интегральных преобразований, использованных в решении задачи о распространении тепла в стержнях конечной длины? Ответ почти очевиден: конечное косинус-преобразование Фурье, согласно формуле (5)/6.2, позволяет удовлетворить граничные условия (3), конечное синус-преобразование Фурье позволяет удовлетворить, согласно формуле (6)/6.2, граничные условия (8), а преобразование Лапласа, согласно первой из формул (24)/5.3, позволяет удовлетворить начальное условие (2). Таким образом, выбранные интегральные преобразования дают возможность решить задачу математической физики – найти частное решение дифференциального уравнения теплопроводности, удовлетворяющее заданным начальным и граничным условиям.



### 9.3. Распространение тепла в неограниченно длинных стержнях

Задачи о распространении тепла в неограниченно длинных стержнях будем рассматривать как одномерные. *Бесконечным* будем называть стержень, у которого область определения по пространственной переменной  $x$  задана на всей числовой оси, т.е. если  $x \in (-\infty, \infty)$ , а *полубесконечным* - если  $x \in [0, \infty)$ . При этом будем сразу давать математическую постановку задачи.

**Бесконечный стержень.** Требуется найти решение уравнения

$$a^2 T_{,xx} = T_{,t}, \quad (1)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$T(x, 0) = f(x), \quad f(\pm\infty) = 0 \quad (2)$$

и граничным условиям

$$T(\pm\infty, t) = 0, \quad T_{,x}(\pm\infty, t) = 0. \quad (3)$$

Решение будем искать методом двойного интегрального преобразования: по переменной  $t$  - преобразованием Лапласа  $L$ , а по переменной  $x$  - экспоненциальным преобразованием Фурье  $F_e$ . Выбор этих преобразований обусловлен возможностью удовлетворить заданные начальное и граничные условия. Это двойное интегральное преобразование обладает свойством коммутативности

$$L F_e [T(x, t)] = F_e L [T(x, t)],$$

так как

$$\int_0^\infty e^{-p\tau} d\tau \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega\zeta} T(\zeta, \tau) d\zeta = \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega\zeta} d\zeta \int_0^\infty e^{-p\tau} T(\zeta, \tau) d\tau.$$

Над уравнением (1) выполним преобразование  $F_e L$ . Используя формулы (24)/5.3 и (4)/6.5 и учитывая условия (2), (3), получим

$$-a^2 \omega^2 F_e L [T(x, t)] = p F_e L [T(x, t)] - F_e [f(x)] \Rightarrow$$

$$F_e L [T(x, t)] = \frac{F_e [f(x)]}{p + a^2 \omega^2}.$$

Выполнив обратное преобразование Лапласа, получим

$$F_e [T(x, t)] = e^{-a^2 \omega^2 t} F_e [f(x)]$$

или, представив изображение  $F_e [f(x)]$  по формуле (2)/6.5,

$$F_e [T(x, t)] = e^{-a^2 \omega^2 t} \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega\zeta} f(\zeta) d\zeta.$$

Обратное экспоненциальное преобразование Фурье по формуле (3)/6.5

приводит к искомому решению

$$T(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x - a^2 \omega^2 t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega \xi} f(\xi) d\xi. \quad (4)$$

Если принять  $f(x) = \delta(x - \xi)$ , то получим функцию Грина

$$G(x, t, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x-\xi) - a^2 \omega^2 t} d\omega. \quad (5)$$

Легко убедиться, что решение (4) выражается через функцию Грина (5) формулой

$$T(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t, \xi) f(\xi) d\xi. \quad (6)$$

Несобственный интеграл (5) можно вычислить.

Аналитическое продолжение подынтегральной функции этого несобственного интеграла на комплексную плоскость не имеет изолированных особых точек. Поэтому теорию вычетов применить нельзя.

Используя формулу Эйлера (5)/1.1, рассматриваемый интеграл представим в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x-\xi) - a^2 \omega^2 t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \omega^2 t} \cos \omega(x - \xi) d\omega + i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \omega^2 t} \sin \omega(x - \xi) d\omega.$$

Здесь справа - интеграл на симметричном интервале от четной функции (он равен двум интегралам на полуинтервале) и от нечетной функции на симметричном интервале (он равен нулю). Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x-\xi) - a^2 \omega^2 t} d\omega = 2 \int_0^{\infty} e^{-a^2 \omega^2 t} \cos \omega(x - \xi) d\omega. \quad (a)$$

Обозначим

$$\mu = (x - \xi) / a\sqrt{t}. \quad (б)$$

Введем в правом интеграле (a) новую переменную интегрирования

$$z = a\omega\sqrt{t}, \quad \mu z = \omega(x - \xi) \Rightarrow d\omega = dz / a\sqrt{t}.$$

Учитывая, что по новой переменной интегрирования пределы интегрирования остаются прежними, равенство (a) можно записать в виде

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 \omega^2 t} \cos \omega(x - \xi) d\omega = \frac{1}{a\sqrt{t}} I(\mu), \quad (в)$$

где

$$I(\mu) = \int_0^{\infty} e^{-z^2} \cos \mu z dz. \quad (г)$$

Дифференцируя этот интеграл по параметру  $\mu$  и интегрируя после

этого по частям, получаем

$$I'(\mu) = - \int_0^{\infty} e^{-z^2} z \sin \mu z dz = \left\{ \begin{array}{l} u = \sin \mu z, \quad dv = e^{-z^2} z dz; \\ du = \mu \cos \mu z dz, \quad v = -\frac{1}{2} e^{-z^2} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-z^2} \sin \mu z \Big|_0^{\infty} - \frac{\mu}{2} \int_0^{\infty} e^{-z^2} \cos \mu z dz = -\frac{\mu}{2} I(\mu).$$

В результате относительно функции  $I(\mu)$  приходим к следующему дифференциальному уравнению:

$$I'(\mu) + \frac{\mu}{2} I(\mu) = 0,$$

общее решение которого

$$I(\mu) = C e^{-\mu^2/4}, \quad (д)$$

где  $C$  - произвольная постоянная. Чтобы найти ее значение, воспользуемся тем, что формула (г) при  $\mu = 0$  преобразуется в *интеграл Пуассона*

$$I(0) = \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

Подчинив выражение (д) этому условию, находим  $C = \sqrt{\pi}/2$ . С учетом этого после подстановки (б) формула (д) принимает вид

$$I(\mu) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{-\frac{1}{4}\mu^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}.$$

Подставляя это выражение в равенство (в), получаем

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2\omega^2 t} \cos \omega(x-\xi) d\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}. \quad (7)$$

Подставив этот результат в равенство (а), получим значение вычисляемого интеграла. С учетом чего получаем выражение функции Грина (5)

$$G(x, t, \xi) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}. \quad (8)$$

Эту функцию называют *фундаментальным решением* уравнения теплопроводности (1). Если ее подставить в формулу (6), то решение задачи (4) примет вид

$$T(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} f(\xi) d\xi.$$

Физический смысл фундаментального решения (8) следующий: это -

закон распределения температуры в бесконечном стержне от сосредоточенного в сечении  $x = \xi$  источника тепла, действовавшего в течение бесконечно малого отрезка времени в момент начала процесса  $t = 0$ .

Из формулы (8) следует, что тепло распространяется вдоль стержня не с какой-то конечной скоростью, а мгновенно – с бесконечно большой скоростью. Действительно, для как угодно малых значений  $t > 0$  и для как угодно больших при этом значений  $|x|$ ,  $x \neq \xi$  имеем  $G(x, t, \xi) > 0$ . Это противоречит реально наблюдаемым процессам распространения тепла и объясняется несовершенством математических моделей физических законов, на основе которых осуществлен вывод уравнения теплопроводности. Как показывает опыт, рассматриваемое уравнение теплопроводности дает удовлетворительные результаты при сравнительно малых скоростях нагревания тел. В случае больших скоростей нагревания используются различные варианты волновых уравнений теплопроводности, которые описывают распространение тепла с конечной скоростью.

**Полубесконечный стержень с нулевой температурой в начальном сечении.** Требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию

$$T(x, 0) = f(x), \quad f(0) = 0, \quad f(\infty) = 0 \quad (9)$$

и граничным условиям

$$T(0, t) = 0, \quad T(\infty, t) = 0, \quad T_{,x}(\infty, t) = 0. \quad (10)$$

Решение будем искать методом двойного интегрального преобразования: по  $t$  - преобразованием Лапласа  $L$ , а по  $x$  - синус-преобразованием Фурье  $F_s$ . Выбор этих преобразований обусловлен возможностью удовлетворить заданные начальные и граничные условия. Это двойное интегральное преобразование обладает свойством коммутативности

$$LF_s[T(x, t)] = F_sL[T(x, t)],$$

так как

$$\int_0^\infty e^{-p\tau} d\tau \int_0^\infty \sin \omega \zeta T(\zeta, \tau) d\zeta = \int_0^\infty \sin \omega \zeta d\zeta \int_0^\infty e^{-p\tau} T(\zeta, \tau) d\tau.$$

Над уравнением (1), используя формулы (24)/5.3 и (20)/6.5, вначале по переменной  $t$  выполним преобразование Лапласа, а потом по переменной  $x$  - синус-преобразование Фурье. В результате найдем изображение этого двойного преобразования

$$F_sL[T(x, t)] = \frac{F_s[f(x)]}{p + a^2 \omega^2}.$$

Выполнив обратные преобразования и представив изображение  $F_s[f(x)]$  по формуле (18)/6.5, получим искомое решение

$$T(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-a^2 \omega^2 t} \sin \omega x d\omega \int_0^{\infty} \sin \omega \zeta f(\zeta) d\zeta. \quad (11)$$

Положив здесь  $f(x) = \delta(x - \xi)$ , получим функцию Грина

$$G(x, t, \xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-a^2 \omega^2 t} \sin \omega x \sin \omega \xi d\omega. \quad (12)$$

Легко видеть, что

$$T(x, t) = \int_0^{\infty} G(x, t, \xi) f(\xi) d\xi. \quad (13)$$

Интеграл (12) можно вычислить.

Представив произведение синусов в виде

$$\sin \omega x \sin \omega \xi = \frac{1}{2} [\cos(x - \xi) - \cos(x + \xi)],$$

придем к разности двух интегралов (7), что позволит записать функцию Грина (12) следующим образом:

$$G(x, t, \xi) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left[ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right]. \quad (14)$$

Подставив функцию Грина (14) в формулу (13), получим искомое решение (11) при произвольном законе распределения температуры в стержне  $f(x)$  в начальный момент времени

$$T(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \left[ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right] f(\xi) d\xi.$$

**Полубесконечный стержень с нулевым потоком тепла в начальном сечении.** Требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию

$$T(x, 0) = f(x), \quad f(\infty) = 0 \quad (15)$$

и граничным условиям

$$T_{,x}(0, t) = 0, \quad T(\infty, t) = 0, \quad T_{,x}(\infty, t) = 0. \quad (16)$$

Заметим, что в одномерном потоке тепла  $T_{,x}$  является градиентом температуры и поэтому определяет интенсивность теплового потока.

Решение будем искать методом двойного интегрального преобразования: по  $t$  - преобразованием Лапласа  $L$ , а по  $x$  - косинус-преобразованием Фурье  $F_c$ . Выбор этих преобразований обусловлен возможностью удовлетворить заданные начальные и граничные условия. Это двойное интегральное преобразование обладает свойством коммутативности

$$LF_c[T(x,t)] = F_c L[T(x,t)],$$

так как

$$\int_0^\infty e^{-p\tau} d\tau \int_0^\infty \cos \omega \zeta T(\zeta, \tau) d\zeta = \int_0^\infty \cos \omega \zeta d\zeta \int_0^\infty e^{-p\tau} T(\zeta, \tau) d\tau.$$

Выполнив над уравнением (1) это двойное преобразование и учитывая начальное (15) и граничные (16) условия, получаем изображение решения

$$F_c L[T(x,t)] = \frac{F_c[f(x)]}{p + a^2 \omega^2}.$$

Выполнив обратные преобразования и представив изображение  $F_c[f(x)]$  по формуле (11)/6.5, получим искомое решение

$$T(x,t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-a^2 \omega^2 t} \cos \omega x d\omega \int_0^\infty \cos \omega \zeta f(\zeta) d\zeta. \quad (17)$$

Положив  $f(x) = \delta(x - \xi)$ , получим функцию Грина

$$G(x,t,\xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-a^2 \omega^2 t} \cos \omega x \cos \omega \xi d\omega. \quad (18)$$

Сопоставляя (17) и (18), заключаем, что

$$T(x,t) = \int_0^\infty G(x,t,\xi) f(\xi) d\xi. \quad (19)$$

Представив произведение косинусов в виде

$$\cos \omega x \cos \omega \xi = \frac{1}{2} [\cos(x - \xi) + \cos(x + \xi)],$$

придем в формуле (18) к сумме двух интегралов (7). В результате функция Грина запишется следующим образом:

$$G(x,t,\xi) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left[ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right]. \quad (20)$$

Подставляя (20) в (19), получаем искомое решение при произвольном законе распределения температуры в стержне  $f(x)$  в начальный момент

$$T(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left[ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right] f(\xi) d\xi.$$

В длинных стержнях, как и в коротких, функции Грина с физической точки зрения являются функциями влияния. Они позволяют исследовать изменение теплового процесса при изменении положения источника тепла.

## 9.4. Осесимметричное распространение тепла

Дифференциальные операторы Лапласа (лапласианы) в декартовых  $x, y$  и в полярных  $r, \varphi$  координатах ( $r$  - полярный радиус,  $\varphi$  - полярный угол) связаны следующим образом:

$$\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 = \partial^2 / \partial r^2 + (1/r) \partial / \partial r + (1/r^2) \partial^2 / \partial \varphi^2.$$

Согласно этому, уравнение теплопроводности (6)/9.1 в полярных координатах для плоского теплового потока, не зависящего от  $\varphi$ , имеет вид

$$a^2 \left( T_{,rr} + \frac{1}{r} T_{,r} \right) = T_{,t}. \quad (1)$$

**Задача с нулевой температурой по контуру круга.** Требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию

$$T(r, 0) = f(r), \quad f(R) = 0 \quad (2)$$

и граничному условию

$$T(R, t) = 0. \quad (3)$$

Применим двойное интегральное преобразование: по переменной  $t$  - преобразование Лапласа  $L$ , а по переменной  $r$  - преобразование Ханкеля  $H_0$  порядка  $\nu = 0$  (в уравнении отсутствует слагаемое  $-a^2 \nu^2 T / r^2$ ).

Это двойное преобразование коммутативно

$$LH_0[T(r, t)] = H_0L[T(r, t)] \Leftrightarrow$$

$$\int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^R (\lambda_n \rho) T(\rho, \tau) \rho d\rho = \int_0^R J_0(\lambda_n \rho) \rho d\rho \int_0^\infty e^{-pt} T(\rho, \tau) d\tau.$$

Здесь собственные числа  $\lambda_n$  являются корнями уравнения (2)/7.4, в котором, соответственно граничному условию (3),  $a = 0$ ,  $b = 1$

$$J_0(\lambda R) = 0.$$

Выполнив  $LH_0$ -преобразования над (1) и учитывая условия (2) и (3), получим изображение искомой функции

$$H_0L[T(r, t)] = H_0[f(r)] / (p + a^2 \lambda_n^2)$$

или, развернув изображение  $H_0[f(r)]$  по формуле (1)/7.4,

$$H_0L[T(r, t)] = \left[ 1 / (p + a^2 \lambda_n^2) \right] \int_0^R J_0(\lambda_n \rho) f(\rho) \rho d\rho.$$

Заметим, что в преобразовании Лапласа  $1 / (p + a^2 \lambda_n^2) \div e^{-a^2 \lambda_n^2 t}$ .

Выполнив обратные преобразования, причем Ханкеля по формуле

(3)/7.4 при  $a = 0$ ,  $b = 1$ , получим искомое решение

$$T(r, t) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)}{J_1^2(\lambda_n R)} e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \int_0^R J_0(\lambda_n \rho) f(\rho) \rho d\rho. \quad (4)$$

Здесь сделана замена  $J_0^*(\lambda_n R) = -J_1(\lambda_n R)$  по формуле (4)/7.2.

Положив  $f(r) = \delta(r - \xi)$ , получим функцию Грина

$$G(r, t, \xi) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)}{J_1^2(\lambda_n R)} e^{-a^2 \lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n \xi) \xi, \quad (5)$$

смысл которой - распределение температуры в пластине от сосредоточенного по окружности  $r = \xi$  источника тепла, действовавшего бесконечно малое время в момент начала наблюдений  $t = 0$ .

Решение (4) через функцию Грина (5) выражается формулой

$$T(r, t) = \int_0^R G(r, t, \xi) f(\xi) d\xi. \quad (6)$$

**Задача с теплообменом по контуру круга.** Требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному и граничному условиям:

$$T(r, 0) = f(r), \quad (7)$$

$$T_{,r}(R, t) + \beta T(R, t) = 0, \quad (8)$$

Условие (8) является *законом теплообмена* с окружающей средой (предложен Ньютоном); постоянная  $\beta > 0$  - *коэффициент теплообмена*.

Как и в предыдущем случае, решение ищется методом  $H_0L$  преобразований. Отличие заключается в том, что собственные числа  $\lambda_n$  в данном случае являются корнями уравнения (5)/7.3, в котором  $a = 1$ ,  $b = \beta$

$$\lambda J_0^*(\lambda R) + \beta J_0(\lambda R) = 0,$$

а обратное преобразование Ханкеля, соответственно этому, выполняется по формуле (3)/7.4 при  $a = 1$ ,  $b = \beta$ . Искомое решение имеет вид

$$T(r, t) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n r)}{(\lambda_n^2 + \beta^2) J_0^2(\lambda_n R)} e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \int_0^R J_0(\lambda_n \rho) f(\rho) \rho d\rho. \quad (9)$$

При  $f(r) = \delta(r - \xi)$  получается функция Грина

$$G(r, t, \xi) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n r)}{(\lambda_n^2 + \beta^2) J_0^2(\lambda_n R)} e^{-a^2 \lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n \xi) \xi, \quad (10)$$

которая имеет тот же физический смысл, что и в предыдущей задаче.

Решение (9) через функцию Грина (10) выражается формулой (6), что можно проверить, подставив (10) в (6). Получится (9).



## Глава 10

### ЗАДАЧИ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

#### 10.1. Колебания струны конечной длины

**Уравнение колебаний струны.** Рассматриваются колебания доста-

точно сильно натянутой струны с малыми прогибами. Предполагается, что допустимы следующие упрощения, называемые обычно гипотезами:

1<sup>0</sup>. Сила натяжения струны  $s$  в процессе колебаний остается неизменной;

2<sup>0</sup>. Углы поворота струны  $\gamma$  в процессе колебаний так малы, что можно принять  $\sin \gamma \approx \tan \gamma \approx \gamma$ .

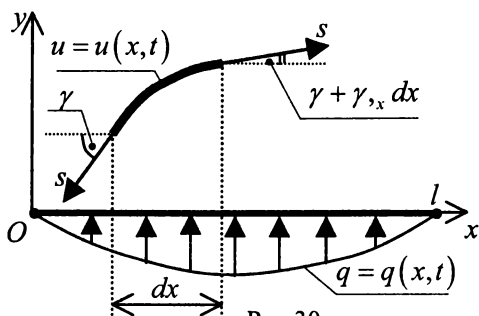


Рис.30

Совместим ось струны с координатной осью  $x$  (рис.30) так, чтобы левый конец струны совпал с началом координат.

Обозначим:  $t$  - текущее время,  $u = u(x, t)$  - прогибы струны,  $m = \text{const}$  - погонная масса струны,  $l$  - длина струны,  $q = q(x, t)$  - интенсивность поперечной распределенной нагрузки, положительные значения которой соответствуют ее направлению в положительную сторону оси  $y$ .

Вырежем мысленно из колеблющейся струны отрезок длиной  $dx$ . Заменим отброшенные части силами натяжения  $s$ , которые всегда направлены по касательной к изогнутой оси струны. Равнодействующая всех сил, включая силу инерции, приложенных к отрезку  $dx$ , равна нулю. Из чего следует, что сумма проекций на ось  $y$  всех сил, действующих на него, равна нулю, т.е.

$$-s \sin \gamma + s \sin(\gamma + \gamma_x dx) + q dx - m u_{,tt} dx = 0.$$

Отсюда, учитывая гипотезу 2<sup>0</sup>, имеем

$$s \gamma_x + q - m u_{,tt} = 0.$$

Так как  $\tan \gamma = u_{,x}$  или, учитывая гипотезу 2<sup>0</sup>,  $\gamma = u_{,x}$ , то окончательно уравнение колебаний струны принимает вид

$$a^2 u_{,xx} - u_{,tt} = -q/m, \text{ где } a = \sqrt{s/m}. \quad (1)$$

Условия закрепления струны

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (2)$$

являются граничными условиями задачи о колебаниях струны конечной длины.

**Свободные колебания струны.** Эти колебания происходят при отсутствии нагрузки  $q$  на струну. Поэтому в уравнении свободных колебаний струны отсутствует свободный член, и оно имеет вид

$$a^2 u_{,xx} - u_{,tt} = 0. \quad (3)$$

Предположим, что в момент начала наблюдений  $t = 0$  известно, что изгиб струны и скорость ее движения описываются функциями  $f(x)$ ,  $v(x)$ , т.е.

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_{,t}(x, 0) = v(x). \quad (4)$$

Итак, задача о свободных колебаниях струны формулируется следующим образом: требуется найти решение уравнения (3), удовлетворяющее граничным условиям (2) и начальным условиям (4).

Решение будем искать методом двойного интегрального преобразования: по переменной  $t$  - преобразованием Лапласа, а по переменной  $x$  - конечным синус-преобразованием Фурье.

Над уравнением (3) выполним двойное интегральное преобразование  $SL$ . Учитывая граничные (2) и начальные (4) условия, получаем

$$-a^2 \omega_n^2 SL[u(x, t)] - S[p^2 L[u(x, t)] - pf(x) - v(x)] = 0 \Rightarrow$$

$$SL[u(x, t)] = \frac{pS[f(x)] + S[v(x)]}{p^2 + a^2 \omega_n^2}$$

или, представив  $S[f(x)]$  и  $S[v(x)]$  по формуле (3)/6.2,

$$SL[u(x, t)] = \frac{p}{p^2 + a^2 \omega_n^2} \int_0^l \sin \omega_n \zeta f(\zeta) d\zeta + \\ + \frac{1}{p^2 + a^2 \omega_n^2} \int_0^l \sin \omega_n \zeta v(\zeta) d\zeta.$$

По таблице изображений преобразования Лапласа находим

$$\frac{p}{p^2 + a^2 \omega_n^2} \div \cos a\omega_n t, \quad \frac{a\omega_n}{p^2 + a^2 \omega_n^2} \div \sin a\omega_n t.$$

Обратное преобразование Лапласа над  $SL[u(x, t)]$  дает

$$S[u(x, t)] = \cos a\omega_n t \int_0^l \sin \omega_n \zeta f(\zeta) d\zeta + \frac{\sin a\omega_n t}{a\omega_n} \int_0^l \sin \omega_n \zeta v(\zeta) d\zeta.$$

Обратное конечное синус-преобразование Фурье над этим равенством по формуле (4)/6.2 приводит к искомому решению

$$u(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos a\omega_n t + b_n \sin a\omega_n t) \sin \omega_n x, \quad (5)$$

где

$$a_n = \int_0^l \sin \omega_n \zeta f(\zeta) d\zeta, \quad b_n = \frac{1}{a\omega_n} \int_0^l \sin \omega_n \zeta v(\zeta) d\zeta.$$

Введя вместо  $a_n, b_n$  новые константы  $A_n, \varphi_n$  по формулам

$$a_n = A_n \sin \varphi_n, b_n = A_n \cos \varphi_n \Rightarrow A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \varphi_n = \arctan(a_n / b_n),$$

получим

$$u(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \omega_n x \sin(\varphi_n + a\omega_n t).$$

Отсюда видно, что свободные колебания струны являются гармоническими с периодами гармоник  $T_n = 2\pi / a\omega_n$ . Период основного тона  $T_1 = 2l\sqrt{m/s}$ .

**Струна арфы** совершает свободные колебания из начального состояния, представляющего собой статический прогиб струны от действия сосредоточенной силы  $P$ , создаваемой пальцем музыканта, в сечении  $x = \xi$ . Такие колебания совершают струны всех музыкальных инструментов при игре пиццикато.

В этом случае начальный прогиб  $f(x)$  описывается уравнением

$$sf''(x) = -P\delta(x - \xi), \quad (6)$$

вытекающим из уравнения (1) при  $u_{,tt} = 0$ .  $P\delta(x - \xi)$  является выражением статической нагрузки в виде сосредоточенной силы  $P$ , приложенной в сечении  $x = \xi$ .

Так как струна арфы на концах закреплена, то

$$f(0) = f(l) = 0. \quad (7)$$

Конечное синус-преобразование Фурье над уравнением (6) с учетом граничных условий (7) дает

$$\int_0^l \sin \omega_n \zeta f(\zeta) d\zeta = \frac{P}{s\omega_n^2} \sin \omega_n \xi.$$

В начальный момент времени струна находится в неподвижном состоянии, ее скорость равна нулю. Поэтому  $v(x) = 0$  и

$$\int_0^l \sin \omega_n \zeta v(\zeta) d\zeta = 0.$$

С учетом этих интегралов формула (5) преобразуется к виду

$$u(x, t) = \frac{2P}{ls} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_n \xi}{\omega_n^2} \sin \omega_n x \cos a \omega_n t, \quad (8)$$

выражающему закон колебаний струны арфы.

**Вынужденные колебания струны.** Эти колебания отличаются от свободных тем, что нагрузка на струну продолжает действовать и в процессе самих колебаний.

Рассмотрим вынужденные колебания из состояния покоя.

В этом случае начальные условия оказываются нулевыми

$$u(x, 0) = u_{,t}(x, 0) = 0, \quad (9)$$

граничные условия остаются прежними (2), а уравнение колебаний струны имеет вид (1).

Требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (2) и начальным условиям (9).

Как и в случае свободных колебаний, решение будем искать методом двойного интегрального преобразования  $SL$ . Выполнив его, с учетом граничных (2) и начальных (9) условий получим

$$-a^2 \omega_n^2 SL[u(x, t)] - p^2 SL[u(x, t)] = \frac{1}{m} SL[q(x, t)] \Rightarrow$$

$$SL[u(x, t)] = \frac{1}{m(p^2 + a^2 \omega_n^2)} SL[q(x, t)].$$

По формулам (1)/5.1 и (3)/6.2

$$SL[q(x, t)] = \int_0^l \sin \omega_n \zeta d\zeta \int_0^\infty e^{-p\theta} q(\zeta, \theta) d\theta.$$

С учетом этого

$$SL[u(x, t)] = \frac{1}{m(p^2 + a^2 \omega_n^2)} \int_0^l \sin \omega_n \zeta d\zeta \int_0^\infty e^{-p\theta} q(\zeta, \theta) d\theta \Rightarrow$$

$$SL[u(x, t)] = \frac{1}{ma\omega_n} \int_0^l \sin \omega_n \zeta \left[ \frac{a\omega_n}{p^2 + a^2 \omega_n^2} \int_0^\infty e^{-p\theta} q(\zeta, \theta) d\theta \right] d\zeta.$$

В квадратных скобках - произведение изображений двух функций в преобразовании Лапласа

$$\frac{a\omega_n}{p^2 + a^2 \omega_n^2} = L[\sin a\omega_n t], \quad \int_0^\infty e^{-p\theta} q(\zeta, \theta) d\theta = L[q(\zeta, \theta)].$$

Это произведение можно представить как изображение свертки двух функций. Соответственно этому, имеем

$$\frac{a\omega_n}{p^2 + a^2 \omega_n^2} \int_0^\infty e^{-p\theta} q(\zeta, \theta) d\theta = \int_0^l \sin a\omega_n(t - \tau) q(\zeta, \tau) d\tau.$$

Обратное преобразование Лапласа над изображением искомой функции с учетом последнего дает

$$S[u(x, t)] = \frac{1}{ma\omega_n} \int_0^l \sin \omega_n \zeta d\zeta \int_0^l \sin a\omega_n (t - \tau) q(\zeta, \tau) d\tau.$$

Обратное конечное синус-преобразование Фурье по формуле (4)/6.2 над этим равенством приводит к искомому решению

$$u(x, t) = \frac{2}{ma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_n x}{\omega_n} \int_0^l \sin \omega_n \zeta d\zeta \int_0^l \sin a\omega_n (t - \tau) q(\zeta, \tau) d\tau. \quad (10)$$

**Струна рояля** колеблется от действия в момент времени  $t = 0$  в течение бесконечно малого промежутка времени сосредоточенной силы  $P$ , приложенной в сечении  $x = \xi$ . Такое нагружение адекватно описывается функциями Дирака  $q(x, t) = P\delta(x - \xi)\delta(t - 0)$ .

Согласно свойству функции Дирака (18)/5.3,

$$\int_0^l \sin \omega_n \zeta \delta(\zeta - \xi) d\zeta = \sin \omega_n \xi,$$

$$\int_0^l \sin a\omega_n (t - \theta) \delta(\theta - 0) d\theta = \sin a\omega_n (t - 0).$$

Следовательно,

$$\int_0^l \sin \omega_n \zeta d\zeta \int_0^l \sin a\omega_n (t - \tau) q(\zeta, \tau) d\tau = P \sin \omega_n \xi \sin a\omega_n t.$$

С учетом этого применительно к колебаниям струны рояля формула (10) принимает вид

$$u(x, t) = \frac{2P}{ma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_n \xi}{\omega_n} \sin \omega_n x \sin a\omega_n t. \quad (11)$$

Ряды (8), (11) являются тригонометрическими рядами Фурье и, следовательно, сходятся равномерно. Поэтому их частичные суммы аппроксимируют функции, к которым они сходятся. Причем порядок аппроксимации тем выше, чем больше членов в частичной сумме.

Ряд, частичная сумма которого при малом количестве членов дает высокий порядок точности значений его суммы, назовем *быстро сходящимся*.

Струны арфы и рояля совершают гармонические колебания с периодами  $T_n = 2\pi / a\omega_n$ . Так как  $1/\omega_n^2 < 1/\omega_n$ , то ряд (8), описывающий колебания струны арфы, сходится быстрее, чем ряд (11), описывающий колебания струны рояля. Следовательно, если взять частичные суммы этих рядов, дающие одинаковую точность вычисления их сумм, то частичная сумма ряда (11) будет содержать больше членов, т.е. в ней будет больше высоких тонов  $T_n$ . Для человеческого слуха эта разница заключается в том, что па-

литра звуков струны рояля более насыщена высокими частотами, чем палитра звуков струны арфы. Арфа звучит мягче, так как в ней доминируют низкие тона.

**Вынужденные колебания с ненулевыми начальными условиями** описываются решением уравнения (1) с граничными условиями (2) и начальными условиями (4). Поэтому решение представляет собой сумму решений (5) и (10)

$$u(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \cos a\omega_n t \int_0^l \sin \omega_n \zeta f(\zeta) d\zeta + \frac{\sin a\omega_n t}{a\omega_n} \int_0^l \sin \omega_n \zeta v(\zeta) d\zeta + \frac{1}{ma\omega_n} \int_0^l \sin \omega_n \zeta d\zeta \int_0^t \sin a\omega_n (t - \tau) q(\zeta, \tau) d\tau \right] \sin \omega_n x.$$

## 10.2. Уравнение колебаний мембраны

Мембраной называют предварительно натянутое упруго деформируемое тело в виде тонкой пластинки или пленки. В отличие от других плоских деформируемых тел мембрана обладает тем свойством, что при изгибе мембраны поперечными силами в поперечном сечении, проведенном по

любому направлению, действует только растягивающее усилие. В других изгибаемых телах в поперечном сечении действуют еще изгибающие и крутящие моменты и перерезывающие силы.

Теория мембран строится в рамках следующих двух гипотез:

1°. Сила натяжения мембраны  $s$  одинакова во всех точках мембраны, одинакова в поперечном сечении любого направления, перпендикулярна этому направлению, всегда касательная к изогнутой по-

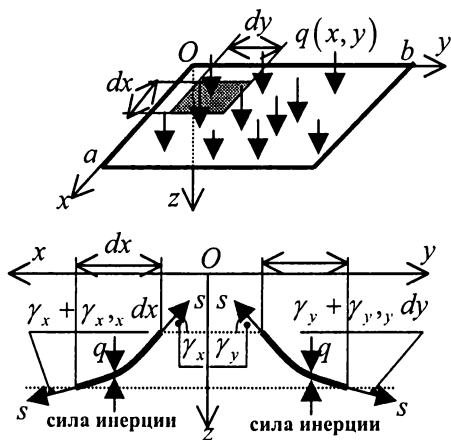


Рис.31

верхности и не изменяется при прогибах;

2°. Углы наклона  $\gamma$  деформированной поверхности мембраны к первоначальной плоскости так малы, что  $\sin \gamma \approx \tan \gamma \approx \gamma$ .

Прямоугольную мембрану размерами  $a \times b$  поместим в декартовы координаты  $x, y, z$  так, чтобы  $x \in [0, a]$ ,  $y \in [0, b]$  (рис.31).

Обозначим:  $m$  - масса единицы площади мембраны,  $w = w(x, y)$  - прогибы мембраны,  $q = q(x, y)$  интенсивность распределенной нагрузки, действующей перпендикулярно плоскости мембраны. Ось  $z$  направлена в сторону положительных прогибов и положительной нагрузки  $q$ .

Плоскостями  $x = const$ ,  $y = const$  мысленно вырежем из мембраны бесконечно малый элемент размерами  $dx \times dy$ . Отброшенные части заменим растягивающими усилиями  $s$ . Обозначим  $\gamma_x$ ,  $\gamma_y$  - углы наклона  $s$  к осям соответственно  $x, y$ . На вырезанный элемент действуют следующие силы:  $sdy$ ,  $sdx$  с углами наклонов соответственно  $\gamma_x$ ,  $\gamma_y$ ; с противоположных сторон элемента такие же силы  $sdy$ ,  $sdx$ , но с углами наклонов  $\gamma_x + \gamma_{x,x}dx$ ,  $\gamma_y + \gamma_{y,y}dy$ ; на весь вырезанный элемент - нагрузка  $qdx dy$  и направленная в отрицательную сторону оси  $z$  сила инерции  $m dx dy w_{,tt}$ . Сумма проекций этих сил на ось  $z$  равна нулю и выражается уравнением

$$s dy \sin(\gamma_x + \gamma_{x,x} dx) - s dy \sin \gamma_x + s dx \sin(\gamma_y + \gamma_{y,y} dy) - s dx \sin \gamma_y + q dx dy - m dx dy w_{,tt} = 0.$$

Применяя гипотезу 2<sup>0</sup>, получаем уравнение равновесия в виде

$$s(\gamma_{x,x} + \gamma_{y,y}) - m w_{,tt} = -q.$$

Согласно геометрическому смыслу первой производной,

$$w_{,x} = \tan \gamma_x, \quad w_{,y} = \tan \gamma_y.$$

Или, применяя гипотезу 2<sup>0</sup>,

$$w_{,xx} = \gamma_x, \quad w_{,yy} = \gamma_y.$$

С учетом этого из уравнения равновесия получаем уравнение

$$c^2(w_{,xx} + w_{,yy}) - w_{,tt} = -q/m, \quad c = \sqrt{s/m}, \quad (1)$$

называемое дифференциальным уравнением колебаний мембраны.

### 10.3. Осесимметричные колебания мембраны

В полярных координатах  $r, \varphi$  уравнение колебаний мембраны (1)/10.2 принимает вид

$$c^2 \left( w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\varphi\varphi} \right) - w_{,tt} = -\frac{q(r, \varphi, t)}{m}.$$

Если форма прогибов мембраны не зависит от переменной  $\varphi$ , колебания называются осесимметричными. Они возникают от действия осесимметричной нагрузки  $q(r, t)$  и осесимметричных начальных условий. Урав-

нение колебаний при этом имеет вид

$$c^2 \left( w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} \right) - w_{,tt} = -\frac{q(r,t)}{m}. \quad (1)$$

Прогиб мембраны в момент начала наблюдений за ней  $t=0$  и скорость смещения ее точек называют начальными условиями

$$w(r,0) = f(r), \quad w_{,t}(r,0) = v(r), \quad (2)$$

где  $f(r)$ ,  $v(r)$  - заданные функции.

Мембрана по всему своему контуру  $r=R$  закреплена. Поэтому

$$w(R,t) = 0, \quad (3)$$

что называют граничным условием.

Решение уравнения (1) с начальными условиями (2) и граничным условием (3) будем искать методом двойного интегрального преобразования: по переменной  $r$  - конечным преобразованием Ханкеля, по переменной  $t$  - преобразованием Лапласа. В уравнении (1) параметр  $\nu=0$ . Поэтому преобразование Ханкеля - порядка  $\nu=0$ . Собственные значения  $\lambda_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) соответственно граничному условию (3) в свете граничного условия (3)/7.3 и уравнения собственных значений (5)/7.3 вычисляются как корни уравнения

$$J_0(\lambda R) = 0.$$

$$H_0 L\text{-преобразование коммутативно } H_0 L[w(r,t)] = L H_0[w(r,t)],$$

$$\text{так как } \int_0^R J_0(\lambda_n r) r dr \int_0^\infty e^{-pt} w(r,t) dt = \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^R J_0(\lambda_n r) w(r,t) r dr.$$

Выполнив над уравнением (1)  $H_0 L$ -преобразование и учитывая начальные (2) и граничное (3) условия, получим

$$-c^2 \lambda_n^2 H_0 L[w(r,t)] - p^2 H_0 L[w(r,t)] + p H_0[f(r)] + H_0[v(r)] = -H_0 L[q(r,t)]/m. \quad (4)$$

**Свободные колебания.** Уравнение колебаний имеет вид

$$c^2 \left( w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} \right) - w_{,tt} = 0.$$

Соответственно этому из уравнения (4) находим

$$H_0 L[w(r,t)] = \frac{p}{p^2 + c^2 \lambda_n^2} H_0[f(r)] + \frac{1}{p^2 + c^2 \lambda_n^2} H_0[v(r)].$$

Так как  $\frac{p}{p^2 + c^2 \lambda_n^2} \div \cos c \lambda_n t$ ,  $\frac{c \lambda_n}{p^2 + c^2 \lambda_n^2} \div \sin c \lambda_n t$ , то, выполнив об-



ратное преобразование Лапласа, получим

$$H_0[w(r, t)] = \cos c\lambda_n t H_0[f(r)] + \frac{1}{c\lambda_n} \sin c\lambda_n t H_0[v(r)]$$

или, развернув изображения функций  $f(r)$ ,  $v(r)$ ,

$$H_0[w(r, t)] = \cos c\lambda_n t \int_0^R J_0(\lambda_n \rho) f(\rho) \rho d\rho + \frac{\sin c\lambda_n t}{c\lambda_n} \int_0^R J_0(\lambda_n \rho) v(\rho) \rho d\rho.$$

Обратное преобразование Ханкеля следует выполнять по формуле, соответствующей граничному условию (3): случай  $a=0$ ,  $b=1$  в формуле (3)/7.4. Выполнив его, получим искомое решение

$$w(r, t) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)}{J_1^2(\lambda_n R)} \left[ \cos c\lambda_n t \int_0^R J_0(\lambda_n \rho) f(\rho) \rho d\rho + \frac{1}{c\lambda_n} \sin c\lambda_n t \int_0^R J_0(\lambda_n \rho) v(\rho) \rho d\rho \right]. \quad (5)$$

Если обозначить

$$A_n \sin \varphi_n = \int_0^R J_0(\lambda_n \rho) f(\rho) \rho d\rho, \quad A_n \cos \varphi_n = \frac{1}{c\lambda_n} \int_0^R J_0(\lambda_n \rho) v(\rho) \rho d\rho,$$

то формула (5) преобразуется к виду

$$w(r, t) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)}{J_1^2(\lambda_n R)} A_n \sin(\varphi_n + c\lambda_n t).$$

Отсюда можно заключить, что свободные осесимметричные колебания круглой мембраны (5) являются гармоническими.

**Вынужденные колебания из состояния покоя.** В уравнении колебаний (1) справа не тождественная нулю заданная функция  $q(r, t)$ . Состояние покоя в момент начала наблюдения означает, что в начальных условиях (2)  $f(r) \equiv 0$ ,  $v(r) \equiv 0$ . С учетом этого уравнение (4) принимает вид

$$\begin{aligned} -c^2 \lambda_n^2 H_0 L[w(r, t)] - p^2 H_0 L[w(r, t)] &= -H_0 L[q(r, t)] / m \Rightarrow \\ H_0 L[w(r, t)] &= \frac{1}{m} \frac{1}{p^2 + c^2 \lambda_n^2} H_0 L[q(r, t)] = \frac{1}{m} H_0 \left[ \frac{1}{p^2 + c^2 \lambda_n^2} L[q(r, t)] \right]. \end{aligned}$$

Так как  $\frac{c\lambda_n}{p^2 + c^2 \lambda_n^2} \div \sin c\lambda_n t$  и  $L[q(r, t)] \div q(r, t)$ , то по теореме об изображении свертки имеем

$$\frac{1}{p^2 + c^2 \lambda_n^2} L[q(r, t)] \div \frac{1}{c\lambda_n} \int_0^t \sin c\lambda_n(t - \tau) q(r, \tau) d\tau.$$

С учетом этого

$$H_0 L[w(r, t)] = \frac{1}{mc\lambda_n} H_0 L \left[ \int_0^t \sin c\lambda_n(t - \tau) q(r, \tau) d\tau \right].$$

Выполнив обратное преобразование Лапласа, получим

$$\begin{aligned} H_0[w(r, t)] &= \frac{1}{mc\lambda_n} H_0 \left[ \int_0^t \sin c\lambda_n(t - \tau) q(r, \tau) d\tau \right] = \\ &= \frac{1}{mc\lambda_n} \int_0^t \sin c\lambda_n(t - \tau) d\tau H_0[q(r, \tau)] = \\ &= \frac{1}{mc\lambda_n} \int_0^t \sin c\lambda_n(t - \tau) d\tau \int_0^R J_0(\lambda_n \rho) q(\rho, \tau) \rho d\rho. \end{aligned}$$

Выполнив обратное преобразование Ханкеля по формуле, соответствующей граничному условию (3): случай  $a = 0$ ,  $b = 1$  в формуле (3)/7.4, получим искомое решение

$$w(r, t) = \frac{2}{mcR^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n J_1^2(\lambda_n R)} \int_0^t \sin c\lambda_n(t - \tau) d\tau \int_0^R J_0(\lambda_n \rho) q(\rho, \tau) \rho d\rho. \quad (6)$$

В частности, если нагрузка равномерно распределена по мембране и, будучи внезапно приложенной при  $t = 0$ , не изменяется с течением времени, то  $q(r, t) = q_0 \eta(r) \eta(t)$ , где  $q_0 = \text{const} > 0$ ,  $\eta$  - функция Хевисайда. Учитывая при этом в (6), что

$$\int_0^t \sin c\lambda_n(t - \tau) d\tau = \frac{1}{c\lambda_n} (1 - \cos c\lambda_n t), \quad \int_0^R J_0(\lambda_n \rho) \rho d\rho = \frac{R}{\lambda_n} J_1(\lambda_n R),$$

получаем закон вынужденных колебаний мембраны от такой нагрузки

$$w(r, t) = \frac{2q_0}{mc^2 R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n R)} (1 - \cos c\lambda_n t).$$

Эти колебания – гармонические.

#### 10.4. Уравнения гидродинамики и звуковых волн

Поместим изменяющийся с течением времени  $t$  поток жидкости (или газа) в прямоугольные декартовы координаты  $x, y, z$  и обозначим  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t) = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$  - вектор скорости течения жидкости в произвольной точке  $(x, y, z)$  пространства в текущий момент времени  $t$ ;  $\rho = \rho(x, y, z, t)$  - плотность жидкости в этой точке в этот момент времени.

При построении разрешающей системы дифференциальных уравнений

гидродинамики различают три стороны задачи: кинематическую, динамическую и физическую.

**Кинематическая сторона задачи.** Выделим внутри потока не изменяющуюся с течением времени замкнутую поверхность  $\sigma$ , ограничивающую объем  $\Omega$ . Так как  $\rho_{,i} dt$  - приращение плотности жидкости в течение отрезка времени  $dt$  в любой точке объема  $\Omega$ , то приращение массы жидкости во всем объеме  $\Omega$  за то же время  $dt$  равно

$$dt \iiint_{\Omega} \rho_{,i} d\Omega.$$

Пусть  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x, y, z)$  - единичный вектор внешней нормали к поверхности  $\sigma$  в текущей ее точке  $(x, y, z)$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$  - скорость течения жидкости в этой точке. Тогда скалярное произведение  $\mathbf{v}\mathbf{n}$  определяет составляющую скорости, направленную по нормали к поверхности  $\sigma$  в рассматриваемой точке,  $(\rho\mathbf{v})\mathbf{n}d\sigma dt$  - масса жидкости, протекающая через поверхность  $d\sigma$  за время  $dt$  в той же точке, а масса жидкости, протекающая через всю поверхность  $\sigma$  за время  $dt$ , равна

$$dt \iint_{\sigma} (\rho\mathbf{v})\mathbf{n}d\sigma.$$

Будем полагать, что в рассматриваемом потоке жидкости нет внутренних источников и стоков. Тогда приращение массы жидкости в объеме  $\Omega$  за время  $dt$  будет равно массе жидкости, втекшей в этот объем через поверхность  $\sigma$  за тот же отрезок времени, т.е.

$$dt \iiint_{\Omega} \rho_{,i} d\Omega = -dt \iint_{\sigma} (\rho\mathbf{v})\mathbf{n}d\sigma \Rightarrow \iiint_{\Omega} \rho_{,i} d\Omega = - \iint_{\sigma} (\rho\mathbf{v})\mathbf{n}d\sigma. \quad (a)$$

Здесь знак минус поворачивает поток внутрь объема  $\Omega$ .

Согласно теореме Остроградского, поток вектора  $\rho\mathbf{v}$  через замкнутую поверхность  $\sigma$  равен дивергенции этого вектора  $\text{div}(\rho\mathbf{v})$  по объему  $\Omega$ , ограничиваемому поверхностью  $\sigma$ , т.е.

$$\iint_{\sigma} (\rho\mathbf{v})\mathbf{n}d\sigma = \iiint_{\Omega} \text{div}(\rho\mathbf{v}) d\Omega.$$

С учетом последнего равенства (a) преобразуется к виду

$$\iiint_{\Omega} [\rho_{,i} + \text{div}(\rho\mathbf{v})] d\Omega = 0.$$

Это равенство записано для произвольного объема  $\Omega$ , в том числе и для  $\Omega \rightarrow 0$ . Поэтому справедливо равенство

$$\rho_{,i} + \text{div}(\rho\mathbf{v}) = 0, \quad (1)$$

называемое *уравнением неразрывности* потока жидкости.

**Динамическая сторона задачи.** Положим, что рассматриваемый по-

ток жидкости находится вне гравитационного поля и воздействия других внешних сил. Тогда в жидкости будут иметь место только два вида механических сил: давление  $p = p(x, y, z, t)$  и силы инерции.

$-\iint_{\sigma} p \mathbf{n} d\sigma$  - равнодействующая давления на всю поверхность  $\sigma$ . Знак минус учитывает, что давление  $p$  направлено внутрь объема  $\Omega$ .

$\iiint_{\Omega} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\Omega$  - сила инерции всей массы объема  $\Omega$ .

Равновесие сил, действующих на объем  $\Omega$ , приводит к равенству

$$-\iint_{\sigma} p \mathbf{n} d\sigma = \iiint_{\Omega} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\Omega. \quad (6)$$

Выведем один вариант формулы Остроградского.

Если  $\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}$  - орт внешней нормали к поверхности  $\sigma$  в декартовом базисе, то  $\mathbf{n} \mathbf{i} = n_x$  - скалярное произведение и

$$\iint_{\sigma} p n_x \mathbf{i} d\sigma = \mathbf{i} \iint_{\sigma} p n_x d\sigma = \mathbf{i} \iint_{\sigma} p (\mathbf{n} \mathbf{i}) d\sigma = \mathbf{i} \iint_{\sigma} (p \mathbf{i}) \mathbf{n} d\sigma.$$

По теореме Остроградского, сформулированной выше,

$$\iint_{\sigma} (p \mathbf{i}) \mathbf{n} d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(p \mathbf{i}) d\Omega = \iiint_{\Omega} p_{,x} d\Omega.$$

Подставив эту формулу в предыдущее равенство, получаем

$$\iint_{\sigma} p n_x \mathbf{i} d\sigma = \iiint_{\Omega} p_{,x} \mathbf{i} d\Omega.$$

Аналогично этому можно получить

$$\iint_{\sigma} p n_y \mathbf{j} d\sigma = \iiint_{\Omega} p_{,y} \mathbf{j} d\Omega, \quad \iint_{\sigma} p n_z \mathbf{k} d\sigma = \iiint_{\Omega} p_{,z} \mathbf{k} d\Omega.$$

Сумма последних трех равенств, дает искомую формулу

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} p (n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}) d\sigma &= \iiint_{\Omega} (p_{,x} \mathbf{i} + p_{,y} \mathbf{j} + p_{,z} \mathbf{k}) d\Omega \Leftrightarrow \\ \iint_{\sigma} p \mathbf{n} d\sigma &= \iiint_{\Omega} \operatorname{grad} p d\Omega. \end{aligned}$$

Преобразуя равенство (6) при помощи этой формулы, получаем

$$\iiint_{\Omega} \left( \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \operatorname{grad} p \right) d\Omega = 0.$$

Это равенство справедливо и при  $\Omega \rightarrow 0$ . Из чего следует

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \operatorname{grad} p = \mathbf{0}. \quad (2)$$

Это уравнение выражает условие динамического равновесия в каждой фиксированной точке потока жидкости и называется *уравнением движения*.

Уравнение (1) и уравнение (2) в скалярной форме образуют систему четырех дифференциальных уравнений с пятью неизвестными  $\rho, p, v_x, v_y, v_z$ . Чтобы задача с начальными и граничными условиями для этих неизвестных была однозначно разрешимой должно быть пять уравнений, которые называются *разрешающей системой уравнений*. Требуется еще одно уравнение, называемое *закрывающим*, связывающее неизвестные  $\rho, p, v_x, v_y, v_z$  и не содержащее новых неизвестных.

**Физическая сторона задачи.** Эту часть задачи рассмотрим для акустических колебаний газа.

Экспериментально установлено, что при акустических колебаниях газа в качестве закрывающего уравнения можно принять соотношение между плотностью газа  $\rho$  и давлением  $p$  в нем в *адиабатическом процессе*

$$p/p_0 = (\rho/\rho_0)^\beta, \quad (3)$$

где  $p_0, \rho_0$  - давление и плотность газа до появления в нем звука,  $\beta$  - положительная константа - *показатель адиабаты*.

**Упрощения.** Величину  $\varepsilon = (p - p_0)/p_0$  называют *конденсацией* газа. Отсюда плотность как функция конденсации

$$\rho = \rho_0 (1 + \varepsilon). \quad (4)$$

Подставив эту функцию в уравнение (3), получим давление как функцию конденсации

$$p = p_0 (1 + \varepsilon)^\beta.$$

В акустике, как показывает практика, достаточно точным является значение давления, вычисленное из записанного соотношения по формуле Тейлора с первым порядком точности относительно  $\varepsilon$ . Это значит, что можно принять

$$p = p(0) + p'(0)\varepsilon \Rightarrow p = p_0 (1 + \beta\varepsilon). \quad (5)$$

Акустические колебания являются малыми колебаниями. При малых колебаниях газа некоторые из членов уравнений (1), (2) оказываются величинами высшего порядка малости по сравнению с другими членами этих уравнений. Отбрасывая величины высшего порядка малости, уравнения (1), (2) можно упростить.

Сравним слагаемые ускорения  $dv/dt$ . По определению производной

$$\frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

Здесь  $v$  - скорость элементарного объема  $d\Omega$ , так как вычисляется сила инерции, действующая на него. Но в момент времени  $t + \Delta t$  элемент

$d\Omega$ , двигаясь, будет уже в другой точке пространства, нежели он был в момент времени  $t$ . Поэтому координаты  $x, y, z$  элемента  $d\Omega$  являются функциями времени  $t$  и, следовательно, функция  $\mathbf{v}(t)$  имеет структуру  $\mathbf{v}(x(t), y(t), z(t), t)$ . Последнее означает, что  $d\mathbf{v}/dt$  - полная производная. По формуле полной производной находим

$$d\mathbf{v}/dt = v_{,x} dx/dt + v_{,y} dy/dt + v_{,z} dz/dt + v_{,t}.$$

Так как здесь  $x, y, z$  - координаты элемента  $d\Omega$ , то их производные по  $t$  - компоненты его скорости  $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$ . Поэтому

$$dx/dt = v_x, \quad dy/dt = v_y, \quad dz/dt = v_z.$$

Подставляя эти производные в выражение ускорения, получаем

$$d\mathbf{v}/dt = v_{,x} v_x + v_{,y} v_y + v_{,z} v_z + v_{,t}.$$

Оценка значений слагаемых в этом выражении позволяет заключить, что при малых колебаниях газа слагаемыми  $v_{,x} v_x + v_{,y} v_y + v_{,z} v_z$  можно пренебречь. Следовательно, при акустических колебаниях уравнение движения может быть принято в виде

$$\rho \mathbf{v}_{,t} + \text{grad} p = \mathbf{0}. \quad (6)$$

Дивергенция в уравнении неразрывности (1)

$$\begin{aligned} \text{div}(\rho \mathbf{v}) &= (\rho v_x)_{,x} + (\rho v_y)_{,y} + (\rho v_z)_{,z} = \\ &= \rho_{,x} v_x + \rho_{,y} v_y + \rho_{,z} v_z + \rho(v_{,x} v_x + v_{,y} v_y + v_{,z} v_z) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\text{div}(\rho \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \text{grad} \rho + \rho \text{div}(\mathbf{v}).$$

В этом равенстве для акустических процессов с достаточной степенью точности можно принять  $\mathbf{v} \cdot \text{grad} \rho = 0$ . С учетом этого уравнение неразрывности (1) в акустических процессах принимает вид

$$\rho_{,t} + \rho \text{div}(\mathbf{v}) = 0. \quad (7)$$

**Разрешающие уравнения.** Уравнение (6) в скалярной форме представляет собой три уравнения. Эти три уравнения совместно с уравнениями (4), (5), (7) образуют систему шести уравнений с шестью неизвестными  $\rho, \varepsilon, p, v_x, v_y, v_z$ . Таким образом, уравнения (4)-(7) образуют разрешающую систему дифференциальных уравнений акустики. Ее можно упростить.

Исключив неизвестные  $\rho, p$  путем подстановки их выражений (4), (5) в уравнения (6), (7) и учтя после этого, что  $1 + \varepsilon \approx \varepsilon$ , получим разрешающую систему уравнений акустики в виде

$$\mathbf{v}_{,t} + c^2 \text{grad} \varepsilon = \mathbf{0}, \quad \varepsilon_{,t} + \text{div}(\mathbf{v}) = 0 \quad (8)$$

где  $c = \sqrt{\beta(p_0 / \rho_0)}$  - скорость звука в газе.

Уравнения (8) в скалярной форме представляют собой систему четырех дифференциальных уравнений с четырьмя неизвестными  $\varepsilon, v_x, v_y, v_z$ .

В акустических процессах движение газа является *потенциальным*, что позволяет свести задачу акустики к одному уравнению.

Скалярная функция  $U = U(x, y, z, t)$  называется *скалярным потенциалом* скорости движения газа, если имеют место соотношения

$$\vec{v} = -\text{grad}U, \quad \varepsilon = \frac{1}{c^2} U_{,t} \quad (9)$$

Легко убедиться, что эти соотношения тождественно удовлетворяют первое уравнение системы (8), а второе уравнение (8) преобразуют к виду

$$c^2 \text{div}(\text{grad}U) = U_{,tt}$$

или

$$c^2 (U_{,xx} + U_{,yy} + U_{,zz}) = U_{,tt} \quad (10)$$

Таким образом, задача о распространении звука в газе сводится к отысканию частного решения уравнения (10), удовлетворяющего заданным начальным и граничным условиям. Решив эту задачу, по формулам (9) можно вычислить скорость и конденсацию, а потом по формулам (4), (5) – плотность и давление.

### 10.5. Радиальные колебания газа в сфере

Требуется исследовать акустические колебания газа, заключенного в абсолютно жесткую сферическую оболочку радиуса  $l$  в предположении, что процесс колебаний является *центросимметричным*, при котором все функции зависят только от двух переменных: текущего времени  $t$  и расстояния от центра сферы  $r$ . Уравнение (10)/10.4 потенциала скорости  $U = U(r, t)$  при центросимметричных колебаниях принимает вид

$$c^2 \left( U_{,rr} + \frac{2}{r} U_{,r} \right) = U_{,tt} \quad (1)$$

Колебания газа могут наблюдаться только в том случае, если в начальный момент времени внутри сферической оболочки газ находился в акустически возмущенном состоянии. Стало быть, для решения задачи требуются начальные условия. Положим, что в момент начала наблюдений  $t = 0$  значения потенциала и конденсации во всех точках области, ограниченной сферой, известны, т.е. начальные условия заданы в виде

$$U(r, 0) = \Phi(r), \quad U_{,t}(r, 0) = F(r), \quad (2)$$

где  $\Phi(r)$ ,  $F(r)$  – заданные функции.

Так как сферическая оболочка является абсолютно жесткой преградой для газа, то на ее поверхности газ неподвижен – скорость его движения

равна нулю, что приводит к граничному условию

$$v = \text{grad} U = 0 \quad \text{при} \quad r=l \Rightarrow U_{,r}(l,t) = 0. \quad (3)$$

Задачу будем решать *методом разделения переменным - методом Фурье*. Согласно этому методу, решение задачи ищется в виде

$$U = R(r)T(t), \quad (4)$$

где  $R(r)$ ,  $T(t)$  - функции одной переменной  $r$  и  $t$  соответственно.

Подстановка (4) в уравнение (1) приводит к равенству

$$\frac{R''(r) + \frac{2}{r}R'(r)}{R(r)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)}.$$

Левая часть этого равенства - функция от  $r$ , а правая часть - функция от  $t$ . Так как  $r$  и  $t$  - не зависящие друг от друга переменные, то записанное равенство возможно лишь в том случае, когда обе части равенства равны одной и той же константе. Обозначая эту константу  $-\lambda^2$ , получаем два уравнения

$$R''(r) + \frac{2}{r}R'(r) + \lambda^2 R(r) = 0, \quad (5)$$

$$T''(t) + \lambda^2 c^2 T(t) = 0. \quad (6)$$

Граничное условие (3) при подстановке (4) принимает вид

$$R(l) = 0. \quad (7)$$

Отыскание значений  $\lambda$ , при которых уравнение (5) имеет нетривиальные решения, удовлетворяющие граничное условие (7), является задачей Штурма-Лиувилля, в которой  $\lambda$  - собственные числа, а соответствующие им частные решения уравнения (5) - собственные функции.

Подстановкой  $R(r) = y(r)/r$  уравнение (5) преобразуется к виду

$$y''(r) + \lambda^2 y(r) = 0.$$

Общее решение этого уравнения

$$y(r) = C_1 \sin \lambda r + C_2 \cos \lambda r.$$

где  $C_1, C_2$  - произвольные постоянные. Отсюда

$$R(r) = C_1 \frac{\sin \lambda r}{r} + C_2 \frac{\cos \lambda r}{r}.$$

Здесь  $R(0) = \infty$ . Это противоречит физическому смыслу решаемой задачи (скорость движения газа всегда конечна). Поэтому следует положить  $C_2 = 0$ . Кроме того, так как  $R(r)$  входит сомножителем в формулу (4), можно принять (не нарушая общности решения)  $C_1 = 1$ . Таким образом, собственными функциями задачи уравнения (5) будут функции вида



$$R(r) = \frac{\sin \lambda r}{r}. \quad (8)$$

Подчинив эту функцию условию (7), получим

$$\frac{\lambda l \cos \lambda l - \sin \lambda l}{l^2} = 0 \Rightarrow \tan(\lambda l) = \lambda l. \quad (9)$$

Отсюда, обозначив  $\mu = \lambda l$ , приходим к уравнению  $\tan \mu = \mu$ .

Если  $\mu_0 = 0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$  - корни этого уравнения, то  $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = \mu_1 / l, \lambda_2 = \mu_2 / l, \dots, \lambda_n = \mu_n / l, \dots$  - собственные значения задачи уравнения (5) с граничным условием (7). Их бесконечное множество.

На рис.32 изображено графическое решение уравнения  $\tan \mu = \mu$ . Корнями уравнения являются абсциссы точек пересечения прямой  $y = \mu$  и

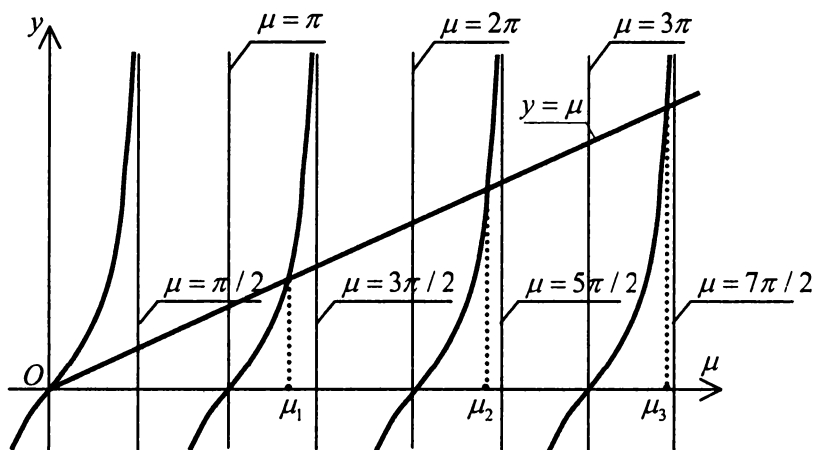


Рис.32

тангенсоид  $y = \tan \mu$ .

Заметим, что собственному числу  $\lambda_0 = 0$  соответствует собственная функция  $R_0(r) \equiv 0$ , которая не отвечает физическому смыслу. Она соответствует состоянию покоя газа, тогда как газ непрерывно находится в движении. Поэтому собственную функцию  $R_0(r) \equiv 0$  можно отбросить.

При вычисленных собственных числах  $\lambda_n$   $n=1,2,\dots$  собственные функции (8) принимают окончательный вид

$$R_n(r) = \frac{\sin \lambda_n r}{r}, \quad n=1,2,\dots. \quad (10)$$

Теперь, когда известно, что  $\lambda_n$  - вещественные числа, можно записать общее решение уравнения (6)

$$T_n(t) = a_n \cos c\lambda_n t + b_n \sin c\lambda_n t, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

где  $a_n, b_n$  - произвольные постоянные.

Подставляя выражения (10), (11) в формулу (4), получаем

$$U_n = \frac{\sin \lambda_n r}{r} (a_n \cos c\lambda_n t + b_n \sin c\lambda_n t), \quad n = 1, 2, \dots.$$

Каждая из этих функций является решением уравнения (1). Поэтому и их сумма также будет его решением. А так как этих функций бесконечное множество, то искомым решением уравнения (1) является ряд

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n r}{r} (a_n \cos c\lambda_n t + b_n \sin c\lambda_n t). \quad (12)$$

Входящие сюда неизвестные константы  $a_n, b_n$  определим, используя начальные условия (2). Подчиняя решение (12) этим условиям, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin \lambda_n r}{r} = \Phi(r), \quad c \sum_{n=1}^{\infty} b_n \lambda_n \frac{\sin \lambda_n r}{r} = F(r). \quad (13)$$

Умножая обе части равенств (13) на  $r \sin \lambda_m r$  и интегрируя в пределах от 0 до  $l$ , будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^l \sin \lambda_m r \sin \lambda_n r dr &= \int_0^l \sin \lambda_m r \Phi(r) r dr, \\ c \sum_{n=1}^{\infty} b_n \lambda_n \int_0^l \sin \lambda_m r \sin \lambda_n r dr &= \int_0^l \sin \lambda_m r F(r) r dr. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Можно доказать, что если  $\lambda_n$  являются корнями уравнения (9), то ортогональность функций  $\sin \lambda_n r$  на отрезке  $[0, l]$  выражается формулой

$$\int_0^l \sin \lambda_m r \sin \lambda_n r dr = \delta_{mn} \frac{\lambda_n^2 l^3}{2(1 + \lambda_n^2 l^2)}.$$

С учетом этого из равенств (14) находим

$$a_n = \frac{2(1 + \lambda_n^2 l^2)}{l^3 \lambda_n^2} \int_0^l \sin \lambda_m r \Phi(r) r dr, \quad b_n = \frac{2(1 + \lambda_n^2 l^2)}{cl^3 \lambda_n^3} \int_0^l \sin \lambda_m r F(r) r dr.$$

При подстановке этих формул в формулу (12) искомое решение принимает окончательный вид

$$U = \frac{2}{l^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \lambda_n^2 l^2}{\lambda_n^2} \left[ \cos c\lambda_n t \int_0^l \sin \lambda_m \zeta \Phi(\zeta) \zeta d\zeta + \right. \\ \left. + \frac{\sin c\lambda_n t}{c\lambda_n} \int_0^l \sin \lambda_m \zeta F(\zeta) \zeta d\zeta \right] \frac{\sin \lambda_n r}{r}. \quad (15)$$

Вместо  $a_n, b_n$  введем новые константы  $A_n, \varphi_n$  по формулам

$$a_n = A_n \sin \varphi_n, \quad b_n = A_n \cos \varphi_n \Rightarrow A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = \arctan \frac{a_n}{b_n}.$$

Их подстановка преобразует формулу (12) к виду

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n r}{r} A_n \sin(\varphi_n + c \lambda_n t).$$

Отсюда видно, что колебания газа в сфере с начальными условиями (2) имеют гармонический характер с периодами гармоник, равными  $\tau_n = 2\pi / c \lambda_n$ . Период основного тона равен  $\tau_1 = 2\pi / c \lambda_1$ .

## 10.6. Осесимметричные колебания газа в трубке

Газ в трубке радиуса  $l$  совершает осесимметричные акустические колебания. Потенциал скорости  $U = U(r, t)$  представляет собой функцию радиальной  $r$  и временной  $t$  переменных и описывается уравнением

$$c^2 \left( U_{,rr} + \frac{1}{r} U_{,r} \right) = U_{,tt} \quad (1)$$

где  $c$  - скорость звука в газе.

Задачу будем решить с начальными условиями

$$U(r, 0) = \Phi(r), \quad U_{,t}(r, 0) = F(r), \quad (2)$$

где  $\Phi(r), F(r)$  - заданные функции.

Так как трубка является абсолютно жесткой преградой для газа, то на ее поверхности газ неподвижен - скорость движения газа равна нулю, что приводит к граничному условию

$$U_{,r}(l, t) = 0. \quad (3)$$

Решим задачу методом разделения переменных. Согласно этому, решение будем искать в виде

$$U = R(r)T(t), \quad (4)$$

где  $R(r), T(t)$  - функции одной переменной  $r$  и  $t$  соответственно.

Подстановка (4) в уравнение (1) приводит к равенствам

$$\frac{R''(r) + \frac{1}{r} R'(r)}{R(r)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = -\lambda^2, \text{ где } \lambda = \text{const},$$

из которых вытекают следующие два уравнения:

$$R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) + \lambda^2 R(r) = 0, \quad (5)$$

$$T''(t) + \lambda^2 c^2 T(t) = 0. \quad (6)$$

Граничное условие (3) при подстановке (4) принимает вид

$$R(l) = 0. \quad (7)$$

Отыскание значений параметра  $\lambda$ , при которых уравнение (5) имеет нетривиальные решения, удовлетворяющие граничное условие (7), является задачей Штурма-Лиувилля. Числа  $\lambda$  - собственные числа задачи, а соответствующие им частные решения уравнения (5) - собственные функции.

Уравнение (5) является уравнением Бесселя. Его общее решение

$$R(r) = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda r),$$

где  $J_0, Y_0$  - функции Бесселя соответственно первого и второго родов нулевого порядка,  $C_1, C_2$  - произвольные постоянные.

Так как  $Y_0(0) = \infty$ , что противоречит физическому смыслу исследуемого процесса, в котором все величины имеют только конечные значения, то следует принять  $C_2 = 0$ . И так как  $R(r)$  входит сомножителем в (4), то без ущерба для общности решения можно принять  $C_1 = 1$ . Таким образом, собственные функции являются функциями Бесселя первого рода нулевого порядка

$$R(r) = J_0(\lambda r). \quad (8)$$

Подчинив эту функцию условию (7), приходим к уравнению

$$J_0^*(\lambda l) = 0. \quad (9)$$

Используя соотношение (4)/7.2, преобразуем его к виду

$$J_1(\lambda l) = 0.$$

Уравнение  $J_1(\mu) = 0$  имеет бесконечное множество вещественных положительных корней  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$ . Следовательно, задача Штурма-Лиувилля для уравнения (5) с граничным условием (7) имеет бесконечное множество собственных значений  $\lambda_n = \mu_n / l$ .

Собственному числу  $\lambda_0 = 0$  соответствует собственная функция  $R_0(r) \equiv 0$ , которая не отвечает физическому смыслу. Она соответствует состоянию покоя газа, тогда как газ непрерывно находится в движении. Поэтому собственную функцию  $R_0(r) \equiv 0$  можно отбросить.

При вычисленных значениях  $\lambda_n$  собственные функции (8) оказываются окончательно определенными

$$R_n(r) = J_0(\lambda_n r), \quad n = 1, 2, \dots \quad (10)$$

и можно записать общее решение уравнения (5)

$$T_n(t) = a_n \cos c\lambda_n t + b_n \sin c\lambda_n t, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

где  $a_n, b_n$  - произвольные постоянные.

Подставляя выражения (10), (11) в формулу (4), получаем

$$U_n = J_0(\lambda_n r) (a_n \cos c\lambda_n t + b_n \sin c\lambda_n t), \quad n = 1, 2, \dots$$

Каждая из этих функций является решением уравнения (1). Поэтому и их сумма также будет его решением. Следовательно, искомым решением уравнения (1) является ряд

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} J_0(\lambda_n r) (a_n \cos c\lambda_n t + b_n \sin c\lambda_n t). \quad (12)$$

Входящие сюда неизвестные константы  $a_n, b_n$  определим, используя начальные условия (2). Подчиняя решение (12) этим условиям, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n r) = \Phi(r), \quad c \sum_{n=1}^{\infty} b_n \lambda_n J_0(\lambda_n r) = F(r). \quad (13)$$

Умножая обе части равенств (13) на  $J_0(\lambda_m r)r$  и интегрируя в пределах от 0 до  $l$ , будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^l J_0(\lambda_m r) J_0(\lambda_n r) r dr &= \int_0^l J_0(\lambda_m r) \Phi(r) r dr, \\ c \sum_{n=1}^{\infty} b_n \lambda_n \int_0^l J_0(\lambda_m r) J_0(\lambda_n r) r dr &= \int_0^l J_0(\lambda_m r) F(r) r dr. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Граничное условие (9) является граничным условием (3)/7.3 при  $a = 1, \quad b = 0$  и  $\nu = 0$ . Поэтому условие ортогональности функций Бесселя в данной задаче выражается формулой (6a)/7.3

$$\int_0^l J_0(\lambda_m r) J_0(\lambda_n r) r dr = \delta_{mn} \frac{l^2}{2} J_0^2(\lambda_n l).$$

С учетом этого из равенств (14) находим

$$a_n = \frac{2}{l^2 J_0^2(\lambda_n l)} \int_0^l J_0(\lambda_n r) \Phi(r) r dr,$$

$$b_n = \frac{2}{cl^2 \lambda_n J_0^2(\lambda_n l)} \int_0^l J_0(\lambda_n r) F(r) r dr.$$

При подстановке этих формул в формулу (12) искомое решение принимает окончательный вид

$$U = \frac{2}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)}{J_0^2(\lambda_n l)} \left[ \cos c\lambda_n t \int_0^l J_0(\lambda_n \zeta) \Phi(\zeta) \zeta d\zeta + \right.$$

$$+ \frac{1}{c\lambda_n} \sin c\lambda_n t \int_0^l J_0(\lambda_n \zeta) F(\zeta) \zeta d\zeta \Big]. \quad (15)$$

Вместо  $a_n, b_n$  введем новые константы  $A_n, \varphi_n$  по формулам

$$a_n = A_n \sin \varphi_n, \quad b_n = A_n \cos \varphi_n \Rightarrow A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = \arctan \frac{a_n}{b_n}.$$

Их подстановка преобразует формулу (12) к виду

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} J_0(\lambda_n r) A_n \sin(\varphi_n + c\lambda_n t).$$

Отсюда видно, что колебания газа в круглой трубке с начальными условиями (2) имеют гармонический характер с периодами гармоник, равными  $\tau_n = 2\pi / c\lambda_n$ . Период основного тона равен  $\tau_1 = 2\pi / c\lambda_1$ .

## 10.7. Волны упругих деформаций в стержне

**Постановка задачи.** Стержень имеет постоянное поперечное сечение. Его длина так велика, что противоположный конец стержня принимается расположенным в бесконечности. Ось стержня совмещена с осью пространственной переменной  $x$  так, что стержень располагается при  $x \in [0, \infty)$ . На торце  $x = 0$  стержень подвергается воздействию равномерно распределенной по всей площади торца нормальной к торцу силы интенсивности  $q$ , изменяющейся с течением времени  $t \in [0, \infty)$  по закону  $q = q(t)$  с большой скоростью. Принимается, что в результате такого нагружения в стержне возникает одномерное напряженное состояние, линия действия которого направлена вдоль оси стержня. Энергия поперечных деформаций принимается пренебрежимо малой. Исследуется распределение по длине стержня и изменение с течением времени нормального к поперечному сечению напряжения  $\sigma$ , относительной линейной деформации  $\varepsilon$  по направлению оси стержня, смещений  $u$  поперечных сечений по направлению оси стержня и скорости  $v$  этих смещений.

Ясно, что

$$\sigma = \sigma(x, t), \quad \varepsilon = \varepsilon(x, t), \quad u = u(x, t), \quad v = v(x, t), \quad v = u_{,t}.$$

**Физическая сторона задачи.** Примем, что материал стержня является однородным и линейно упругим. Это значит, что его модуль нормальной упругости (модуль Юнга)  $E$  и плотность  $\rho$  являются константами, а связь напряжения  $\sigma$  и деформации  $\varepsilon$  определяется линейной функцией, называемой законом Гука,

$$\sigma = \varepsilon E. \quad (1)$$

**Динамическая сторона задачи.** Поперечными сечениями, отстоящи-

ми друг от друга на бесконечно малом расстоянии  $dx$ , вырежем мысленно элемент стержня, заменим воздействие отброшенных частей напряжениями  $\sigma$ ,  $\sigma + \sigma_{,x} dx$  (рис.33) и рассмотрим его равновесие.

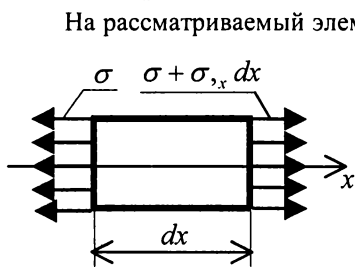


Рис.33

На рассматриваемый элемент помимо напряжений действует еще сила инерции  $\rho v_{,t} dx$ , направленная в сторону, противоположную направлению скорости  $v$ . Таким образом, условие динамического равновесия элемента, вырезанного из стержня, выражается уравнением

$$-\sigma + (\sigma + \sigma_{,x} dx) - \rho v_{,t} dx = 0 \Rightarrow$$

$$\sigma_{,x} - \rho v_{,t} = 0. \quad (2)$$

Это уравнение принято называть *уравнением движения*.

**Геометрическая сторона задачи.** Установим, как связаны между собой деформация  $\varepsilon$  и перемещение  $u$ ?

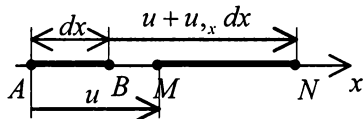


Рис.34

Пусть  $AB$  - отрезок недеформированного стержня длиной  $dx$  (рис.34),  $MN$  - тот же отрезок стержня в деформированном состоянии. Тогда  $u$  - перемещение точки  $A$  в точку  $M$ ,  $u + u_{,x} dx$  - перемещение

точки  $B$  в точку  $N$ . Поэтому  $(dx + u + u_{,x} dx) - u = dx + u_{,x} dx$  - длина отрезка  $MN$ .

*Относительной линейной деформацией* отрезка  $AB$  бесконечно малой длины  $dx$  называется отношение его *абсолютной деформации* - приращения длины - к первоначальной длине

$$\varepsilon = (MN - AB) / AB \Rightarrow \varepsilon = u_{,x}. \quad (3)$$

Это равенство называют *соотношением Коши*.

**Разрешающие уравнения.** Физическую величину  $a = \sqrt{E/\rho}$  называют скоростью звука в твердом материале. Подставив  $E = \rho a^2$  и соотношение Коши (3) в закон Гука (1), получим

$$\sigma = \rho a^2 u_{,x}.$$

Дифференцирование этого равенства по времени  $t$  приводит к дифференциальному уравнению

$$\sigma_{,t} - \rho a^2 v_{,x} = 0, \quad (4)$$

которое, как и закон Гука, является физическим соотношением.

Уравнения (2) и (4) образуют систему двух уравнений с двумя неизвестными  $\sigma$ ,  $v$ . Поэтому эта система уравнений

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{,x} - \rho v_{,t} &= 0, \\ \sigma_{,t} - \rho a^2 v_{,x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

является разрешающей системой задачи динамического деформирования упругого стержня постоянного поперечного сечения.

Подставив в уравнение движения (2)  $\sigma = \rho a^2 u_{,x}$ ,  $v = u_{,t}$ , получим дифференциальное уравнение перемещений

$$a^2 u_{,xx} - u_{,tt} = 0, \quad (6)$$

которое является разрешающим уравнением и называется волновым. Это уравнение, как установлено ранее, представляет собой уравнение гиперболического типа. Очевидно, что оно эквивалентно системе уравнений (5). Поэтому система уравнений (5) также является системой уравнений гиперболического типа.

Таким образом, поставленная задача может быть решена или путем интегрирования системы уравнений (5), или путем интегрирования уравнения (6). В данном случае мы выберем первое. Это обусловлено тем, как заданы граничные условия. Смысл этого станет понятен в дальнейшем.

#### Дифференциальные уравнения характеристик и условия на них.

Пусть  $d\sigma = \sigma_{,x} dx + \sigma_{,t} dt$ ,  $dv = v_{,x} dx + v_{,t} dt$  - полные дифференциалы по направлению характеристики. Эти равенства совместно с уравнениями (5) относительно частных производных образуют систему уравнений

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\rho \\ 0 & 1 & -\rho a^2 & 0 \\ dx & dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{,x} \\ \sigma_{,t} \\ v_{,x} \\ v_{,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d\sigma \\ dv \end{bmatrix},$$

имеющую бесконечное множество решений. Поэтому определители ее основной матрицы и всех дополнительных матриц равны нулю.

Приравняв нулю определитель основной матрицы, получим дифференциальные уравнения характе-

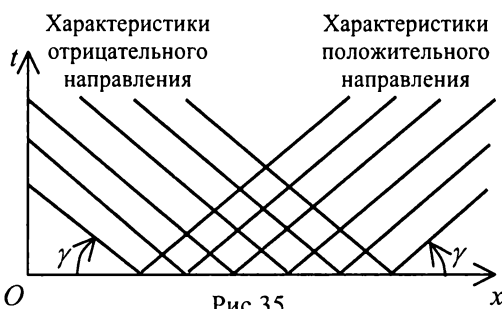


Рис.35

альные уравнения характеристик

$$dx = \pm a dt. \quad (6)$$

Приравняв нулю определитель любой из дополнительных матриц, получим дифференциальные соотношения на них

$$d\sigma \mp \rho a dv = 0. \quad (7)$$

Семейства характеристик  $dx = +adt$  и  $dx = -adt$  представляют собой два семейства параллельных прямых и называются соответственно характеристиками *положи-*



тельного и отрицательного направлений (рис.35).

В уравнениях (7) верхний знак соответствует характеристике положительного направления, а нижний знак соответствует характеристике отрицательного направления. Таким образом,

$$d\sigma - \rho a dv = 0 \quad \text{на характеристике} \quad dx = +adt,$$

$$d\sigma + \rho a dv = 0 \quad \text{на характеристике} \quad dx = -adt.$$

Так как  $\cot \gamma = dx/dt = a$ , то угол наклона характеристик  $\gamma$  к оси  $x$  тем больше, чем меньше скорость звука  $a$ .

**Задача с непрерывным нагружением.** Рассмотрим случай, когда нагрузка  $q(t)$  непрерывно изменяется от нуля при  $t=0$  до нуля при  $t=T$ .

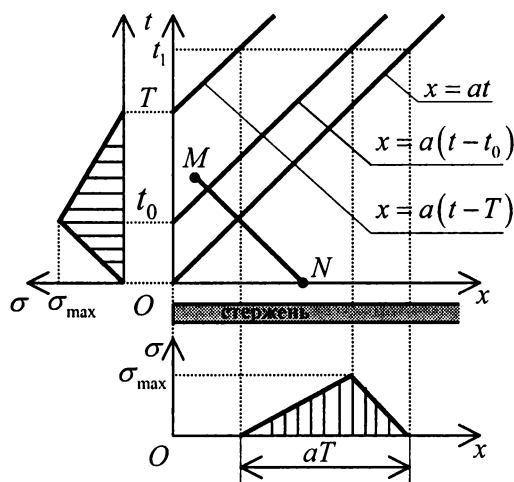


Рис.36

На рис.36 для наглядности построения функция  $q(t)$  принята кусочно-линейной.

Возьмем произвольную точку  $M$  между характеристиками  $x=at$  и  $x=a(t-T)$ . Из точки  $M$  проведем характеристику отрицательного направления до пересечения с осью  $x$  в точке  $N$ . Обозначим:  $\sigma, v$  - значения напряжения и скорости в точке  $M$ ,  $\sigma_N, v_N$  - их значения в точке  $N$ .

На характеристике отрицательного направления  $d\sigma + \rho a dv = 0$ . Интегрируя это уравнение от точки  $N$  до точки  $M$ , получаем

$$\sigma - \sigma_N + \rho a(v - v_N) = 0.$$

Точка  $N$  располагается на прямой  $t=0$ . В этот момент времени стержень находится в невозмущенном состоянии. Поэтому  $\sigma_N = 0$ ,  $v_N = 0$ . С учетом этого приходим к следующему соотношению в точке  $M$ :

$$\sigma = -\rho a v. \quad (8)$$

Точка  $M$  выбрана произвольно. Поэтому аналогичные построения могут быть выполнены для любой точки с положительными координатами. Следовательно, в любой такой точке выполняется соотношение (8).

На характеристиках положительного направления  $d\sigma - \rho a dv = 0$ .

Подстановка сюда соотношения (8) дает  $d\sigma = 0$ ,  $dv = 0$ . Эти равенства означают, что во всех точках каждой характеристики положительного направления напряжение  $\sigma$  и скорость  $v$  остаются одинаковыми, равными их значениям в точках прямой  $x = 0$ , т.е. на торце. Отсюда следует, что в любом произвольном сечении стержня  $x > 0$  напряжение изменяется по тому же закону, что и на торце, только начало процесса сдвинуто на отрезок времени продолжительностью  $x/a$ . Следовательно, так как  $\sigma(0, t) = q(t)$ , то при  $x \geq 0$ ,  $t \geq 0$  закон изменения напряжения в стержне определяется формулой

$$\sigma = q\left(t - \frac{x}{a}\right). \quad (9)$$

Отсюда ясно, что возмущения, обусловленные действием нагрузки, распространяются по стержню со скоростью звука  $a$ , границей начала возмущений является характеристика  $x = at$ . Характеристика  $x = a(t - T)$  является противоположной границей возмущенной области. В промежутке времени  $(0, T)$  возмущенная часть стержня постепенно возрастает и при  $t = T$  охватывает отрезок длиной  $aT$ . Начиная с этого момента времени длина возмущенного отрезка стержня, движущегося со скоростью звука  $a$ , не изменяется. Остается неизменной также график распределения напряжения по его длине. На рис.35 возмущенный отрезок показан в виде графика напряжений в стержне в момент времени  $t_1 \geq T$ .

**Задача со скачкообразным нагружением.** Рассмотрим теперь случай, когда нагрузка на торец стержня в виде нормального напряжения в начальный момент времени  $t = 0$  скачкообразно возрастает

от нуля до величины  $\sigma_{\max}$ , а потом монотонно убывает по закону  $q(t)$  (рис.37).

Скачкообразное нагружение можно представить как предел непрерывного нагружения, когда время возрастания нагрузки  $t_0$  (рис.36) стремится к нулю, а максимальное значение нагрузки  $\sigma_{\max}$  остается неизменным.

Это позволяет сразу же заключить, что при

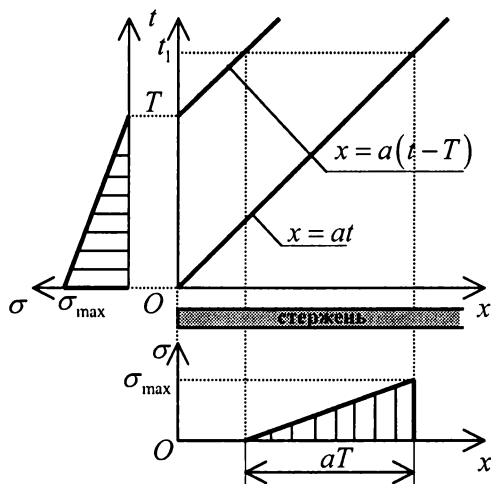


Рис.37

скачкообразном возрастании нагрузки при  $t=0$  от нуля до  $\sigma_{\max}$  на характеристике  $x=at$  напряжение и скорость скачкообразно возрастают от нулевых значений до  $\sigma=\sigma_{\max}$ ,  $v=-\sigma_{\max}/\rho a$  соответственно. В этом случае характеристика  $x=at$  называется *волной сильных разрывов*. В области между характеристиками  $x=at$  и  $x=a(t-T)$  напряжение определяется формулой (9), где  $q(0)=\sigma_{\max}$ , а скорость связана с напряжением соотношением (8).

**Задача с разрывным нагружением.** Пусть характеристика  $x=a(t-t_0)$ , расположенная внутри области возмущения, является волной сильных разрывов. Такое явление возникает, когда нагрузка изменяется, например, по такому закону, что показан на рис.38. В момент времени  $t_1$

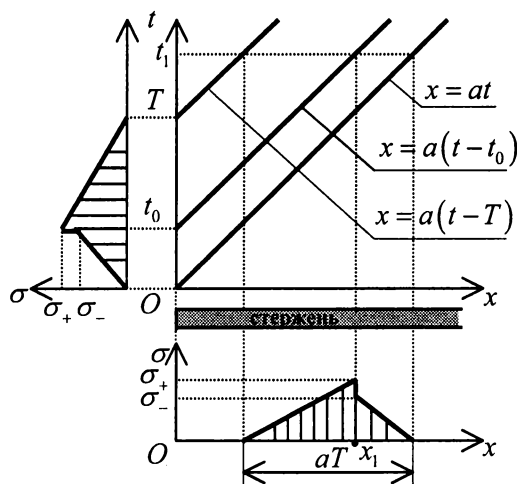


Рис.38

сильный разрыв достигает сечения  $x_1=a(t_1-t_0)$ . При этом перед волной сильных разрывов  $x=x_1+0$  напряжение равно  $\sigma_+$ , скорость равна  $v_+$  и они связаны равенством (8)

$$\sigma_+ = -\rho a v_+.$$

Аналогично, за волной сильных разрывов  $x=x_1-0$  напряжение  $\sigma_-$  и скорость  $v_-$  связаны равенством (8)

$$\sigma_- = -\rho a v_-.$$

Вычитая эти уравнения друг из друга, получаем уравнение скачков на волне сильных разрывов

$$(\sigma_+ - \sigma_-) + \rho a (v_+ - v_-) = 0. \quad (10)$$

Если в этой задаче стержень повернуть в противоположное направление, оставив прежней координатную систему, и прикладывать нагрузку в сечении  $x=0$ , то соотношение (8) примет вид  $\sigma = \rho a v$ . Соответственно этому, уравнение скачков примет вид

$$(\sigma_+ - \sigma_-) - \rho a (v_+ - v_-) = 0. \quad (11)$$

Таким образом, уравнение (10) – условие на скачке, движущимся в положительную сторону оси  $x$ , а уравнение (11) – условие на скачке, движущимся в отрицательную сторону оси  $x$ .

Уравнения (10), (11) принято называть *условиями непрерывности потока импульса* на волнах соответственно положительного и отрицательного направлений.

Условия непрерывности потока импульса являются выражением условия непрерывности смещений в упругом теле.

Докажем это.

Пусть  $du = u_{,x} dx + u_{,t} dt$  - полный дифференциал по направлению характеристики. Тогда дифференциалы независимых переменных в нем  $dx, dt$  связаны равенством  $dx = \pm a dt$ . Используя его и подставляя также  $u_{,x} = \varepsilon$ ,  $u_{,t} = v$ , получаем, что на характеристиках положительных и отрицательных направлений  $du = (\pm a\varepsilon + v)dt$ . Пусть эти характеристики являются волнами сильных разрывов. Тогда как угодно близко к этим волнам спереди и сзади  $du_+ = (\pm a\varepsilon_+ + v_+)dt$ ,  $du_- = (\pm a\varepsilon_- + v_-)dt$ . Вычитая, получаем

$$d(u_+ - u_-) = [\pm a(\varepsilon_+ - \varepsilon_-) + (v_+ - v_-)]dt.$$

Смещения сплошной деформируемой среды являются непрерывными. Поэтому  $u_+ = u_-$ . С учетом этого предыдущее равенство принимает вид

$$\pm a(\varepsilon_+ - \varepsilon_-) + (v_+ - v_-) = 0.$$

Подставив сюда  $\varepsilon = \sigma / \rho a^2$ , получим равенства (10), (11). #

## 10.8. Удар упругого стержня о преграду

Стержень длины  $l$  постоянного поперечного сечения, двигаясь с постоянной скоростью  $v_0$  (на рис.39, 40 - справа налево), сталкивается с преградой.

**Удар стержня об абсолютно жесткую преграду.** Волновая картина, возникающая при этом, показана на рис.39.

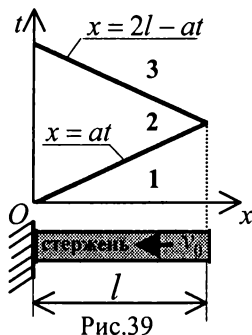


Рис.39

В момент начала соударения стержня с преградой образуется волна сильных разрывов  $x = at$ . В момент времени  $t = l/a$  она достигает противоположного конца стержня и, отразившись от него, превращается в волну сильных разрывов  $x = 2l - at$ .

Эти волны на плоскости  $x, t$  разграничивают три зоны: 1, 2, 3. Напряжение и скорость в них условимся обозначать нижними индексами по номерам зон.

Зона 1. Стержень до соударения. Здесь

$$\sigma_1 = 0, \quad v_1 = -v_0.$$

Зона 2. Стержень в процессе соударения с преградой. Так как преграда абсолютно жесткая, то  $v_2 = 0$ .

Зона 3. Стержень в процессе отскока. На него не действуют никакие внешние силы. Поэтому  $\sigma_3 = 0$ .

Характеристика  $x = at$  является волной сильных разрывов положительного направления. Согласно условию (10)/10.7, на ней

$$(\sigma_2 - \sigma_1) + \rho a(v_2 - v_1) = 0.$$

Отсюда, подставляя известные значения  $\sigma$  и  $v$  в зонах 1, 2, получаем значение напряжения, возникающего в стержне при ударе об абсолютно жесткую преграду,

$$\sigma_2 = -\rho a v_0.$$

Характеристика  $x = 2l - at$  является волной сильных разрывов отрицательного направления. На ней, согласно условию (11)/10.7,

$$(\sigma_3 - \sigma_2) - \rho a(v_3 - v_2) = 0.$$

Отсюда, учитывая известные значения  $\sigma$  и  $v$  в зонах 2, 3, находим скорость отскока

$$v_3 = v_0.$$

Таким образом, скорость отскока упругого стержня от абсолютно жесткой преграды равна скорости, с которой стержень двигался до удара о преграду.

**Соударение стержней.** Короткий стержень ударяется о полубесконечный упругий стержень того же поперечного сечения. На рис.40 показаны соударяющиеся стержни и волны сильных разрывов, возникающие при этом.

Для ударяющего стержня сохраним те же обозначения, что и в предыдущей задаче, а элементы движения стержня-преграды и номера зон в нем будем помечать волнистой чертой над соответствующим символом.

Зоны 1,  $\tilde{1}$  - стержни до соударения. Поэтому

$$v_1 = -v_0, \quad \sigma_1 = 0$$

$$\tilde{v}_1 = 0, \quad \tilde{\sigma}_1 = 0.$$

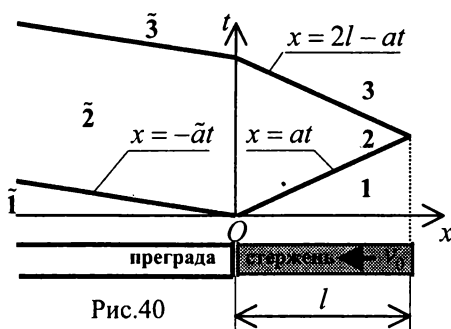
Зоны 2,  $\tilde{2}$  - стержни в процессе соударения. Поэтому

$$\sigma_2 = \tilde{\sigma}_2, \quad v_2 = \tilde{v}_2.$$

Зона 3. Ударяющий стержень отскочил от преграды. Поэтому

$$\sigma_3 = 0.$$

На волнах сильных раз-



рывов положительного  $x = at$  и отрицательного  $x = -at$  направлений,

согласно условиям непрерывности потока импульса (10), (11)/10.7, имеем соответственно

$$\sigma_2 - \sigma_1 + \rho a(v_2 - v_1) = 0, \quad \tilde{\sigma}_2 - \tilde{\sigma}_1 - \tilde{\rho} \tilde{a}(\tilde{v}_2 - \tilde{v}_1) = 0.$$

Подставляя  $v_1 = -v_0$ ,  $\sigma_1 = 0$ ,  $\tilde{v}_1 = 0$ ,  $\tilde{\sigma}_1 = 0$  и учитывая, что  $v_2 = \tilde{v}_2$ ,  $\sigma_2 = \tilde{\sigma}_2$ , находим

$$\sigma_2 = \tilde{\sigma}_2 = -\frac{\rho a \tilde{\rho} \tilde{a} v_0}{\rho a + \tilde{\rho} \tilde{a}}, \quad v_2 = \tilde{v}_2 = -\frac{\rho a v_0}{\rho a + \tilde{\rho} \tilde{a}}.$$

Легко видеть, что напряжения сжатия  $\sigma_2 = \tilde{\sigma}_2$ , возникающие при соударении стержней, одинаково зависят от акустических жесткостей как ударяющего стержня  $\rho a$ , так и стержня-преграды  $\tilde{\rho} \tilde{a}$ .

На волне сильных разрывов  $x = 2l - at$ , как на волне отрицательного направления, согласно условию (11)/10.7, имеем

$$\sigma_3 - \sigma_2 - \rho a(v_3 - v_2) = 0.$$

Решая это уравнение относительно  $v_3$ , с учетом известных значений  $\sigma_2, \sigma_3, v_2$  находим

$$v_3 = \frac{\tilde{\rho} \tilde{a} - \rho a}{\tilde{\rho} \tilde{a} + \rho a} v_0.$$

Из этой формулы следует, что в зависимости от соотношения акустических жесткостей соударяющихся стержней возможны три случая:

1)  $\tilde{\rho} \tilde{a} > \rho a$ . В этом случае  $v_3 > 0$ . Ударяющий стержень отскакивает от преграды;

2)  $\tilde{\rho} \tilde{a} = \rho a$ . В этом случае  $v_3 = 0$ . Ударяющий стержень в состоянии покоя остается «прилипшим» к преграде;

3)  $\tilde{\rho} \tilde{a} < \rho a$ . В этом случае  $v_3 < 0$ . Процесс соударения стержней продолжается до бесконечности.

## 10.9. Продольные колебания стержня

Возьмем упругий стержень длины  $l$  постоянного поперечного сечения и деформируем его по направлению продольной оси статической нагрузкой (например, подвесим его за один конец и прикрепим груз к другому концу) так, чтобы по всей длине стержня возникла одинаковая продольная относительная деформация  $\varepsilon_0$ . В момент начала наблюдения  $t = 0$  стержень мгновенно освобождается от действия на него нагрузки (подвешенный к нему груз мгновенно отцепляется) и стержень начинает свободно – без воздействия на него каких-либо внешних сил – колебаться. Какие движения при этом будет совершать стержень?

Пусть  $x = 0$  - один конец стержня,  $x = l$  - другой его конец и  $u(x, t)$  - продольные смещения поперечных сечений стержня.

Движение стержня описывается уравнением (6)/10.7

$$a^2 u_{,xx} - u_{,tt} = 0, \quad (1)$$

где  $a = \sqrt{E / \rho}$ ,  $E$  - модуль Юнга,  $\rho$  - плотность материала стержня.

Согласно соотношению Коши (3)/10.7, имеем  $u_{,x} = \varepsilon$  - относительная продольная деформация. Поэтому  $u_{,x}(x, 0) = \varepsilon_0$ . Отсюда, интегрируя и полагая, что  $u(0, 0) = 0$ , получаем  $u(x, 0) = \varepsilon_0 x$ . При  $t > 0$  концы стержня свободны от силового воздействия. Поэтому на концах стержня  $\varepsilon = 0$ . Отсюда, используя соотношение Коши (3)/10.7,  $u_{,x}(0, t) = u_{,x}(l, t) = 0$ . В момент начала наблюдения стержень находится в состоянии покоя - он неподвижен. Поэтому  $u_{,t}(x, 0) = 0$ .

Таким образом, решается следующая задача математической физики: требуется найти частное решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$u_{,x}(0, t) = u_{,x}(l, t) = 0 \quad (2)$$

и начальным условиям

$$u(x, 0) = \varepsilon_0 x, \quad u_{,t}(x, 0) = 0. \quad (3)$$

Решение будем искать методом двойного интегрального преобразования: по переменной  $x$  - конечным косинус-преобразованием Фурье, а по переменной  $t$  - преобразованием Лапласа. Это двойное преобразование обладает свойством коммутативности

$$CL[u(x, t)] = LC[u(x, t)].$$

Выполнив над уравнением (1)  $CL$ -преобразование и учитывая граничные (2) и начальные (3) условия, получим

$$-a^2 \omega_n^2 CL[u(x, t)] - p^2 CL[u(x, t)] + pC[\varepsilon_0 x] = 0,$$

где  $\omega_n = n\pi / l$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,

$$CL[u(x, t)] = \varepsilon_0 C[x] p / (p^2 + a^2 \omega_n^2).$$

Выполнив оба обратных преобразования и учитывая при этом, что

$$p / (p^2 + a^2 \omega_n^2) \div \cos a^2 \omega_n^2 t, \quad C[x] = l^2 / 2 \quad \text{при } n = 0,$$

$$C[x] = -2 / \omega_n^2 \quad \text{при } n = 1, 3, 5, \dots, \quad C[x] = 0 \quad \text{при } n = 2, 4, 6, \dots,$$

получаем искомое решение

$$u(x, t) = \varepsilon_0 l \left( \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos a^2 \omega_n^2 t \cos \omega_n x \right).$$

## 10.10. Численная реализация метода характеристик

Возьмем уравнение

$$AU_{,xx} + BU_{,xy} + CU_{,yy} = F.$$

Введением новых переменных  $X = U_{,x}$ ,  $Y = U_{,y}$  оно сводится к эквивалентной системе двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} AX_{,x} + BX_{,y} + CY_{,y} &= F, \\ X_{,y} - Y_{,x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Положим, что коэффициенты  $A, B, C$  и свободный член  $F$  являются заданными функциями вида

$$\left. \begin{aligned} A &= A(x, y, X, Y), B = B(x, y, X, Y), C = C(x, y, X, Y), \\ F &= F(x, y, X, Y). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

С коэффициентами и свободным членом такого вида система уравнений (1) называется *квазилинейной*.

Положим, что в некоторой области  $G$  переменных  $x, y, X, Y$  выполняется неравенство  $B^2 - 4AC > 0$ . В этой области уравнения (1) образуют систему дифференциальных уравнений гиперболического типа.

В параграфе 8.2 были получены дифференциальные уравнения характеристик этой системы

$$dx = p dy, \quad dx = q dy, \quad (3)$$

где

$$p = (B + \sqrt{B^2 - 4AC}) / 2C, \quad q = (B - \sqrt{B^2 - 4AC}) / 2C, \quad (4)$$

и дифференциальные соотношения на них

$$(B - p)dX + CdY = Fdy, \quad (B - q)dX + CdY = Fdy. \quad (5)$$

Краевые задачи уравнений гиперболического типа подразделяются на три типа: *задача Коши*, *задача Гурса* и *смешанная задача*.

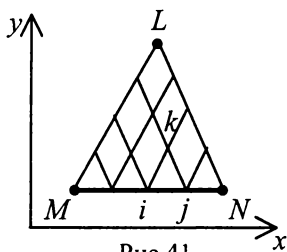


Рис.41

**Задача Коши.** Требуется найти решение системы уравнений (1), если значения функций  $X, Y$  заданы на дуге гладкой кривой  $MN$ , не имеющей характеристических направлений ни в одной своей точке.

Пусть область существования функций  $X, Y$  располагается по одну сторону от кривой  $MN$  (рис.41). Через концевые точки  $M$  и  $N$  проведем характеристики разных семейств до их пересечения в точке  $L$  со стороны области определения функций  $X, Y$ . В результате чего получится треугольник  $MNL$ . Возьмем



на кривой  $MN$  какое-то конечное число точек, достаточно близко расположенных друг к другу, и, проведя через них характеристики разных семейств, покроем треугольник  $MNL$  сеткой. Вообще говоря, до получения решения задачи квазилинейной системы уравнений провести характеристики не представляется возможным, так как их направления являются функциями искомых величин. Поэтому получаемая сетка является грубо приближительной. Занумеруем точки, называемые *узловыми*, образуемые пересечением характеристик с данной кривой и друг с другом.

Рассмотрим треугольник с вершинами в узловых точках под номерами  $i, j, k$ , одной из сторон которого является отрезок на кривой  $MN$  между двумя соседними узловыми точками  $i, j$ . Значениям величин в рассматриваемых узловых точках условимся приписывать номера этих точек на уровне нижних индексов.

Точки кривой  $MN$  заданы и заданы значения функций  $X, Y$  в этих точках. Поэтому  $x_i, y_i, X_i, Y_i$ ;  $x_j, y_j, X_j, Y_j$  - известные величины. По формулам (2), (4) вычисляются значения  $A, B, C, F, p, q$  в точках  $i, j$ .

Записав уравнения (3) на отрезках характеристик  $ik$  и  $jk$  в конечных разностях, получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} x_k - x_i &= p_i (y_k - y_i), \\ x_k - x_j &= q_j (y_k - y_j) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -p_i \\ 1 & -q_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i - p_i y_i \\ x_j - q_j y_j \end{bmatrix}, \quad (6)$$

которая определяет координаты точки  $k$ . Определитель ее основной матрицы  $p_i - q_j \neq 0$ . Поэтому она имеет и притом единственное решение.

Записав соотношения (5) на отрезках характеристик  $ik$  и  $jk$  в конечных разностях, получим систему уравнений

$$\begin{bmatrix} B_i - p_i & C_i \\ B_j - q_j & C_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (B_i - p_i)X_i + C_i Y_i + (y_k - y_i)F_i \\ (B_j - q_j)X_j + C_j Y_j + (y_k - y_j)F_j \end{bmatrix}, \quad (7)$$

которая определяет значения искомых функций  $X, Y$  в точке  $k$ .

Определитель основной матрицы этой системы

$$(B_i - p_i)C_j - (B_j - q_j)C_i \neq 0.$$

Поэтому система (7) имеет и притом единственное решение.

Этим способом может быть рассчитан весь первый, по отношению к дуге  $MN$ , слой точек треугольника  $MNL$ . Аналогично рассчитывается второй слой и все последующие. Последней рассчитывается точка  $L$ . Таким образом установлено, что задача Коши решается в треугольной области, ограниченной кривой, направление которой ни в одной ее точке не совпадает с характеристикой, и характеристиками разных семейств, проходящими через концы этой кривой.

**Задача Гурса** заключается в отыскании решения системы уравнений (1), если значения  $X$  и  $Y$  заданы на двух характеристиках разных семейств, выходящих из одной точки  $M$ . Пусть  $ML$  и  $MQ$  - отрезки характеристик, в точках которых заданы значения функций  $X, Y$  (рис.42). Проведем через точки  $L$  и  $Q$  характеристики разных семейств, в результате чего образуется четырехугольник  $MLPQ$ . Покроем его характеристической сеткой. Расчеты будем выполнять в узлах этой сетки. Первой рассчитывается точка, расположенная по диагонали от точки  $M$  в ячейке, одной из вершин которой является точка  $M$ . Используются те же системы разностных уравнений (6), (7), что и при решении задачи Коши. При этом  $k$  - рассчитываемая точка,  $i, j$  - точки, лежащие слева и справа от точки  $k$ . Расчет остальных

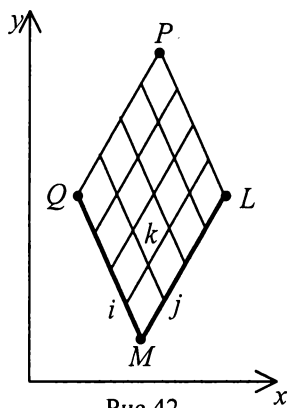


Рис.42

точек может быть таким: двигаясь от первой рассчитанной точки по характеристике  $ML$ , рассчитать поочередно все узловые точки этого слоя. Перейти к следующей характеристике этого же направления и, двигаясь от характеристики  $MQ$ , рассчитать второй слой. И т.д. Последними рассчитываются узловые точки на характеристике  $QP$  при движении от точки  $Q$  к точке  $P$ . Таким образом, задача Гурса решается в четырехугольнике, образуемом характеристиками разных семейств.

**Смешанная задача.** Граничные условия заданы в виде значений функций  $X, Y$  на дуге кривой  $MN$ , которая ни в одной своей точке не имеет характеристического направления, и на отрезке характеристики  $MQ$ . Оба отрезка  $MN, MQ$  выходят из общей точки  $M$  (рис.43).

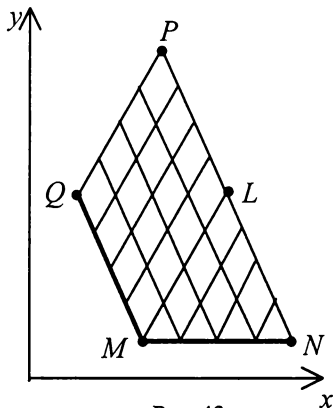


Рис.43

Проведя через точки  $N, Q$  характеристики разных семейств, получим четырехугольник  $MNPQ$ . Покроем его характеристической сеткой. Легко видеть, что вначале решается задача Коши в треугольнике  $MNL$ , а потом - задача Гурса в четырехугольнике  $MLPQ$ .

## Глава 11

### ЗАДАЧИ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

#### 11.1. Классификация задач уравнений эллиптического типа

В декартовых координатах  $x, y$  уравнение в частных производных

$$U_{,xx} + U_{,yy} = -f(x, y), \quad (1)$$

где  $f(x, y)$  - заданная функция, называется *уравнением Пуассона*. В частном случае при  $f(x, y) \equiv 0$  оно называется *уравнением Лапласа*.

Уравнение (1) является уравнением эллиптического типа. Различают три типа задач уравнений эллиптического типа.

**Задача Дирихле.** Требуется в некоторой области  $G$  найти решение уравнения (1), удовлетворяющее заданным на границе  $\Gamma$  этой области значениям искомой функции  $U(x, y)$ . Такое граничное условие имеет вид

$$U(M) = \Omega(M),$$

где  $\Omega(M)$  - заданная функция точек  $M \in \Gamma$ .

**Задача Неймана.** Требуется в некоторой области  $G$  найти решение уравнения (1), удовлетворяющее заданным на границе  $C$  этой области значениям производной искомой функции  $dU/dn$  по направлению нормали к границе  $C$ . Такое граничное условие имеет вид

$$\frac{dU(N)}{dn} = \Phi(N),$$

где  $\Phi(N)$  - заданная функция точек  $N \in C$ .

**Смешанная задача.** Требуется в некоторой области  $G$ , граница которой составлена из кривых  $\Gamma$  и  $C$ , найти решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$U(M) = \Omega(M), \quad \frac{dU(N)}{dn} = \Phi(N),$$

где  $\Omega(M)$ ,  $\Phi(N)$  - заданные функции точек  $M \in \Gamma$ ,  $N \in C$ .

#### 11.2. Статический прогиб прямоугольной мембраны

Прямоугольную мембрану размерами  $a \times b$  поместим в декартовы координаты  $x, y, z$  так, как показано на рис.44.

Обозначим  $w = w(x, y)$  - прогибы мембраны. Нагрузка интенсивно-

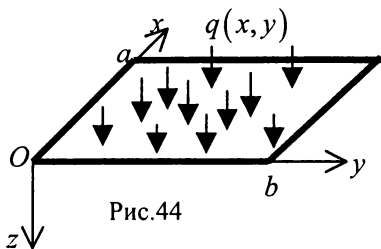


Рис.44

сти  $q(x, y)$  действует перпендикулярно плоскости мембраны.

Положительные значения нагрузки и прогибов направлены в положительную сторону оси  $z$ .

Дифференциальное уравнение статических прогибов мембраны, как частный случай уравнения колебаний (1)/10.2, когда силы инерции проги-

бов пренебрежимо малы, имеет вид

$$w_{,xx} + w_{,yy} = -q(x, y) / s. \quad (1)$$

Это – уравнение Пуассона – уравнение эллиптического типа.

Мембрана закреплена по всему периметру. Поэтому прогибы в точках периметра равны нулю, что выражается равенствами

$$w(0, y) = w(a, y) = w(x, 0) = w(x, b) = 0. \quad (2)$$

Требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (2). Такая задача является задачей Дирихле

Решение будем искать методом конечных синус-преобразований Фурье по обоим независимым переменным  $x, y$ .

Введем обозначения преобразований:  $S_x$  - преобразование по  $x$  и  $\alpha_m = m\pi / a$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) - параметр этого преобразования;  $S_y$  - преобразование по  $y$  и  $\beta_n = n\pi / b$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) - параметр этого преобразования.

Так как

$$\int_0^a \sin \alpha_m x dx \int_0^b \sin \beta_n y f(x, y) dy = \int_0^b \sin \beta_n y dy \int_0^a \sin \alpha_m x f(x, y) dx,$$

то рассматриваемое двойное интегральное преобразование обладает свойством коммутативности  $S_x S_y [w(x, y)] = S_y S_x [w(x, y)]$ .

Выполним над уравнением (2) эти преобразования.

$$S_x S_y [w_{,xx}] + S_x S_y [w_{,yy}] = -S_x S_y [q(x, y)] / s.$$

Изображения производных

$$S_x S_y [w_{,xx}] = S_y \left[ \alpha_m \left( w(0, y) - (-1)^m w(a, y) \right) - \alpha_m^2 S_x [w(x, y)] \right],$$

$$S_x S_y [w_{,yy}] = S_x \left[ \beta_n \left( w(x, 0) - (-1)^n w(x, b) \right) - \beta_n^2 S_y [w(x, y)] \right].$$

Учитывая граничные условия (2), получаем

$$S_x S_y [w_{,xx}] = -\alpha_m^2 S_x S_y [w(x, y)], \quad S_x S_y [w_{,yy}] = -\beta_n^2 S_x S_y [w(x, y)].$$

Подставляя изображения производных в уравнение изображений, на-

ходим изображение искомой функции

$$S_x S_y [w(x, y)] = \frac{1}{s} \frac{S_x S_y [q(x, y)]}{\alpha_m^2 + \beta_n^2}.$$

Или, развернув изображение нагрузки,

$$S_x S_y [w(x, y)] = \frac{1}{s(\alpha_m^2 + \beta_n^2)} \int_0^a \sin \alpha_m \xi d\xi \int_0^b \sin \beta_n \eta q(\xi, \eta) d\eta.$$

Обратные преобразования приводят к искомому решению

$$w(x, y) = \frac{4}{abs} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_m x \sin \beta_n y}{\alpha_m^2 + \beta_n^2} \int_0^a \sin \alpha_m \xi d\xi \int_0^b \sin \beta_n \eta q(\xi, \eta) d\eta. \quad (3)$$

Такой ряд называется *двойным тригонометрическим*.

Положив  $q(x, y) = \delta(x - \xi) \delta(y - \eta)$ , получим функцию Грина

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{4}{abs} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_m x \sin \beta_n y}{\alpha_m^2 + \beta_n^2} \sin \alpha_m \xi \sin \beta_n \eta. \quad (4)$$

Ее физический смысл - прогиб мембраны от единичной сосредоточенной силы, приложенной в точке  $(\xi, \eta)$ .

Прогиб мембраны (3) от произвольной нагрузки  $q(x, y)$  через функцию Грина (4) выражается формулой

$$w(x, y) = \int_0^b d\eta \int_0^a G(x, y, \xi, \eta) q(\xi, \eta) d\xi.$$

### 11.3. Статический прогиб полукруглой мембраны

Применив к уравнению (1)/11.2 лапласиан (1)/9.4 в полярных координатах  $r, \varphi$ , получим уравнение прогибов круглой мембраны

$$w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\varphi\varphi} = -\frac{q(r, \varphi)}{s}. \quad (1)$$

**Полукруглая мембрана** радиуса  $R$  располагается в полярных координатах  $r, \varphi$  так, что занимаемая ею область описывается следующим образом:  $r \in [0, R]$ ,  $\varphi \in [0, \pi]$ .

Примем, что мембрана закреплена по всему периметру. Поэтому

$$w(r, 0) = w(r, \pi) = 0, \quad (2)$$

$$w(R, \varphi) = 0. \quad (3)$$

Решение будем искать по переменной  $r$  - конечным преобразованием Ханкеля, а по переменной  $\varphi$  - конечным синус-преобразованием Фурье.

Так как длина отрезка переменной  $\varphi$  равна  $\pi$ , то параметром синус-преобразования является  $\omega_m = m\pi / \pi = m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ).

Обозначим  $S[w(r, \varphi)] = v(r)$ .

Выполнив над уравнением (1) синус-преобразование, с учетом нулевых граничных условий (2) получим

$$v_{,rr}(r) + \frac{1}{r}v_{,r}(r) - \frac{m^2}{r^2}v(r) = -\frac{1}{s}S[q(r, \varphi)]. \quad (a)$$

Это уравнение Бесселя имеет порядок  $\nu = m$ .

Выполнив над граничным условием (3) синус-преобразование, получим условие (3) в виде

$$v(R) = 0. \quad (б)$$

Граничное условие (б) можно записать в виде  $0v'(R) + 1v(R) = 0$ , что соответствует граничному условию (3)/7.3. Поэтому собственные значения  $\lambda_{mn}$  (здесь  $n = 1, 2, \dots$  - номера собственных значений) являются корнями уравнения (2)/7.4 при  $a = 0$ ,  $b = 1$  и  $\nu = m$ .

$$J_m(\lambda_{mn}R) = 0 \quad m = 1, 2, \dots \quad (в)$$

Выполнив над уравнением (а) преобразование Ханкеля порядка  $\nu = m$  и учитывая граничное условие (б), получаем

$$H_m[v(r)] = H_mS[q(r, \varphi)]/s\lambda_{mn}^2.$$

Обратное преобразование Ханкеля над этим равенством по формуле (3)/7.4 при  $a = 0$ ,  $b = 1$  дает

$$v(r) = \frac{2}{R^2s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_m(\lambda_{mn}r)}{\lambda_{mn}^2 J_{m+1}^2(\lambda_{mn}R)} H_mS[q(r, \varphi)].$$

Здесь использовано соотношение (4)/7.2.

В результате обратного синус-преобразования получаем

$$w(r, \varphi) = \frac{4}{\pi R^2s} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_m(\lambda_{mn}r) \sin m\varphi}{\lambda_{mn}^2 J_{m+1}^2(\lambda_{mn}R)} H_mS[q(r, \varphi)], \quad (4)$$

где  $H_mS[q(r, \varphi)]$ , согласно формул (3)/6.2 и (1)/7.4, имеет виде

$$H_mS[q(r, \varphi)] = \int_0^{\pi} \sin m\theta d\theta \int_0^R J_m(\lambda_{mn}\rho) q(\rho, \theta) \rho d\rho.$$

Приняв  $q(r, \varphi) = \delta(r - \rho) \delta(\varphi - \theta)$ , получим функцию Грина

$$G(r, \varphi, \rho, \theta) = \frac{4}{\pi R^2s} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_m(\lambda_{mn}r) \sin m\varphi}{\lambda_{mn}^2 J_{m+1}^2(\lambda_{mn}R)} \sin m\theta J_m(\lambda_{mn}\rho) \rho, \quad (5)$$

имеющую смысл прогиба полукруглой мембраны от единичной сосредоточенной силы, приложенной в точке  $(\rho, \theta)$ .

Решение (4) через функцию Грина (5) выражается формулой

$$w(r, \varphi) = \int_0^\pi d\theta \int_0^R G(r, \varphi, \rho, \theta) q(\rho, \theta) \rho d\rho. \quad (6)$$

**Круглая мембрана.** Задача о статическом прогибе круглой мембраны, закрепленной по всему контуру, от действия нагрузки, симметричной относительно какого-то диаметра мембраны, вызывающей гладкий в окрестности этого диаметра прогиб, сводится к задаче для полукруглой мембраны, отделяемой диаметром симметрии, со следующими граничными условиями:

$$w(R, \varphi) = 0, \quad w_{,\varphi}(r, 0) = w_{,\varphi}(r, \pi) = 0. \quad (7)$$

Эти условия, с точки зрения классификации задач уравнений эллиптического типа, определяют решаемую задачу как смешанную. Алгоритм ее решения повторяет предыдущую задачу. Отличие заключается в том, что здесь по переменной  $\varphi$  применяется конечное косинус-преобразование. Внося в выражение (4) соответствующие этому изменения, получим решение данной задачи

$$w(r, \varphi) = \frac{4}{\pi R^2 s} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{J_0(\lambda_{0n} r)}{2\lambda_{0n}^2 J_1^2(\lambda_{0n} R)} \int_0^\pi d\theta \int_0^R J_0(\lambda_{0n} \rho) q(\rho, \theta) \rho d\rho + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_m(\lambda_{mn} r) \cos m\varphi}{\lambda_{mn}^2 J_{m+1}^2(\lambda_{mn} R)} \int_0^\pi \cos m\theta d\theta \int_0^R J_m(\lambda_{mn} \rho) q(\rho, \theta) \rho d\rho \right]. \quad (8)$$

Функция Грина в этом случае

$$G(r, \varphi, \rho, \theta) = \frac{4}{\pi R^2 s} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{J_0(\lambda_{0n} r)}{2\lambda_{0n}^2 J_1^2(\lambda_{0n} R)} J_0(\lambda_{0n} \rho) \rho + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_m(\lambda_{mn} r) \cos m\varphi}{\lambda_{mn}^2 J_{m+1}^2(\lambda_{mn} R)} \cos m\theta J_m(\lambda_{mn} \rho) \rho \right] \quad (9)$$

имеет смысл прогиба круглой мембраны от двух единичных сосредоточенных сил, приложенных в точках  $(\rho, \theta)$ ,  $(\rho, 2\pi - \theta)$ .

Формула (6) остается в силе и в этом случае.

## 11.4. Связь аналитических и гармонических функций

**Определение 1.** Вещественная функция  $F(x, y)$  двух вещественных переменных  $x, y$  называется *гармонической* в некоторой области  $G$ , если в каждой точке этой области она имеет непрерывные частные производные

$$F_{,xx}, F_{,yy}, F_{,xy} \text{ и является решением уравнения Лапласа}$$

$$F_{,xx} + F_{,yy} = 0. \quad (1)$$

**Теорема 1.** Вещественная  $u(x, y)$  и мнимая  $v(x, y)$  части произвольной функции  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , аналитической и однозначной в области  $G$ , являются в этой области гармоническими функциями.

**Доказательство.** Вещественная  $u(x, y)$  и мнимая  $v(x, y)$  части аналитической функции удовлетворяют соотношениям Коши-Римана

$$u_{,x} = v_{,y}, \quad v_{,x} = -u_{,y}. \quad (2)$$

Аналитическая функция представима рядом Тейлора. Поэтому уравнения (2) можно дифференцировать по  $x$  и  $y$ . Дифференцируя первое из них по  $x$ , а второе по  $y$ , получаем

$$u_{,xx} = v_{,yx}, \quad v_{,xy} = -u_{,yy} \Rightarrow u_{,xx} + u_{,yy} = 0 \Rightarrow$$

$u(x, y)$  - гармоническая функция.

Аналогично, продифференцировав первое из равенств (2) по  $y$ , а второе - по  $x$ , получим

$$v_{,xx} = -u_{,yx}, \quad u_{,xy} = v_{,yy} \Rightarrow v_{,xx} + v_{,yy} = 0 \Rightarrow$$

$v(x, y)$  - гармоническая функция. #

**Определение 2.** Две гармонические функции  $u, v$ , связанные условиями Коши-Римана (2), называются *сопряженными*.

**Теорема 2.** Для всякой гармонической в односвязной области  $G$  функции  $u(x, y)$  формула

$$v(x, y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} -u_{,y} dx + u_{,x} dy + C, \quad (3)$$

где  $(a, b) \in G$  - фиксированная точка, а  $(x, y) \in G$  - текущая точка, с точностью до произвольного слагаемого  $C$  определяет сопряженную с  $u(x, y)$  гармоническую в  $G$  функцию  $v(x, y)$ .

**Доказательство.** Возьмем криволинейный интеграл

$$I(x, y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} -u_{,y} dx + u_{,x} dy. \quad (a)$$

Так как  $u(x, y)$  - гармоническая функция, то она удовлетворяет уравнению Лапласа

$$u_{,xx} + u_{,yy} = 0 \Leftrightarrow \partial(-u_{,y}) / \partial y = \partial(u_{,x}) / \partial x.$$



Последнее означает, что рассматриваемый интеграл не зависит от пути интегрирования. Запишем его в виде интегралов по отрезкам прямых, параллельных координатным осям,

$$I(x, y) = \int_{(a,b)}^{(x,b)} -u_{,y} dx + \int_{(x,b)}^{(x,y)} u_{,x} dy, \quad I(x, y) = \int_{(a,b)}^{(a,y)} u_{,x} dy + \int_{(a,y)}^{(x,y)} -u_{,y} dx.$$

Отсюда, переходя к определенным интегралам,

$$I(x, y) = \int_a^x -u_{,y}(a, x) dx + \int_b^y u_{,x}(x, y) dy,$$

$$I(x, y) = \int_b^y u_{,x}(a, y) dy + \int_a^x -u_{,y}(x, y) dx.$$

Дифференцируя первое равенство по  $y$ , а второе - по  $x$ , получаем

$$I_{,y} = u_{,x}, \quad I_{,x} = -u_{,y}. \quad (6)$$

Пусть  $v(x, y)$  - функция, сопряженная с  $u(x, y)$ . Тогда  $u, v$  связаны соотношениями (2). Сравнение (2) и (6) дает

$$I_{,x} = v_{,x}, \quad I_{,y} = v_{,y}.$$

Из этих равенств, в результате их интегрирования, следует, что

$$v(x, y) = I(x, y) + C,$$

где  $C$  - произвольная постоянная. Подставив сюда (а), получим (3). #

**Следствие.** Любую гармоническую в односвязной области функцию можно рассматривать как действительную или мнимую часть некоторой аналитической в этой области функции, другая часть которой может быть найдена с точностью до постоянного слагаемого.

Пусть  $x, y$  - прямоугольные декартовы координаты на плоскости  $Z$  и  $u, v$  - прямоугольные декартовы координаты на плоскости  $W$ . Функция  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  комплексной переменной  $z = x + iy$  отображает точки области  $G$  плоскости  $Z$  на точки области  $D$  плоскости  $W$  и задает тем самым преобразование координат  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ . Решив эту систему двух уравнений относительно  $x, y$ , получим функции  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ , которые задают преобразование координат при переходе с плоскости  $W$  на плоскость  $Z$ .

**Теорема 3.** Чтобы преобразования координат при переходе от  $Z$  к  $W$  и, наоборот, при переходе от  $W$  к  $Z$  были взаимно однозначными, необходимо и достаточно, чтобы *определитель-якобиан*  $\det J$  функций  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  во всех точках области  $G$  не был равен нулю:

$$\det J = \begin{vmatrix} u_{,x} & u_{,y} \\ v_{,x} & v_{,y} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (4)$$

**Доказательство.** Пусть  $(x_0, y_0) \in G$ ,  $(u_0, v_0) \in W$  - фиксированные точки такие, что  $f(x_0 + iy_0) = u_0 + iv_0$ . Полные приращения функций  $u, v$  в точке  $(x_0, y_0)$  по формуле Тейлора со вторым порядком точности

$$\Delta u = u_{,x}(x_0, y_0)\Delta x + u_{,y}(x_0, y_0)\Delta y,$$

$$\Delta v = v_{,x}(x_0, y_0)\Delta x + v_{,y}(x_0, y_0)\Delta y.$$

Эти равенства образуют линейную систему алгебраических уравнений

$$\begin{bmatrix} u_{,x}(x_0, y_0) & u_{,y}(x_0, y_0) \\ v_{,x}(x_0, y_0) & v_{,y}(x_0, y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix}, \quad (в)$$

основная матрица которой является якобианом  $J$  функций  $u, v$ .

Пусть (4) выполняется. Тогда система (в) имеет единственное решение  $\Delta x, \Delta y$ . Следовательно, каждой точке  $(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) \in W$  ставится в соответствие единственная точка  $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in G$  и, наоборот, каждой точке  $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in G$  ставится в соответствие единственная точка  $(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) \in W$ . Это и означает, что рассматриваемые преобразования координат взаимно однозначные. #

**Теорема 4.** При отображении области  $G$  комплексной плоскости  $Z$  на область  $D$  комплексной плоскости  $W$ , осуществляемое функцией  $f(z)$  комплексной переменной  $z = x + iy$ , уравнение Лапласа

$$F_{,xx} + F_{,yy} = 0 \quad (5)$$

для функции  $F(x, y)$  переходит в уравнение Лапласа

$$\Phi_{,uu} + \Phi_{,vv} = 0 \quad (6)$$

для функции  $\Phi(u, v)$ , если данное отображение

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

является конформным, а порождаемое им преобразование  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  - взаимно однозначным.

**Доказательство.** Пусть преобразование  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  является взаимно однозначным. Тогда образуемая этими уравнениями система уравнений однозначно разрешима относительно  $x, y$ . Решая эту систему, получим  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ . Подставив эти выражения в функ-

цию  $F(x, y)$ , получим равенство

$$F(x, y) = F[x(u, v), y(u, v)] = \Phi(u, v), \quad (г)$$

из которого видно, каким образом функция  $F(x, y)$  переходит в функцию  $\Phi(u, v)$  при отображении  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ .

По правилу дифференцирования сложной функции многих переменных, дифференцируя равенство (г), находим

$$\begin{aligned} F_{,x} &= \Phi_{,u} u_{,x} + \Phi_{,v} v_{,x}, \\ F_{,xx} &= (F_{,x})_{,u} u_{,x} + (F_{,x})_{,v} v_{,x} = \\ &= (\Phi_{,u} u_{,x} + \Phi_{,v} v_{,x})_{,u} u_{,x} + (\Phi_{,u} u_{,x} + \Phi_{,v} v_{,x})_{,v} v_{,x} = \\ &= \Phi_{,uu} u_{,x}^2 + \Phi_{,vv} v_{,x}^2 + 2\Phi_{,uv} u_{,x} v_{,x} + \\ &\quad + \Phi_{,u} (u_{,xu} u_{,x} + u_{,xv} v_{,x}) + \Phi_{,v} (v_{,xu} u_{,x} + v_{,xv} v_{,x}). \end{aligned}$$

В последних двух слагаемых преобразуем выражения в скобках

$$u_{,xu} = (u_{,x})_{,x} x_{,u} = u_{,xx} x_{,u}, \quad u_{,xv} = (u_{,x})_{,x} x_{,v} = u_{,xx} x_{,v},$$

$$v_{,xu} = (v_{,x})_{,x} x_{,u} = v_{,xx} x_{,u}, \quad v_{,xv} = (v_{,x})_{,x} x_{,v} = v_{,xx} x_{,v};$$

$$x_{,u} u_{,x} = 1, \quad x_{,v} v_{,x} = 1;$$

$$u_{,xu} u_{,x} + u_{,xv} v_{,x} = 2u_{,xx}, \quad v_{,xu} u_{,x} + v_{,xv} v_{,x} = 2v_{,xx}.$$

С учетом этого выражение  $F_{,xx}$  принимает вид

$$F_{,xx} = \Phi_{,uu} u_{,x}^2 + \Phi_{,vv} v_{,x}^2 + 2(\Phi_{,uv} u_{,x} v_{,x} + \Phi_{,u} u_{,xx} + \Phi_{,v} v_{,xx}).$$

Замена индекса дифференцирования  $x$  на  $y$  дает

$$F_{,yy} = \Phi_{,uu} u_{,y}^2 + \Phi_{,vv} v_{,y}^2 + 2(\Phi_{,uv} u_{,y} v_{,y} + \Phi_{,u} u_{,yy} + \Phi_{,v} v_{,yy}).$$

Складывая последние два равенства, получаем

$$\begin{aligned} F_{,xx} + F_{,yy} &= \Phi_{,uu} (u_{,x}^2 + u_{,y}^2) + \Phi_{,vv} (v_{,x}^2 + v_{,y}^2) + \\ &+ 2[\Phi_{,uv} (u_{,x} v_{,x} + u_{,y} v_{,y}) + \Phi_{,u} (u_{,xx} + u_{,yy}) + \Phi_{,v} (v_{,xx} + v_{,yy})]. \end{aligned} \quad (д)$$

Пусть рассматриваемая функция  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  осуществляет конформное отображение. Согласно теореме 2/2.2,  $f(z)$  - аналитическая функция. Поэтому ее действительная  $u$  и мнимая  $v$  части связаны соотношениями Коши-Римана (2). Перемножая их, приходим к равенству

$$u_{,x} v_{,x} + u_{,y} v_{,y} = 0. \quad (е)$$

Согласно теореме 1,  $u, v$  - гармонические функции. Поэтому

$$u_{,xx} + u_{,yy} = 0, \quad v_{,xx} + v_{,yy} = 0. \quad (ж)$$

Возведя соотношения Коши-Римана (2) в квадрат и складывая квадра-

ты производных одинаковых функции, получаем

$$u_{,x}^2 + u_{,y}^2 = v_{,x}^2 + v_{,y}^2 = A(x, y). \quad (и)$$

С учетом (е), (ж), (и) формула (д) принимает вид

$$F_{,xx} + F_{,yy} = (\Phi_{,uu} + \Phi_{,vv}) A(x, y).$$

Подставляя ее в уравнение (5), получаем

$$(\Phi_{,uu} + \Phi_{,vv}) A(x, y) = 0.$$

Функция  $A(x, y)$ , определяемая равенством (и), не равна тождественно нулю (всегда, кроме случая  $f(z) = const$ , чем следует пренебречь как тривиальностью). Поэтому справедливо уравнение (6). #

Теорему 4 называют теоремой о сохранении оператора Лапласа при конформном отображении.

**Замечание.** Если на комплексной плоскости  $Z$  комплексной переменной  $z = x + iy$  введены полярные координаты  $r, \varphi$ :  $z = re^{i\varphi}$ , а на комплексной плоскости  $W$  комплексной переменной  $w = u + iv$  введены полярные координаты  $\rho, \theta$ :  $w = \rho e^{i\theta}$ , то гармоническая в области  $G \in Z$  функция  $U(r, \varphi)$  является решением уравнения

$$U_{,rr} + \frac{1}{r} U_{,r} + \frac{1}{r^2} U_{,\varphi\varphi} = 0 \quad (7)$$

и при конформном отображении преобразуется в функцию  $\Psi(\rho, \theta)$ , удовлетворяющую уравнению

$$\Psi_{,\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \Psi_{,\rho} + \frac{1}{\rho^2} \Psi_{,\theta\theta} = 0 \quad (8)$$

в области  $D \in W$ , на которую функция  $w = f(z)$  отображает  $G \in Z$ .

**Теорема 5.** Если  $\Psi(\rho, \theta)$  - гармоническая функция в односвязной области  $D \in W$  и  $\gamma$  - единичная окружность, целиком лежащая в  $D$ , с центром в начале координат, то значение функции  $\Psi$  в начале координат равно ее среднему значению на окружности  $\gamma$ , т.е.

$$\Psi(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(1, \theta) d\theta. \quad (9)$$

**Доказательство.** Пусть  $\Psi(\rho, \theta)$  - гармоническая функция в односвязной области  $D \in W$ . Согласно следствию теоремы 2, можно найти в  $D$  аналитическую функцию  $q(w)$ , где  $w = \rho e^{i\theta}$ , такую, что  $\Psi(\rho, \theta) = \operatorname{Re} q(w)$ . По формуле интеграла Коши (1)/3.4

$$q(0e^{i0}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{q(w)dw}{w - 0e^{i0}}.$$

По формуле (2)/3.1 вычисления определенного интеграла функции комплексной переменной, когда кривая интегрирования  $\gamma$  задана параметрическим уравнением  $w = 1e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , имеем

$$q(0e^{i0}) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{q(1e^{i\theta})1e^{i\theta}id\theta}{1e^{i\theta} - 0e^{i0}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(1e^{i\theta})d\theta \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re} q(0e^{i0}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} q(1e^{i\theta})d\theta.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\operatorname{Re} q(\rho e^{i\theta}) = \Psi(\rho, \theta) \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} q(0e^{i0}) = \Psi(0, 0), \\ \operatorname{Re} q(1e^{i\theta}) = \Psi(1, \theta), \end{cases}$$

приходим к формуле (9). #

## 11.5. Задача Дирихле для круга

Пусть  $G$  - круг радиуса  $R$  с центром в начале координат комплексной плоскости  $Z$ ,  $\Gamma$  - граница этого круга,  $r, \varphi$  - полярные координаты.

Требуется найти в круге  $G$  частное решение уравнения

$$U_{,rr} + \frac{1}{r}U_{,r} + \frac{1}{r^2}U_{,\varphi\varphi} = 0, \quad (1)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$U(R, \varphi) = \Omega(\varphi), \quad (2)$$

где  $\Omega(\varphi)$  - заданная функция.

Это – задача Дирихле. Решим ее методом конформных отображений.

Функция  $U(r, \varphi)$  является гармонической, так как является решением уравнения Лапласа в полярных координатах (1). Поэтому поставленная задача может быть сформулирована и так: требуется найти функцию  $U(r, \varphi)$ , гармоническую в круге  $G$ , удовлетворяющую граничному условию (2).

Возьмем две комплексные плоскости: плоскость  $Z$  переменной  $z = x + iy = re^{i\varphi}$  и плоскость  $W$  переменной  $w = u + iv = \rho e^{i\theta}$ .

Как установлено в параграфе 2.3, функция

$$w = \lambda \frac{z - z_0}{z - \lambda^2 z_0}, \quad \lambda = \frac{R}{p} > 1, \quad z_0 = pe^{i\alpha}, \quad (3)$$

где  $z_0 \in G$  - фиксированная точка, осуществляет конформное однолистное отображение круга  $G \in Z$  на единичный круг  $D \in W$ , ограниченный окружностью  $\gamma$  с центром в начале координат. Причем точки окружности  $\Gamma$  отображаются на точки окружности  $\gamma$ , а точка  $z_0$ , лежащая внутри окружности  $\Gamma$ , отображается на центр окружности  $\gamma$ .

Запишем функцию (3) в полярных координатах

$$\rho e^{i\theta} = \lambda \frac{re^{i\varphi} - pe^{i\alpha}}{re^{i\varphi} - \lambda^2 pe^{i\alpha}}. \quad (4)$$

Воспользовавшись формулой Эйлера  $e^{i\beta} = \cos \beta + i \sin \beta$ , в равенстве (4) можно разделить действительную и мнимую части и, решив образовавшуюся при этом систему двух уравнений относительно  $r, \varphi$ , получить вещественные функции

$$r = \xi(\rho, \theta), \quad \varphi = \eta(\rho, \theta). \quad (5)$$

При конформном отображении функцией (3), согласно теореме 4/11.4, гармоническая в  $G$  функция  $U(r, \varphi)$  переходит в гармоническую в  $D$  функцию  $\Psi(\rho, \theta)$ . Преобразование  $U$  в  $\Psi$  осуществляется функциями (5) в результате подстановки

$$U(r, \varphi) = U[\xi(\rho, \theta), \eta(\rho, \theta)] = \Psi(\rho, \theta).$$

Отсюда, учитывая, что точки  $(R, \varphi) \in \Gamma$  отображаются на точки  $(1, \theta) \in \gamma$ , а точка  $(p, \alpha) \in G$  отображается на точку  $(0, 0) \in D$ , имеем

$$U(R, \varphi) = \Psi(1, \theta), \quad U(p, \alpha) = \Psi(0, 0). \quad (6)$$

Подставив  $r = R$ ,  $\rho = 1$  в формулу (4), получим функцию, отображающую точки окружности  $\Gamma$  на точки окружности  $\gamma$ ,

$$e^{i\theta} = \lambda \frac{Re^{i\varphi} - pe^{i\alpha}}{Re^{i\varphi} - \lambda^2 pe^{i\alpha}} = \frac{\lambda e^{i(\varphi-\alpha)} - 1}{e^{i(\varphi-\alpha)} - \lambda}.$$

Представив здесь  $e^{i\theta}$ ,  $e^{i(\varphi-\alpha)}$  по формуле Эйлера и отделив действительную и мнимую части, получим вещественные функции

$$\cos \theta = \frac{2\lambda - (\lambda^2 + 1)\cos(\varphi - \alpha)}{1 - 2\lambda \cos(\varphi - \alpha) + \lambda^2}, \quad \sin \theta = -\frac{(\lambda^2 - 1)\sin(\varphi - \alpha)}{1 - 2\lambda \cos(\varphi - \alpha) + \lambda^2},$$

реализующие отображение точек  $(R, \varphi) \in \Gamma$  на точки  $(1, \theta) \in \gamma$ .

Правые части этих равенств обозначим:

$$c(\varphi) = \frac{2\lambda - (\lambda^2 + 1)\cos(\varphi - \alpha)}{1 - 2\lambda\cos(\varphi - \alpha) + \lambda^2}, \quad s(\varphi) = -\frac{(\lambda^2 - 1)\sin(\varphi - \alpha)}{1 - 2\lambda\cos(\varphi - \alpha) + \lambda^2}.$$

Тогда  $\cos\theta = c(\varphi)$ ,  $\sin\theta = s(\varphi)$ . Из этих равенств получаем

$$-\sin\theta d\theta = c'(\varphi)d\varphi \Rightarrow -s(\varphi)d\theta = c'(\varphi)d\varphi \Rightarrow$$

$$d\theta = \frac{\lambda^2 - 1}{1 - 2\lambda\cos(\varphi - \alpha) + \lambda^2} d\varphi. \quad (7)$$

По формуле (9)/1.4

$$\Psi(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(1,\theta) d\theta.$$

Это – интегральное равенство на плоскости  $W$ . Отобразим его при помощи функции (4) на плоскость  $Z$ . Из вышеизложенного ясно, что для этого достаточно в нем выполнить замены по формулам (6), (7). Это дает

$$U(p, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(R, \varphi) \frac{\lambda^2 - 1}{1 - 2\lambda\cos(\varphi - \alpha) + \lambda^2} d\varphi.$$

В этом равенстве выполним следующие преобразования: 1) учтем граничное условие (2), 2) заменим переменную интегрирования  $\varphi$  на  $\zeta$ , 3) подставим  $\lambda = R/p$ , 4) так как  $(p, \alpha) \in G$  – произвольно фиксированная точка, то заменим ее на текущую точку  $(r, \varphi) \in G$ . В результате получим

$$U(r, \varphi) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Omega(\zeta) d\zeta}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\zeta - \varphi)}. \quad (8)$$

Это – искомое решение, называемое *интегралом Пуассона для круга*.

Приняв в нем  $\Omega(\varphi) = \delta(\varphi - \beta)$ , получим функцию Грина

$$G(r, \varphi, \beta) = \frac{1}{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\beta - \varphi)}. \quad (9)$$

Формула (8) через функцию Грина (9) выражается интегралом

$$U(r, \varphi) = \int_0^{2\pi} G(r, \varphi, \beta) \Omega(\beta) d\beta.$$

Решенной задаче можно придать физический смысл.

Например, исследование в круге  $G$  стационарного поля температур  $U(r, \varphi)$  при заданной по контуру круга  $\Gamma$  температуре  $\Omega(\varphi)$ .

Рассмотрим, в частности, стационарное температурное поле  $U(r, \varphi)$  от сосредоточенного потока тепла, когда по всему контуру  $\Gamma$  температура

$\Omega(\varphi)$  равна нулю и только в достаточно малой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $(R, \pi)$  средняя температура равна  $T_0$ .

Если процесс сосредоточенного потока тепла через точку  $(R, \pi)$  таков, что величина  $2\varepsilon T_0$  остается неизменной при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то температура  $\Omega(\varphi)$  по контуру круга  $\Gamma$  адекватно описывается функцией Дирака  $\Omega(\varphi) = T_0 \delta(\varphi - \pi)$ , а поле температур в круге  $G$  описывается формулой, аналогичной формуле (9),

$$T = \frac{T_0}{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\pi - \varphi)}. \quad (10)$$

Построим изотермы температурного поля - его линии уровня.

Перейдем к новым полярным координатам  $\rho, \theta$ , сохраняя направление полярной оси и перенося полюс из центра круга  $O$  в точку  $O_1$  - точку действия сосредоточенного потока тепла. Связь между старыми  $r, \varphi$  и новыми  $\rho, \theta$  координатами определяется по теореме косинусов в треугольнике  $O_1OM$  (рис.45) формулами

$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\pi - \varphi), \quad r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \theta.$$

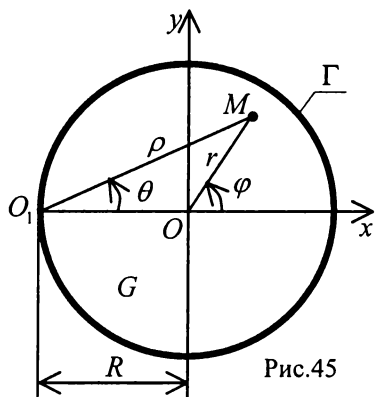


Рис.45

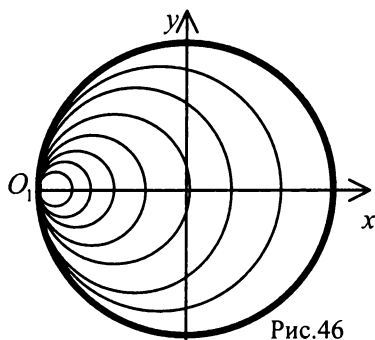


Рис.46

Преобразуя формулу (10) подстановкой этих соотношений, получим поле температур в новых полярных координатах

$$T = \frac{T_0}{2\pi} \frac{2R \cos \theta - \rho}{\rho}, \quad 0 \leq \rho \leq 2R, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Уравнения линий уровня этого поля получаются из этого уравнения, если температуру  $T$  принять постоянной. Положим, что температура на изотерме с заданным значением параметра  $\lambda \in (0, 1]$  равна



$$T_0 \left[ (1/\lambda) - 1 \right] / 2\pi.$$

Тогда предыдущее равенство приводит к уравнению изотермы

$$(T_0 / 2\pi)(2R \cos \theta - \rho) / \rho = (T_0 / 2\pi)(1/\lambda - 1),$$

которое после очевидных упрощений принимает вид

$$\rho = 2\lambda R \cos \theta.$$

При значениях  $\lambda \in (0, 1]$  и при значениях  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$  это уравнение определяет семейство окружностей (рис.46), радиусы которых равны  $\lambda R$ .  $\lambda = 1$  отвечает окружности  $\Gamma$ . Окружности изотерм соприкасаются в точке сосредоточенного потока тепла  $O_1$ , а их центры лежат на оси  $x$ .

### 11.6. Задача Дирихле для полуплоскости

Рассматривается полуплоскость  $\text{Im } z \geq 0$  плоскости  $Z$  комплексной переменной  $z = x + iy$ . Требуется найти в ней частное решение уравнения

$$F_{,xx} + F_{,yy} = 0, \quad (1)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$F(x, 0) = f(x), \quad (2)$$

где  $f(x)$  - заданная функция.

Функция  $F(x, y)$  является гармонической, так как является решением уравнения Лапласа (1). Поэтому поставленная задача может быть сформулирована и так: требуется найти функцию  $F(x, y)$ , гармоническую в полуплоскости  $\text{Im } z \geq 0$ , удовлетворяющую граничному условию (2).

Будем рассматривать две комплексные плоскости: плоскость  $Z$  переменной  $z = x + iy$  и плоскость  $W$  переменной  $w = u + iv = \rho e^{i\theta}$ .

Как установлено в параграфе 2.3, функция

$$w = \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \quad (3)$$

конформно и однолистно отображает полуплоскость  $\text{Im } z \geq 0$  на единичный круг  $D$ , ограниченный единичной окружностью  $\gamma$  с центром в начале координат комплексной плоскости  $W$ . Причем точка  $z_0 = a + ib \in \text{Im } z > 0$  отображается на точку начала координат плоскости  $W$ , а точки границы полуплоскости  $\text{Im } z \geq 0$ , т.е. точки прямой  $y = 0$ , отображаются на точки окружности  $\gamma$ . Запишем функцию (2) в виде

$$\rho e^{i\theta} = \frac{x + iy - (a + ib)}{x + iy - (a - ib)} = \frac{x - a + i(y - b)}{x - a + i(y + b)}. \quad (4)$$

Воспользовавшись формулой Эйлера  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ , отделим в (4) действительную и мнимую части, в результате чего получим систему двух уравнений. Решив ее, получим вещественные функции

$$x = \xi(\rho, \theta), \quad y = \eta(\rho, \theta).$$

При конформном отображении функцией (4), согласно теореме 4/11.4, гармоническая в  $\text{Im } z \geq 0$  функция  $F(x, y)$  переходит в гармоническую в  $D$  функцию  $\Psi(\rho, \theta)$ . Преобразование функции  $F(x, y)$  в функцию  $\Psi(\rho, \theta)$  осуществляется подстановкой

$$F(x, y) = F[\xi(\rho, \theta), \eta(\rho, \theta)] = \Psi(\rho, \theta).$$

Отсюда, учитывая, что точки  $(x, 0) \in \text{Im } z = 0$  - точки прямой  $y = 0$ , отображаются на точки окружности  $\gamma$  - на точки  $(1, \theta) \in \gamma$ , и точка  $(a, b) \in \text{Im } z > 0$  отображается на точку  $(0, 0) \in W$ , имеем

$$F(x, 0) = \Psi(1, \theta), \quad F(a, b) = \Psi(0, 0). \quad (5)$$

Запишем функцию, отображающую точки границы  $y = 0$  на точки окружности  $\gamma$ . Для чего в функции (4) положим  $y = 0$ ,  $\rho = 1$ . В результате получим

$$e^{i\theta} = (x - a - ib) / (x - a + ib).$$

Дифференцируя это равенство по  $x$ , найдем выражение  $d\theta$  через  $x$ :

$$ie^{i\theta} d\theta / dx = [(x - a + ib) - (x - a - ib)] / (x - a + ib)^2 \Rightarrow$$

$$i[(x - a - ib) / (x - a + ib)] d\theta = [i2b / (x - a + ib)^2] dx \Rightarrow$$

$$d\theta = \frac{2b}{(x - a)^2 + b^2} dx. \quad (6)$$

Формула (9)/11.4  $\Psi(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(1, \theta) d\theta$  представляет собой интеграл по окружности  $\gamma$  от функции  $\Psi(\rho, \theta)$ . Отобразим его при помощи

функции (4) на границу полуплоскости  $\text{Im } z \geq 0$ . Очевидно, что для этого достаточно в этом интеграле сделать подстановки (5), (6) и учесть, что интегрированию по окружности  $\gamma$  от 0 до  $2\pi$  соответствует интегрирование по прямой  $y = 0$  от  $-\infty$  до  $\infty$ . Отображение дает

$$F(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, 0) \frac{2b}{(x - a)^2 + b^2} dx.$$

Заменим переменную интегрирования  $x$  на  $\xi$ , а фиксированную точку  $(a, b)$  (так как она выбрана произвольно) заменим на текущую точку  $(x, y)$ . Учтем граничное условие (2). В результате получим

$$F(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi. \quad (7)$$

Это и есть искомое решение, называемое *интегралом Пуассона для полуплоскости*.

Полагая в нем  $f(x) = \delta(x - \xi)$ , получаем функцию Грина

$$G(x, y, \xi) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{(\xi - x)^2 + y^2}. \quad (8)$$

Через нее решение данной задачи (7) выражается интегралом

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, \xi) f(\xi) d\xi.$$

Придадим функции  $F(x, y)$  смысл стационарного температурного поля  $T$  в полуплоскости  $\text{Im } z \geq 0$  и исследуем это поле от действия сосредоточенного источника тепла в точке начала координат, эквивалентного средней температуре  $T_0$  в некоторой достаточно малой окрестности этой точки, полагая, что в остальных точках границы  $y = 0$  температура равна нулю. В этом случае  $f(x) = T_0 \delta(x - 0)$  и

$$T = \frac{T_0}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (9)$$

Перейдем к полярным координатам  $r, \varphi$  с полюсом в начале координат  $x, y$ . Подставив

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

в формулу (9), получим

$$T = \frac{T_0}{\pi} \frac{\sin \varphi}{r}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi. \quad (10)$$

Линии уровня этого поля являются изотермами. Положив, что температура на изотермах равна  $T_0 / 2\pi C$ , где  $C = \text{const} > 0$ , т.е. приняв в (10)

$T_0 \sin \varphi / \pi r = T_0 / 2\pi C$ ,  
получим уравнение изотерм

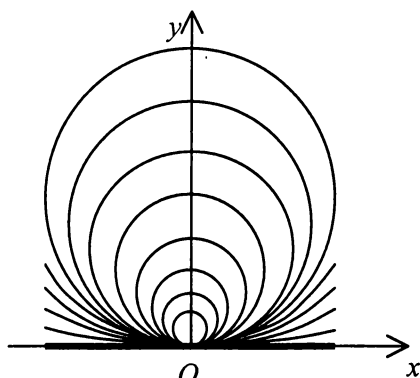


Рис.47

$$r = 2C \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Это уравнение при различных значениях  $C \in (0, \infty)$  определяет семейство окружностей (рис.47), радиусы которых равны  $C$ . Окружности соприкасаются в точке сосредоточенного потока тепла  $O$ , а их центры лежат на положительной полуоси  $y$ .

## 11.7. Уравнения плоского установившегося течения жидкости

Рассматривается установившееся потенциальное течение несжимаемой идеальной жидкости. Пусть  $\mathbf{V} = V_x \mathbf{i} + V_y \mathbf{j} + V_z \mathbf{k}$  - вектор скорости течения в некоторой точке декартовых координат  $x, y, z$ .

Вектор скорости  $\mathbf{V}$  потенциального установившегося течения удовлетворяет уравнениям

$$\text{rot} \mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

$$\text{div} \mathbf{V} = 0. \quad (2)$$

Запишем уравнение (1) в развернутом виде

$$\text{rot} \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = (V_{z,y} - V_{y,z}) \mathbf{i} + (V_{x,z} - V_{z,x}) \mathbf{j} + (V_{y,x} - V_{x,y}) \mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Отсюда имеем

$$V_{z,y} = V_{y,z}; \quad V_{x,z} = V_{z,x}; \quad V_{y,x} = V_{x,y}. \quad (3)$$

Уравнение (2) в развернутой форме

$$V_{x,x} + V_{y,y} + V_{z,z} = 0. \quad (4)$$

При потенциальном течении существует скалярная функция  $u = u(x, y, z)$ , называемая *скалярным потенциалом* скорости, такая, что

$$\mathbf{V} = \text{grad} u. \quad (5)$$

Это равенство равносильно соотношениям

$$V_x = u_{,x}; \quad V_y = u_{,y}; \quad V_z = u_{,z}. \quad (6)$$

Они тождественно удовлетворяют уравнения (3), а уравнение (4) преобразуют к виду

$$u_{,xx} + u_{,yy} + u_{,zz} = 0. \quad (7)$$

Таким образом, потенциальное установившееся течение идеальной несжимаемой жидкости описывается уравнением (7). Соотношения (6) позволяют получить компоненты скорости течения при известном потенциале  $u$ .

Если течение плоское, не зависящее от переменной  $z$ , то уравнение (7) принимает вид

$$u_{,xx} + u_{,yy} = 0. \quad (8)$$

Следовательно, потенциал  $u(x, y)$  плоского установившегося течения несжимаемой идеальной жидкости является гармонической функцией.

Согласно теоремам 1, 2/11.4, можно построить такую аналитическую функцию  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , у которой действительная часть  $u(x, y)$  будет скалярным потенциалом рассматриваемого течения.

**Лемма.** Если  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  - аналитическая в области  $G$  функция комплексной переменной  $z = x + iy$ , то линии уровня

$$u(x, y) = C, \quad v(x, y) = D \quad (C, D = \text{const})$$

в точке их пересечения в области  $G$  являются взаимно ортогональными.

**Доказательство.** Пусть  $f(z) = u + iv$  - аналитическая функция. Тогда ее действительная  $u$  и мнимая  $v$  части связаны соотношениями Коши-Римана

$$u_{,x} = v_{,y}, \quad v_{,x} = -u_{,y}.$$

Известно, что вектор  $\text{grad}u$  является нормальным вектором кривой  $u(x, y) = C$  и, аналогично, вектор  $\text{grad}v$  является нормальным вектором кривой  $v(x, y) = D$ . Подставляя в скалярное произведение этих градиентов

$$\text{grad}u \cdot \text{grad}v = u_{,x} v_{,x} + u_{,y} v_{,y}$$

соотношения Коши-Римана, получаем

$$\text{grad}u \cdot \text{grad}v = 0 \Rightarrow \text{grad}u \perp \text{grad}v.$$

Перпендикулярность нормальных векторов рассматриваемых кривых означает ортогональность самих этих кривых. #

**Определение 1.** Если  $u(x, y)$  - скалярный потенциал течения, то его линии уровня  $u(x, y) = C$  называются *экипотенциальными линиями*; если  $v(x, y)$  - сопряженная с потенциалом  $u(x, y)$  гармоническая функция, то линии уровня этой функции  $v(x, y) = D$  называются *линиями тока*.

Согласно лемме, экипотенциальные линии и линии тока образуют взаимно ортогональные семейства кривых.

**Теорема 1.** В каждой точке потока вектор скорости течения направлен по нормали к экипотенциальной линии, проходящей через эту точку, и направлен по касательной к линии тока, проходящей через ту же точку.

**Доказательство.** Вектор скорости течения  $\mathbf{V} = V_x \mathbf{i} + V_y \mathbf{j}$  и потенциал  $u$  связаны равенством (5). Поэтому, согласно доказанной выше лемме, справедлива теорема. #

**Определение 2.** Область течения, ограниченная двумя близкими ли-

ниями тока  $v(x, y) = D_1$ ,  $v(x, y) = D_2$ , называется *трубкой тока*.

**Определение 3.** Аналитическая функция

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

у которой вещественная часть  $u(x, y)$  является скалярным потенциалом течения, называется *комплексным потенциалом* течения.

**Определение 4.** Вектор скорости течения  $\mathbf{V} = V_x \mathbf{i} + V_y \mathbf{j}$  и комплексная функция  $W = V_x + iV_y$  взаимно однозначно определяют друг друга. Поэтому решение задачи относительно  $\mathbf{V}$  можно заменить задачей относительно  $W$ . Функцию  $W$  условимся называть *комплексной скоростью*.

Принято обозначать: если  $f(z) = u + iv$ , то  $\bar{f}(z) = u - iv$ .

**Теорема 2.** Если  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  - комплексный потенциал течения и  $W = V_x + iV_y$  - комплексная скорость течения, то

$$W = \bar{f}'(z). \quad (9)$$

**Доказательство.** Так как  $f(z) = u + iv$  - аналитическая функция, то для нее справедливы соотношения Коши-Римана и поэтому  $u_{,y} = -v_{,x}$ . Комплексную скорость  $W = V_x + iV_y$ , используя равенства (6), преобразуем к виду  $W = u_{,x} + iu_{,y}$  и подставим сюда  $u_{,y} = -v_{,x}$ . В результате получим  $W = u_{,x} - iv_{,x}$ . По определению производной аналитической функции ее можно найти, дифференцируя по  $x$ :  $\bar{f}'(z) = u_{,x} - iv_{,x}$ . Сравнение последних двух равенств приводит к равенству (9). #

**Следствие.** Компоненты вектора скорости течения и комплексный потенциал связаны равенствами

$$V_x = \operatorname{Re} \bar{f}'(z), \quad V_y = \operatorname{Im} \bar{f}'(z). \quad (10)$$

**Доказательство.** (9)  $\Leftrightarrow V_x + iV_y = \operatorname{Re} \bar{f}'(z) + i \operatorname{Im} \bar{f}'(z) \Rightarrow (10)$ . #

## 11.8. Примеры течений, описываемых комплексным потенциалом

**1. Плоскопараллельное течение.** Пусть дан комплексный потенциал течения  $f(z) = \lambda z$ , где  $\lambda = a + ib$  - комплексное число.

Найдем его действительную  $u$  и мнимую  $v$  части

$$f(z) = (a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay) = u + iv \Rightarrow$$

$$u = ax - by, \quad v = bx + ay.$$

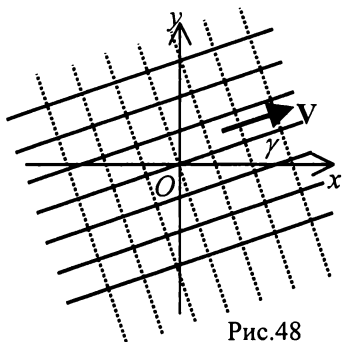


Рис.48

Приравнивая их постоянным  $C, D$ , получим уравнение эквипотенциальных линий  $ax - by = C$  и уравнение линий тока  $bx + ay = D$ . Отсюда (рис.48) эквипотенциальные линии (пунктирные прямые) и линии тока (сплошные прямые) являются прямыми с угловыми коэффициентами соответственно  $k_u = a/b$  и  $k_v = -b/a$ . Так как  $k_u k_v + 1 = 0$ , то эти семейства прямых являются взаимно перпендикулярными. По формулам (9), (10) 11.7

$$W = \bar{f}'(z) = a - ib \Rightarrow V_x = a, V_y = -b \Rightarrow \mathbf{V} = a\mathbf{i} - b\mathbf{j}.$$

Следовательно, скорость потока во всех его точках одинакова, равна  $V = \sqrt{a^2 + b^2}$  и направлена параллельно прямым, представляющим собой линии тока, под углом  $\gamma = \arctan k_v$  к оси  $x$ .

**2. Течение от точечного источника.** Задан комплексный потенциал течения  $f(z) = a \ln z$ , где  $a$  - вещественное число.

Переходя к полярным координатам  $r, \varphi$  через показательную форму комплексного числа  $z = re^{i\varphi}$ , получим

$$f(z) = a \ln(re^{i\varphi}) = a \ln r + ia\varphi = u + iv \Rightarrow u = a \ln r, v = a\varphi.$$

Отсюда следует, что рассматриваемый комплексный потенциал описывает течение, в котором (рис.49) линии тока  $\varphi = \text{const}$  представляют собой лучи, выходящие из начала координат (сплошные линии), а эквипотенциальные линии  $r = \text{const}$  - concentric окружности с центром в начале координат (пунктирные линии). Вектор скорости течения  $\mathbf{V}$  в каждой точке потока направлен по лучу  $\varphi = \text{const}$ , проходящему через эту точку, а абсолютная величина скорости при этом определяется следующим образом:

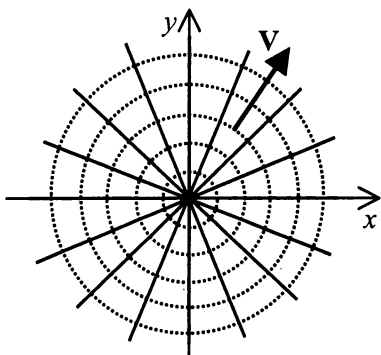


Рис.49

$$V = |\mathbf{V}| = |W| = |\bar{f}'(z)| = |f'(z)| = \left| \frac{a}{z} \right| = \frac{|a|}{|z|} = \frac{|a|}{r}.$$

Точка  $z = 0$  при таком течении называется или *источником*, если

$a > 0$ , или *стоком*, если  $a < 0$ .

**3. Вихревое течение.** Его определяет потенциал  $f(z) = ia \ln z$ , где  $a$  - вещественное число.

Переходя к полярным координатам по формуле  $z = re^{i\varphi}$  и отделяя действительную и мнимую части потенциала, получаем

$$f(z) = ia \ln(re^{i\varphi}) = ia(\ln r + i\varphi) = -a\varphi + ia \ln r = u + iv \Rightarrow$$

$$u = -a\varphi, \quad v = a \ln r.$$

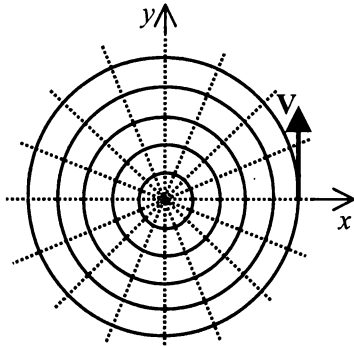


Рис.50

Отсюда следует, что рассматриваемый комплексный потенциал описывает течение (рис.50), в котором эквипотенциальные линии  $\varphi = \text{const}$  представляют собой лучи, выходящие из начала координат (пунктирные линии), а линии тока  $r = \text{const}$  - концентрические окружности с центром в начале координат (сплошные линии). Вектор скорости течения  $\mathbf{V}$  в каждой точке потока направлен по касательной к окружности  $r = \text{const}$ , проходящей через эту точку, а абсолютная величина скорости при этом определяется следующим образом:

$$V = |\mathbf{V}| = |W| = |\bar{f}'(z)| = |f'(z)| = \left| \frac{ia}{z} \right| = \frac{|i||a|}{|z|} = \frac{|a|}{r}.$$

Точка  $z = 0$  при таком течении называется *вихревой точкой*.

**4. Дипольное течение.** Задан комплексный потенциал течения  $f(z) = m/z$ , где  $m$  - вещественное положительное число.

Отделим действительную и мнимую части

$$f(z) = \frac{m}{z} = \frac{m\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{mx - imy}{x^2 + y^2} = u + iv \Rightarrow$$

$$u = \frac{mx}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{my}{x^2 + y^2}.$$

Уравнения эквипотенциальных линий и линий тока

$$\frac{x}{x^2 + y^2} = C, \quad \frac{y}{x^2 + y^2} = D, \quad \text{где } C = \text{const}, D = \text{const}.$$

Полагая  $C = \pm 1/2R_u$ ,  $D = \pm 1/2R_v$ , где  $R_u > 0$ ,  $R_v > 0$ , получаем

$$(x \pm R_u)^2 + y^2 = R_u^2, \quad x^2 + (y \pm R_v)^2 = R_v^2.$$

Отсюда видно (рис.51), что эквипотенциальные линии представляют



собой два семейства окружностей (пунктирные линии), центры одного из которых располагаются на положительной полуоси  $x$ , а центры другого семейства - на отрицательной полуоси  $x$ . Все эти окружности касаются оси  $y$  в точке  $x = 0$ . Следовательно, все эквипотенциальные линии проходят через начало координат.

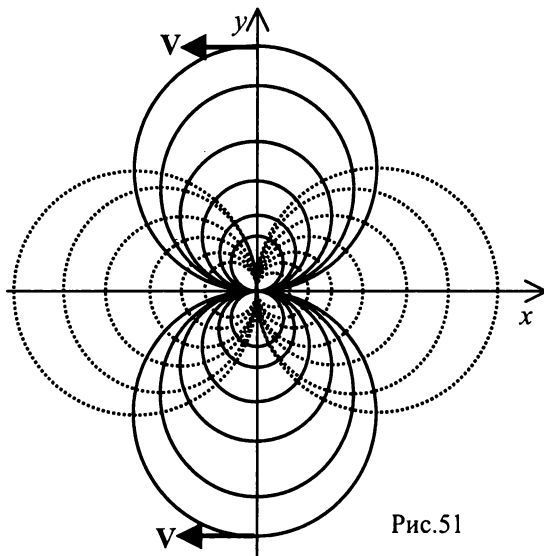


Рис.51

Аналогично, линии тока представляют собой два семейства окружностей (сплошные линии), центры одного из которых располагаются на положительной полуоси  $y$ , а центры другого семейства - на отрицательной полуоси  $x$ . Все эти окружности касаются оси  $x$  в точке  $y = 0$ . Следовательно, все линии тока проходят через начало координат, где вектор скорости течения направлен в положительную сторону оси  $x$ .

Скорость течения

$$V = |W| = |\bar{f}'(z)| = |f'(z)| = \left| -\frac{m}{z^2} \right| = \frac{m}{|z|^2} = \frac{m}{x^2 + y^2} = \frac{m}{r^2},$$

где  $r$  - радиус полярных координат, направлена по касательной к окружностям семейства линий тока и убывает с удалением от точки  $z = 0$ , которая в этом случае называется *диполем мощности  $m$* .

## Часть 4 ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

### Глава 12 ЗАДАЧИ С НЕПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

#### 12.1. Понятие о вариационном исчислении

Вспомним, что функциями называют переменные величины, численные значения которых зависят от того, какие численные значения принимают их аргументы.

*Функционалами* называются переменные величины, численные значения которых зависят от того, какие функции в них используются.

Длина  $l$  дуги плоской кривой  $y = f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  определяется формулой

$$l[f(x)] = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

и зависит от того, какую форму имеет кривая, т.е. какой функцией  $f(x)$  она описывается. Величина  $l[f(x)]$  является функционалом.

Площадь  $A$  поверхности  $z = f(x, y)$  в пределах области  $D$  определяется формулой

$$A[f(x, y)] = \iint_D \sqrt{1 + [f'_x(x, y)]^2 + [f'_y(x, y)]^2} dx dy$$

и зависит от того, какую форму имеет поверхность, т.е. какой функцией  $f(x, y)$  она описывается. Величина  $A[f(x, y)]$  является функционалом.

Задачи, в которых требуется исследовать функционал на максимум или на минимум, называются *вариационными задачами*.

*Вариационное исчисление* изучает методы отыскания максимума и минимума значений функционалов.

**Лемма** (основная лемма вариационного исчисления). Если  $F(x)$  - непрерывная на отрезке  $[a, b]$  функция и для любой непрерывной на этом отрезке функции  $f(x)$  имеет место равенство

$$\int_a^b F(x) f(x) dx = 0, \quad (1)$$

то при любом значении  $x \in [a, b]$   $F(x) = 0$  (2)

**Доказательство.** Пусть  $[\alpha, \beta] \in [a, b]$ ,  $[\alpha, \beta] \neq [a, b]$ . Предположим, что при  $x \in [\alpha, \beta]$   $F(x) \neq 0$ , а при  $x \notin [\alpha, \beta]$   $F(x) = 0$ . Так как  $f(x)$  - любая непрерывная функция, то можно выбрать такую  $f(x)$ , что при  $x \in [\alpha, \beta]$   $\text{sign}[f(x)] = \text{sign}[F(x)]$ . Тогда  $F(x)f(x) > 0$  при  $x \in [\alpha, \beta]$  и  $F(x)f(x) = 0$  при  $x \notin [\alpha, \beta]$ . Разбивая отрезок интегрирования  $[a, b]$  на отрезки  $[a, \alpha]$ ,  $[\alpha, \beta]$ ,  $[\beta, b]$ , получаем

$$\int_a^b F(x)f(x)dx = \int_a^\beta F(x)f(x)dx > 0,$$

что противоречит условию (1). Поэтому справедливо тождество (2). #

**Замечание.** Лемма может быть распространена на функции точек пространств любых других конечных размерностей.

## 12.2. Вариация и ее свойства

**Определение 1.** Переменная величина  $v$  называется *функционалом*, зависящим от функции  $y(x)$ , что записывается в виде  $v[y(x)]$ , если каждой функции  $y(x)$  из некоторого множества  $Y$  допустимых функций по какому-то закону ставится в соответствие определенное число. Функция  $y(x)$  при этом называется *аргументом функционала*.

**Определение 2.** *Вариацией аргумента*  $y(x)$  функционала  $v[y(x)]$  называется разность между двумя функциями  $y_1(x) - y(x)$ , взятых из множества  $Y$ , на котором определен функционал, и обозначается  $\delta y$ , т.е.  $\delta y = y_1(x) - y(x)$ .

**Определение 3.** Кривые  $y = y(x)$  и  $y = y_1(x)$  близки в смысле близости нулевого порядка, если малы  $|y(x) - y_1(x)|$ .

Кривые  $y = y(x)$  и  $y = y_1(x)$  близки в смысле близости первого порядка, если малы  $|y(x) - y_1(x)|$  и  $|y'(x) - y_1'(x)|$ .

Кривые  $y = y(x)$  и  $y = y_1(x)$  близки в смысле близости  $k$ -го порядка, если малы  $|y(x) - y_1(x)|$ ,  $|y'(x) - y_1'(x)|$ , ...,  $|y^{(k)}(x) - y_1^{(k)}(x)|$ .

Таким образом, графики функций  $y(x) \in Y$  и  $y_1(x) \in Y$  могут быть по-разному близки друг другу.

На рис.48 показаны кривые различных *порядков близости*.

а) Близость нулевого порядка: значения функций близки, а значения их производных далеки.

б) Близость первого порядка: значения функций и значения их первых производных близки, а значения вторых производных далеки.

в) Близость второго порядка: значения функций и их производных первого и второго порядков близки.

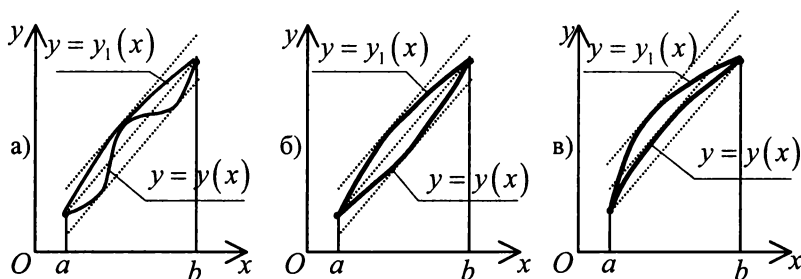


Рис.52

**Определение 4.** Функционал  $v[y(x)]$ , определенный на множестве  $Y$ , называется *непрерывным* при  $y_0(x) \in Y$  в смысле близости  $k$ -го порядка, если для как угодно малого наперед заданного числа  $\varepsilon > 0$  можно подобрать число  $\delta > 0$  такое, что для всех  $y(x) \in Y$ , удовлетворяющих неравенствам

$$|y(x) - y_0(x)| < \delta, \quad |y'(x) - y_0'(x)| < \delta, \dots, \quad |y^{(k)}(x) - y_0^{(k)}(x)| < \delta,$$

выполняется неравенство

$$|v[y(x)] - v[y_0(x)]| < \varepsilon.$$

**Определение 5.** *Линейным* называется функционал, обозначаемый  $L[y(x)]$ , обладающий следующими двумя свойствами:

$$L[\lambda y(x)] = \lambda L[y(x)] \text{ - однородность,}$$

$$L[y_1(x) + y_2(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)] \text{ - аддитивность.}$$

Пример линейного функционала

$$L[y(x)] = \int_a^b [y(x) \sin x + y'(x) \cos x] dx.$$

**Обратим внимание,** что если  $L[y(x), \delta y]$  - линейный относительно  $\delta y$  функционал, то

$$L[y(x), \lambda \delta y] = \lambda L[y(x), \delta y],$$

$$L[y(x), \delta y_1 + \delta y_2] = L[y(x), \delta y_1] + L[y(x), \delta y_2].$$

**Определение 6.** Величина  $\Delta v = v[y(x) + \delta y] - v[y(x)]$  называется *приращением функционала*.

Далее рассматриваются только такие функционалы, приращения которых  $\Delta v$  можно представить в виде суммы двух функционалов

$$\Delta v = L[y(x), \delta y] + Q[y(x), \delta y],$$

из которых  $L[y(x), \delta y]$  - линейный относительно  $\delta y$  функционал и  $Q[y(x), \delta y]$  - нелинейный относительно  $\delta y$  функционал. При этом нелинейная часть приращения обладает следующим свойством:

$$\lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{Q[y(x), \delta y]}{\delta y} = 0.$$

**Определение 7.** Линейная относительно  $\delta y$  часть приращения функционала  $v[y(x)]$  называется *вариацией функционала* и обозначается  $\delta v$ .

$$\delta v = L[y(x), \delta y].$$

**Теорема 1.** Вариация функционала определяется формулой

$$\delta v = \left. \frac{\partial v[y(x) + \lambda \delta y]}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} \quad (1)$$

**Доказательство.** Возьмем функционал  $v[y(x)]$ . Дадим его аргументу  $y(x)$  приращение  $\lambda \delta y$ . Функционал получает приращение

$$\Delta v = v[y(x) + \lambda \delta y] - v[y(x)].$$

Согласно принятому условию, это приращение является суммой линейного и нелинейного относительно  $\delta y$  функционалов

$$\Delta v = L[y(x), \lambda \delta y] + Q[y(x), \lambda \delta y].$$

При рассмотрении предела при  $\Delta \lambda \rightarrow 0$  и  $\lambda = 0$  можно вместо  $\Delta \lambda \rightarrow 0$  принять  $\lambda \rightarrow 0$ . Учитывая это при отыскании производной  $\partial v / \partial \lambda$  при  $\lambda = 0$ , получаем

$$\begin{aligned} \partial v[y(x) + \lambda \delta y] / \partial \lambda \Big|_{\lambda=0} &= \lim_{\Delta \lambda \rightarrow 0} (\Delta v / \Delta \lambda) \Big|_{\lambda=0} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (\Delta v / \lambda) = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} (L[y(x), \lambda \delta y] / \lambda) + \lim_{\lambda \rightarrow 0} (Q[y(x), \lambda \delta y] / \lambda). \end{aligned} \quad (a)$$

Используя свойство однородности линейного относительно  $\delta y$  функ-

ционала, получаем

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (L[y(x), \lambda \delta y] / \lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (\lambda L[y(x), \delta y] / \lambda) = L[y(x), \delta y]. \quad (б)$$

Так как  $\lambda \rightarrow 0$ , то  $\lambda \delta y \rightarrow 0$ . На этом основании можно заменить  $\lambda \rightarrow 0$  на  $\delta y \rightarrow 0$ . Учитывая это и используя свойство нелинейной части приращения функционала, имеем

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (Q[y(x), \lambda \delta y] / \lambda) = \lim_{\delta y \rightarrow 0} (Q[y(x), \lambda \delta y] / \delta y) = 0. \quad (в)$$

Подстановка (б), (в) в (а) и определение 7, приводят к (1). #

**Определение 8.** Функционал  $v[y(x)]$  на кривой  $y = y_0(x) \in Y$  достигает *максимума*, если на любой другой кривой  $y = y(x) \in Y$ , близкой к кривой  $y = y_0(x)$ , его значение  $v[y(x)]$  не больше значения  $v[y_0(x)]$ , т.е.  $v[y(x)] \leq v[y_0(x)]$ .

Функционал  $v[y(x)]$  на кривой  $y = y_0(x) \in Y$  достигает *минимума*, если на любой другой кривой  $y = y(x) \in Y$ , близкой к кривой  $y = y_0(x)$ , его значение  $v[y(x)]$  не меньше значения  $v[y_0(x)]$ , т.е.  $v[y(x)] \geq v[y_0(x)]$ .

Различают *сильные* и *слабые экстремумы* функционалов.

**Определение 9.** Если функционал  $v[y(x)]$  достигает экстремума на кривой  $y = y_0(x) \in Y$  по отношению ко всем кривым  $y = y(x) \in Y$ , близким к кривой  $y = y_0(x)$  в смысле близости нулевого порядка, то такой экстремум называется *сильным*.

Если функционал  $v[y(x)]$  достигает экстремума на кривой  $y = y_0(x) \in Y$  по отношению ко всем кривым  $y = y(x) \in Y$ , близким к кривой  $y = y_0(x)$  в смысле близости первого порядка, то такой экстремум называется *слабым*.

Сильный экстремум достигается на всем множестве  $N$  близких кривых, а слабый экстремум достигается на кривых, если кривые нулевого порядка близости из множества  $N$  исключить. Поэтому если имеет место сильный экстремум, то давно достигается и слабый. Наоборот - не обязательно.

**Теорема 2.** Если функционал  $v[y(x)]$ , имеющий вариацию  $\delta v$ , достигает экстремума на кривой  $y = y_0(x)$  из множества  $Y$  кривых, на кото-

ром определен функционал, то при  $y_0(x)$   $\delta v = 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $v[y_0(x)]$  - экстремальное значение функционала. Тогда функционал  $v[y_0(x) + \lambda \delta y]$  является функцией  $f(\lambda)$  параметра  $\lambda$ :  $f(\lambda) = v[y_0(x) + \lambda \delta y]$ . Эта функция при  $\lambda = 0$  достигает экстремума. Согласно необходимому условию экстремума этой функции,  $f'(0) = 0$ . Поэтому, имея в виду формулу (1),

$$0 = f'(0) = \partial v[y_0(x) + \lambda \delta y] / \partial \lambda \Big|_{\lambda=0} = \delta v[y_0(x)]. \#$$

**Теорема 3.** Производные вариации функции  $y(x)$  равны вариациям производных этой функции, т.е.

$$(\delta y)' = \delta y', \quad (\delta y)'' = \delta y'', \dots, (\delta y)^{(k)} = \delta y^{(k)}.$$

**Доказательство.** По определению 2

$$\delta y = y_1(x) - y(x) \Rightarrow (\delta y)' = y_1'(x) - y'(x) \Rightarrow (\delta y)' = \delta y'.$$

Аналогично производные высших порядков. #

**Замечание.** Все определения и теоремы этого параграфа почти без изменения могут быть распространены на функционалы, зависящие от нескольких функций одной переменной, и на функционалы, зависящие от одной или нескольких функций многих переменных.

В частности,  $\delta z = z_1(x, y) - z(x, y)$  есть вариация аргумента  $z(x, y)$ ,  $\Delta v = v[z(x, y) + \delta z] - v[z(x, y)]$  - приращение функционала  $v[z(x, y)]$ , а вариация такого функционала определяется формулой

$$\delta v = \frac{\partial v[z(x, y) + \lambda \delta z]}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0}. \quad (2)$$

### 12.3. Функционал от одной функции одной переменной

Функционал такого типа в общем случае имеет вид

$$v[y(x)] = \int_a^b F[x, y(x), y'(x)] dx. \quad (1)$$

Полагая, что все допустимые функции  $y(x) \in Y$  на концах отрезка  $[a, b]$  принимают одинаковые значения (рис.49), исследуем этот функционал на экстремум. Это значит, что найдем функцию  $y(x)$ , при подстановке

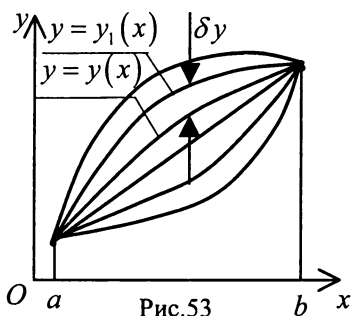


Рис. 53

которой в подынтегральное выражение (1) функционал  $v[y(x)]$  принимает экстремальное значение. При этом будем полагать, что все функции  $y(x)$  из множества  $Y$  допустимых функций, на которых ищется экстремум, удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$\delta y = 0 \quad \text{при} \quad x = a, \quad x = b. \quad (2)$$

Пусть  $y_1(x) \in Y$  - функция, близ-

кая к  $y(x) \in Y$ , а переменная  $\lambda$  принимает два значения: 0 и 1. Функция

$$f(x, \lambda) = y(x) + \lambda[y_1(x) - y(x)] = y(x) + \lambda \delta y$$

представляет собой одновременно обе функции  $y(x)$ ,  $y_1(x)$ , так как

$$f(x, 0) = y(x), \quad f(x, 1) = y_1(x).$$

Функция  $f(x, \lambda)$  принадлежит множеству  $Y$ . Поэтому в формуле (1) можно заменить  $y(x)$  на  $f(x, \lambda) = y(x) + \lambda \delta y$ . Это дает

$$v[y(x) + \lambda \delta y] = \int_a^b F[x, f(x, \lambda), f'_x(x, \lambda)] dx.$$

Вариация функционала определяется формулой (1)/12.2. Согласно этому,

$$\delta v = \left. \frac{\partial v[y(x) + \lambda \delta y]}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = \left. \int_a^b \frac{\partial F[x, f(x, \lambda), f'_x(x, \lambda)]}{\partial \lambda} dx \right|_{\lambda=0} \quad (3)$$

По правилу отыскания производной сложной функции многих промежуточных переменных получаем

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial F}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{\partial F}{\partial f'_x} \frac{\partial f'_x}{\partial \lambda}$$

или, учитывая, что

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda} = \delta y, \quad f'_x = y'(x) + \lambda \delta y', \quad \frac{\partial f'_x}{\partial \lambda} = \delta y',$$

имеем

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{\partial F}{\partial f} \delta y + \frac{\partial F}{\partial f'_x} \delta y'.$$

Подставляя это выражение в формулу (3) и учитывая, что

$$f(x, 0) = y(x), \quad f'_x(x, 0) = y'(x),$$



получаем

$$\delta v = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx.$$

Рассмотрим интеграл от второго слагаемого.

Будем интегрировать его по частям. Полагая при этом

$$u = \frac{\partial F}{\partial y'}, \quad dv = \delta y' dx = (\delta y)' dx \Rightarrow du = \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) dx, \quad v = \delta y$$

и учитывая граничные условия (2), получаем

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx = \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx = - \int_a^b \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx.$$

С учетом этого формула вариации функционала принимает вид

$$\delta v = \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx.$$

Согласно теореме 2/12.2, необходимое условие существования экстремума рассматриваемого функционала выражается уравнением

$$\delta v = \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx = 0,$$

которое, если воспользоваться основной леммой вариационного исчисления (роль функции  $F(x)$  и произвольной функции  $f(x)$  из леммы здесь выполняют соответственно выражение в квадратных скобках и вариация  $\delta y$ ), приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0, \quad (4)$$

называемому *уравнением Эйлера*.

Так как  $F = F[x, y(x), y'(x)]$ , то

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'} y''.$$

С учетом этого уравнение Эйлера преобразуется к виду

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'} y'' = 0. \quad (5)$$

**Определение.** Экстремум функционала (1) с граничными условиями (2) может реализовываться на интегральных кривых уравнения Эйлера. Эти кривые называются *экстремальми*.

**Обратим внимание,** что уравнение  $\delta v = 0$  является необходимым условием экстремума функционала и позволяет только отыскать экстремаль -

кривую, на которой функционал может принять, а может и не принять экстремальное значение. Наличие экстремума на полученной экстремали и его вид (максимум или минимум) устанавливаются с помощью достаточных условий экстремума функционала, которые в данном курсе не рассматриваются.

**Пример 1.** Найти экстремаль функционала

$$I[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx.$$

**Решение.** Здесь  $F = F(y')$ . Поэтому уравнение (4) имеет вид

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y'} = C = \text{const}.$$

Подставляя  $F = \sqrt{1 + (y')^2}$ , получаем

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y'} \sqrt{1 + (y')^2} = C \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C.$$

Это - дифференциальное уравнение экстремали. Решая его относительно  $y'$ , получаем

$$y'(x) = k, \text{ где } k = \sqrt{C^2 / (1 - C^2)}.$$

Интегрируя это уравнение, находим уравнение экстремали  $y = kx + b$ , где  $b = \text{const}$ ,

которое представляет собой уравнение семейства прямых.

Рассмотренный функционал определяет длину дуги кривой. Поэтому геометрический смысл решенной задачи заключается в том, что наименьшее расстояние между двумя точками на плоскости будет по прямой, соединяющей эти точки.

**Пример 2.** Найти экстремаль функционала

$$A[y(x)] = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx.$$

**Решение.** Здесь подынтегральная функция  $y\sqrt{1 + (y')^2}$  имеет вид  $F(y, y')$ , поэтому  $\partial^2 F / \partial x \partial y' = 0$ . Вследствие чего уравнение Эйлера в форме (5) может быть преобразовано к виду

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'} y'' = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \left( F - \frac{\partial F}{\partial y'} y' \right) = 0.$$

Проверим, что действительно из первого уравнения при умножении его на  $y'$ , следует второе.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( F - \frac{\partial F}{\partial y'} y' \right) &= \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} (y')^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'} y' y'' - \frac{\partial F}{\partial y'} y'' = \\ &= \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'} y'' \right) y'. \end{aligned}$$

Следовательно, первый интеграл уравнения Эйлера будет

$$\begin{aligned} F - \frac{\partial F}{\partial y'} y' &= C_1 \Rightarrow y \sqrt{1 + (y')^2} - y (y')^2 / \sqrt{1 + (y')^2} = C_1 \Rightarrow \\ y &= C_1 \sqrt{1 + (y')^2}. \end{aligned}$$

Полученное уравнение решается подстановкой  $y'(x) = \sinh t$ , в результате которой приходим к равенству

$$y[x(t)] = C_1 \cosh t.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \sinh t &= y'(x) = y'(t) t'(x) = (C_1 \cosh t)' t'(x) \Rightarrow \\ \sinh t &= (C_1 \sinh t) t'(x) \Rightarrow dx = C_1 dt \Rightarrow x = C_1 t + C_2 \Rightarrow \\ t &= (x - C_2) / C_1. \end{aligned}$$

Подставляя  $t$  в  $y[x(t)]$ , получаем уравнение экстремали

$$y = C_1 \cosh[(x - C_2) / C_1].$$

Это уравнение семейства кривых, называемых *цепными линиями*.

Рассмотренный функционал является формулой площади поверхности вращения кривой  $y = y(x)$  вокруг оси  $x$ . Можно доказать, что его экстремум на цепных линиях является минимумом. Следовательно, геометрический смысл решенной задачи заключается в следующем: площадь поверхности, полученная вращением вокруг оси  $x$  цепной линии, проходящей через две данные точки на координатной плоскости  $x, y$ , будет наименьшей по сравнению с любыми другими линиями, проходящими через те же две точки. Поверхности, получаемые вращением цепных линий, называются *катеноидами*.

**Пример 3. Задача о брахистохроне.** Ее постановка с предложением получить решение была опубликована в 1696 г. Иоганном Бернулли. Считается, что с нее началось вариационное исчисление.

Требуется найти кривую  $y = y(x)$ , соединяющую заданные точки  $O(0,0)$  и  $A(a,b)$  (рис.50), при движении по которой под действием силы тяжести материальная точка скатится из точки  $O$  в точку  $A$  в кратчайшее время. Силами трения и сопротивления среды пренебречь.

**Решение.** Г. Галлилеем установлен закон, согласно которому скорость

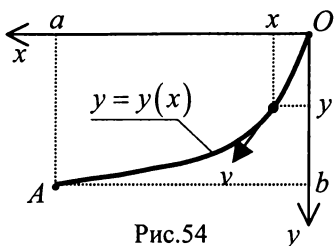


Рис.54

тела  $v$ , направленная по касательной к траектории его движения, при движении под действием силы тяжести без учета сил трения и сопротивления среды не зависит от формы кривой, по которой тело движется, а зависит лишь от расстояния  $y$ , на которое оно опустится, и определяется формулой

$$v = \sqrt{2gy},$$

где  $g$  - ускорение свободного падения.

Если  $dl$  - дифференциал длины дуги кривой, по которой движется материальная точка, то дифференциал времени будет равен

$$dt = \frac{dl}{v} = \frac{\sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx}{\sqrt{2gy(x)}}.$$

Интегрируя  $dt$  по  $x$  в пределах от  $0$  до  $a$ , получим время движения материальной точки из точки  $O(0,0)$  в точку  $A(a,b)$  по кривой  $y = y(x)$ . Этот отрезок времени  $t$  будет определяться функционалом

$$t[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \frac{\sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx}{\sqrt{y(x)}}. \quad (a)$$

Следовательно, требуется найти минимум функционала (а). Его подинтегральная функция имеет вид  $F(y, y')$ . Поэтому, как и в предыдущем примере, первый интеграл уравнения Эйлера будет

$$F - \frac{\partial F}{\partial y'} y' = C_1 \Rightarrow \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2} \sqrt{y}} y' = C_1 \Rightarrow$$

$$y[1 + (y')^2] = 2R, \text{ где } 2R = 1/C_1^2.$$

Это дифференциальное уравнение решим подстановкой

$$y'(x) = \cot(\theta/2). \quad (б)$$

Подставляя, получаем

$$[1 + \cot^2(\theta/2)] y = 2R \Rightarrow y = 2R \sin^2(\theta/2) \Rightarrow$$

$$y = R(1 - \cos \theta). \quad (в)$$

Используя (б) и (в), получаем

$$\begin{aligned}\cot(\theta/2) &= y'(x) = y'(\theta)\theta'(x) = [R(1 - \cos\theta)]'\theta'(x) = \theta'(x)R\sin\theta \Rightarrow \\ 1 &= \theta'(x)2R\sin^2(\theta/2) = \theta'(x)R(1 - \cos\theta) \Rightarrow \\ dx &= R(1 - \cos\theta)d\theta \Rightarrow \\ x &= R(\theta - \sin\theta) + C, \text{ где } C = \text{const.}\end{aligned}\quad (г)$$

По формуле (в) находим, что при  $\theta = 0$   $y = 0$ . По условию задачи при  $y = 0$   $x = 0$ . Следовательно, при  $\theta = 0$   $x = 0$ . Подставляя  $x = 0$ ,  $\theta = 0$  в равенство (г), получаем  $C = 0$ . С учетом этого равенство (г) принимает вид

$$x = R(\theta - \sin\theta). \quad (д)$$

Формулы (в) и (д) образуют систему параметрических уравнений кривой, проходящей через точку  $(0, 0)$ , представляющей собой циклоиду, образованную качением окружности радиуса  $R$ . Значение радиуса  $R$  вычисляется из решения системы уравнений, получаемой в результате подчинения параметрических уравнений (в), (д) условиям в точке  $A(a, b)$ .

Таким образом, экстремалью функционала (а) является циклоида. Можно показать, что на ней реализуется минимум этого функционала и, следовательно, она является искомой кривой.

## 12.4. Функционалы от многих функций одной переменной

Вариационные задачи о функционале от двух функций  $y(x)$ ,  $z(x)$  отражают все особенности решения вариационных задач функционалов, названных в заглавии параграфа.

Исследуем на экстремум функционал

$$v[y(x), z(x)] = \int_a^b F[x, y(x), z(x), y'(x), z'(x)] dx \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\delta y = 0, \quad \delta z = 0 \text{ при } x = a, \quad x = b. \quad (2)$$

означающими, что на плоскости  $x, y$  все кривые  $y = y(x)$  из класса допустимых кривых на концах отрезка  $[a, b]$  проходят через одни и те же точки и на плоскости  $z, x$  все кривые  $z = z(x)$  из класса допустимых кривых на концах отрезка  $[a, b]$  проходят через одни и те же точки.

Предположим, что функция  $z(x)$  является той, на которой функционал (1) принимает экстремальное значение. Тогда остается неизвестной од-

на функция  $y(x)$ . При этом функционал превращается в зависящий от одной варьируемой функции  $y(x)$ . Такой функционал рассматривался в предыдущем параграфе. Функция, на которой реализуется экстремум такого функционала, является решением уравнения Эйлера (4)/12.3.

Предположим теперь, что функция  $y(x)$  является той, на которой реализуется экстремум функционала (1), а функция  $z(x)$  остается неизвестной. Функционал (1) превращается в зависящий от одной варьируемой функции  $z(x)$ , которая является решением уравнения Эйлера (4)/12.3.

Следовательно, каждая из функций  $y(x), z(x)$  должна удовлетворять уравнению Эйлера. Таких уравнений будет два

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial z'} \right) = 0. \quad (3)$$

Эти уравнения образуют систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Решая ее с граничными условиями

$$y(a) = y_1, \quad y(b) = y_2; \quad z(a) = z_1, \quad z(b) = z_2, \quad (4)$$

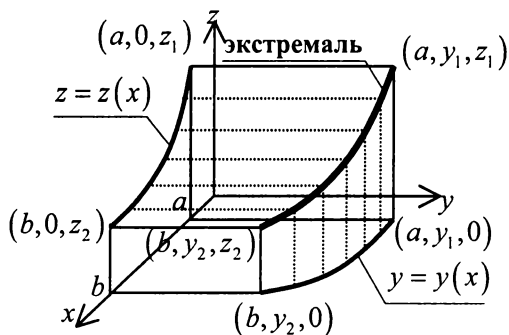


Рис.55

где  $y_1, y_2, z_1, z_2$  - заданные числа, получим две функции  $y(x), z(x)$ , которым в декартовых координатах  $x, y, z$  отвечают два цилиндра с образующими, параллельными осям, соответственно,  $z$  и  $y$ . Пересечение этих цилиндров представляет собой кривую, на которой реализуется экстремум функционала

(1). Эта кривая (рис.51) называется экстремалью функционала. Функции  $y = y(x), z = z(x)$  являются ее параметрическими уравнениями с параметром  $x$ .

**Пример.** Найти экстремаль функционала

$$v[y, z] = \int_0^{\pi/2} \left[ (y')^2 + (z')^2 + 2yz \right] dx,$$

удовлетворяющую граничным условиям

$$y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 1, \quad z(0) = 0, \quad z(\pi/2) = -1.$$

**Решение.** Здесь  $F = (y')^2 + (z')^2 + 2yz$  - подынтегральная функция.

Подставив ее в уравнения (3), получим систему уравнений

$$y'' - z = 0, \quad z'' - y = 0.$$

Ее общее решение

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x,$$

$$z = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x,$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  - произвольные постоянные.

Подчиняя общее решение заданным граничным условиям, получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ e^{\pi/2} & e^{-\pi/2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ e^{\pi/2} & e^{-\pi/2} & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Решая ее, находим  $C_1 = C_2 = C_3 = 0, C_4 = 1$ . Подставляя эти значения в общее решение, получаем искомые уравнения экстремали

$$y = \sin x, \quad z = -\sin x.$$

**Замечание.** Вариационное исчисление широко используется в прикладных науках. В частности, в аналитической механике.

Движение механической системы с  $n$  степенями свободы определяется  $n$  координатами и  $n$  скоростями соответственно

$$q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t); \quad q_1'(t), q_2'(t), \dots, q_n'(t),$$

где  $t$  - текущее время. Наиболее общая формулировка закона движения такой механической системы дается так называемым *принципом наименьшего действия*, называемым также *принципом Гамильтона*. Согласно этому принципу, каждая механическая система с конечным числом степеней свободы характеризуется определенной функцией

$$\Lambda(q_1, q_2, \dots, q_n, q_1', q_2', \dots, q_n'),$$

называемой *функцией Лагранжа*, обладающей таким свойством, что на отрезке времени  $[\alpha, \beta]$  движения механической системы интеграл

$$v[q_1, q_2, \dots, q_n] = \int_{\alpha}^{\beta} \Lambda(q_1, q_2, \dots, q_n, q_1', q_2', \dots, q_n', t) dt$$

принимает наименьшее из возможных значений. Неизвестные функции  $q_1, q_2, \dots, q_n$  при этом определяются из решения системы  $n$  дифференциальных уравнений, аналогичной системе уравнений (3),

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Эта система в механике называется *уравнениями Лагранжа*.

## 12.5. Функционалы от функции нескольких переменных

Это, в частности, функционал

$$v[z(x, y)] = \iint_D F[x, y, z(x, y), z_x'(x, y), z_y'(x, y)] dx dy. \quad (1)$$

Исследуем его на экстремум в предположении, что все функции  $z(x, y)$  из класса допустимых в точках границы  $L$  области  $D$  принимают одни и те же заданные значения (рис.52).

Пусть  $z(x, y)$ ,  $z_1(x, y)$  - функции из множества функций, на одной из которых реализуется экстремум функционала (1). Пусть функция  $z_1(x, y)$  достаточно близка к функции  $z(x, y)$ . Тогда

$$\delta z = z_1(x, y) - z(x, y)$$

есть вариация аргумента функционала.

Принятое граничное условие означает, что

$$\delta z = 0 \quad \text{при } (x, y) \in L. \quad (2)$$

Положим, что переменная  $\lambda$  принимает два значения: 0 и 1.

Возьмем функцию, которая при  $\lambda = 0$  будет равна  $z(x, y)$ , а при  $\lambda = 1$  будет равна  $z_1(x, y)$ . Такая функция имеет вид

$$f(x, y, \lambda) = z(x, y) + \lambda \delta z,$$

где

$$\delta z = z_1(x, y) - z(x, y).$$

Следовательно, эта функция

из класса допустимых для функционала (1) и поэтому является его аргументом, что позволяет записать функционал (1) в виде

$$v[z(x, y) + \lambda \delta z] = \iint_D F[x, y, f(x, y, \lambda), f_x'(x, y, \lambda), f_y'(x, y, \lambda)] dx dy.$$

Применяя формулу (2)/12.2

$$\delta v = \left. \frac{\partial v[z(x, y) + \lambda \delta z]}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0},$$

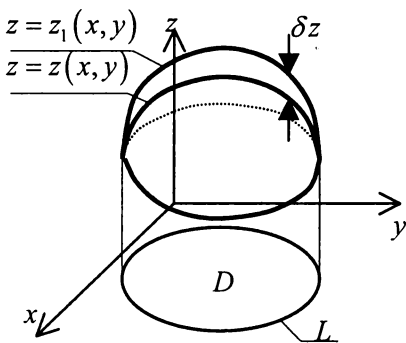


Рис.56



получаем, что вариация функционала (1) определяется формулой

$$\delta v = \iint_D \frac{\partial F[x, y, f(x, y, \lambda), f'_x(x, y, \lambda), f'_y(x, y, \lambda)]}{\partial \lambda} dx dy \Big|_{\lambda=0}$$

Отсюда, обозначив  $p = z'_x$ ,  $q = z'_y$  и учитывая, что

$$f(x, y, \lambda) = z(x, y) + \lambda \delta z,$$

$$f'_x(x, y, \lambda) = p(x, y) + \lambda \delta p,$$

$$f'_y(x, y, \lambda) = q(x, y) + \lambda \delta q,$$

имеем

$$\delta v = \iint_D \left( \frac{\partial F}{\partial z} \delta z + \frac{\partial F}{\partial p} \delta p + \frac{\partial F}{\partial q} \delta q \right) dx dy.$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial p} \delta z \right) = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial p} \right) \right] \delta z + \frac{\partial F}{\partial p} \delta p,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial q} \delta z \right) = \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial q} \right) \right] \delta z + \frac{\partial F}{\partial q} \delta q,$$

то

$$\frac{\partial F}{\partial p} \delta p + \frac{\partial F}{\partial q} \delta q = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial p} \delta z \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial q} \delta z \right) - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial p} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial q} \right) \right] \delta z.$$

С учетом этого

$$\delta v = \iint_D \left\{ \left[ \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial p} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial q} \right) \right] \delta z + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial p} \delta z \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial q} \delta z \right) \right\} dx dy.$$

Формула Грина

$$\iint_D (\delta Q / \partial x - \partial P / \partial y) dx dy = \oint_L P dx + Q dy.$$

Полагая в ней  $P = -(\partial F / \partial q) \delta z$ ,  $Q = (\partial F / \partial p) \delta z$ , получаем

$$\iint_D \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial p} \delta z \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial q} \delta z \right) \right] dx dy = \oint_L \left( -\frac{\partial F}{\partial q} dx + \frac{\partial F}{\partial p} dy \right) \delta z.$$

Согласно граничному условию (2),  $\delta z = 0$  при  $(x, y) \in L$ . Поэтому правая часть этого равенства равна нулю. Следовательно,

$$\iint_D \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial p} \delta z \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial q} \delta z \right) \right] dx dy = 0.$$

С учетом этого вариация функционала принимает вид

$$\delta v = \iint_D \left[ \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial p} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial q} \right) \right] \delta z dx dy. \quad (3)$$

Если функционал (1) на поверхности  $z = z(x, y)$  достигает экстремума, то его вариация (3) при этом равна нулю (теорема 2/12.2). Приравнявая вариацию (3) нулю и применяя основную лемму вариационного исчисления, приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial p} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial q} \right) = 0, \quad (4)$$

называемому *уравнением Остроградского*.

Обратим внимание, что в этом уравнении

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial p} \right) &= \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial p} + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial p} p + \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} \frac{\partial q}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial q} \right) &= \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial q} + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial q} q + \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} \frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned} \right\}$$

Рассмотрим два примера.

**Пример 1.** Требуется найти уравнение Остроградского для функционала

$$v[z(x, y)] = \iint_D \left[ (z_x')^2 + (z_y')^2 \right] dx dy.$$

**Решение.** Здесь  $p = z_x'$ ,  $q = z_y'$ ,  $F = p^2 + q^2 \Rightarrow$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial p} \right) = 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial q} \right) = 2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Подставляя эти результаты в уравнение (4), получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

известное как уравнение Лапласа, и представляющее собой уравнение Остроградского для данного функционала.

**Пример 2.** Для функционала

$$v[z(x, y)] = \iint_D \left[ (z_x')^2 + (z_y')^2 - 2zf(x, y) \right] dx dy$$

уравнение Остроградского является уравнением Пуассона

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -f(x, y).$$

## 12.6. Эквивалентность дифференциальных и вариационных задач

Примеры вариационных задач - задач об экстремумах функционалов, называемых также *задачами о стационарных значениях функционалов*, рассмотренные в параграфах 12.3, 12.4, решались путем сведения их к задачам обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем. Так решались задачи о кратчайшем расстоянии между двумя данными точками, о катеноиде, о брахистохроне, об отыскании экстремали функционала от двух функций одной переменной.

Однако ясно, что эти задачи могли быть решены путем непосредственного поиска функций, на которых функционалы достигают экстремума, без сведения их к дифференциальным задачам.

Сказанное справедливо и для вариационных задач функций многих переменных. На примерах, приводящих экстремумы функционалов к уравнениям Лапласа и Пуассона можно увидеть, что вариационные задачи по отысканию функций  $z(x, y)$ , на которых реализуются экстремумы функционалов  $v[z(x, y)]$  могут быть решены или путем интегрирования дифференциальных уравнений Лапласа и Пуассона, или непосредственно поиском функций  $z(x, y)$ , при которых функционалы  $v[z(x, y)]$  принимают экстремальные значения. Нередко второй способ оказывается предпочтительнее.

Способ непосредственного отыскания функции или нескольких функций экстремального значения функционала называется *прямым вариационным методом*. Одним из таких методов решения вариационных задач является так называемый *метод Ритца*.

## 12.7. Метод Ритца

**Функционал от функции одной независимой переменной.** Идея метода Ритца заключается в том, что значения функционала рассматриваются не на произвольных допустимых функциях данной вариационной задачи, а лишь на линейных комбинациях последовательности функций

$$w_1(x), w_2(x), \dots, w_n(x), \dots,$$

определенным образом выбранных из множества допустимых, т.е. принимается, что аргумент функционала  $y(x)$  имеет вид

$$y(x) \approx \lambda_1 w_1(x) + \lambda_2 w_2(x) + \dots + \lambda_n w_n(x), \quad (1)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  - постоянные.

Функции  $w_k(x)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) называются *пробными* (или *коорди-*

натными), а постоянные  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  - весовыми коэффициентами.

Пробные функции берутся из множества допустимых функций. Для этого они должны, прежде всего, удовлетворять граничным условиям. Например, при граничных условиях  $y(a) = y(b) = 0$  должно быть  $w_k(a) = w_k(b) = 0$  для всех значений  $k = 1, 2, \dots, n$ . В этом случае в качестве пробных можно взять функции

$$w_k(x) = (x-a)(y-b)\varphi_k(x),$$

где  $\varphi_k(x)$  - функции, обеспечивающие другие требования к допустимым функциям, обусловленные особенностями решаемой задачи. Например, непрерывность и дифференцируемость до нужного порядка.

При этих же граничных условиях  $y(a) = y(b) = 0$  в качестве пробных функций можно взять, например, также такие:

$$w_k(x) = \sin\left(k\pi \frac{x-a}{b-a}\right).$$

Пусть требуется найти экстремаль  $y = y(x)$  функционала

$$v[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y') dx,$$

удовлетворяющую граничным условиям

$$y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

Решение будем искать в виде линейной комбинации (1). Подставляя ее в формулу функционала, получаем

$$v[y(x)] \approx \int_a^b F\left[x, \sum_{k=1}^n \lambda_k w_k(x), \sum_{k=1}^n \lambda_k w_k'(x)\right] dx = J(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

где  $J(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  представляет собой функцию  $n$  переменных  $\lambda_k$ .

В том случае, когда линейная комбинация (1) представляет собой экстремаль функционала  $v[y(x)]$ , функция  $J(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  принимает экстремальное значение. Необходимые условия этого определяются системой уравнений

$$\frac{\partial J(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)}{\partial \lambda_k} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Значения весовых коэффициентов  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , полученные из решения этой системы алгебраических уравнений, при подстановке их в линейную комбинацию (1), превратят последнюю, вообще говоря, в приближенную форму искомой экстремали.

При правильном выборе последовательности пробных функций

$\{w_k(x)\}$  линейная комбинация (1) при  $n \rightarrow \infty$  дает точное решение.

**Пример.** Найти решение дифференциального уравнения

$$y'' + x^2 y = x, \quad (\text{а})$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$y(0) = y(1) = 0. \quad (\text{б})$$

**Решение.** Возьмем функционал

$$v[y(x)] = \int_0^1 [(y')^2 - x^2 y^2 + 2xy] dx. \quad (\text{в})$$

$$F = (y')^2 - x^2 y^2 + 2xy \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = -2x^2 y, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y', \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 2y''.$$

При подстановке выражений  $\partial F / \partial y$ ,  $d[\partial F / \partial y'] / dx$  в уравнение Эйлера (4)/12.3, приходим к уравнению (а). Следовательно, поставленную дифференциальную задачу можно решать поиском экстремали  $y = y(x)$  функционала (в) с граничными условиями (б).

Задачу будем решать методом Ритца.

В качестве пробных функций примем

$$w_1 = (1-x)x, \quad w_2 = (1-x)x^2, \dots, \quad w_k = (1-x)x^k, \dots$$

Легко видеть, что они удовлетворяют граничным условиям (б).

Тогда приближенное решение (1) запишется в виде

$$y(x) \approx \lambda_1 (1-x)x + \lambda_2 (1-x)x^2 + \dots + \lambda_n (1-x)x^n.$$

Ограничимся тремя первыми членами

$$y(x) \approx \lambda_1 (1-x)x + \lambda_2 (1-x)x^2 + \lambda_3 (1-x)x^3. \quad (\text{г})$$

Подставив это выражение в функционал (в) и вычислив соответствующие квадратуры, будем иметь

$$v[y(x)] \approx \frac{1}{13860} \{ 4488\lambda_1 + 11\lambda_1 [405\lambda_2 + 2(121\lambda_3 + 105)] + \\ + 1793\lambda_2^2 + 77\lambda_2 (35\lambda_3 + 18) + 4\lambda_3 (290\lambda_3 + 231) \} = J(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

Частные производные функции  $J(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  в этом случае

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda_1} = \frac{1}{1260} (816\lambda_1 + 405\lambda_2 + 242\lambda_3 + 210),$$

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda_2} = \frac{1}{1260} (405\lambda_1 + 326\lambda_2 + 245\lambda_3 + 126),$$

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda_3} = \frac{1}{1260} \left( 242\lambda_1 + 245\lambda_2 + \frac{2320}{11}\lambda_3 + 84 \right).$$

Подчинив эти производные необходимым условиям экстремума (2), получим систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{bmatrix} 816 & 405 & 242 \\ 405 & 326 & 245 \\ 242 & 245 & 2320/11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 210 \\ 126 \\ 84 \end{bmatrix}.$$

Решая ее, находим

$$\lambda_1 = -0,1704225, \quad \lambda_2 = -0,1765719, \quad \lambda_3 = 0,002382.$$

Подставив эти значения в выражение (г), будем иметь

$$y(x) \approx x(1-x)(-0,1704225 - 0,1765719x + 0,002382x^2),$$

что является искомым приближенным решением.

**Задачи математической физики.** Идея метода Ритца остается прежней: приближенное решение вариационной задачи отыскивается в виде линейной комбинации пробных функций.

**Пример.** В прямоугольной области  $D: \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$  требуется найти решение уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -f(x, y), \quad (\text{а})$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$z(0, y) = z(a, y) = 0, \quad z(x, 0) = z(x, b) = 0. \quad (\text{б})$$

**Решение.** Эта дифференциальная задача эквивалентна задаче об экстремуме функционала

$$v[z(x, y)] = \iint_D \left[ (z_x')^2 + (z_y')^2 - 2zf(x, y) \right] dx dy,$$

который с учетом граничных условий (б) можно записать в виде следующего повторного интеграла:

$$v[z(x, y)] = \int_0^a dx \int_0^b \left[ (z_x')^2 + (z_y')^2 - 2zf(x, y) \right] dy. \quad (\text{в})$$

Решение будем искать в виде

$$z(x, y) \approx \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i(x, y). \quad (\text{г})$$

Подставив эту комбинацию в функционал (в), получим его выражение в виде функции весовых коэффициентов

$$\begin{aligned} v[z(x, y)] &\approx \int_0^a dx \int_0^b \left[ \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial w_i}{\partial x} \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial w_i}{\partial y} \right)^2 - 2f(x, y) \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i \right] dy = \\ &= J(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \Leftrightarrow v[z(x, y)] \approx J(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n). \end{aligned}$$

Вследствие полученного равенства экстремум функционала  $v[z(x, y)]$  будет совпадать с экстремумом функции  $J(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ .

Необходимое условие экстремума функции  $J(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  выражается системой уравнений (2), которая, если выполнить дифференцирование, принимает вид

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda_j} = 2 \int_0^a dx \int_0^b \left[ \sum_{i=1}^n \lambda_i \left( \frac{\partial w_i}{\partial x} \frac{\partial w_j}{\partial x} + \frac{\partial w_i}{\partial y} \frac{\partial w_j}{\partial y} \right) - w_j f(x, y) \right] dy = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

или

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \int_0^a dx \int_0^b \left( \frac{\partial w_i}{\partial x} \frac{\partial w_j}{\partial x} + \frac{\partial w_i}{\partial y} \frac{\partial w_j}{\partial y} \right) dy = \int_0^a dx \int_0^b w_j f(x, y) dy, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Отсюда, обозначив

$$\left. \begin{aligned} a_{ij} &= \int_0^a dx \int_0^b \left( \frac{\partial w_i}{\partial x} \frac{\partial w_j}{\partial x} + \frac{\partial w_i}{\partial y} \frac{\partial w_j}{\partial y} \right) dy, \\ b_j &= \int_0^a dx \int_0^b w_j f(x, y) dy, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \right\} \quad (д)$$

приходим к системе уравнений

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \lambda_i = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (е)$$

Решив эту систему относительно  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  и подставив вычисленные значения весовых коэффициентов в линейную комбинацию пробных функций (г), получим, таким образом, приближенное решение уравнения Пуассона (а), удовлетворяющее граничным условиям (б).

Для примера вычислим коэффициенты  $a_{ij}$ , взяв в качестве пробных сравнительно простую последовательность функций

$$w_1 = xy(a-x)(b-y),$$

$$w_2 = w_1 x, \quad w_3 = w_1 y, \quad w_4 = w_1 x^2, \quad w_5 = w_1 xy, \quad w_6 = w_1 y^2, \quad w_7 = w_1 x^3,$$

$$w_8 = w_1 x^2 y, \quad w_9 = w_1 xy^2, \quad w_{10} = w_1 y^3, \quad w_{11} = w_1 x^4, \quad w_{12} = w_1 x^3 y \text{ и т.д.}$$

Ограничимся в комбинации (г) тремя членами

$$z(x, y) \approx xy(a-x)(b-y)(\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 y). \quad (ж)$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \partial w_1 / \partial x &= y(a-2x)(b-y), & \partial w_1 / \partial y &= x(a-x)(b-2y), \\ \partial w_2 / \partial x &= xy(2a-3x), & \partial w_2 / \partial y &= x^2(a-x)(b-2y), \\ \partial w_3 / \partial x &= y^2(a-2x)(b-y), & \partial w_3 / \partial y &= xy(2b-3y). \end{aligned} \right\} \quad (и)$$

Элементы матрицы  $a_{ij}$ , определяемые формулой (д), обладают свойством симметрии  $a_{ij} = a_{ji}$ . Это сокращает объем работы по вычислению основной матрицы системы уравнений (е). В нашем случае вычисляются шесть элементов из девяти  $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23}, a_{33}$ . Остальные три  $a_{21} = a_{12}, a_{31} = a_{13}, a_{32} = a_{23}$ .

Подставив выражения производных (и) в первую формулу (д), после вычисления квадратур будем иметь

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a^3 b^3}{90} \left( a^2 + b^2 \right) & \frac{a^4 b^3}{36} \left( \frac{a^2}{5} + \frac{b}{2} \right) & \frac{a^3 b^4}{36} \left( \frac{a}{2} + \frac{b^2}{5} \right) \\ \frac{a^4 b^3}{36} \left( \frac{a^2}{5} + \frac{b}{2} \right) & \frac{a^5 b^3}{45} \left( \frac{a^2}{7} + 2 \right) & \frac{a^4 b^4}{120} (a + b) \\ \frac{a^3 b^4}{36} \left( \frac{a}{2} + \frac{b^2}{5} \right) & \frac{a^4 b^4}{120} (a + b) & \frac{a^3 b^5}{45} \left( 2 + \frac{b^2}{7} \right) \end{bmatrix}.$$

Функция  $f(x)$  является заданной. Поэтому по второй формуле (д) после подстановки в них  $w_j$  могут быть вычислены свободные члены  $b_j$ .

Найдем решение задачи через функцию Грина  $G(x, y, \xi, \eta)$ . Для этого правую часть уравнения (а) примем в виде произведения функций Дирака  $f(x, y) = \delta(x - \xi) \delta(y - \eta)$ .

Вычисляя при этом  $b_i$  по формуле (д), получаем

$$b_1 = \xi \eta (a - \xi)(b - \eta), \quad b_2 = b_1 \xi, \quad b_3 = b_1 \eta.$$

Систему уравнений (е) в данном случае можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \xi \\ \eta \end{bmatrix}. \quad (\text{и})$$

$$\text{Обозначим: } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ \xi & a_{22} & a_{23} \\ \eta & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & 1 & a_{13} \\ a_{21} & \xi & a_{23} \\ a_{31} & \eta & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \xi \\ a_{31} & a_{32} & \eta \end{vmatrix}.$$

По формулам Крамера



$$\lambda_1 = \frac{b_1 \Delta_1}{\Delta}, \quad \lambda_2 = \frac{b_1 \Delta_2}{\Delta}, \quad \lambda_3 = \frac{b_1 \Delta_3}{\Delta}.$$

Подставив эти выражения в формулу (ж), получим приближенное решение задачи уравнения (а) с граничными условиями (в) в виде формулы Грина

$$G(x, y, \xi, \eta) \approx \frac{1}{\Delta} xy(a-x)(b-y)\xi\eta(a-\xi)(b-\eta)(\Delta_1 + \Delta_2 x + \Delta_3 y)$$

или, обозначив  $M_{ij}$  - минор элемента  $a_{ij}$  основной матрицы системы (и) и разложив определители  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  по элементам столбцов, представляющих собой свободные члены,

$$G(x, y, \xi, \eta) \approx \frac{1}{\Delta} xy(a-x)(b-y)\xi\eta(a-\xi)(b-\eta)[M_{11} - M_{12}x + M_{13}y + (-M_{21} + M_{22}x - M_{23}y)\xi + (M_{31} - M_{32}x + M_{33}y)\eta]. \quad (\text{л})$$

Решение уравнения (а) с произвольной правой частью  $f(x, y)$  имеет вид

$$z(x, y) = \int_0^a d\xi \int_0^b G(x, y, \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\eta.$$

Подставляя выражение (л), получаем

$$z(x, y) \approx \frac{1}{\Delta} xy(a-x)(b-y) \int_0^a \xi(a-\xi) d\xi \int_0^b \eta(b-\eta) [M_{11} - M_{12}x + M_{13}y + (-M_{21} + M_{22}x - M_{23}y)\xi + (M_{31} - M_{32}x + M_{33}y)\eta] f(\xi, \eta) d\eta.$$

В частности, при  $f(x, y) = q = \text{const}$  решение задачи уравнения (а) с граничными условиями (в) получается в виде готовой формулы

$$z(x, y) \approx q \frac{a^3 b^3}{\Delta} xy(a-x)(b-y) \left\{ M_{11} - \frac{1}{2}(M_{21}a - M_{31}b) - \left[ M_{12} - \frac{1}{2}(M_{22}a - M_{32}b) \right] x + \left[ M_{13} - \frac{1}{2}(M_{23}a - M_{33}b) \right] y \right\}.$$

**Оценка точности решения.** Вопросы сходимости приближений, получаемых по методу Рунге, а также оценка степени точности этих приближений являются весьма сложными. На практике для оценки точности результатов, получаемых прямыми вариационными методами, пользуются следующим теоретически несовершенным, но достаточно надежным приемом: вычислив приближенные решения (1) с  $n$  слагаемыми  $y_n(x)$  и с  $n+1$  слагаемыми  $y_{n+1}(x)$ , сравнивают их значения в нескольких точках

отрезка  $[a, b]$ , на котором решается задача. Если в пределах требуемой точности их значения совпадают, то считают, что с требуемой точностью решение рассматриваемой вариационной задачи равно  $y_n(x)$ . Если же значения  $y_n(x)$  и  $y_{n+1}(x)$  хотя бы в некоторых из выбранных точек в пределах заданной точности не совпадают, то вычисляют  $y_{n+2}(x)$  и сравнивают значения  $y_{n+1}(x)$  и  $y_{n+2}(x)$ . Этот процесс продолжается до тех пор, пока значения  $y_{n+k}(x)$  и  $y_{n+k+1}(x)$  не совпадут в пределах заданной точности.

## 12.8. Задачи на условный экстремум

Вариационными задачами на *условный экстремум* называют такие задачи, в которых требуется найти экстремум функционала  $v[y_1, y_2, \dots, y_n]$ , зависящего от нескольких функций  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ , которые связаны между собою уравнениями вида

$$\varphi_k(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad k = 1, 2, \dots, m; \quad m < n.$$

Рассмотрим простейший случай такой задачи.

Исследуем на экстремум функционал

$$v[y(x), z(x)] = \int_a^b F[x, y(x), z(x), y'(x), z'(x)] dx \quad (1)$$

с граничными условиями

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b; \quad z(a) = z_a, \quad z(b) = z_b, \quad (2)$$

где  $y_a, y_b, z_a, z_b$  - заданные числа, принимая, что любая из функций  $y(x)$  из множества допустимых функций и любая из функций  $z(x)$  из множества допустимых функций связаны друг с другом равенством

$$\varphi(y, z) = 0. \quad (3)$$

Граничные условия (2) означают, что все функции  $y(x)$  из множества допустимых функций на концах отрезка  $[a, b]$  принимают одинаковые значения и все функции  $z(x)$  из множества допустимых функций на концах отрезка  $[a, b]$  принимают одинаковые значения. Поэтому

$$\delta y = 0, \quad \delta z = 0 \quad \text{при } x = a \quad \text{и при } x = b.$$

Задача может быть решена двумя методами: методом сведения к безусловному экстремуму и *методом множителя Лагранжа*.

**Метод сведения к безусловному экстремуму.** Уравнение (3) решает-

ся относительно, например,  $z$ . Получается функция  $z = \psi(y)$ . Подстановка этой функции в (1) приводит к функционалу вида  $v[y(x)]$ , который исследуется на безусловный экстремум путем сведения к уравнению Эйлера (4)/12.3 относительно  $y(x)$ .

**Метод множителя Лагранжа.** Вводится функция Лагранжа

$$\Phi = F + \lambda \varphi, \quad (4)$$

где  $\lambda = \lambda(x)$  неизвестная функция, называемая *множителем Лагранжа*.

Функционал

$$v[y, z, \lambda] = \int_a^b \Phi dx \quad (5)$$

исследуется на безусловный экстремум так, как это рассмотрено в параграфе 12.4. При этом задача сводится к трем уравнениям Эйлера, два из которых после подстановки (4) принимают вид

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial z'} \right) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad (6)$$

а третье в результате подстановки (4) преобразуется в уравнение связи (3).

Этого числа уравнений – три – достаточно для отыскания трех неизвестных  $y, z, \lambda$ .

Найденные в результате решения системы уравнений (3)+(6) функции  $y(x), z(x), \lambda(x)$ , при которых функционал  $v[y, z, \lambda]$ , определяемый формулой (5), достигает или максимума, или минимума, будут решениями и исходной задачи, т.е. при этих функциях функционал  $v[y, z]$ , определяемый формулой (1), также будет достигать или максимума, или минимума. Это становится очевидным, если заметить, что при найденных из решения системы уравнений (3)+(6) функциях  $y(x), z(x), \lambda(x)$  функция  $\varphi$ , согласно (3), становится тождественным нулем, в результате чего, как это видно из (4), оказывается, что  $\Phi = F$  и функционал (5) превращается в функционал (1).

Следует, однако, иметь в виду, что могут встретиться такие условия связи искомых функций (3), при которых задача на условный экстремум таким методом не может быть решена.

## ЛИТЕРАТУРА

### **Теория функций комплексной переменной**

- Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. - М.: Наук, 1968. - 648 с.  
*Евграфов М.А.* Аналитические функции. - М.: Наука, 1965. - 423 с.  
*Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1973. - 736 с.  
*Свешников А.Г., Тихонов А.Н.* Теория функций комплексной переменной. - М.: Наука, 1974. - 319 с.  
*Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Том 3. Ч. 2. - М.: Наука, 1969. - 672 с.

### **Интегральные преобразования**

- Беймен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Том 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. - М.: Наука, 1969. - 343 с.  
*Беймен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Том 2. Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций. - М.: Наука, 1970. - 327 с.  
*Брычков Ю.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования обобщенных функций. - М.: Наука, 1977. - 286 с.  
*Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. - М.: Наука, 1971. - 288 с.  
*Диткин В.А., Прудников А.П.* Справочник по операционному исчислению. - М.: Наука, 1965. - 466 с.  
*Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. - М.: Наука, 1974. - 555 с.  
*Davis B.* Integral transforms and their applications. – New-York: Springer-Verlag, 1978.

### **Методы математической физики**

- Араманович И.Г., Левин В.И.* Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1969. - 288 с.  
*Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. - М.: Мир, 1966. - 351 с.  
*Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1976. - 296 с.  
*Бицадзе А.В., Калинин Д.Ф.* Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1985. – 312 с.  
*Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач по математической физике. - М.: Наука, 1972. 686 с.  
*Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1988. - 512 с.  
*Годунов С.К.* Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1979. - 392 с.

*Карлов Н.В., Кириченко Н.А.* Колебания, волны, структуры. – М.: Физматлит, 2003. – 496 с.

*Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Основные дифференциальные уравнения математической физики. – М.: ФМ, 1962. – 767 с.

*Курант Р.* Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с.

*Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. – 848 с.

*Новацкий В.* Динамика сооружений. – М.: Госстройиздат, 1963. – 376 с.

*Смирнов В.И.* Курс высшей математики. – Том 2. – М.: Наука, 1967. – 666 с.

*Смирнов М.М.* Задачи по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1961. – 112 с.

*Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: Физматлит, 2001. 576 с.

*Полянин А.Д., Зайцев В.Ф.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. – М.: Физматлит, 2002. 432 с.

*Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.

*Фаддеев Л.Д.* (ред.). Математическая физика: Энциклопедия. – М.: Большая российская энциклопедия, 1998. – 691 с.

*Фарлоу С.* Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1985. – 383 с.

*Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. – М.: Наука, 1968. – 344 с.

*Butkov E.* Mathematical physics. – Mass.: Addison-Wesley, Reading, 1968.

*Farlow S.J.* Partial differential equations for scientists and engineers. – New-York: John Wiley & Sons, 1982.

### **Вариационное исчисление**

*Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979. – 430 с.

*Гельфанд И.М., Фомин С.В.* Вариационное исчисление. – М.: ФМ, 1961. – 228 с.

*Моисеев Н.Н., Иванов Ю.П., Столярова Е.М.* Методы оптимизации. – М.: Наука, 1978. – 378 с.

*Романенко В.К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. – М. – СПб.: Физматлит, 2000. 344 с.

*Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Том 4. Ч. 1. – М., Наука, 1974. – 336 с.

*Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 424 с.

*Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. – М.: Мир, 1974. – 488 с.

*Rockafellar R.T.* The theory of subgradients and its applications to problem of optimization. – Lecture Notes Univer. of Montreal., 1978.

Учебное пособие

Геннадий Тимофеевич Тарабрин

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Издание подготовлено в авторской редакции  
Дизайн обложки: *Н.С. Романова*

Лицензия ЛР № 0716188 от 01.04.98.  
Подписано к печати 30.03.09. Формат 60х90/16.  
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.  
Усл. 13 п. л. Тираж 500 экз. Заказ № 587.

Издательство Ассоциации строительных вузов (АСВ)  
129337, Москва, Ярославское шоссе, 26, отдел реализации – КМК, оф. 348  
тел., факс: (499)183-56-83, e-mail: [iasv@mgsu.ru](mailto:iasv@mgsu.ru), <http://www.iasv.ru/>

Отпечатано с готового оригинал-макета в ООО ПК «Заураль».  
640022, г. Курган, ул. К. Маркса, 106.  
E-mail: [zpress@zaurai.ru](mailto:zpress@zaurai.ru)

Г. Т. ТАРАБРИН

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

