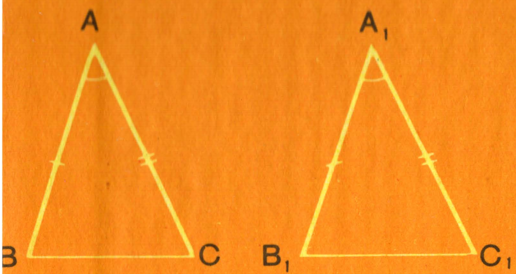
ГЕОМЕТРИЯ

7-9

ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

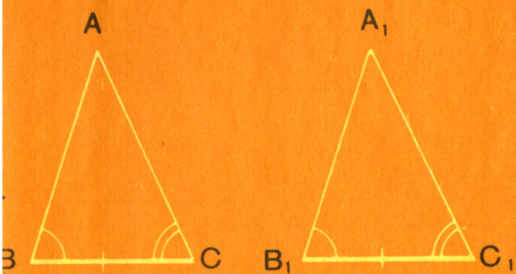


Первый признак

Если

$AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$,

то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

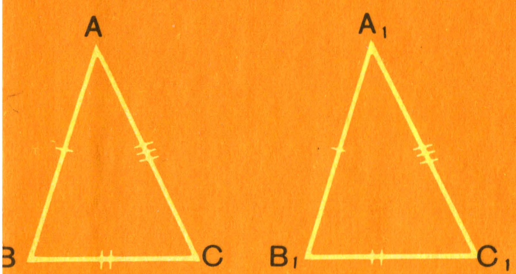


Второй признак

Если

$BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$,

то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$



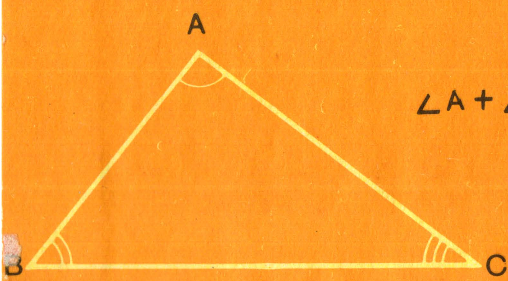
Третий признак

Если

$AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$,

то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

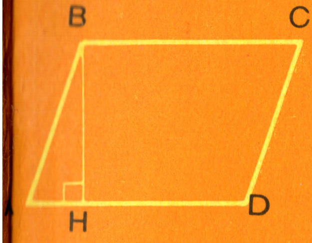
СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА



$\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$

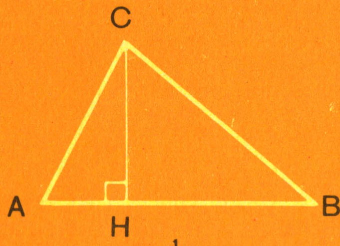
ПЛОЩАДИ

параллелограмма



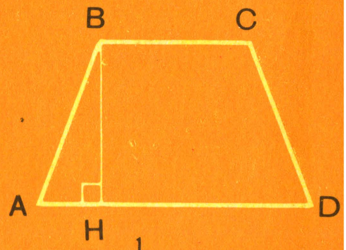
$S = AD \cdot BH$

треугольника



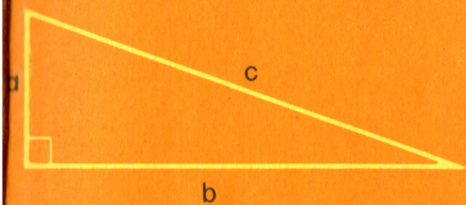
$S = \frac{1}{2} AB \cdot CH$

трапеции



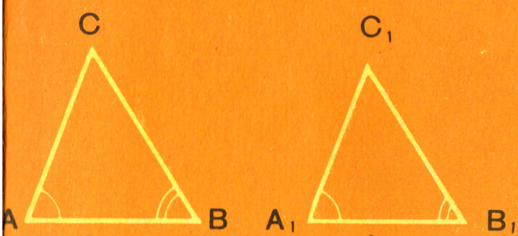
$S = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH$

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА



$c^2 = d^2 + b^2$

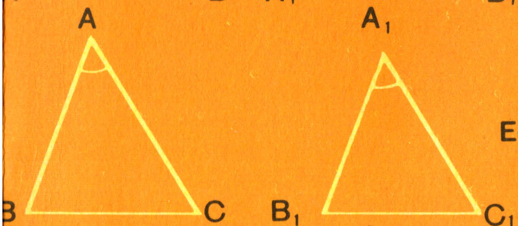
ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ



Первый признак

Если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$,

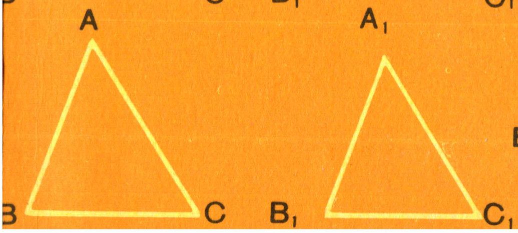
то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$



Второй признак

Если $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, $\angle A = \angle A_1$,

то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$



Третий признак

Если $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$,

то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

ГЕОМЕТРИЯ

УЧЕБНИК ДЛЯ 7—9 КЛАССОВ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Утверждено
Государственным комитетом СССР
по народному образованию

3-е издание

**МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
1992**

ББК 22.151я72
Г36

Авторы:
Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов,
С. Б. Кадомцев, Э. Г. Позняк, И. И. Юдина

Издание подготовлено под научным руководством
академика *А. Н. Тихонова*

Учебник занял первое место на Всесоюзном конкурсе
учебников по математике для средней общеобразовательной школы в 1988 г.

Геометрия: Учеб. для 7—9 кл. сред. шк./Л. С. Атанасян,
Г36 В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.— 3-е изд.— М.: Просвещение, 1992.— 335 с.: ил.— ISBN 5-09-003876-7.

Г $\frac{4306020500-117}{103(03)-92}$ инф. письмо — 92, № 76 **ББК 22.151я72**

ISBN 5-09-003876-7

Дорогие семиклассники!

Вы начинаете изучать новый предмет — геометрию и будете заниматься ею пять лет. Что это такое — геометрия?

Геометрия возникла очень давно, это одна из самых древних наук. В переводе с греческого слово «геометрия» означает «землемерие» («гео» — по-гречески земля, а «метрео» — мерить). Такое название объясняется тем, что зарождение геометрии было связано с различными измерительными работами, которые приходилось выполнять при разметке земельных участков, проведении дорог, строительстве зданий и других сооружений. В результате этой деятельности появились и постепенно накапливались различные правила, связанные с геометрическими измерениями и построениями. Таким образом, геометрия возникла на основе практической деятельности людей и в начале своего развития служила преимущественно практическим целям. В дальнейшем геометрия сформировалась как самостоятельная наука, занимающаяся изучением геометрических фигур.

На уроках математики вы познакомились с некоторыми геометрическими фигурами и представляете себе, что такое точка, прямая, отрезок, луч, угол (рис. 1), как они могут быть расположены относительно друг друга. Вы знакомы с такими фигурами, как треугольник, прямоугольник, круг и др. (рис. 2); знаете, как измеряются отрезки с помощью линейки с миллиметровыми делениями и как измеряются углы с помощью транспортира. Но все это — лишь самые первые геометрические сведения. Теперь вам предстоит расширить и углубить ваши знания о геометрических фигурах. Вы познакомитесь с новыми фигурами и со многими важными и интересными свойствами уже известных вам фигур. Вы узнаете

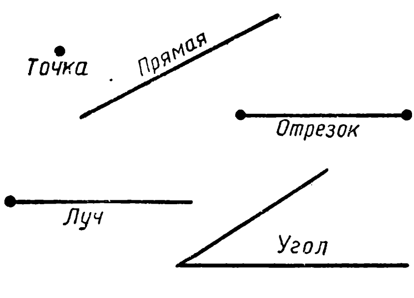


Рис. 1

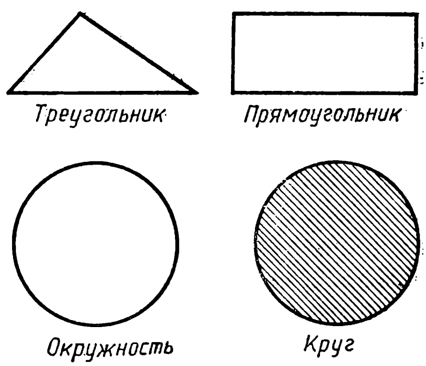
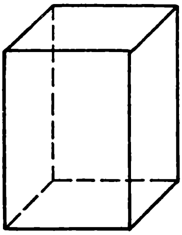
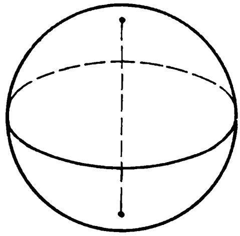


Рис. 2





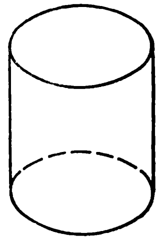


Рис. 3

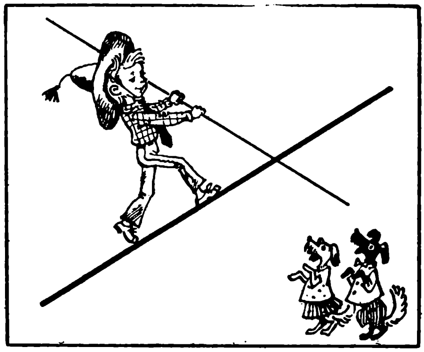
о том, как используются свойства геометрических фигур в практической деятельности. Во всем этом вам поможет учебник и, конечно, учитель.

Школьный курс геометрии делится на *планиметрию* и *стереометрию*. В планиметрии рассматриваются свойства фигур на плоскости. Примерами таких фигур являются отрезки, треугольники, прямоугольники. В стереометрии изучаются свойства фигур в пространстве, таких, как параллелепипед, шар, цилиндр (рис. 3). Мы начнем изучение геометрии с планиметрии.

В процессе изучения геометрии вы будете доказывать теоремы и решать задачи. Что такое «теорема» и что значит «доказать теорему» — об этом вы скоро узнаете. Ну, а что такое задача — вам известно, на уроках математики вы решали разные задачи.

В нашем учебнике геометрии имеется много задач: есть задачи и практические задания к каждому параграфу, дополнительные задачи к каждой главе и, наконец, задачи повышенной трудности. Основными являются задачи к параграфу. Более трудные задачи отмечены звездочкой. В конце книги к задачам даны ответы и указания. Всем, кто проявит интерес к геометрии, кому понравится решать задачи и доказывать теоремы, мы советуем порешать не только обязательные задачи, но и задачи со звездочкой, дополнительные задачи и задачи повышенной трудности. Решать такие задачи непросто, но интересно. Не всегда удается сразу найти решение. В таком случае не унывайте, а проявите терпение и настойчивость. Радость от решения трудной задачи будет вам наградой за упорство. Не бойтесь заглядывать вперед, читать те параграфы, которые еще не проходили в классе. Задавайте вопросы учителю, товарищам, родителям.

Доброго вам пути, девочки и мальчики!



7 класс

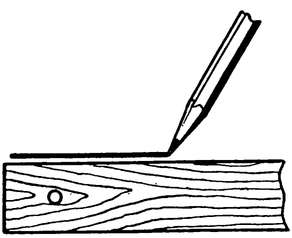
Глава I

НАЧАЛЬНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

§ 1. ПРЯМАЯ И ОТРЕЗОК

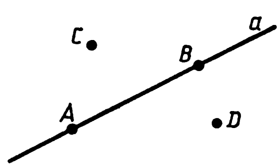
1. Точки, прямые, отрезки. Вспомним, что нам известно о точках и прямых. Мы знаем, что для изображения прямых на чертеже пользуются линейкой (рис. 4), но при этом можно изобразить лишь часть прямой, а всю прямую мы представляем себе простирающейся бесконечно в обе стороны. Обычно прямые обозначают малыми латинскими буквами, а точки — большими латинскими буквами. На рисунке 5 изображены прямая a и точки A, B, C и D. Точки A и B лежат на прямой a, а точки C и D не лежат на этой прямой. Можно сказать, что прямая a проходит через точки A и B, но не проходит через точки C и D. Отметим, что через точки A и B нельзя провести другую прямую, не совпадающую с прямой a. Вообще, *через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну*[1].

Рассмотрим теперь две прямые. Если они имеют общую точку, то говорят, что эти прямые *пересекаются.* На рисунке 6 прямые



Изображение прямой на чертеже

Рис. 4



Прямая и точки

Рис. 5

[1] Здесь и в дальнейшем, говоря «две точки», «три точки», «две прямые» и т. д., будем считать, что эти точки, прямые различны.

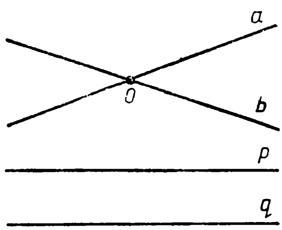


Рис. 6

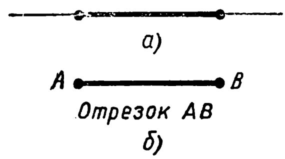


Рис. 7

a и *b* пересекаются в точке *O*, а прямые *p* и *q* не пересекаются. Две прямые не могут иметь двух и более общих точек. В самом деле, если бы две прямые имели две общие точки, то каждая из прямых проходила бы через эти точки. Но через две точки проходит только одна прямая. Таким образом, можно сделать вывод: *две прямые либо имеют только одну общую точку, либо не имеют общих точек.*

Прямую, на которой отмечены две точки, например *A* и *B*, иногда обозначают двумя буквами: *AB* или *BA*. Для краткости вместо слов «точка *A* лежит на прямой *a*» используют запись $A \in a$, а вместо слов «точка *B* не лежит на прямой *a*» — запись $B \notin a$.

На рисунке 7, *а* выделена часть прямой, ограниченная двумя точками. Такая часть прямой называется *отрезком.* Точки, ограничивающие отрезок, называются его *концами.* На рисунке 7, *б* изображен отрезок с концами *A* и *B*. Такой отрезок обозначается *AB* или *BA*. Отрезок *AB* содержит точки *A* и *B* и все точки прямой *AB*, лежащие между *A* и *B*.

2. Провешивание прямой на местности. Решим такую задачу: с помощью данной линейки построить отрезок более длинный, чем сама линейка. С этой целью приложим к листу бумаги линейку, отметим точки *A* и *B* и какую-нибудь точку *C*, лежащую между *A* и *B* (рис. 8, *а*). Затем передвинем линейку вправо так,

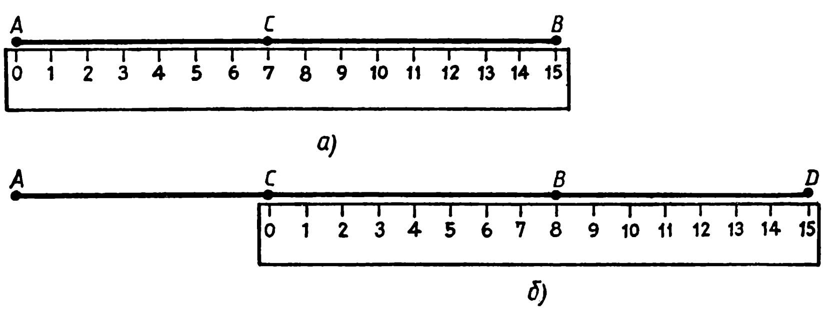


Рис. 8

чтобы ее левый конец оказался около точки C, и отметим точку D около правого конца линейки (рис. 8, *б*). Точки A, B, C и D лежат на одной прямой. Если мы проведем теперь отрезок AB, а затем отрезок BD, то получим отрезок AD, более длинный, чем линейка.

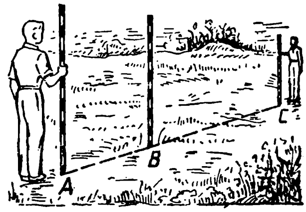


Рис. 9

Аналогичный прием используется для «проведения» длинных отрезков прямых на местности. Этот прием заключается в следующем. Сначала отмечают какие-нибудь точки A и B. Для этой цели используют две вехи — шесты длиной около 2 м, заостренные на одном конце для того, чтобы их можно было воткнуть в землю. Третью веху ставят так, чтобы вехи, стоящие в точках A и B, закрывали ее от наблюдателя, находящегося в точке A (точка C на рисунке 9). Следующую веху ставят так, чтобы ее закрывали вехи, стоящие в точках B и C, и т. д. Ясно, что таким способом можно построить сколь угодно длинный отрезок прямой.

Описанный прием называется *провешиванием* прямой (от слова «веха»). Он широко используется на практике, например при рубке лесных просек, при прокладывании трассы шоссейной или железной дороги, линий высоковольтных передач и т. д.

Практические задания

1. Проведите прямую, обозначьте ее буквой a и отметьте точки A и B, лежащие на этой прямой, и точки P, Q и R, не лежащие на ней. Опишите взаимное расположение точек A, B, P, Q, R и прямой a, используя символы $\in$ и $\notin$.
2. Отметьте три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, и проведите прямые AB, BC и CA.
3. Проведите три прямые так, чтобы каждые две из них пересекались. Обозначьте все точки пересечения этих прямых. Сколько получилось точек? Рассмотрите все возможные случаи.
4. Отметьте точки A, B, C, D так, чтобы точки A, B, C лежали на одной прямой, а точка D не лежала на ней. Через каждые две точки проведите прямую. Сколько получилось прямых?
5. Проведите прямую a и отметьте на ней точки A и B. Отметьте: а) точки M и N, лежащие на отрезке AB; б) точки P и Q, лежащие на прямой a, но не лежащие на отрезке AB; в) точки R и S, не лежащие на прямой a.

Рис. 10

6. Проведите прямую и отметьте на ней три точки. Сколько отрезков получилось на прямой?

7. На рисунке 10 изображена прямая, на ней отмечены точки A, B, C и D. Назовите все отрезки: а) на которых лежит точка C; б) на которых не лежит точка B.

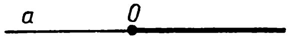
§ 2. ЛУЧ И УГОЛ

3. Луч. Проведем прямую a и отметим на ней точку O (рис. 11). Эта точка разделяет прямую на две части, каждая из которых называется ***лучом, исходящим из точки** O* (на рисунке 11 один из лучей выделен жирной линией). Точка O называется ***началом*** каждого из лучей. Обычно луч обозначают либо малой латинской буквой (например, луч h на рисунке 12, *а*), либо двумя большими латинскими буквами, первая из которых обозначает начало луча, а вторая — какую-нибудь точку на луче (например, луч OA на рисунке 12, *б*).

4. Угол. Напомним, что *угол — это геометрическая фигура, которая состоит из точки и двух лучей, исходящих из этой точки.* Лучи называются ***сторонами угла***, а их общее начало — ***вершиной угла***. На рисунке 13 изображен угол с вершиной O и сторонами h и k. На сторонах отмечены точки A и B. Этот угол обозначают так: $\angle hk$, или $\angle AOB$, или $\angle O$.

Угол называется ***развернутым***, если обе его стороны лежат на одной прямой. Можно сказать, что каждая сторона развернутого угла является продолжением другой стороны. На рисунке 14 изображен развернутый угол с вершиной C и сторонами p и q.

Любой угол разделяет плоскость на две части. Если угол нераз-



Точка О разделяет прямую на два луча

Рис. 11

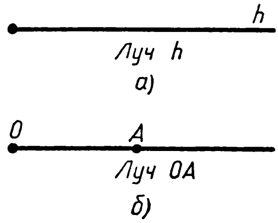


Рис. 12

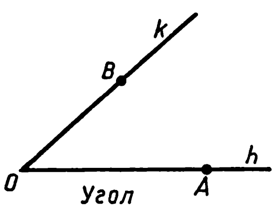
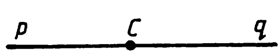


Рис. 13



Развернутый угол

Рис. 14

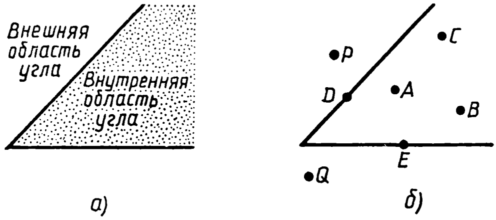


Рис. 15

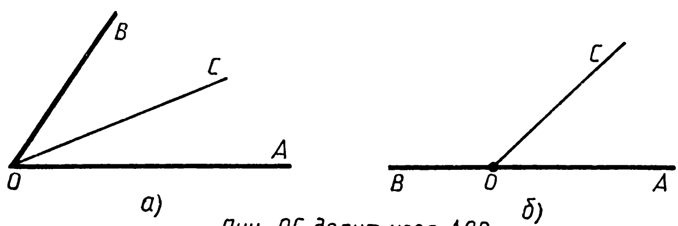
вернутый, то одна из частей называется *внутренней*, а другая — *внешней областью* этого угла (рис. 15, *а*). На рисунке 15, *б* изображен неразвернутый угол. Точки A, B, C лежат внутри этого угла (т. е. во внутренней области угла), точки D и E — на сторонах угла, а точки P и Q — вне угла (т. е. во внешней области угла). Если угол развернутый, то любую из двух частей, на которые он разделяет плоскость, можно считать внутренней областью угла. Фигуру, состоящую из угла и его внутренней области, также называют углом.

Если луч исходит из вершины неразвернутого угла и проходит внутри угла, то он делит этот угол на два угла. На рисунке 16, *а* луч OC делит угол AOB на два угла: AOC и COB. Если угол AOB развернутый, то любой луч OC, не совпадающий с лучами OA и OB, делит этот угол на два угла: AOC и COB (рис. 16, *б*).

Практические задания и вопросы

8. Проведите прямую, отметьте на ней точки A и B и на отрезке AB отметьте точку C. а) Среди лучей AB, BC, CA, AC и BA найдите пары совпадающих лучей; б) назовите луч, который является продолжением луча CA.

9. Начертите три неразвернутых угла и обозначьте их так: $\angle AOB$, $\angle hk$, $\angle M$.



Луч OC делит угол AOB на два угла: ∠AOC и ∠COB

Рис. 16

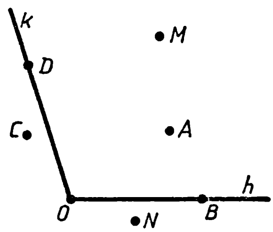


Рис. 17

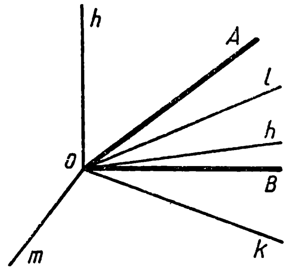


Рис. 18

10. Начертите два развернутых угла и обозначьте их буквами.

11. Начертите три луча h, k и l с общим началом. Назовите все углы, образованные данными лучами.

12. Начертите неразвернутый угол hk. Отметьте две точки внутри этого угла, две точки вне этого угла и две точки на сторонах угла.

13. Начертите неразвернутый угол. Отметьте точки A, B, M и N так, чтобы все точки отрезка AB лежали внутри угла, а все точки отрезка MN лежали вне угла.

14. Начертите неразвернутый угол AOB и проведите: а) луч OC, который делит угол AOB на два угла; б) луч OD, который не делит угол AOC на два угла.

15. Сколько неразвернутых углов образуется при пересечении двух прямых?

16. Какие из точек, изображенных на рисунке 17, лежат внутри угла hk, а какие — вне этого угла?

17. Какие из лучей, изображенных на рисунке 18, делят угол AOB на два угла?

§ 3. СРАВНЕНИЕ ОТРЕЗКОВ И УГЛОВ

5. Равенство геометрических фигур. Среди окружающих нас предметов встречаются такие, которые имеют одинаковую форму и одинаковые размеры. Такими предметами являются, например, два одинаковых листа бумаги, две одинаковые книги, два одинаковых автомобиля. В геометрии две фигуры, имеющие одинаковую форму и одинаковые размеры, называют равными.

На рисунке 19 изображены фигуры $Ф_1$ и $Ф_2$. Чтобы установить, равны они или нет, поступим так. Скопируем фигуру $Ф_1$ на кальку. Передвигая кальку и накладывая ее на фигуру $Ф_2$ той или другой стороной, попытаемся совместить копию фигуры $Ф_1$ с фигу-

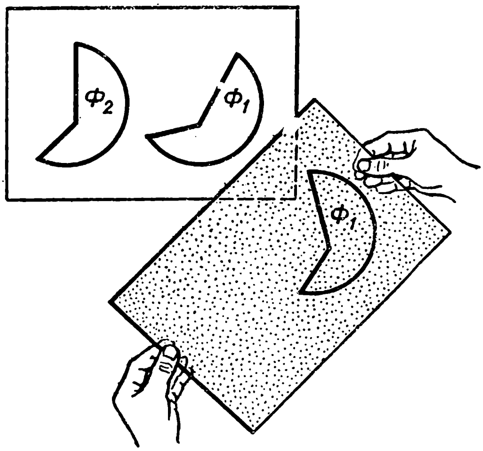


Рис. 19

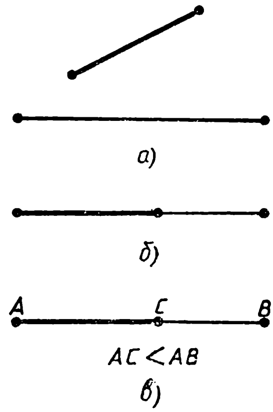


Рис. 20

рой $Ф_2$. Если они совместятся, то фигура $Ф_1$ равна фигуре $Ф_2$.

Мы можем представить себе, что на фигуру $Ф_2$ накладывается не копия фигуры $Ф_1$, равная этой фигуре, а сама фигура $Ф_1$. Поэтому в дальнейшем будем говорить о наложении самой фигуры (а не копии) на другую фигуру. Итак, *две геометрические фигуры называются равными, если их можно совместить наложением.*

6. Сравнение отрезков и углов. На рисунке 20, *а* изображены два отрезка. Чтобы установить, равны они или нет, наложим один отрезок на другой так, чтобы конец одного отрезка совместился с концом другого (рис. 20, *б*). Если при этом два других конца также совместятся, то отрезки полностью совместятся и, значит, они равны. Если же два других конца не совместятся, то меньшим считается тот отрезок, который составляет часть другого. На рисунке 20, *в* отрезок AC составляет часть отрезка AB, поэтому отрезок AC меньше отрезка AB (пишут так: $AC<AB$).

Точка отрезка, делящая его пополам, т. е. на два равных отрезка, *называется серединой отрезка.* На рисунке 21 точка C — середина отрезка AB.

На рисунке 22, *а* изображены неразвернутые углы 1 и 2. Чтобы установить, равны они или нет, наложим один угол на другой так, чтобы сторона одного угла совместилась со стороной другого, а две другие оказались по одну сторону от

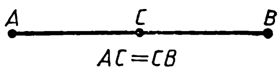
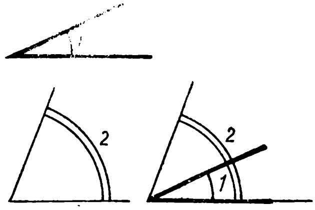
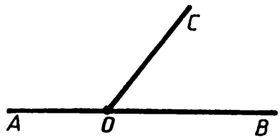


Рис. 21



а) б)

Рис. 22



Неразвернутый угол COB составляет часть развернутого угла AOB

Рис. 23

совместившихся сторон (рис. 22, *б*). Если две другие стороны также совместятся, то углы полностью совместятся и, значит, они равны. Если же эти стороны не совместятся, то меньшим считается тот угол, который составляет часть другого. На рисунке 22, *б* угол 1 составляет часть угла 2, поэтому $\angle 1 < \angle 2$.

Неразвернутый угол составляет часть развернутого (рис. 23), поэтому развернутый угол больше неразвернутого угла. Любые два развернутых угла, очевидно, равны.

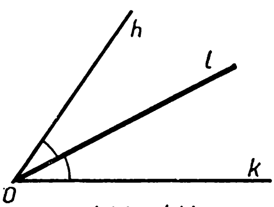
Луч, исходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла, называется биссектрисой угла. На рисунке 24 луч l — биссектриса угла hk.

Вопросы и задачи

18. На луче с началом O отмечены точки A, B и C так, что точка B лежит между точками O и A, а точка A — между точками O и C. Сравните отрезки OB и OA, OC и OA, OB и OC.

19. Точка O является серединой отрезка AB. Можно ли совместить наложением отрезки: а) OA и OB; б) OA и AB?

20. На рисунке 25 отрезки AB, BC, CD и DE равны. Укажите: а) середины отрезков AC, AE и CE; б) отрезок, серединой ко-



$\angle hl = \angle lk$
Луч l–биссектриса угла hk

Рис. 24

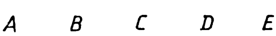


Рис. 25

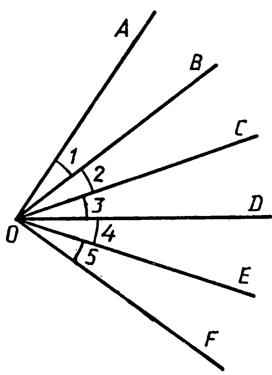


Рис. 26

торого является точка D; в) отрезки, серединой которых является точка C.

21. Луч OC делит угол AOB на два угла. Сравните углы AOB и AOC.

22. Луч l — биссектриса угла hk. Можно ли наложением совместить углы: а) hl и lk; б) hl и hk?

23. На рисунке 26 углы, обозначенные цифрами, равны. Укажите а) биссектрису каждого из углов AOC, BOF, AOE; б) все углы, биссектрисой которых является луч OC

§ 4. ИЗМЕРЕНИЕ ОТРЕЗКОВ

7. Длина отрезка. На практике часто приходится измерять отрезки, т. е. находить их длины. Измерение отрезков основано на сравнении их с некоторым отрезком, принятым за *единицу измерения* (его называют также *масштабным отрезком*). Если, например, за единицу измерения принят сантиметр, то для определения длины отрезка узнают, сколько раз в этом отрезке укладывается сантиметр. На рисунке 27 в отрезке AB сантиметр укладывается ровно два раза[1]. Это означает, что длина отрезка AB равна 2 см. Обычно говорят кратко: «Отрезок AB равен 2 см» — и пишут: $AB=2$ см.

Может оказаться так, что отрезок, принятый за единицу измерения, не укладывается целое число раз в измеряемом отрезке — получается остаток. Тогда единицу измерения делят на равные части, обычно на 10 равных частей, и определяют, сколько раз одна такая часть укладывается в остатке. Например, на рисунке 27 в отрезке AC сантиметр укладывается 3 раза, и в остатке ровно 4 раза укладывается одна десятая часть сантиметра (миллиметр), поэтому длина отрезка AC равна 3,4 см. Возможно, однако, что и взятая часть единицы измерения (в данном случае миллиметр)

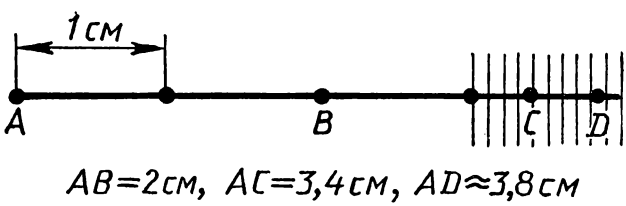


Рис. 27

[1] Этот рисунок выполнен в масштабе 2:1.

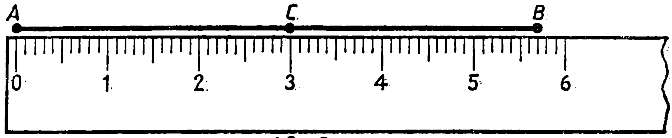


Рис. 28

не укладывается в остатке целое число раз, и получается новый остаток. Так будет, например, с отрезком AD на рисунке 27, в котором сантиметр укладывается три раза с остатком, а в остатке миллиметр укладывается восемь раз вновь с остатком. В таком случае говорят, что длина отрезка AD приближенно равна 3,8 см. Для более точного измерения этого отрезка указанную часть единицы измерения (миллиметр) можно разделить на 10 равных частей и продолжить процесс измерения. Мысленно этот процесс можно продолжать и дальше, измеряя длину отрезка со все большей точностью. На практике, однако, пользуются приближенными значениями длин отрезков.

За единицу измерения можно принимать не только сантиметр, но и любой другой отрезок. *Выбрав единицу измерения, можно измерить любой отрезок, т. е. выразить его длину некоторым положительным числом.* Это число показывает, сколько раз единица измерения и ее части укладываются в измеряемом отрезке.

Если два отрезка равны, то единица измерения и ее части укладываются в этих отрезках одинаковое число раз, т. е. *равные отрезки имеют равные длины.* Если же один отрезок меньше другого, то единица измерения (или ее часть) укладывается в этом отрезке меньшее число раз, чем в другом, т. е. *меньший отрезок имеет меньшую длину.*

На рисунке 28 изображен отрезок AB. Точка C делит его на два отрезка: AC и CB. Мы видим, что $AC=3$ см, $CB=2{,}7$ см, $AB=5{,}7$ см. Таким образом, $AC+CB=AB$. Ясно, что и во всех других случаях, *когда точка делит отрезок на два отрезка, длина всего отрезка равна сумме длин этих двух отрезков.*

Длина отрезка называется также *расстоянием* между концами этого отрезка.

8. Единицы измерения. Измерительные инструменты. Для измерения отрезков и нахождения расстояний на практике используют различные единицы измерения. Стандартной международной единицей измерения отрезков выбран метр — отрезок, приближенно равный $\frac{1}{40\,000\,000}$ части земного меридиана. Эталон метра в виде специального металлического бруска хранится в Международном бюро мер и весов во Франции. Копии эталона хранятся в других странах, в том числе и в СССР. Один метр содержит сто сантиметров. В одном сантиметре десять миллиметров.

При измерении небольших расстояний, например расстояния между точками, изображенными на листе бумаги, за единицу измерения принимают сантиметр или миллиметр. Расстояние между отдельными предметами в комнате измеряют в метрах, расстояние между населенными пунктами — в *километрах*. Используются и другие единицы измерения, например, *дециметр, морская миля* (1 миля равна 1,852 км). В астрономии для измерения очень больших расстояний за единицу измерения принимают *световой год*, т. е. путь, который свет проходит в течение одного года.

Мы назвали единицы измерения расстояний, которые используются на практике в наше время. В старину в разных странах существовали свои единицы измерения. Так, на Руси использовались аршин (0,7112 м), сажень (2,1336 м) и др.

На практике для измерения расстояний пользуются различными инструментами. Например, в техническом черчении употребляется *масштабная миллиметровая линейка*. Для измерения диаметра трубки используют *штангенциркуль* (рис. 29). С его помощью можно измерять расстояния с точностью до 0,1 мм. Для измерения расстояний на местности пользуются *рулеткой*, которая представляет собой ленту с нанесенными на ней делениями (рис. 30).

Практические задания

24. Измерьте ширину и длину учебника геометрии и выразите их в сантиметрах и в миллиметрах.

25. Измерив толщину учебника геометрии без обложки, найдите толщину одного листа.

26. Найдите длины всех отрезков, изображенных на рисунке 31, если за единицу измерения принят отрезок: а) KL; б) AB.

27. Начертите отрезок AB и луч h. Пользуясь масштабной линейкой, отложите на луче h от его начала отрезки, длины которых равны $2AB$, $\frac{1}{2}AB$ и $\frac{1}{4}AB$.

28. Начертите прямую и отметьте на ней точки A и B. С помощью

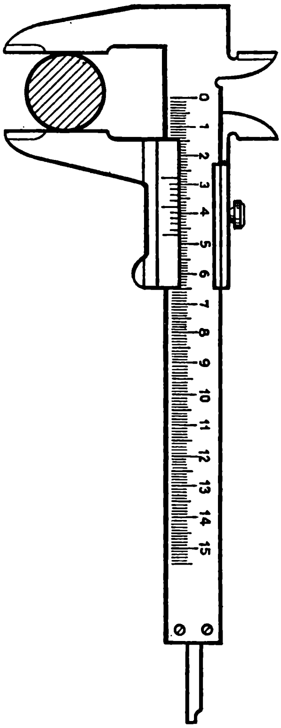
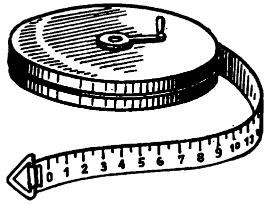


Рис. 29 *Штангенциркуль*



Рулетка

Рис. 30

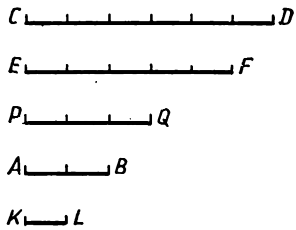


Рис. 31

масштабной линейки отметьте точки C и D так, чтобы точка B была серединой отрезка AC, а точка D — серединой отрезка BC.

29. Начертите прямую AB. С помощью масштабной линейки отметьте на этой прямой точку C, такую, что $AC=2$ см. Сколько таких точек можно отметить на прямой AB?

Вопросы и задачи

30. Точка B делит отрезок AC на два отрезка. Найдите длину отрезка AC, если $AB=7{,}8$ см, $BC=25$ мм.

31. Точка B делит отрезок AC на два отрезка. Найдите длину отрезка BC, если: а) $AB=3{,}7$ см, $AC=7{,}2$ см; б) $AB=4$ мм, $AC=4$ см.

32. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Известно, что $AB=12$ см, $BC=13{,}5$ см. Какой может быть длина отрезка AC?

33. Точки B, D и M лежат на одной прямой. Известно, что $BD=7$ см, $MD=16$ см. Каким может быть расстояние BM?

34. Точка C — середина отрезка AB, равного 64 см. На луче CA отмечена точка D так, что $CD=15$ см. Найдите длины отрезков BD и DA.

35. Расстояние между Москвой и Ленинградом равно 650 км. Город Калинин находится между Москвой и Ленинградом в 170 км от Москвы. Найдите расстояние между Калинином и Ленинградом, считая, что все три города расположены на одной прямой.

36. Лежат ли точки A, B и C на одной прямой, если $AC=5$ см, $AB=3$ см, $BC=4$ см?

Решение. Если точки A, B и C лежат на одной прямой, то больший из отрезков AB, BC и AC равен сумме двух других. По условию больший из данных отрезков (отрезок AC) равен 5 см, а сумма двух других ($AB+BC$) равна 7 см. Поэтому точки A, B и C не лежат на одной прямой.

37. Точка C — середина отрезка AB, точка O — середина отрезка AC. а) Найдите AC, CB, AO и OB, если $AB=2$ см; б) найдите AB, AC, AO и OB, если $CB=3{,}2$ м.

38. На прямой отмечены точки O, A и B так, что $OA=12$ см, $OB=9$ см. Найдите расстояние между серединами отрезков OA и OB, если точка O: а) лежит на отрезке AB; б) не лежит на отрезке AB.

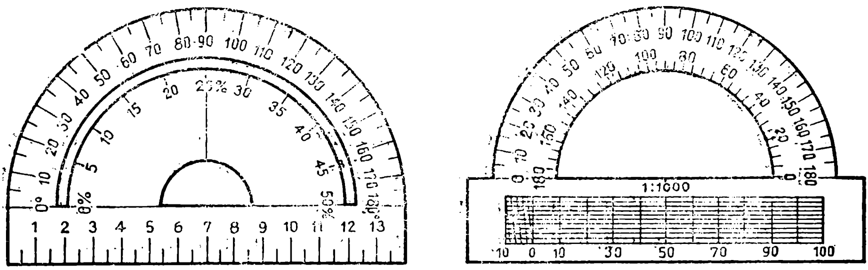
39. Отрезок, длина которого равна a, разделен произвольной точкой на два отрезка. Найдите расстояние между серединами этих отрезков.

40. Отрезок, равный 28 см, разделен на три неравных отрезка. Расстояние между серединами крайних отрезков равно 16 см. Найдите длину среднего отрезка.

§ 5. ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ

9. Градусная мера угла. Измерение углов аналогично измерению отрезков — оно основано на сравнении их с углом, принятым за единицу измерения. Обычно за единицу измерения углов принимают *градус* — угол, равный $\frac{1}{180}$ части развернутого угла. Эта единица измерения углов была введена много веков назад, еще до нашей эры.

Положительное число, которое показывает, сколько раз градус и его части укладываются в данном угле, называется *гра-*



Транспортир

Рис. 32

дусной мерой угла. Для измерения углов используется транспортир (рис. 32).

На рисунке 33, *а* изображен угол AOB, градусная мера которого равна 150°. Обычно говорят кратко: «Угол AOB равен 150°» — и пишут: $\angle AOB = 150°$. На рисунке 33, *б* угол hk равен 40° ($\angle hk = 40°$). $\frac{1}{60}$ часть градуса называется *минутой,* а $\frac{1}{60}$ часть минуты — *секундой.* Минуты обозначают знаком «′», а секунды — знаком «″». Например, угол в 60 градусов, 32 минуты и 17 секунд обозначается так: $60°32'17''$.

Если два угла равны, то градус и его части укладываются в этих углах одинаковое число раз, т. е. *равные углы имеют равные градусные меры.* Если же один угол меньше другого, то в нем градус (или его часть) укладывается меньшее число раз, чем в другом угле, т. е. *меньший угол имеет меньшую градусную меру.*

Так как градус составляет $\frac{1}{180}$ часть развернутого угла, то *развернутый угол равен 180°. Неразвернутый угол меньше 180°,* так как он меньше развернутого.

На рисунке 34 изображены лучи с началом в точке O. Луч

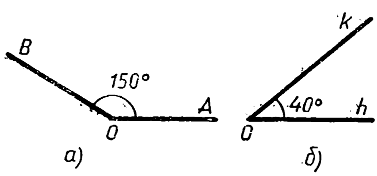


Рис. 33

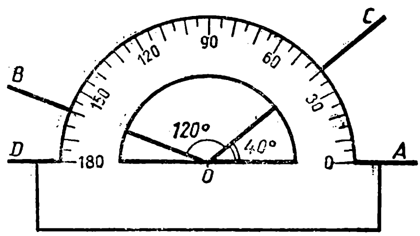
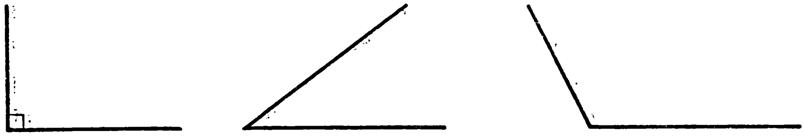


Рис. 34



Прямой угол а) Острый угол б) Тупой угол в)

Рис. 35

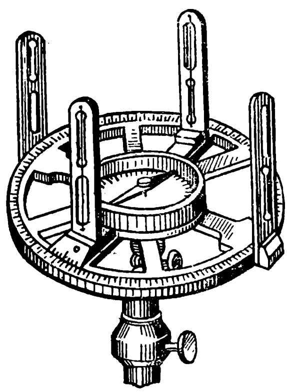
ОС делит угол *АОВ* на два угла: *АОС* и *СОВ*. Мы видим, что $\angle AOC = 40°$, $\angle COB = 120°$, $\angle AOB = 160°$. Таким образом, $\angle AOC + \angle COB = \angle AOB$. Ясно, что и во всех других случаях, ***когда луч делит угол на два угла, градусная мера всего угла равна сумме градусных мер этих углов.***

Угол называется ***прямым***, если он равен 90° (рис. 35, *а*), ***острым***, если он меньше 90°, т. е. меньше прямого угла (рис. 35, *б*), ***тупым***, если он больше 90°, но меньше 180°, т. е. больше прямого, но меньше развернутого угла (рис. 35, *в*).

Прямые углы мы видим в окружающей нас обстановке: прямой угол образуют линии пересечения стен и потолка в комнате, два края стола прямоугольной формы и т. д.

10. Измерение углов на местности. Измерение углов на местности проводится с помощью специальных приборов. Простейшим из них является *астролябия* (рис. 36). Она состоит из двух частей: диска, разделенного на градусы, и вращающейся вокруг центра диска линейки (алидады). На концах алидады находятся два узких окошечка, которые используются для установки ее в определенном направлении.

Для того чтобы измерить угол *АОВ* на местности, треножник с астролябией ставят так, чтобы отвес, подвешенный к центру диска, находился точно над точкой *О*. Затем устанавливают алидаду вдоль одной из сторон *ОА* или *ОВ*, и отмечают деление, против которого находится указатель алидады. Далее поворачивают алидаду, направляя ее вдоль другой стороны измеряемого угла, и отмечают деление, против которого окажется указатель алидады. Разность отсчета и дает градусную меру угла *АОВ*.



Астролябия

Рис. 36

Измерения углов проводятся в различных исследованиях, например в астрономии при определении положения небесных тел. Очень важно с достаточной точностью измерять углы при определении положения искусственных спутников на орбитах. Для этой цели конструируют специальные приборы. Данные, полученные с помощью этих приборов, обрабатываются на электронно-вычислительных машинах (ЭВМ).

Практические задания

41. Начертите три неразвернутых угла и один развернутый угол и обозначьте их так: $\angle AOB$, $\angle CDE$, $\angle hk$ и $\angle MNP$. С помощью транспортира измерьте углы и запишите результаты измерений.

42. Начертите луч OA и с помощью транспортира отложите от луча OA углы AOB, AOC и AOD так, чтобы $\angle AOB = 23°$, $\angle AOC = 67°$, $\angle AOD = 138°$.

43. Начертите угол, равный 70°, и с помощью транспортира проведите его биссектрису.

44. Начертите угол AOB и с помощью транспортира проведите луч OC так, чтобы луч OA являлся биссектрисой угла BOC. Всегда ли это выполнимо?

Вопросы и задачи

45. Градусные меры двух углов равны. Равны ли сами углы?

46. На рисунке 37 изображены лучи с общим началом O. а) Найдите градусные меры углов AOX, BOX, AOB, COB, DOX; б) назовите углы, равные 20°; в) назовите равные углы; г) назовите все углы со стороной OA и найдите их градусные меры.

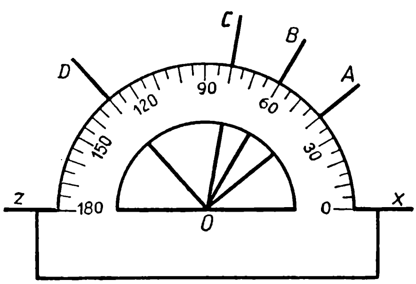


Рис. 37

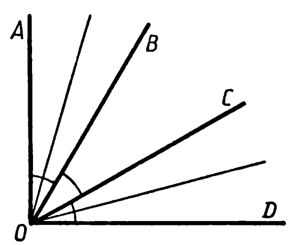


Рис. 38

47. Луч OE делит угол AOB на два угла. Найдите $\angle AOB$, если: а) $\angle AOE = 44°$, $\angle EOB = 77°$; б) $\angle AOE = 12°37'$, $\angle EOB = 108°25'$.

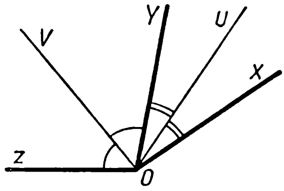


Рис. 39

48. Луч OC делит угол AOB на два угла. Найдите угол COB, если $\angle AOB = 78°$, а угол AOC на 18° меньше угла BOC.

49. Луч OC делит угол AOB на два угла. Найдите угол AOC, если $\angle AOB = 155°$ и угол AOC на 15° больше угла COB.

50. Угол AOB является частью угла AOC. Известно, что $\angle AOC = 108°$, $\angle AOB = 3\ \angle BOC$. Найдите угол AOB.

51. На рисунке 38 угол AOD — прямой, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD$. Найдите угол, образованный биссектрисами углов AOB и COD.

52. На рисунке 39 луч OV является биссектрисой угла ZOY, а луч OU — биссектрисой угла XOY. Найдите угол XOZ, если $\angle UOV = 80°$.

53. Луч l является биссектрисой неразвернутого угла hk. Может ли угол hl быть прямым или тупым?

§ 6. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ

11. Смежные и вертикальные углы. *Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями одна другой, называются смежными.* На рисунке 40 углы AOB и BOC смежные. Так как лучи OA и OC образуют развернутый угол, то $\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC = 180°$. Таким образом, *сумма смежных углов равна 180°.*

Два угла называются вертикальными, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого. На рисунке 41 углы 1 и 3, а также углы 2 и 4 — вертикальные.

Угол 2 является смежным как с углом 1, так и с углом 3. По свойству смежных углов $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ и $\angle 3 + \angle 2 = 180°$.

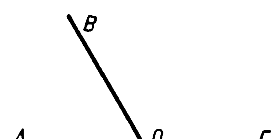


Рис. 40

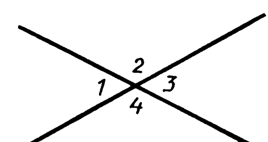


Рис. 41

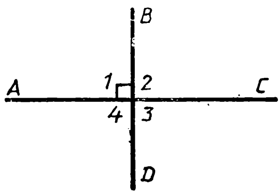


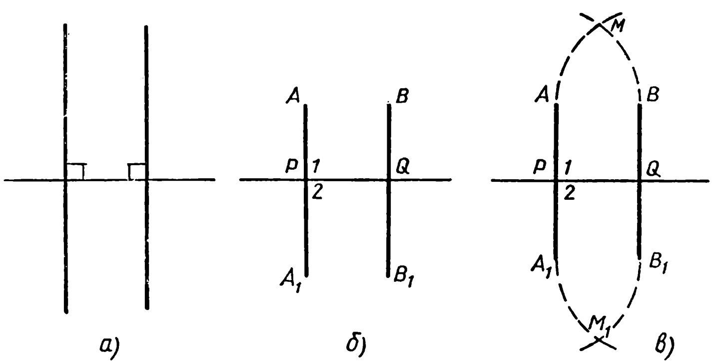
Рис. 42

Отсюда получаем: $\angle 1 = 180° - \angle 2$, $\angle 3 = 180° - \angle 2$. Таким образом, градусные меры углов 1 и 3 равны. Отсюда следует, что и сами углы равны. Итак, *вертикальные углы равны.*

12. Перпендикулярные прямые. Рассмотрим две пересекающиеся прямые (рис. 42). Они образуют четыре неразвернутых угла. Если один из них прямой (угол 1 на рис. 42), то остальные углы также прямые (объясните почему). *Две пересекающиеся прямые называются перпендикулярными (или взаимно перпендикулярными), если они образуют четыре прямых угла.* Перпендикулярность прямых AC и BD обозначается так: $AC \perp BD$ (читается: «Прямая AC перпендикулярна к прямой BD»).

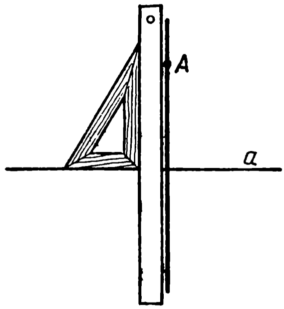
Отметим, что *две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются* (рис. 43, *а*). В самом деле, рассмотрим прямые AA_1 и BB_1, перпендикулярные к прямой PQ (рис. 43, *б*). Мысленно перегнем рисунок по прямой PQ так, чтобы верхняя часть рисунка наложилась на нижнюю. Так как прямые углы 1 и 2 равны, то луч PA наложится на луч PA_1. Аналогично, луч QB наложится на луч QB_1. Поэтому, если предположить, что прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M, то эта точка наложится на некоторую точку M_1, также лежащую на этих прямых (рис. 43, *в*), и мы получим, что через точки M и M_1 проходят две прямые: AA_1 и BB_1. Но это невозможно. Следовательно, наше предположение неверно и, значит, прямые AA_1 и BB_1 не пересекаются.

Для проведения перпендикулярных прямых используют чертежный угольник и линейку (рис. 44).



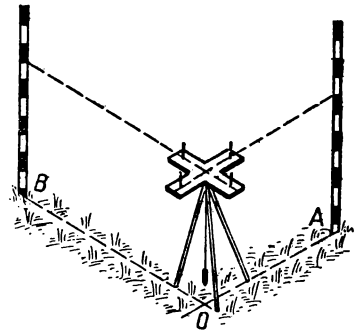
а) *б)* *в)*

Рис. 43



Построение перпендикулярных прямых

Рис. 44



Треножник с экером

Рис. 45

13. Построение прямых углов на местности. Для построения прямых углов на местности применяют специальные приборы, простейшим из которых является *экер*. Экер представляет собой два бруска, расположенных под прямым углом и укрепленных на треножнике (рис. 45). На концах брусков вбиты гвозди так, что прямые, проходящие через них, взаимно перпендикулярны. Чтобы построить на местности прямой угол с заданной стороной OA, устанавливают треножник с экером так, чтобы отвес находился точно над точкой O, а направление одного бруска совпало с направлением луча OA. Совмещение этих направлений можно осуществить с помощью вехи, поставленной на луче. Затем провешивают прямую линию по направлению другого бруска (прямая OB на рисунке 45). Получается прямой угол AOB.

В геодезии для построения прямых углов используются более совершенные приборы, например *теодолит*.

Практические задания

54. Начертите острый угол AOB и на продолжении луча OB отметьте точку D. Сравните углы AOB и AOD.

55. Начертите три угла: острый, прямой и тупой. Для каждого из них начертите смежный угол.

56. Начертите неразвернутый угол hk. Постройте угол h_1k_1 так, чтобы углы hk и h_1k_1 были вертикальными.

57. Начертите неразвернутый угол MON и отметьте точку P внутри угла, и точку Q — вне его. С помощью чертежного угольника и линейки через точки P и Q проведите прямые, перпендикулярные к прямым OM и ON.

Вопросы и задачи

58. Найдите угол, смежный с углом ABC, если: а) $\angle ABC = 111°$; б) $\angle ABC = 90°$; в) $\angle ABC = 15°$.

59. Один из смежных углов прямой. Каким (острым, прямым, тупым) является другой угол?

60. Верно ли утверждение: если смежные углы равны, то они прямые?

61. Найдите смежные углы hk и kl, если: а) $\angle hk$ меньше $\angle kl$ на $40°$; б) $\angle hk$ больше $\angle kl$ на $120°$; в) $\angle hk$ больше $\angle kl$ на $47°18'$; г) $\angle hk = 3\angle kl$; д) $\angle hk : \angle kl = 5:4$.

62. На рисунке 46 углы BOD и COD равны. Найдите угол AOD, если $\angle COB = 148°$.

63. Даны два равных угла. Равны ли смежные с ними углы?

64. На рисунке 41 найдите углы: а) 1, 3, 4, если $\angle 2 = 117°$; б) 1, 2, 4, если $\angle 3 = 43°27'$.

65. Найдите неразвернутые углы, образованные при пересечении двух прямых, если: а) сумма двух из них равна $114°$; б) сумма трех углов равна $220°$.

66. На рисунке 41 найдите углы 1, 2, 3, 4, если: а) $\angle 2 + \angle 4 = 220°$; б) $3(\angle 1 + \angle 3) = \angle 2 + \angle 4$; в) $\angle 2 - \angle 1 = 30°$.

67. На рисунке 47 изображены три прямые, пересекающиеся в точке O. Найдите сумму углов: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$.

68. На рисунке 48 $\angle AOB = 50°$, $\angle FOE = 70°$. Найдите углы AOC, BOD, COE и COD.

69. Прямая a пересекает стороны угла A в точках P и Q. Могут ли обе прямые AP и AQ быть перпендикулярными к прямой a?

70. Через точку A, не лежащую на прямой a, проведены три прямые, которые пересекают прямую a. Докажите, что по крайней мере две из них не перпендикулярны к прямой a.

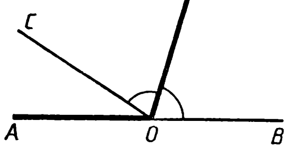


Рис. 46

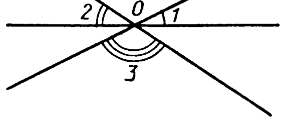


Рис. 47

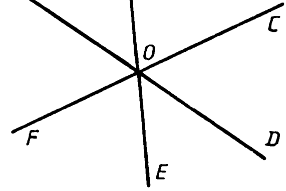


Рис. 48

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ I

1. Сколько прямых можно провести через две точки?
2. Сколько общих точек могут иметь две прямые?
3. Объясните, что такое отрезок.
4. Объясните, что такое луч. Как обозначаются лучи?
5. Какая фигура называется углом? Объясните, что такое вершина и стороны угла.
6. Какой угол называется развернутым?
7. Какие фигуры называются равными?
8. Объясните, как сравнить два отрезка.
9. Какая точка называется серединой отрезка?
10. Объясните, как сравнить два угла.
11. Какой луч называется биссектрисой угла?
12. Точка C делит отрезок AB на два отрезка. Как найти длину отрезка AB, если известны длины отрезков AC и CB?
13. Какими инструментами пользуются для измерения расстояний?
14. Что такое градусная мера угла?
15. Луч OC делит угол AOB на два угла. Как найти градусную меру угла AOB, если известны градусные меры углов AOC и COB?
16. Какой угол называется острым? прямым? тупым?
17. Какие углы называются смежными? Чему равна сумма смежных углов?
18. Какие углы называются вертикальными? Каким свойством обладают вертикальные углы?
19. Какие прямые называются перпендикулярными?
20. Объясните, почему две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются.
21. Какие приборы применяют для построения прямых углов на местности?

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

71. Отметьте четыре точки так, чтобы никакие три не лежали на одной прямой. Через каждую пару точек проведите прямую. Сколько получилось прямых?

72. Даны четыре прямые, каждые две из которых пересекаются. Сколько точек пересечения имеют эти прямые, если через каждую точку пересечения проходят только две прямые?

73. Сколько неразвернутых углов образуется при пересечении трех прямых, проходящих через одну точку?

74. Точка N лежит на отрезке MP. Расстояние между точками M и P равно 24 см, а расстояние между точками N и M в два раза больше расстояния между точками N и P. Найдите расстояние: а) между точками N и P; б) между точками N и M.

75. Три точки K, L, M лежат на одной прямой, $KL=6$ см, $LM=10$ см. Каким может быть расстояние KM? Для каждого из возможных случаев сделайте чертеж.

76. Отрезок AB длины a разделен точками P и Q на три отрезка AP, PQ и QB так, что $AP=2PQ=2QB$. Найдите расстояние между: а) точкой A и серединой отрезка QB; б) серединами отрезков AP и QB.

77. Отрезок длины m разделен: а) на три равные части; б) на пять равных частей. Найдите расстояние между серединами крайних частей.

78. Отрезок в 36 см разделен на четыре не равные друг другу части. Расстояние между серединами крайних частей равно 30 см. Найдите расстояние между серединами средних частей.

79*. Точки A, B и C лежат на одной прямой, точки M и N — середины отрезков AB и AC. Докажите, что $BC=2MN$.

80. Известно, что $\angle AOB=35°$, $\angle BOC=50°$. Найдите угол AOC. Для каждого из возможных случаев сделайте чертеж с помощью линейки и транспортира.

81. Угол hk равен 120°, а угол hm равен 150°. Найдите угол km. Для каждого из возможных случаев сделайте чертеж.

82. Найдите смежные углы, если: а) один из них на 45° больше другого; б) их разность равна 35°.

83. Найдите угол, образованный биссектрисами двух смежных углов.

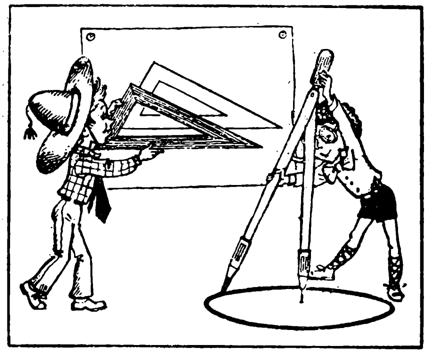
84. Докажите, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой.

85*. Докажите, что если биссектрисы углов ABC и CBD перпендикулярны, то точки A, B и D лежат на одной прямой.

86. Даны две пересекающиеся прямые a и b и точка A, не лежащая на этих прямых. Через точку A проведены прямые m и n так, что $m \perp a$, $n \perp b$. Докажите, что прямые m и n не совпадают.

Глава II

ТРЕУГОЛЬНИКИ

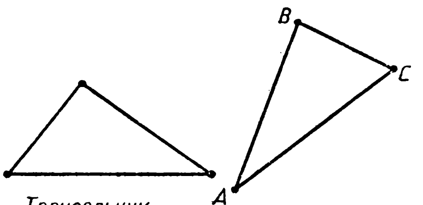


§ 1. ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

14. Треугольник. Отметим какие-нибудь три точки, не лежащие на одной прямой, и соединим их отрезками (рис. 49, *а*). Мы получим геометрическую фигуру, которая называется *треугольником*. Отмеченные три точки называются *вершинами*, а отрезки — *сторонами* треугольника. На рисунке 49, *б* изображен треугольник с вершинами A, B, C и сторонами AB, BC и CA. Такой треугольник будем обозначать так: $\triangle ABC$ (читается: «треугольник ABC»). Этот же треугольник можно обозначить иначе, записав буквы A, B, C в другом порядке: $\triangle BCA$, $\triangle CBA$ и т. д.

Три угла — $\angle BAC$, $\angle CBA$ и $\angle ACB$ — называются *углами треугольника* ABC. Часто их обозначают одной буквой: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$. Сумма длин трех сторон треугольника называется его *периметром*.

Напомним, что две фигуры, в частности два треугольника, называются равными, если их можно совместить наложением. На рисунке 50 изображены равные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$.



Треугольник
а)

Треугольник с вершинами A, B, C и сторонами AB, BC и CA
б)

Рис. 49

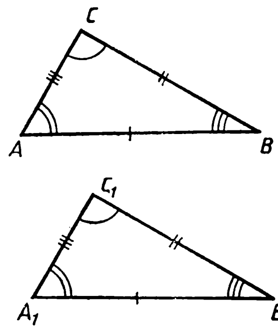


Рис. 50

Каждый из этих треугольников можно наложить на другой так, что они полностью совместятся, т. е. попарно совместятся их вершины и стороны. Ясно, что при этом совместятся попарно и углы этих треугольников. Таким образом, если два треугольника равны, то *элементы* (т. е. стороны и углы) одного треугольника соответственно равны элементам другого треугольника. Отметим, что *в равных треугольниках против соответственно равных сторон* (т. е. совмещающихся при наложении) *лежат равные углы*, и обратно: *против соответственно равных углов лежат равные стороны.* Так например, в равных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$, изображенных на рисунке 50, против соответственно равных сторон AB и A_1B_1 лежат равные углы C и C_1.

Равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ будем обозначать так: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Оказывается, что равенство двух треугольников можно установить, не накладывая один треугольник на другой, а сравнивая только некоторые их элементы. Этот вопрос мы рассмотрим дальше. Такая возможность — установить равенство двух фигур, не производя наложения одной на другую, а измеряя и сравнивая лишь некоторые элементы этих фигур, важна для практики, например для сравнения двух земельных участков, которые, конечно, нельзя наложить друг на друга.

15. Первый признак равенства треугольников. В математике каждое утверждение, справедливость которого устанавливается путем рассуждений, называется *теоремой*, а сами рассуждения называются *доказательством теоремы.* Фактически мы уже имели дело с теоремами и их доказательствами. Так, утверждение о равенстве вертикальных углов является теоремой, а рассуждения, которые мы провели, чтобы установить равенство вертикальных углов, и есть доказательство этой теоремы. В этом параграфе мы докажем одну из теорем о равенстве треугольников.

Теорема. ***Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.***

Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ (рис. 51). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Так как $\angle A = \angle A_1$, то треугольник ABC можно наложить на треугольник $A_1B_1C_1$ так, что вершина A совместится с вершиной A_1, а стороны AB и AC наложатся соответственно на лучи

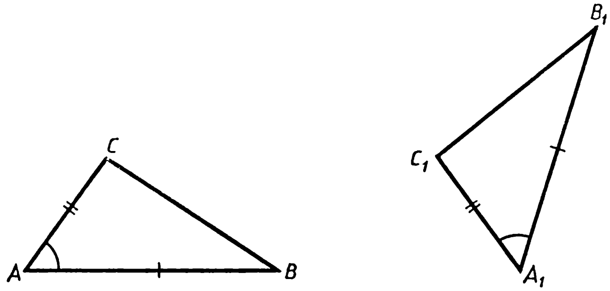


Рис. 51

A_1B_1 и A_1C_1. Поскольку $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, то сторона AB совместится со стороной A_1B_1, а сторона AC — со стороной A_1C_1; в частности, совместятся точки B и B_1, C и C_1. Следовательно, совместятся стороны BC и B_1C_1. Итак, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместятся, значит, они равны. Теорема доказана.

Доказанная теорема выражает *признак* (равенство у треугольников двух сторон и угла между ними), по которому можно сделать вывод о равенстве треугольников. Он называется *первым признаком равенства треугольников.*

Практические задания

87. Начертите треугольник и обозначьте его вершины буквами M, N и P. а) Назовите все углы и стороны треугольника; б) с помощью масштабной линейки измерьте стороны и найдите периметр треугольника.

88. Начертите треугольник DEF так, чтобы угол E был прямым. Назовите: а) стороны, лежащие против углов D, E, F; б) углы, лежащие против сторон DE, EF, FD; в) углы, прилежащие к сторонам DE, EF, FD.

89. С помощью транспортира и масштабной линейки начертите треугольник ABC, в котором: а) $AB=4{,}3$ см, $AC=2{,}3$ см, $\angle A=23°$; б) $BC=9$ см, $BA=6{,}2$ см, $\angle B=122°$; в) $CA=$ $=3$ см, $CB=4$ см, $\angle C=90°$.

Вопросы и задачи

90. Сторона AB треугольника ABC равна 17 см, сторона AC вдвое больше стороны AB, а сторона BC на 10 см меньше стороны AC. Найдите периметр треугольника ABC.

91. Периметр треугольника равен 48 см, а одна из сторон равна 18 см. Найдите две другие стороны, если их разность равна 4,6 см.

92. Периметр одного треугольника больше периметра другого. Могут ли быть равными эти треугольники?

93. Отрезки AE и DC пересекаются в точке B, являющейся серединой каждого из них. а) Докажите, что треугольники ABC и EBD равны; б) найдите углы A и C треугольника ABC, если в треугольнике BDE $\angle D=47°$, $\angle E=42°$.

94. На рисунке 52 $AB=AC$, $\angle 1=\angle 2$. а) Докажите, что треугольники ABD и ACD равны; б) найдите BD и AB, если $AC=15$ см, $DC=5$ см.

95. На рисунке 53 $BC=AD$, $\angle 1=\angle 2$. а) Докажите, что треугольники ABC и CDA равны; б) найдите AB и BC, если $AD=17$ см, $DC=14$ см.

96. На рисунке 54 $OA=OD$, $OB=OC$, $\angle 1=74°$, $\angle 2=36°$. а) Докажите, что треугольники AOB и DOC равны; б) найдите $\angle ACD$.

97. Отрезки AC и BD пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Докажите, что $\triangle ABC=\triangle CDA$.

98. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$. На сторонах AB и A_1B_1 отмечены точки P и P_1 так, что $AP=A_1P_1$. Докажите, что $\triangle BPC=\triangle B_1P_1C_1$.

99. На сторонах угла CAD отмечены точки B и E так, что точка B лежит на отрезке AC, а точка E — на отрезке AD, причем $AC=AD$ и $AB=AE$. Докажите, что $\angle CBD=\angle DEC$.

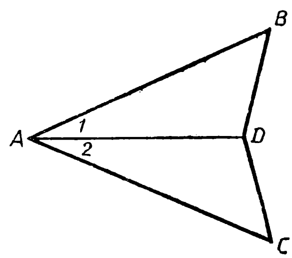


Рис. 52

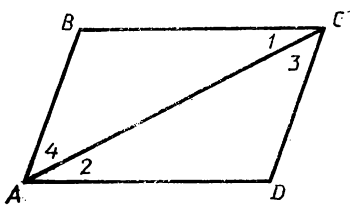


Рис. 53

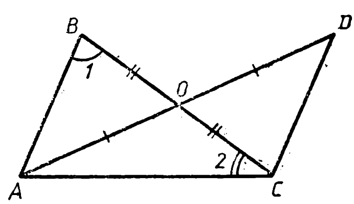
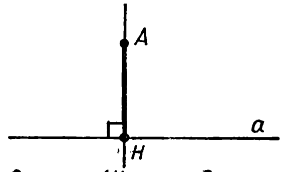


Рис. 54

§ 2. МЕДИАНЫ, БИССЕКТРИСЫ И ВЫСОТЫ ТРЕУГОЛЬНИКА

16. Перпендикуляр к прямой. Рассмотрим прямую a и точку A, не лежащую на ней (рис. 55). Соединим точку A отрезком с точкой H прямой a. Отрезок AH называется *перпендикуляром, проведенным из точки A к прямой a*, если прямые AH и a перпендикулярны. Точка H называется *основанием перпендикуляра*.



Отрезок AH–перпендикуляр к прямой a

Рис. 55

Теорема. ***Из точки, не лежащей на прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой, и притом только один.***

Доказательство. Пусть A — точка, не лежащая на прямой BC (рис. 56). Докажем сначала, что из точки A можно провести перпендикуляр к прямой BC.

Отложим от луча BC угол MBC, равный углу ABC, как показано на рисунке 56, *а*. Так как углы ABC и MBC равны, то первый из них можно наложить на второй так, что стороны BA и BC первого угла совместятся со сторонами BM и BC второго угла. Наглядно это наложение можно представить себе как перегибание рисунка по прямой BC. При этом точка A наложится на некоторую точку A_1 луча BM (рис. 56, *б*). Обозначим буквой H точку пересечения прямых AA_1 и BC. Отрезок AH и есть искомый перпендикуляр к прямой BC. В самом деле, при указанном наложении (перегибании рисунка) луч HA совмещается с лучом HA_1, поэтому угол 1 совмещается с углом 2. Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$. Но углы 1 и 2 — смежные, значит, каждый из них прямой. Итак, $AH \perp BC$.

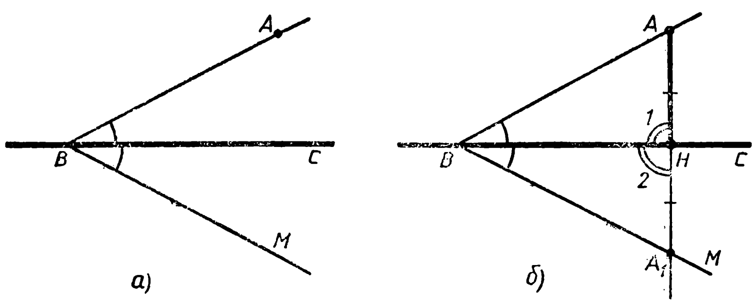


Рис. 56

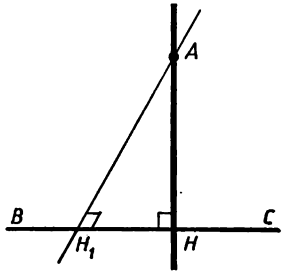


Рис. 57

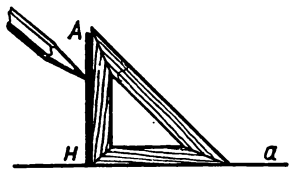


Рис. 58

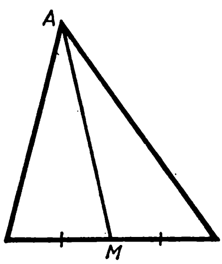
Докажем теперь, что из точки A можно провести только один перпендикуляр к прямой BC.

Если предположить, что через точку A можно провести еще один перпендикуляр AH_1 к прямой BC, то получим, что две прямые AH и AH_1, перпендикулярные к прямой BC, пересекаются (рис. 57). Но в п. 12 было доказано, что это невозможно. Значит, из точки A можно провести только один перпендикуляр к прямой BC. Теорема доказана.

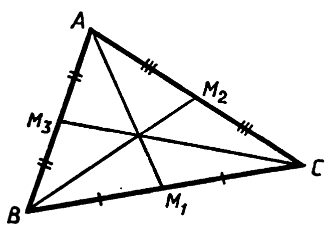
Для проведения на чертеже перпендикуляра из точки к прямой используют чертежный угольник (рис. 58).

17. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника. *Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется медианой треугольника* (рис. 59, *а*). Любой треугольник имеет три медианы. На рисунке 59, *б* отрезки AM_1, BM_2, CM_3 — медианы треугольника ABC.

Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, называется биссектрисой треугольника (рис. 60, *а*). Любой треугольник имеет три биссектрисы. На рисунке 60, *б* отрезки CC_1, DD_1 и EE_1 — биссектрисы треугольника CDE.

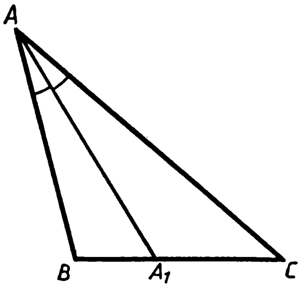


AM—медиана треугольника
а)



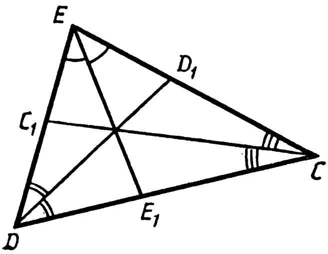
AM₁, BM₂, CM₃—медианы треугольника ABC
б)

Рис. 59



AA_1 — *биссектриса треугольника ABC*

а)

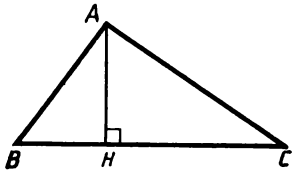


CC_1, DD_1, EE_1 — *биссектрисы треугольника CDE*

б)

Рис. 60

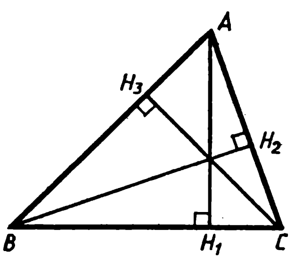
Перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону, называется высотой треугольника (рис. 61). Любой треугольник имеет три высоты. На рисунках 62, *а*, *б*, *в* отрезки AH_1, BH_2, CH_3 — высоты треугольника ABC.



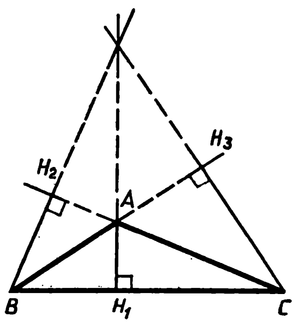
AH — высота треугольника ABC

Рис. 61

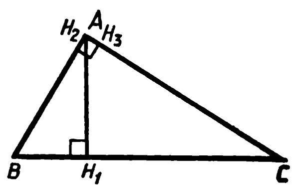
Медианы, биссектрисы и высоты треугольника обладают замечательными свойствами: в любом треугольнике медианы пересекаются в одной точке (рис. 59, *б*); биссектрисы пересекаются в одной точке (рис. 60, *б*); высоты или их продолжения также пересекаются в одной точке (рис. 62, *а*, *б*, *в*). Эти утверждения мы докажем в VIII классе.



а)



б)



в)

AH_1, BH_2, CH_3 — высоты треугольника ABC

Рис. 62

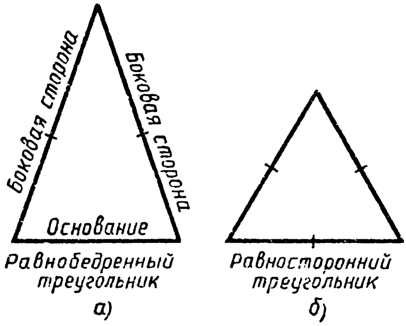


Рис. 63

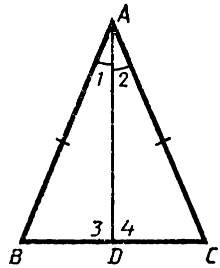


Рис. 64

18. Свойства равнобедренного треугольника. Треугольник называется *равнобедренным*, если две его стороны равны. Равные стороны называются *боковыми сторонами*, а третья сторона — *основанием* равнобедренного треугольника (рис. 63, *а*). Треугольник, все стороны которого равны, называется *равносторонним* (рис. 63, *б*).

Докажем две теоремы о свойствах равнобедренного треугольника.

Теорема. ***В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.***

Доказательство. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с основанием BC и докажем, что $\angle B = \angle C$. Пусть AD — биссектриса треугольника ABC (рис. 64). Треугольники ABD и ACD равны по первому признаку равенства треугольников ($AB = AC$ по условию, AD — общая сторона, $\angle 1 = \angle 2$, так как AD — биссектриса). Из равенства этих треугольников следует, что $\angle B = \angle C$. Теорема доказана.

Теорема. ***В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является медианой и высотой.***

Доказательство. Обратимся снова к рисунку 64, на котором ABC — равнобедренный треугольник с основанием BC, AD — его биссектриса. Из равенства треугольников ABD и ACD следует, что $BD = DC$ и $\angle 3 = \angle 4$. Равенство $BD = DC$ означает, что точка D — середина стороны BC, и AD — медиана треугольника ABC. Так как углы 3 и 4 смежные и равны друг другу, то они прямые. Следовательно, отрезок AD является также высотой треугольника ABC. Теорема доказана.

Мы установили, что биссектриса, медиана и высота равнобедренного треугольника, проведенные к основанию, совпадают. Поэтому справедливы также утверждения:

1. *Высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является медианой и биссектрисой.*

2. *Медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является высотой и биссектрисой.*

Практические задания

100. Начертите прямую a и отметьте точки A и B, лежащие по разные стороны от прямой a. С помощью чертежного угольника проведите из этих точек перпендикуляры к прямой a.

101. Начертите треугольник. С помощью масштабной линейки отметьте середины сторон и проведите медианы треугольника.

102. Начертите треугольник. С помощью транспортира и линейки проведите его биссектрисы.

103. Начертите треугольник ABC с тремя острыми углами и треугольник MNP, у которого угол M тупой. С помощью чертежного угольника проведите высоты каждого треугольника.

104. Начертите три равнобедренных треугольника так, чтобы угол, лежащий против основания, был: а) острым; б) прямым; в) тупым.

Задачи

105. Точки A и C лежат по одну сторону от прямой a. Перпендикуляры AB и CD к прямой a равны. а) Докажите, что $\triangle ABD = \triangle CDB$; б) найдите $\angle ABC$, если $\angle ADB = 44°$.

106. Медиана AD треугольника ABC продолжена за сторону BC на отрезок DE, равный AD, и точка E соединена с точкой C. а) Докажите, что $\triangle ABD = \triangle ECD$; б) найдите $\angle ACE$, если $\angle ACD = 56°$, $\angle ABD = 40°$.

107. В равнобедренном треугольнике основание в два раза меньше боковой стороны, а периметр равен 50 см. Найдите стороны треугольника.

108. Периметр равнобедренного треугольника ABC с основанием BC равен 40 см, а периметр равностороннего треугольника BCD равен 45 см. Найдите стороны AB и BC.

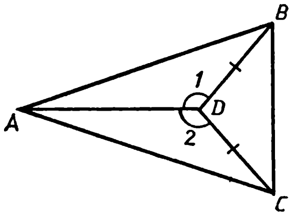


Рис. 65

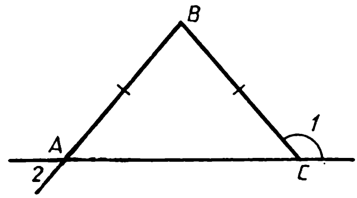


Рис. 66

109. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC проведена медиана AM. Найдите медиану AM, если периметр треугольника ABC равен 32 см, а периметр треугольника ABM равен 24 см.

110. Докажите, что если медиана треугольника совпадает с его высотой, то треугольник равнобедренный.

111. На рисунке 65 $CD=BD$, $\angle 1=\angle 2$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

112. На рисунке 66 $AB=BC$, $\angle 1=130°$. Найдите $\angle 2$.

113. Точки M и P лежат по одну сторону от прямой b. Перпендикуляры MN и PQ, проведенные к прямой b, равны. Точка O — середина отрезка NQ. а) Докажите, что $\angle OMP=\angle OPM$; б) найдите $\angle NOM$, если $\angle MOP=105°$.

114. Докажите, что в равных треугольниках медианы, проведенные к равным сторонам, равны.

115. Медиана AM треугольника ABC равна отрезку BM. Докажите, что один из углов треугольника ABC равен сумме двух других углов.

116. Докажите, что в равностороннем треугольнике все углы равны.

117. На рисунке 67 $AB=BC$, $CD=DE$. Докажите, что $\angle BAC=\angle CED$.

118. На основании BC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM=CN$. Докажите, что: а) $\triangle BAM=\triangle CAN$; б) треугольник AMN равнобедренный.

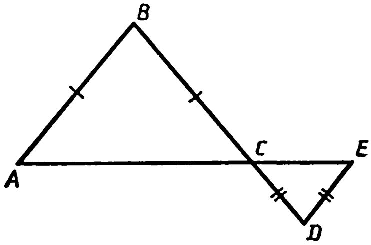


Рис. 67

119. В равнобедренном треугольнике DEK с основанием DK отрезок EF — биссектриса, $DK=16$ см, $\angle DEF=43°$. Найдите KF, $\angle DEK$, $\angle EFD$.

120. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана BD. На сторонах AB и CB отмечены соответственно точки E и F так, что $AE=CF$. Докажите, что:

а) $\triangle BDE=\triangle BDF$;

б) $\triangle ADE=\triangle CDF$.

§ 3. ВТОРОЙ И ТРЕТИЙ ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

19. Второй признак равенства треугольников.

Теорема. ***Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.***

Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB=A_1B_1$, $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$ (рис. 68). Докажем, что $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$.

Наложим треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1, сторона AB — с равной ей стороной A_1B_1, а вершины C и C_1 оказались по одну сторону от прямой A_1B_1.

Так как $\angle A=\angle A_1$ и $\angle B=\angle B_1$, то сторона AC наложится на луч A_1C_1, а сторона BC — на луч B_1C_1. Поэтому вершина C — общая точка сторон AC и BC — окажется лежащей как на луче A_1C_1, так и на луче B_1C_1 и, следовательно, совместится с общей точкой этих лучей — вершиной C_1. Значит, совместятся стороны AC и A_1C_1, BC и B_1C_1. Итак, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместятся, следовательно, они равны. Теорема доказана.

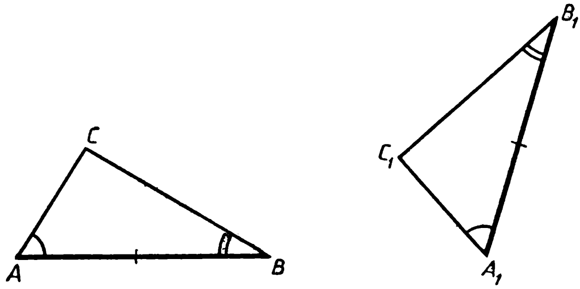


Рис. 68

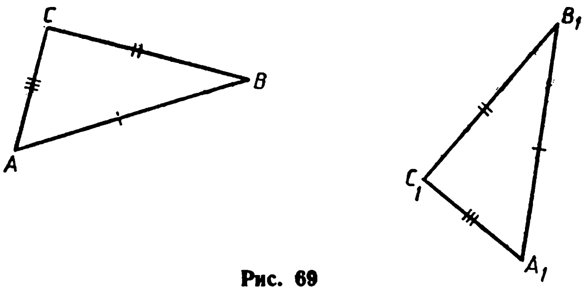


Рис. 69

20. Третий признак равенства треугольников.

Теорема. ***Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.***

Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $CA=C_1A_1$ (рис. 69). Докажем, что $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$.

Приложим треугольник ABC к треугольнику $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1, вершина B — с B_1, а вершины C и C_1 оказались по разные стороны от прямой A_1B_1 (рис. 70).

Возможны три случая: луч C_1C проходит внутри угла $A_1C_1B_1$ (рис. 70, *а*); луч C_1C совпадает с одной из сторон этого угла (рис. 70, *б*); луч C_1C проходит вне угла $A_1C_1B_1$ (рис. 70, *в*). Рассмотрим первый случай (остальные случаи рассмотрите самостоятельно).

Так как по условию теоремы $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$, то треугольники A_1C_1C и B_1C_1C — равнобедренные (см. рис. 70, *а*). По теореме о свойстве углов равнобедренного треугольника $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$, поэтому $\angle A_1CB_1=\angle A_1C_1B_1$. Итак, $AC=$

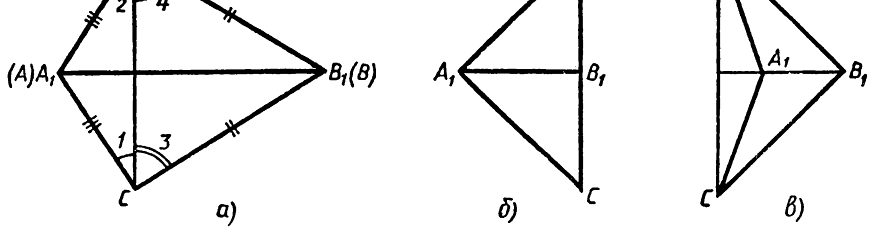
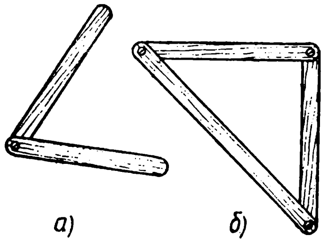
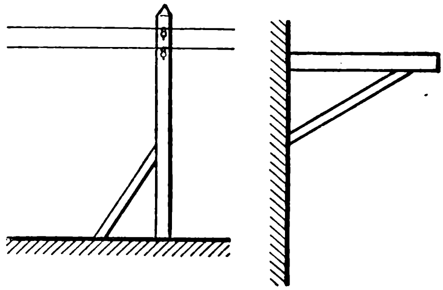


Рис. 70



а) *б)*

Рис. 71



а) *б)*

Рис. 72

$=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$, $\angle C=\angle C_1$. Следовательно, $\triangle ABC=$ $=\triangle A_1B_1C_1$ по первому признаку равенства треугольников. Теорема доказана.

Из третьего признака равенства треугольников следует, что *треугольник — жесткая фигура.* Поясним, что это означает. Представим себе две рейки, у которых два конца скреплены гвоздем (рис. 71, *а*). Такая конструкция не является жесткой: сдвигая или раздвигая свободные концы реек, мы можем менять угол между ними. Теперь возьмем еще одну рейку и скрепим ее концы со свободными концами первых двух реек (рис. 71, *б*). Полученная конструкция — треугольник — будет уже жесткой. В ней нельзя сдвинуть или раздвинуть никакие две стороны, т. е. нельзя изменить ни один угол. Действительно, если бы это удалось, то мы получили бы новый треугольник, не равный исходному. Но это невозможно, так как новый треугольник должен быть равен исходному по третьему признаку равенства треугольников.

Это свойство — жесткость треугольника — широко используется на практике. Так, чтобы закрепить столб в вертикальном положении, к нему ставят подпорку (рис. 72, *а*); такой же принцип используется при установке кронштейна (рис. 72, *б*).

Задачи

121. Отрезки AB и CD пересекаются в середине O отрезка AB, $\angle OAD=\angle OBC$. а) Докажите, что $\triangle CBO=\triangle DAO$; б) найдите BC и CO, если $CD=26$ см, $AD=15$ см.

122. На рисунке 53 (с. 30) $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$. а) Докажите, что $\triangle ABC=\triangle CDA$; б) найдите AB и BC, если $AD=19$ см, $CD=11$ см.

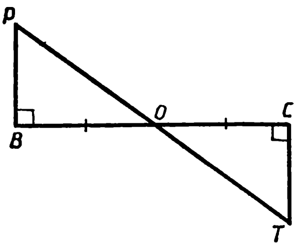


Рис. 73

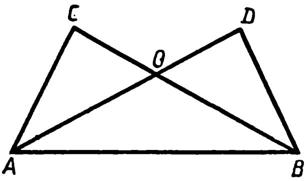


Рис. 74

123. На биссектрисе угла A взята точка D, а на сторонах этого угла — точки B и C такие, что $\angle ADB = \angle ADC$. Докажите, что $BD = CD$.

124. По данным рисунка 73 докажите, что $OP = OT$, $\angle P = \angle T$.

125. На рисунке 74 $\angle DBC = \angle DAC$, $BO = AO$. Докажите, что $\angle C = \angle D$ и $AC = BD$.

126. На рисунке 74 $\angle DAB = \angle CBA$, $\angle CAB = \angle DBA$, $CA = 13$ см. Найдите DB.

127. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$. На сторонах AB и A_1B_1 отмечены точки D и D_1 так, что $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$. Докажите, что $\triangle BCD = \triangle B_1C_1D_1$.

128. Докажите, что в равных треугольниках биссектрисы, проведенные к соответственно равным сторонам, равны.

129. Отрезки AC и BD пересекаются в середине O отрезка AC, $\angle BCO = \angle DAO$. Докажите, что $\triangle BOA = \triangle DOC$.

130. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ отрезки CO и C_1O_1 — медианы, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$ и $\angle C = \angle C_1$. Докажите, что: а) $\triangle ACO = \triangle A_1C_1O_1$; б) $\triangle BCO = \triangle B_1C_1O_1$.

131. В треугольниках DEF и MNP $EF = NP$, $DF = MP$ и $\angle F = \angle P$. Биссектрисы углов E и D пересекаются в точке O, а биссектрисы углов M и N — в точке K. Докажите, что $\angle DOE = \angle MKN$.

132. Прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла A, пересекает стороны угла в точках M и N. Докажите, что треугольник AMN — равнобедренный.

133. Докажите, что если биссектриса треугольника совпадает с его высотой, то треугольник — равнобедренный.

134. Докажите, что равнобедренные треугольники равны, если основание и прилежащий к нему угол одного треугольника соответственно равны основанию и прилежащему к нему углу другого треугольника.

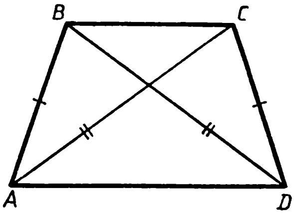


Рис. 75

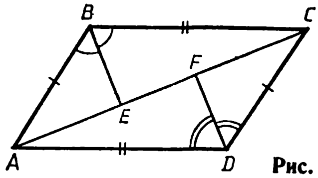


Рис. 76

135. Докажите, что если сторона одного равностороннего треугольника равна стороне другого равностороннего треугольника, то треугольники равны.

136. На рисунке 52 $AB=AC$, $BD=DC$ и $\angle BAC=50°$. Найдите $\angle CAD$.

137. На рисунке 53 $BC=AD$, $AB=CD$. Докажите, что $\angle B=\angle D$.

138. На рисунке 75 $AB=CD$ и $BD=AC$. Докажите, что:
а) $\angle CAD=\angle ADB$; б) $\angle BAC=\angle CDB$.

139. На рисунке 76 $AB=CD$, $AD=BC$, BE — биссектриса угла ABC, а DF — биссектриса угла ADC. Докажите, что:
а) $\angle ABE=\angle ADF$; б) $\triangle ABE=\triangle CDF$.

140. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ медианы BM и B_1M_1 равны; $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$. Докажите, что $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$.

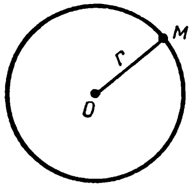
141. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ отрезки AD и A_1D_1 — биссектрисы, $AB=A_1B_1$, $BD=B_1D_1$ и $AD=A_1D_1$. Докажите, что $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$.

142. Равнобедренные треугольники ADC и CBD имеют общее основание DC. Прямая AB пересекает отрезок CD в точке O. Докажите, что: а) $\angle ADB=\angle ACB$; б) $DO=OC$.

§ 4. ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

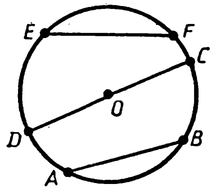
21. Окружность. Предложение, в котором разъясняется смысл того или иного выражения или названия, называется *определением.* Мы уже встречались с определениями, например с определением угла, смежных углов, равнобедренного треугольника и т. д. Дадим определение еще одной геометрической фигуры — окружности.

Определение. ***Окружностью называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек, расположенных на заданном расстоянии от данной точки.***



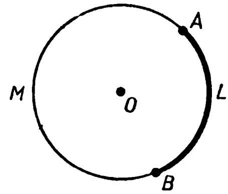
Окружность радиуса r с центром O

Рис. 77



AB и EF — хорды, CD — диаметр

Рис. 78



ALB и AMB-дуги окружности, ограниченные точками A и B

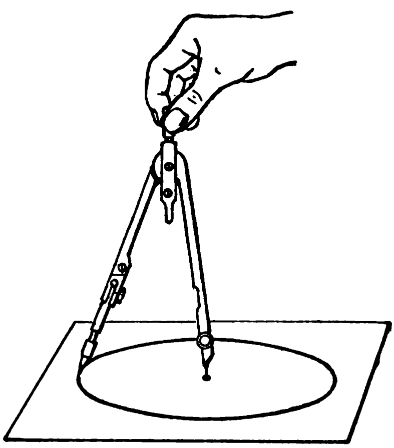
Рис. 79

Данная точка называется *центром* окружности, а отрезок, соединяющий центр с какой-либо точкой окружности,— *радиусом* окружности (рис. 77). Из определения окружности следует, что все радиусы имеют одну и ту же длину.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется ее *хордой.* Хорда, проходящая через центр окружности, называется *диаметром.* На рисунке 78 отрезки AB и EF — хорды окружности, отрезок CD — диаметр окружности. Очевидно, диаметр окружности в два раза больше ее радиуса. Центр окружности является серединой любого диаметра.

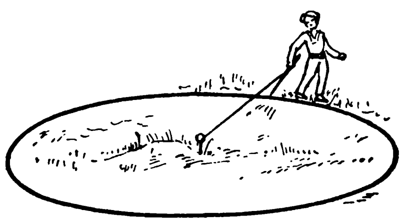
Любые две точки окружности делят ее на две части. Каждая из этих частей называется *дугой* окружности. На рисунке 79 ALB и AMB — дуги, ограниченные точками A и B.

Для изображения окружности на чертеже пользуются циркулем (рис. 80). Чтобы провести окружность на местности, можно



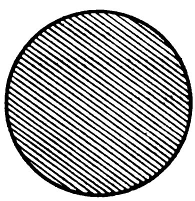
Построение окружности с помощью циркуля

Рис. 80



Построение окружности с помощью веревки

Рис. 81



Круг

Рис. 82

воспользоваться веревкой (рис. 81). Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется *кругом* (рис. 82).

22. Построения циркулем и линейкой. Мы уже имели дело с геометрическими построениями: проводили прямые, откладывали отрезки, равные данным, чертили углы, треугольники и другие фигуры. При этом мы пользовались масштабной линейкой, циркулем, транспортиром, чертежным угольником. Оказывается, что многие построения можно выполнить с помощью только циркуля и линейки без масштабных делений. Поэтому в геометрии специально выделяют те задачи на построение, которые решаются с помощью только этих двух инструментов. Что можно делать с их помощью? Ясно, что линейка позволяет провести произвольную прямую, а также построить прямую, проходящую через две данные точки; с помощью циркуля можно провести окружность произвольного радиуса, а также окружность с центром в данной точке и радиусом, равным данному отрезку. Выполняя эти несложные операции, мы сможем решить много интересных задач на построение: построить угол, равный данному, через данную точку провести прямую, перпендикулярную к данной прямой, разделить данный отрезок пополам и другие задачи. Начнем с простой задачи.

Задача. *На данном луче от его начала отложить отрезок, равный данному.*

Решение. Изобразим фигуры, данные в условии задачи: луч OC и отрезок AB (рис. 83, *а*). Затем циркулем построим окружность радиуса AB с центром O (рис. 83, *б*). Эта окружность пересечет луч OC в некоторой точке D. Отрезок OD — искомый.

23. Примеры задач на построение.

Построение угла, равного данному.

Задача. *Отложить от данного луча угол, равный данному.*

Решение. Данный угол с вершиной A и луч OM изображены на рисунке 84. Требуется построить угол, равный углу A, так, чтобы одна из сторон совпала с лучом OM.

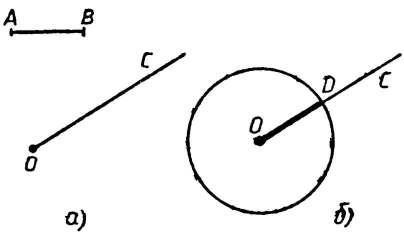


Рис. 83

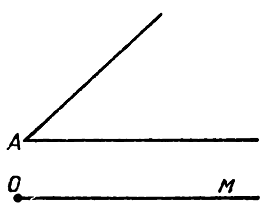


Рис. 84

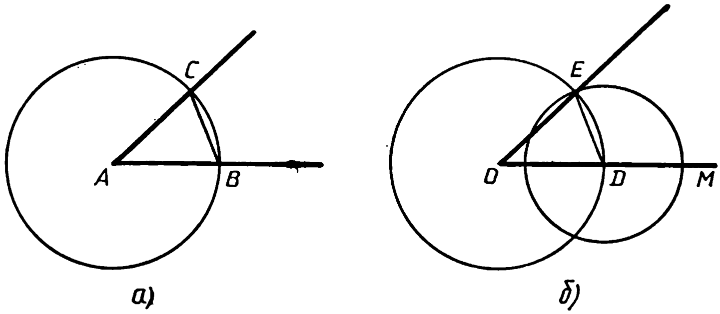


Рис. 85

Проведем окружность произвольного радиуса с центром в вершине A данного угла. Эта окружность пересекает стороны угла в точках B и C (рис. 85, *а*). Затем проведем окружность того же радиуса с центром в начале данного луча OM. Она пересекает луч в точке D (рис. 85, *б*). После этого построим окружность с центром D, радиус которой равен BC. Окружности с центрами O и D пересекаются в двух точках. Одну из этих точек обозначим буквой E. Докажем, что угол MOE — искомый.

Рассмотрим треугольники ABC и ODE. Отрезки AB и AC являются радиусами окружности с центром A, а OD и OE — радиусами окружности с центром O (см. рис. 85, *б*). Так как по построению эти окружности имеют равные радиусы, то $AB=OD$, $AC=OE$. Также по построению $BC=DE$. Следовательно, $\triangle ABC=\triangle ODE$ по трем сторонам. Поэтому $\angle DOE=\angle BAC$, т. е. построенный угол MOE равен данному углу A.

То же построение можно выполнить и на местности, если вместо циркуля воспользоваться веревкой.

Построение биссектрисы угла.

Задача. *Построить биссектрису данного угла.*

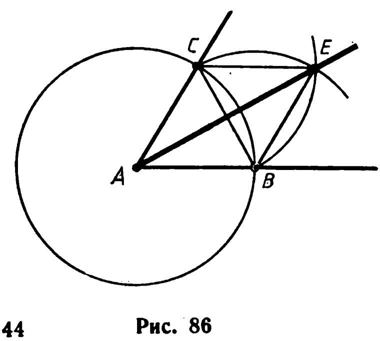


Рис. 86

Решение. Проведем окружность произвольного радиуса с центром в вершине A данного угла. Она пересечет стороны угла в точках B и C (рис. 86). Затем проведем две окружности одинакового радиуса BC с центрами в точках B и C (на рисунке изображены лишь части этих окружностей). Они пересекутся в двух точках. Ту из этих точек, которая лежит внутри угла BAC, обозначим буквой E. Докажем, что луч AE является биссектрисой данного угла.

Рассмотрим треугольники ACE и ABE. Они равны по трем сторонам. В самом деле, AE — общая сторона; AC и AB равны, как радиусы одной и той же окружности; $CE = BE$ по построению. Из равенства треугольников ACE и ABE следует, что $\angle CAE = \angle BAE$, т. е. луч AE — биссектриса данного угла.

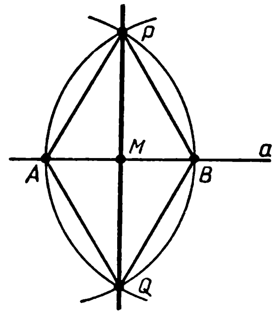


Рис. 87

Замечание. Можно ли с помощью циркуля и линейки разделить данный угол на два равных угла? Ясно, что можно,— для этого нужно провести биссектрису этого угла. Данный угол можно разделить также на четыре равных угла. Для этого нужно разделить его пополам, а затем каждую половину разделить еще раз пополам. А можно ли с помощью циркуля и линейки разделить данный угол на три равных угла? Эта задача, получившая название *задачи о трисекции угла*, в течение многих веков привлекала внимание математиков. Лишь в прошлом веке было доказано, что для произвольного угла такое построение невозможно.

Построение перпендикулярных прямых.

Задача. *Даны прямая и точка на ней. Построить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную к данной прямой.*

Решение. На лучах данной прямой a, исходящих из данной точки M, отложим равные отрезки MA и MB (рис. 87). Затем построим две окружности с центрами A и B радиуса AB. Они пересекаются в двух точках: P и Q. Проведем прямую через точку M и одну из этих точек, например прямую MP (см. рис. 87), и докажем, что эта прямая искомая.

В самом деле, так как медиана PM равнобедренного треугольника PAB является также высотой, то $PM \perp a$.

Построение середины отрезка.

Задача. *Построить середину данного отрезка.*

Решение. Пусть AB — данный отрезок. Построим две окружности с центрами A и B радиуса AB (рис. 88). Они пересекаются в точках P и Q. Проведем прямую PQ. Точка O пересечения этой прямой с отрезком AB и есть искомая середина отрезка AB.

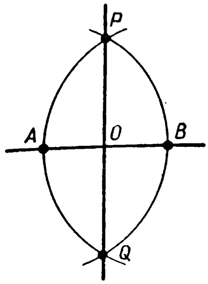


Рис. 88

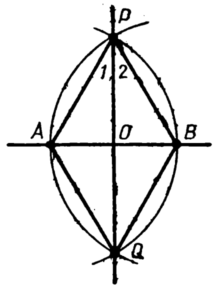


Рис. 89

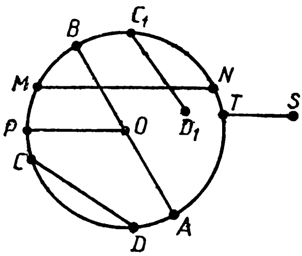


Рис. 90

В самом деле, треугольники APQ и BPQ равны по трем сторонам, поэтому $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 89). Следовательно, отрезок PO — биссектриса равнобедренного треугольника APB, а значит, и медиана, т. е. точка O — середина отрезка AB.

Вопросы и задачи

143. Какие из отрезков, изображенных на рисунке 90, являются: а) хордами окружности; б) диаметрами окружности; в) радиусами окружности?

144. Отрезки AB и CD — диаметры окружности. Докажите, что: а) хорды BD и AC равны; б) хорды AD и BC равны; в) $\angle BAD = \angle BCD$.

145. Отрезок MK — диаметр окружности с центром O, а MP и PK — равные хорды этой окружности. Найдите $\angle POM$.

146. Отрезки AB и CD — диаметры окружности с центром O. Найдите периметр треугольника AOD, если известно, что $CB = 13$ см, $AB = 16$ см.

147. На окружности с центром O отмечены точки A и B так, что угол AOB — прямой. Отрезок BC — диаметр окружности. Докажите, что хорды AB и AC равны.

148. На прямой даны две точки A и B. На продолжении луча BA отложите отрезок BC так, чтобы $BC = 2AB$.

149. Даны прямая a, точка B, не лежащая на ней, и отрезок PQ. Постройте точку M на прямой a так, чтобы $BM = PQ$. Всегда ли задача имеет решение?

150. Даны окружность, точка A, не лежащая на ней, и отрезок PQ. Постройте точку M на окружности так, чтобы $AM = PQ$. Всегда ли задача имеет решение?

151. Даны острый угол BAC и луч XY. Постройте угол YXZ так, чтобы $\angle YXZ = 2\angle BAC$.

152. Дан тупой угол AOB. Постройте луч OX так чтобы углы XOA и XOB были равными тупыми углами.

153. Даны прямая a и точка M, не лежащая на ней. Постройте прямую, проходящую через точку M и перпендикулярную к прямой a.

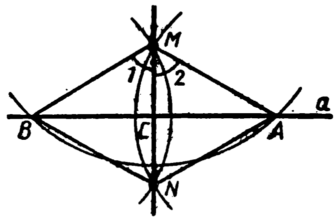


Рис. 91

Решение. Построим окружность с центром M, пересекающую прямую a в двух точках, которые обозначим буквами A и B (рис. 91). Затем построим две окружности с центрами A и B, проходящие через точку M. Эти окружности пересекаются в точке M и еще в одной точке N. Проведем прямую MN и докажем, что эта прямая искомая. В самом деле, треугольники AMN и BMN равны по трем сторонам, поэтому $\angle 1 = \angle 2$. Отсюда следует, что отрезок MC (C — точка пересечения прямых a и MN) является биссектрисой равнобедренного треугольника AMB, а значит, и высотой. Таким образом, $MN \perp AB$.

154. Дан треугольник ABC. Постройте: а) биссектрису AK; б) медиану BM; в) высоту CH треугольника.

155. С помощью циркуля и линейки постройте угол, равный: а) 45°; б) 22°30′.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ II

1. Объясните, какая фигура называется треугольником. Начертите треугольник и покажите его стороны, вершины и углы. Что такое периметр треугольника?
2. Какие треугольники называются равными?
3. Что такое теорема и доказательство теоремы?
4. Сформулируйте и докажите теорему, выражающую первый признак равенства треугольников.
5. Объясните, какой отрезок называется перпендикуляром, проведенным из данной точки к данной прямой.
6. Сформулируйте и докажите теорему о перпендикуляре, проведенном из данной точки к данной прямой.
7. Какой отрезок называется медианой треугольника? Сколько медиан имеет треугольник?
8. Какой отрезок называется биссектрисой треугольника? Сколько биссектрис имеет треугольник?

9. Какой отрезок называется высотой треугольника? Сколько высот имеет треугольник?
10. Какой треугольник называется равнобедренным? Как называются его стороны?
11. Какой треугольник называется равносторонним?
12. Докажите, что углы при основании равнобедренного треугольника равны.
13. Сформулируйте и докажите теорему о биссектрисе равнобедренного треугольника.
14. Сформулируйте и докажите теорему, выражающую второй признак равенства треугольников.
15. Сформулируйте и докажите теорему, выражающую третий признак равенства треугольников.
16. Что такое определение? Дайте определение окружности. Что такое центр, радиус, хорда и диаметр окружности?
17. Объясните, как отложить на данном луче от его начала отрезок, равный данному.
18. Объясните, как отложить от данного луча угол, равный данному.
19. Объясните, как построить биссектрису данного угла.
20. Объясните, как построить прямую, проходящую через данную точку, лежащую на данной прямой, и перпендикулярную к этой прямой.
21. Объясните, как построить середину данного отрезка.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

156. Периметр треугольника ABC равен 15 см. Сторона BC больше стороны AB на 2 см, а сторона AB меньше стороны AC на 1 см. Найдите стороны треугольника.

157. В равнобедренном треугольнике основание больше боковой стороны на 2 см, но меньше суммы боковых сторон на 3 см. Найдите стороны треугольника.

158. Основание равнобедренного треугольника равно 8 см. Медиана, проведенная к боковой стороне, разбивает треугольник на два треугольника так, что периметр одного треугольника на 2 см больше периметра другого. Найдите боковую сторону данного треугольника.

159. Докажите, что два равнобедренных треугольника равны, если боковая сторона и угол, противолежащий основанию, одно-

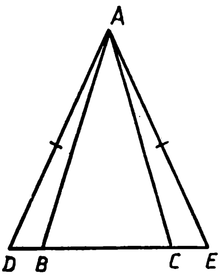


Рис. 92

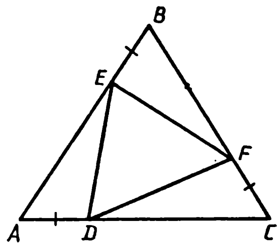


Рис. 93

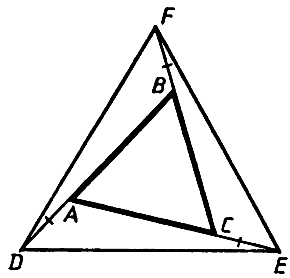


Рис. 94

го треугольника соответственно равны боковой стороне и углу, противолежащему основанию, другого треугольника.

160. Прямая a проходит через середину отрезка AB и перпендикулярна к нему. Докажите, что: а) каждая точка прямой a равноудалена от точек A и B; б) каждая точка, равноудаленная от точек A и B, лежит на прямой a.

161. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ медианы AM и A_1M_1 равны, $BC=B_1C_1$ и $\angle AMB=\angle A_1M_1B_1$. Докажите, что $\triangle ABC=$ $=\triangle A_1B_1C_1$.

162. На рисунке 92 треугольник ADE равнобедренный, DE — основание. Докажите, что: а) если $BD=CE$, то $\angle CAD=$ $=\angle BAE$ и $AB=AC$; б) если $\angle CAD=\angle BAE$, то $BD=CE$ и $AB=AC$.

163. Докажите, что середины сторон равнобедренного треугольника являются вершинами другого равнобедренного треугольника.

164. На сторонах равностороннего треугольника ABC отложены равные отрезки AD, BE и CF, как показано на рисунке 93. Точки D, E, F соединены отрезками. Докажите, что треугольник DEF — равносторонний.

165. Отрезки AB и CD пересекаются в их общей середине O. На отрезках AC и BD отмечены точки K и K_1 так, что $AK=$ $=BK_1$. Докажите, что: а) $OK=OK_1$; б) точка O лежит на прямой KK_1.

166. Отрезки AB и CD пересекаются в их общей середине O. Точки M и N — середины отрезков AC и BD. Докажите, что точка O — середина отрезка MN.

167. Стороны равностороннего треугольника ABC продолжены, как показано на рисунке 94, на равные отрезки AD, CE, BF. Докажите, что треугольник DEF — равносторонний.

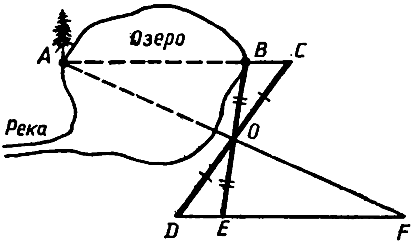


Рис. 95

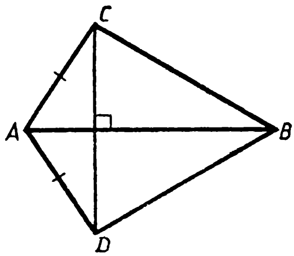


Рис. 96

168. В треугольнике ABC $\angle A=38°$, $\angle B=110°$, $\angle C=32°$. На стороне AC отмечены точки D и E так, что точка D лежит на отрезке AE, $BD=DA$, $BE=EC$. Найдите $\angle DBE$.

169. На рисунке 95 $OC=OD$, $OB=OE$. Докажите, что $AB=EF$. Объясните способ измерения ширины озера (отрезка AB на рисунке 95), основанный на этой задаче.

170. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $AB=A_1B_1$, $\angle A=\angle A_1$, $AD=A_1D_1$, где AD и A_1D_1 — биссектрисы треугольников.

171. В треугольниках ABC и ADC стороны BC и AD равны и пересекаются в точке O, $\angle OAC=\angle OCA$. Докажите, что треугольники ABO и CDO равны.

172. На рисунке 96 $AC=AD$, $AB\perp CD$. Докажите, что $BC=BD$ и $\angle ACB=\angle ADB$.

173*. Докажите, что угол, смежный с углом треугольника, больше каждого из двух других углов треугольника.

174*. Докажите, что $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$, если $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $BC=B_1C_1$.

175*. На сторонах угла XOY отмечены точки A, B, C и D так, что $OA=OB$, $AC=BD$ (рис. 97). Прямые AD и BC пересекаются в точке E. Докажите, что луч OE — биссектриса угла XOY. Используя эту задачу, опишите способ построения биссектрисы угла.

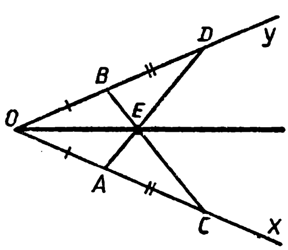


Рис. 97

176*. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $AM=A_1M_1$, где AM и A_1M_1 — медианы треугольников.

177*. Даны два треугольника: ABC и $A_1B_1C_1$. Известно, что $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты соответственно точки K и L, а на сторонах A_1C_1 и B_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ — точки K_1 и L_1 так, что $AK=A_1K_1$, $LC=L_1C_1$. Докажите, что: а) $KL=K_1L_1$; б) $AL=A_1L_1$.

178*. Даны три точки A, B, C, лежащие на одной прямой, и точка D, не лежащая на этой прямой. Докажите, что по крайней мере два из трех отрезков AD, BD и CD не равны друг другу.

179*. На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки P и Q так, что $\angle PXB=\angle QXC$, где X — середина основания BC. Докажите, что $BQ=CP$.

180. Постройте окружность данного радиуса, проходящую через данную точку, с центром на данной прямой.

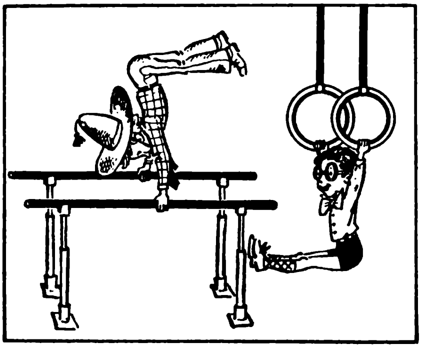
181. Постройте окружность данного радиуса, проходящую через две данные точки.

182. Даны прямая a, точки A, B и отрезок PQ. Постройте треугольник ABC так, чтобы вершина C лежала на прямой a и $AC=PQ$.

183. Даны окружность, точки A, B и отрезок PQ. Постройте треугольник ABC так, чтобы вершина C лежала на данной окружности и $AC=PQ$.

184. На стороне BC треугольника ABC постройте точку, равноудаленную от вершин A и C.

185. С помощью циркуля и линейки разделите данный отрезок на четыре равные части.



Глава III

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

§ 1. ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ДВУХ ПРЯМЫХ

24. Определение параллельных прямых. В п. 1 мы отмечали, что две прямые либо имеют одну общую точку, т. е. пересекаются, либо не имеют ни одной общей точки, т. е. не пересекаются.

Определение. *Две прямые на плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.*

Параллельность прямых a и b обозначают так: $a \parallel b$.

На рисунке 98 изображены прямые a и b, перпендикулярные к прямой c. В п. 12 мы установили, что такие прямые a и b не пересекаются, т. е. они параллельны.

Наряду с параллельными прямыми часто рассматривают параллельные отрезки. Два отрезка называются *параллельными*, если они лежат на параллельных прямых. На рисунке 99, *а* отрезки AB и CD параллельны ($AB \parallel CD$), а отрезки MN и CD не параллельны. Аналогично определяется параллельность отрезка и прямой (рис. 99, *б*), луча и прямой, отрезка и луча, двух лучей (рис. 99, *в*).

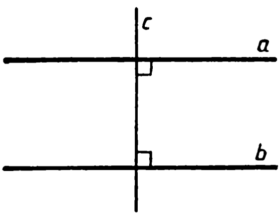


Рис. 98

25. Признаки параллельности двух прямых. Прямая c называется *секущей*

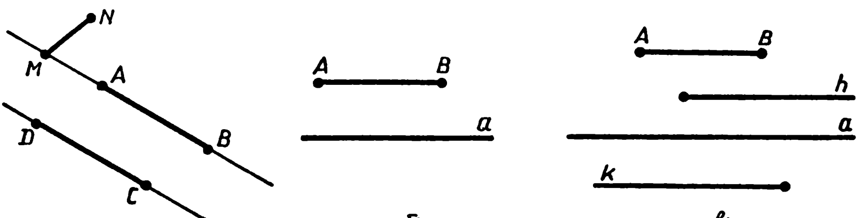


Рис. 99

по отношению к прямым a и b, если она пересекает их в двух точках (рис. 100). При пересечении прямых a и b секущей c образуется восемь углов, которые на рисунке 100 обозначены цифрами. Некоторые пары этих углов имеют специальные названия:

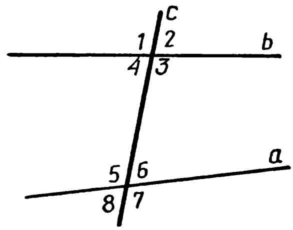


Рис. 100

накрест лежащие углы: 3 и 5, 4 и 6;
односторонние углы: 4 и 5, 3 и 6;
соответственные углы: 1 и 5, 4 и 8, 2 и 6, 3 и 7.

Рассмотрим три признака параллельности двух прямых, связанные с этими парами углов.

Теорема. ***Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.***

Доказательство. Пусть при пересечении прямых a и b секущей AB накрест лежащие углы равны: $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 101, *а*). Докажем, что $a \parallel b$.

Если углы 1 и 2 прямые (рис. 101, *б*), то прямые a и b перпендикулярны к прямой AB и, следовательно, параллельны. Рассмотрим случай, когда углы 1 и 2 не прямые. Из середины O отрезка AB проведем перпендикуляр OH к прямой a (рис. 101, *в*). На прямой b от точки B отложим отрезок BH_1, равный отрезку AH, как показано на рисунке 101, *в*, и проведем отрезок OH_1. Треугольники OHA и OH_1B равны по двум сторонам и углу между ними ($AO = BO$, $AH = BH_1$, $\angle 1 = \angle 2$), поэтому $\angle 3 = \angle 4$ и $\angle 5 = \angle 6$. Из равенства $\angle 3 = \angle 4$ следует, что точка H_1 лежит на продолжении луча OH, т. е. точки H, O и H_1 лежат на одной прямой, а из равенства $\angle 5 = \angle 6$ следует, что угол 6 — прямой (так как угол 5 — прямой). Значит, прямые a и b перпендикулярны к прямой HH_1, поэтому они параллельны. Теорема доказана.

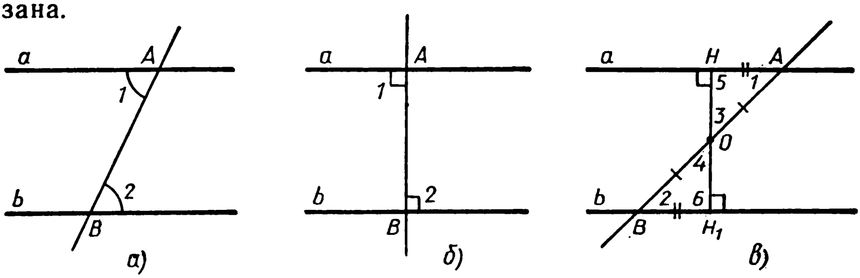


Рис. 101

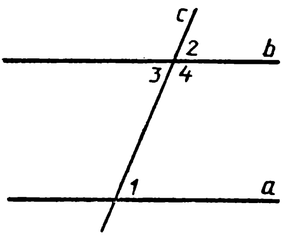


Рис. 102

Теорема. ***Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.***

Доказательство. Пусть при пересечении прямых a и b секущей c соответственные углы равны, например $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 102). Так как углы 2 и 3 — вертикальные, то $\angle 2 = \angle 3$. Из этих двух равенств следует, что $\angle 1 = \angle 3$. Но углы 1 и 3 — накрест лежащие, поэтому прямые a и b параллельны. Теорема доказана.

Теорема. ***Если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.***

Доказательство. Пусть при пересечении прямых a и b секущей c сумма односторонних углов равна 180°, например $\angle 1 + \angle 4 = 180°$ (см. рис. 102). Так как углы 3 и 4 — смежные, то $\angle 3 + \angle 4 = 180°$. Из этих двух равенств следует, что накрест лежащие углы 1 и 3 равны, поэтому прямые a и b параллельны. Теорема доказана.

26. Практические способы построения параллельных прямых. Признаки параллельности прямых лежат в основе способов построения параллельных прямых с помощью различных инструментов, используемых на практике. Рассмотрим, например, способ построения параллельных прямых с помощью чертежного угольника и линейки.

Чтобы построить прямую, проходящую через точку M и параллельную данной прямой a, приложим чертежный угольник к прямой a, а к нему линейку так, как показано на рисунке 103. Затем, передвигая угольник вдоль линейки, добьемся того, чтобы точ-

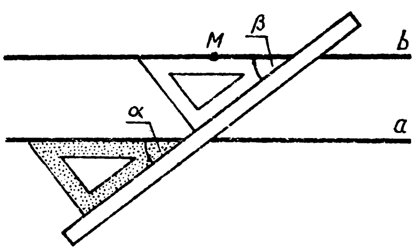


Рис. 103

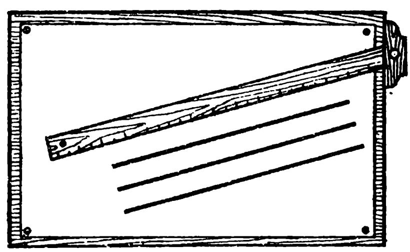


Рис. 104

ка M оказалась на стороне угольника, и проведем прямую b. Прямые a и b параллельны, так как соответственные углы, обозначенные на рисунке 103 буквами α и β, равны.

На рисунке 104 показан способ построения параллельных прямых при помощи *рейсшины*. Этим способом пользуются в чертежной практике.

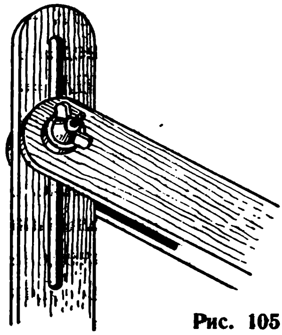


Рис. 105

Аналогичный способ применяется при выполнении столярных работ, где для разметки параллельных прямых используется *малка* (две деревянные планки, скрепленные шарниром, рис. 105).

Вопросы и задачи

186. На рисунке 106 прямые a и b пересечены прямой c. Докажите, что $a \parallel b$, если: а) $\angle 1 = 37°$, $\angle 7 = 143°$; б) $\angle 1 = \angle 6$; в) $\angle 1 = 45°$, а угол 7 в три раза больше угла 3.

187. По данным рисунка 107 докажите, что $AB \parallel DE$.

188. Отрезки AB и CD пересекаются в их общей середине. Докажите, что прямые AC и BD параллельны.

189. Используя данные рисунка 108, докажите, что $BC \parallel AD$.

190. На рисунке 109 $AB = BC$, $AD = DE$, $\angle C = 70°$, $\angle EAC = 35°$. Докажите, что $DE \parallel AC$.

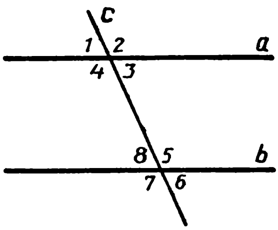


Рис. 106

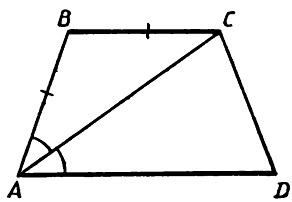


Рис. 108

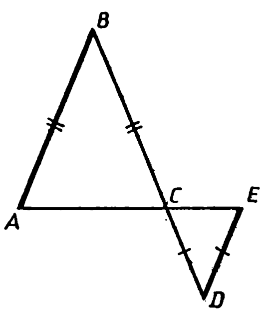


Рис. 107

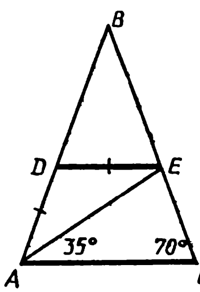


Рис. 109

191. Отрезок BK — биссектриса треугольника ABC. Через точку K проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке M так, что $BM = MK$. Докажите, что $KM \parallel AB$.

192. В треугольнике ABC угол A равен 40°, а угол BCE, смежный с углом ACB, равен 80°. Докажите, что биссектриса угла BCE параллельна прямой AB.

193. В треугольнике ABC $\angle A = 40°$, $\angle B = 70°$. Через вершину B проведена прямая BD так, что луч BC — биссектриса угла ABD. Докажите, что $AC \parallel BD$.

194. Начертите треугольник ABD. Через каждую вершину этого треугольника с помощью чертежного угольника и линейки проведите прямую, параллельную противоположной стороне.

195. Начертите треугольник ABC и отметьте точку D на стороне AC. Через точку D с помощью чертежного угольника и линейки проведите прямые, параллельные двум другим сторонам треугольника.

§ 2. АКСИОМА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ

27. Об аксиомах геометрии. Изучая свойства геометрических фигур, мы доказали ряд теорем. При этом мы опирались, как правило, на доказанные ранее теоремы. А на чем основаны доказательства самых первых теорем геометрии? Ответ на этот вопрос такой: некоторые утверждения о свойствах геометрических фигур принимаются в качестве исходных положений, на основе которых доказываются далее теоремы и, вообще, строится вся геометрия. Такие исходные положения называются *аксиомами.*

Некоторые аксиомы были сформулированы еще в первой главе (хотя они и не назывались там аксиомами). Например, аксиомой является утверждение о том, что *через любые две точки проходит прямая, и притом только одна.* Многие другие аксиомы, хотя и не были выделены особо, но фактически использовались в наших рассуждениях. Так, сравнение двух отрезков мы проводили с помощью наложения одного отрезка на другой. Возможность такого наложения вытекает из следующей аксиомы: *на любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.* Сравнение двух углов основано на аналогичной аксиоме: *от любого луча в заданную сторону можно отложить угол, равный данному неразвернутому углу, и притом только один.*

Все эти аксиомы являются наглядно очевидными и не вызывают сомнений. Само слово «аксиома» происходит от греческого «аксиос», что означает «ценный, достойный». Полный список аксиом планиметрии, принятых в нашем курсе геометрии, мы приводим в конце учебника.

Евклид
(III в. до н. э.)

Такой подход к построению геометрии, когда сначала формулируются исходные положения — аксиомы, а затем на их основе путем логических рассуждений доказываются другие утверждения, зародился еще в глубокой древности и был изложен в знаменитом сочинении «Начала» древнегреческого ученого Евклида (примерно 365—300 гг. до н. э.). Некоторые из аксиом Евклида (часть из них он называл *постулатами*) и сейчас используются в курсах геометрии, а сама геометрия, изложенная в «Началах», называется *евклидовой геометрией.*

В следующем пункте мы познакомимся с одной из самых известных аксиом геометрии.

28. Аксиома параллельных прямых. Рассмотрим произвольную прямую a и точку M, не лежащую на ней (рис. 110, *а*). Докажем, что через точку M можно провести прямую, параллельную прямой a. Для этого проведем через точку M две прямые: сначала прямую c перпендикулярно к прямой a, а затем прямую b перпендикулярно к прямой c (рис. 110, *б*). Так как прямые a и b перпендикулярны к прямой c, то они параллельны.

Итак, через точку M проходит прямая b, параллельная прямой a. Возникает вопрос: можно ли через точку M провести еще одну прямую, параллельную прямой a? Нам представляется, что если прямую b «повернуть» даже на очень малый угол вокруг

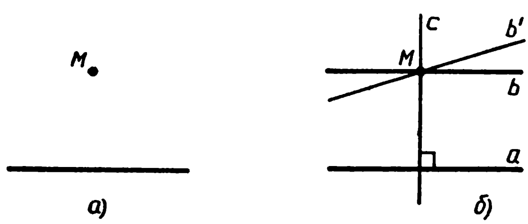


Рис. 110

Н. И. Лобачевский
(1792—1856)

точки M, то она пересечет прямую a (прямая b' на рисунке 110, *б*). Иными словами, нам кажется, что через точку M нельзя провести другую прямую (отличную от b), параллельную прямой a. А можно ли это утверждение доказать? Этот вопрос имеет большую историю. В «Началах» Евклида содержится постулат (пятый постулат Евклида), из которого следует, что через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной. Многие математики, начиная с древних времен, предпринимали попытки доказать пятый постулат Евклида, т. е. вывести его из других аксиом. Однако эти попытки каждый раз оказывались неудачными. И лишь в прошлом веке было окончательно выяснено, что утверждение о единственности прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой, не может быть доказано на основе остальных аксиом Евклида, а само является аксиомой. Огромную роль в решении этого вопроса сыграл великий русский математик Николай Иванович Лобачевский (1792—1856).

Итак, в качестве еще одного из исходных положений мы принимаем *аксиому параллельных прямых*.

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

Утверждения, которые выводятся непосредственно из аксиом или теорем, называются *следствиями*. Рассмотрим некоторые следствия из аксиомы параллельных прямых.

1°. *Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.*

Действительно, пусть прямые a и b параллельны и прямая c пересекает прямую a в точке M (рис. 111, *а*). Докажем, что прямая c пересекает и прямую b. Если бы прямая c не пересекала прямую b, то через точку M проходили бы две прямые (прямые a и c), параллельные прямой b (рис. 111, *б*). Но это противоречит аксиоме параллельных прямых, и, значит, прямая c пересекает прямую b.

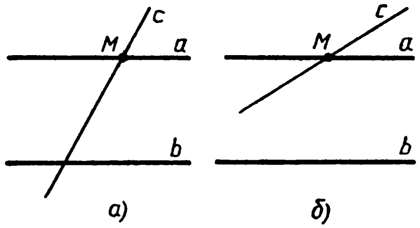


Рис. 111

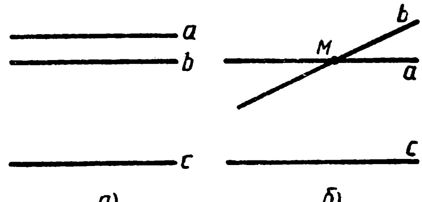


Рис. 112

2^0. *Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.*

Действительно, пусть прямые a и b параллельны прямой c (рис. 112, *а*). Докажем, что $a \parallel b$. Допустим, что прямые a и b не параллельны, т. е. пересекаются в некоторой точке M (рис. 112, *б*). Тогда через точку M проходят две прямые (прямые a и b), параллельные прямой c. Но это противоречит аксиоме параллельных прямых. Поэтому наше предположение неверно, а, значит, прямые a и b параллельны.

29. Теоремы об углах, образованных двумя параллельными прямыми и секущей. Во всякой теореме различают две части: *условие* и *заключение*. Условие теоремы — это то, что дано, а заключение — то, что требуется доказать.

Рассмотрим, например, теорему, выражающую признак параллельности двух прямых: если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны. В этой теореме условием является первая часть утверждения: «при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны» (это дано), а заключением — вторая часть: «прямые параллельны» (это требуется доказать).

Теоремой, *обратной данной*, называется такая теорема, в которой условием является заключение данной теоремы, а заключением — условие данной теоремы. Докажем теоремы, обратные трем теоремам п. 25.

Теорема. ***Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны.***

Доказательство. Пусть параллельные прямые a и b пересечены секущей MN. Докажем, что накрест лежащие углы, например 1 и 2, равны (рис. 113). Допустим, что углы 1 и 2 не равны. Отложим от луча MN угол PMN, равный углу 2, так, чтобы

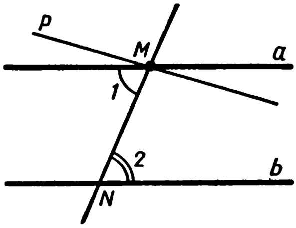


Рис. 113

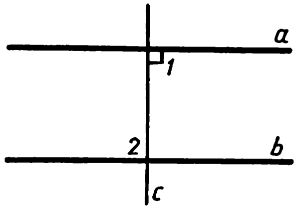


Рис. 114

$\angle PMN$ и $\angle 2$ были накрест лежащими углами при пересечении прямых MP и b секущей MN. По построению эти накрест лежащие углы равны, поэтому $MP \parallel b$. Мы получили, что через точку M проходят две прямые (прямые a и MP), параллельные прямой b. Но это противоречит аксиоме параллельных прямых. Значит, наше допущение неверно и $\angle 1 = \angle 2$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. При доказательстве этой теоремы мы использовали способ рассуждений, который называется *методом доказательства от противного.* Мы предположили, что при пересечении параллельных прямых a и b секущей MN накрест лежащие углы 1 и 2 не равны, т. е. предположили противоположное тому, что нужно доказать. Исходя из этого предположения, путем рассуждений мы пришли к противоречию с аксиомой параллельных прямых. Это означает, что наше предположение неверно и, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$.

Такой способ рассуждений часто используется в математике. Мы им пользовались и ранее, например в п. 12, при доказательстве того, что две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются. Этим же методом мы пользовались в п. 28 при доказательстве следствий 1^0 и 2^0 из аксиомы параллельных прямых.

С л е д с т в и е. *Если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой.*

Действительно, пусть $a \parallel b$ и $c \perp a$, т. е. $\angle 1 = 90°$ (рис. 114). Прямая c пересекает прямую a, поэтому она пересекает также прямую b. При пересечении параллельных прямых a и b секущей c образуются равные накрест лежащие углы: $\angle 1 = \angle 2$. Так как $\angle 1 = 90°$, то и $\angle 2 = 90°$, т. е. $c \perp b$, что и требовалось доказать.

Т е о р е м а. ***Если две параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть параллельные прямые a и b пересечены секущей c. Докажем, что соответственные углы, например 1 и 2, равны (см. рис. 102). Так как $a \parallel b$, то накрест лежащие углы 1 и 3 равны. Углы 2 и 3 равны как вертикальные. Из равенств $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 2 = \angle 3$ следует, что $\angle 1 = \angle 2$. Теорема доказана.

Теорема. ***Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна 180°.***

Доказательство. Пусть параллельные прямые a и b пересечены секущей c (см. рис. 102). Докажем, например, что $\angle 1 + \angle 4 = 180°$. Так как $a \parallel b$, то соответственные углы 1 и 2 равны. Углы 2 и 4 смежные, поэтому $\angle 2 + \angle 4 = 180°$. Из равенств $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 2 + \angle 4 = 180°$ следует, что $\angle 1 + \angle 4 = 180°$. Теорема доказана.

Замечание. Если доказана некоторая теорема, то отсюда еще не следует справедливость обратного утверждения. Более того, обратное утверждение не всегда верно. Приведем простой пример. Мы знаем, что если углы вертикальные, то они равны. Обратное утверждение: «если углы равны, то они вертикальные», конечно же, неверно.

Вопросы и задачи

196. Дан треугольник ABC. Сколько прямых, параллельных стороне AB, можно провести через вершину C?

197. Через точку, не лежащую на прямой p, проведены четыре прямые. Сколько из этих прямых пересекают прямую p? Рассмотрите возможные случаи.

198. Прямые a и b перпендикулярны к прямой p, прямая c пересекает прямую a. Пересекает ли прямая c прямую b?

199. Прямая p параллельна стороне AB треугольника ABC. Докажите, что прямые BC и AC пересекают прямую p.

200. На рисунке 115 $AD \parallel p$ и $PQ \parallel BC$. Докажите, что прямая p пересекает прямые AB, AE, AC, BC и PQ.

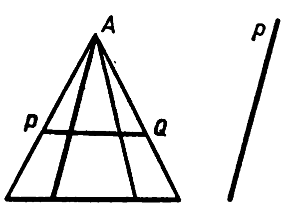


Рис. 115

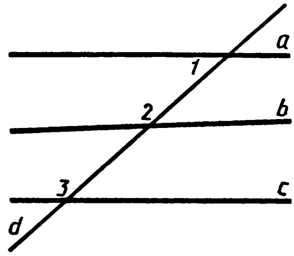


Рис. 116

201. Сумма накрест лежащих углов при пересечении двух параллельных прямых секущей равна 210°. Найдите эти углы.

202. На рисунке 116 прямые a, b и c пересечены секущей d, $\angle 1=42°$, $\angle 2=140°$, $\angle 3=138°$. Какие из прямых a, b и c параллельны?

203. Найдите все углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых a и b секущей c, если: а) один из углов равен 150°; б) один из углов на 70° больше другого.

204. Концы отрезка AB лежат на параллельных прямых a и b. Прямая, проходящая через середину O этого отрезка, пересекает прямые a и b в точках C и D. Докажите, что $CO=OD$.

205. По данным рисунка 117 найдите $\angle 1$.

206. Угол ABC равен 70°, а угол BCD равен 110°. Могут ли прямые AB и CD быть: а) параллельными; б) пересекающимися?

207. Ответьте на вопросы задачи 206, если $\angle ABC=65°$, а $\angle BCD=105°$.

208. Разность двух односторонних углов при пересечении двух параллельных прямых секущей равна 50°. Найдите эти углы.

209. На рисунке 118 $a \parallel b$, $c \parallel d$, $\angle 4=45°$. Найдите углы 1, 2 и 3.

210. Два тела P_1 и P_2 подвешены на концах нити, перекинутой через блоки A и B (рис. 119). Третье тело P_3 подвешено на той же нити в точке C и уравновешивает тела P_1 и P_2. (При этом $AP_1 \parallel BP_2 \parallel CP_3$.) Докажите, что $\angle ACB = \angle CAP_1 + \angle CBP_2$.

211. Две параллельные прямые пересечены секущей. Докажите, что: а) биссектрисы накрест лежащих углов параллельны; б) биссектрисы соответственных углов параллельны; в) биссектрисы односторонних углов перпендикулярны.

212. Докажите, что если стороны одного угла соответственно параллельны сторонам другого угла, то такие углы или равны, или в сумме составляют 180°.

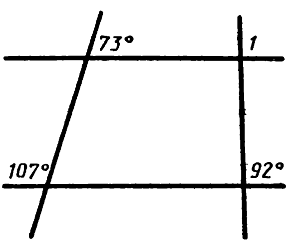


Рис. 117

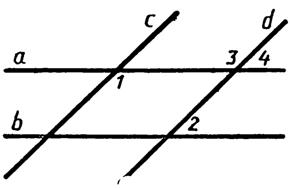


Рис. 118

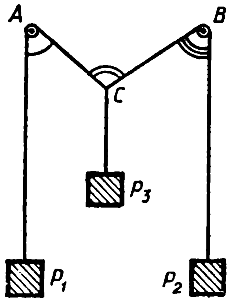


Рис. 119

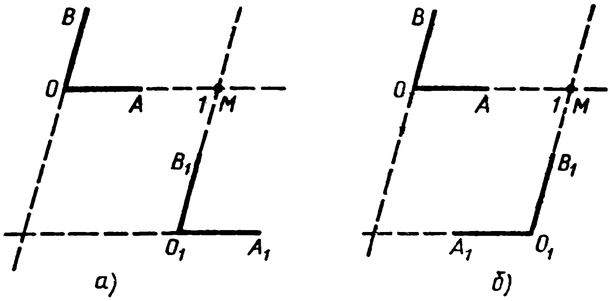


Рис. 120

Решение. Пусть AOB и $A_1O_1B_1$ — данные углы и $OA \parallel O_1A_1$, $OB \parallel O_1B_1$. Если угол AOB развернутый, то и угол $A_1O_1B_1$ — развернутый (объясните почему), поэтому эти углы равны. Пусть AOB — неразвернутый угол. Возможные случаи расположения углов AOB и $A_1O_1B_1$ изображены на рисунке 120, *а* и *б*. Прямая O_1B_1 пересекает прямую O_1A_1 и, значит, пересекает параллельную ей прямую OA в некоторой точке M. Параллельные прямые OB и O_1B_1 пересечены секущей OM, поэтому один из углов, образованных при пересечении прямых O_1B_1 и OA (угол 1 на рисунке 120, *а*), равен углу AOB (как накрест лежащие углы).

Параллельные прямые OA и O_1A_1 пересечены секущей O_1M, поэтому либо $\angle 1 = \angle A_1O_1B_1$ (рис. 120, *а*), либо $\angle 1 + \angle A_1O_1B_1 = 180°$ (рис. 120, *б*). Из равенства $\angle 1 = \angle AOB$ и последних двух равенств следует, что либо $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$ (рис. 120, *а*), либо $\angle AOB + \angle A_1O_1B_1 = 180°$ (рис. 120, *б*), что и требовалось доказать.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ III

1. Дайте определение параллельных прямых. Какие два отрезка называются параллельными?
2. Что такое секущая? Назовите пары углов, которые образуются при пересечении двух параллельных прямых секущей.
3. Докажите, что если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.
4. Докажите, что если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.
5. Докажите, что если при пересечении двух прямых секущей

сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

6. Расскажите о практических способах проведения параллельных прямых.
7. Объясните, какие утверждения называются аксиомами. Приведите примеры аксиом.
8. Докажите, что через данную точку, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной.
9. Сформулируйте аксиому параллельных прямых.
10. Какое утверждение называется следствием? Докажите, что прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, пересекает и другую.
11. Докажите, что если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.
12. Какая теорема называется обратной данной теореме? Приведите примеры теорем, обратных данным.
13. Докажите, что при пересечении двух параллельных прямых секущей накрест лежащие углы равны.
14. Докажите, что если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой.
15. Докажите, что при пересечении двух параллельных прямых секущей: а) соответственные углы равны; б) сумма односторонних углов равна 180°.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

213. На рисунке 121 $CE=ED$, $BE=EF$ и $KE \parallel AD$. Докажите, что $KE \parallel BC$.

214. Прямая, проходящая через середину биссектрисы AD треугольника ABC и перпендикулярная к AD, пересекает сторону AC в точке M. Докажите, что $MD \parallel AB$.

215. По данным рисунка 122 найдите угол 1.

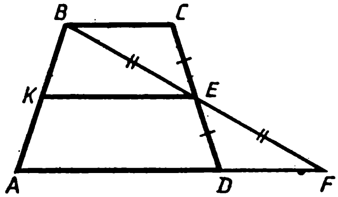


Рис. 121

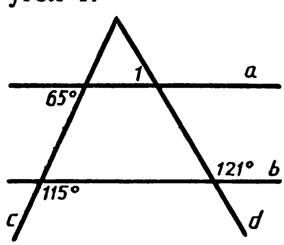


Рис. 122

216. На рисунке 123 DE — биссектриса угла ADF. По данным рисунка найдите углы треугольника ADE.

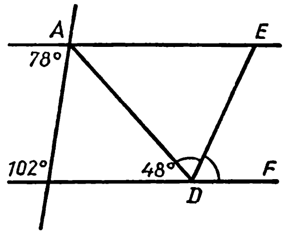


Рис. 123

217. Прямые a и b параллельны прямой c. Докажите, что любая прямая, пересекающая прямую a, пересекает также и прямую b.

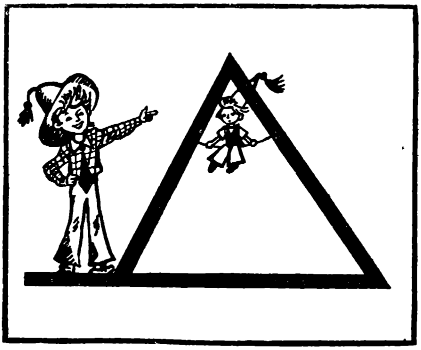
218. Прямые a и b пересекаются. Можно ли провести такую прямую, которая пересекает прямую a и параллельна прямой b? Ответ обоснуйте.

219*. Даны две прямые a и b. Докажите, что если любая прямая, пересекающая прямую a, пересекает и прямую b, то прямые a и b параллельны.

220. Докажите, что если при пересечении двух прямых a и b секущей накрест лежащие углы не равны, то прямые a и b пересекаются.

221. Даны треугольник ABC и точки M и N такие, что середина отрезка BM совпадает с серединой стороны AC, а середина отрезка CN — с серединой стороны AB. Докажите, что точки M, N и A лежат на одной прямой.

222. Даны прямая a и точка A, не лежащая на ней. С помощью циркуля и линейки через точку A проведите прямую, параллельную прямой a.



Глава IV

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА

§ 1. СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

30. Теорема о сумме углов треугольника. Докажем одну из важнейших теорем геометрии — теорему о сумме углов треугольника.

Теорема. ***Сумма углов треугольника равна 180°.***

Доказательство. Рассмотрим произвольный треугольник ABC и докажем, что $\angle A+\angle B+\angle C=180°$.

Проведем через вершину B прямую a, параллельную стороне AC (рис. 124). Углы 1 и 4 являются накрест лежащими углами при пересечении параллельных прямых a и AC секущей AB, а углы 3 и 5 — накрест лежащими углами при пересечении тех же параллельных прямых секущей BC. Поэтому

$$\angle 4=\angle 1,\ \angle 5=\angle 3. \qquad (1)$$

Очевидно, сумма углов 4, 2 и 5 равна развернутому углу с вершиной B, т. е. $\angle 4+\angle 2+\angle 5=180°$. Отсюда, учитывая равенства (1), получаем: $\angle 1+\angle 2+\angle 3=180°$, или $\angle A+$ $+\angle B+\angle C=180°$. Теорема доказана.

Внешним углом треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника. Докажем, что ***внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.***

Обратимся к рисунку 125, на котором угол 4 — внешний угол, смежный с углом 3 данного треугольника. Так как $\angle 4+\angle 3=$

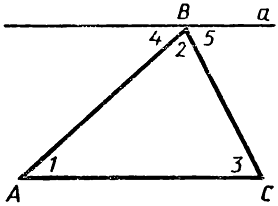


Рис. 124

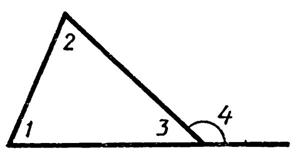
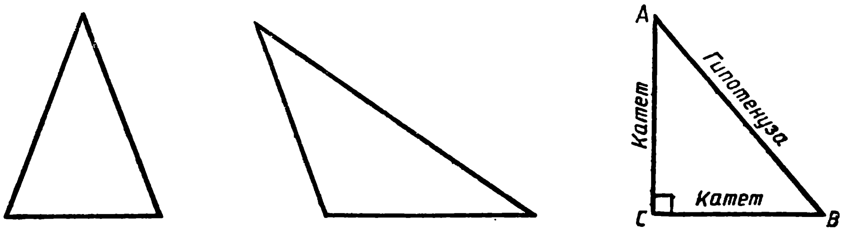


Рис. 125



Остроугольный треугольник
а)

Тупоугольный треугольник
б)

Прямоугольный треугольник
в)

Рис. 126

$=180°$, а по теореме о сумме углов треугольника $(\angle 1+\angle 2)+$ $+\angle 3=180°$, то $\angle 4=\angle 1+\angle 2$, что и требовалось доказать.

31. Остроугольный, прямоугольный и тупоугольный треугольники. Из теоремы о сумме углов треугольника следует, что если в треугольнике один из углов прямой или тупой, то сумма двух других углов не превосходит 90° и, значит, каждый из них острый. Таким образом, *в любом треугольнике либо все углы острые, либо два угла острые, а третий тупой или прямой.*

Если все три угла треугольника острые, то треугольник называется *остроугольным* (рис. 126, *а*). Если один из углов треугольника тупой, то треугольник называется *тупоугольным* (рис. 126, *б*). Если один из углов треугольника прямой, то треугольник называется *прямоугольным.* Сторона прямоугольного треугольника, лежащая против прямого угла, называется *гипотенузой*, а две другие стороны — *катетами.* На рисунке 126, *в* изображен прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C.

Задачи

223. Найдите угол C треугольника ABC, если: а) $\angle A=65°$, $\angle B=57°$; б) $\angle A=24°$, $\angle B=130°$; в) $\angle A=\alpha$, $\angle B=2\alpha$; г) $\angle A=60°+\alpha$, $\angle B=60°-\alpha$.

224. Найдите углы треугольника ABC, если $\angle A:\angle B:\angle C=$ $=2:3:4$.

225. Докажите, что каждый угол равностороннего треугольника равен 60°.

226. Докажите, что углы при основании равнобедренного треугольника острые.

227. Найдите углы равнобедренного треугольника, если: а) угол при основании в два раза больше угла, противолежащего основанию; б) угол при основании в три раза меньше внешнего угла, смежного с ним.

228. Найдите углы равнобедренного треугольника, если один из его углов равен: а) 40°; б) 60°; в) 100°.

229. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AD. Найдите $\angle ADC$, если $\angle C = 50°$.

230. Биссектрисы углов A и B треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите $\angle AMB$, если $\angle A = 58°$, $\angle B = 96°$.

231. Медиана AM треугольника ABC равна половине стороны BC. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

232. Докажите, что если один из внешних углов треугольника в два раза больше угла треугольника, не смежного с ним, то треугольник равнобедренный. Верно ли обратное утверждение?

233. Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника, противолежащей основанию, параллельна основанию.

234. Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен 115°. Найдите углы треугольника.

235. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AD. Найдите углы этого треугольника, если $\angle ADB = 110°$.

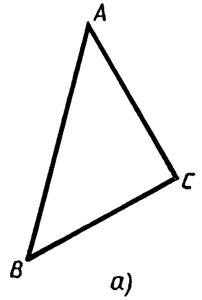
§ 2. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА

32. Теорема о соотношениях между сторонами и углами треугольника.

Теорема: ***В треугольнике: 1) против большей стороны лежит больший угол; 2)*** обратно, ***против большего угла лежит бóльшая сторона.***

Доказательство. 1) Пусть в треугольнике ABC сторона AB больше стороны AC (рис. 127, *а*). Докажем, что $\angle C > \angle B$. Отложим на стороне AB отрезок AD, равный стороне AC (рис. 127, *б*). Так как $AD < AB$, то точка D лежит между точками A и B. Следовательно, угол 1 является частью угла C и, значит, $\angle C > \angle 1$. Угол 2 — внешний угол треугольника BDC, поэтому $\angle 2 > \angle B$. Углы 1 и 2 равны, как углы при основании равнобедренного треугольника ADC. Таким образом, $\angle C > \angle 1$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 > \angle B$. Отсюда следует, что $\angle C > \angle B$.

2) Пусть в треугольнике ABC $\angle C > \angle B$. Докажем, что $AB > AC$.



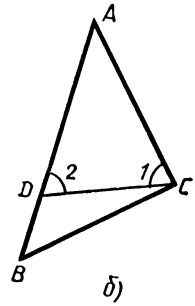


Рис. 127

Предположим, что это не так. Тогда либо $AB=AC$, либо $AB<AC$. В первом случае треугольник ABC — равнобедренный и, значит, $\angle C=\angle B$. Во втором случае $\angle B>\angle C$ (против большей стороны лежит больший угол). И то и другое противоречит условию: $\angle C>\angle B$. Поэтому наше предположение неверно, и, следовательно, $AB>AC$. Теорема доказана.

Следствие 1. *В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.*

В самом деле, гипотенуза лежит против прямого угла, а катет — против острого. Так как прямой угол больше острого, то гипотенуза больше катета.

Следствие 2. *Если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный* (признак равнобедренного треугольника).

Докажем этот признак. Пусть в треугольнике два угла равны. Тогда равны и стороны, лежащие против этих углов. Действительно, если предположить, что одна из указанных сторон больше другой, то угол, лежащий против нее, будет больше угла, лежащего против другой стороны, а это противоречит условию (тому, что данные углы равны). Итак, в треугольнике две стороны равны, т. е. треугольник — равнобедренный.

33. Неравенство треугольника.

Теорема. ***Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.***

Доказательство. Рассмотрим произвольный треугольник ABC и докажем, что $AB<AC+CB$. Отложим на продолжении стороны AC отрезок CD, равный стороне CB (рис. 128). В равно-

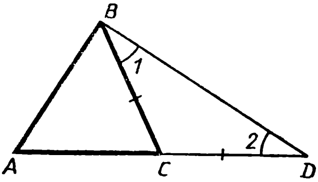


Рис. 128

бедренном треугольнике BCD $\angle 1 = \angle 2$, а в треугольнике ABD $\angle ABD > \angle 1$ и, значит, $\angle ABD > \angle 2$. Так как в треугольнике против большего угла лежит бо́льшая сторона, то $AB < AD$. Но $AD = AC + CD = AC + CB$, поэтому $AB < AC + CB$. Теорема доказана.

Следствие. *Для любых трех точек A, B и C, не лежащих на одной прямой, справедливы неравенства:* $AB < AC + CB$, $AC < AB + BC$, $BC < BA + AC$. Каждое из этих неравенств называется *неравенством треугольника.*

Вопросы и задачи

236. Сравните углы треугольника ABC и выясните, может ли быть угол A тупым, если: а) $AB > BC > AC$; б) $AB = AC < BC$.

237. Сравните стороны треугольника ABC, если: а) $\angle A > \angle B > \angle C$; б) $\angle A > \angle B = \angle C$.

238. Докажите, что в равнобедренном треугольнике отрезок, соединяющий любую точку основания, отличную от вершины, с противоположной вершиной, меньше боковой стороны.

239. Докажите, что в треугольнике медиана не меньше высоты, проведенной из той же вершины.

240. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC биссектрисы углов A и C пересекаются в точке O. Докажите, что треугольник AOC — равнобедренный.

241. Прямая, параллельная основанию равнобедренного треугольника ABC, пересекает боковые стороны AB и AC в точках M и N. Докажите, что треугольник AMN равнобедренный.

242. Докажите, что если биссектриса внешнего угла треугольника параллельна стороне треугольника, то треугольник равнобедренный.

243. Через вершину C треугольника ABC проведена прямая, параллельная его биссектрисе AA_1 и пересекающая прямую AB в точке D. Докажите, что $AC = AD$.

244. Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC. Через точ-

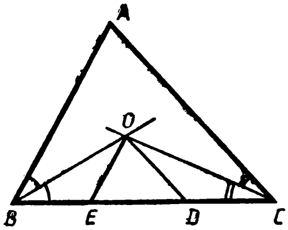


Рис. 129

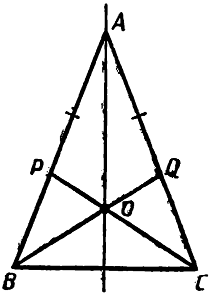


Рис. 130

ку D проведена прямая, параллельная AC и пересекающая сторону AB в точке E. Докажите, что треугольник ADE — равнобедренный.

245. Через точку пересечения биссектрис BB_1 и CC_1 треугольника ABC проведена прямая, параллельная прямой BC и пересекающая стороны AB и AC соответственно в точках M и N. Докажите, что $MN = BM + CN$.

246. На рисунке 129 лучи BO и CO — биссектрисы углов B и C треугольника ABC, $OE \parallel AB$, $OD \parallel AC$. Докажите, что периметр треугольника EDO равен длине отрезка BC.

247. На рисунке 130 $AB = AC$, $AP = AQ$. Докажите, что: а) треугольник BOC — равнобедренный; б) прямая OA проходит через середину основания BC и перпендикулярна к нему.

248. Существует ли треугольник со сторонами: а) 1 м, 2 м и 3 м; б) 1,2 дм, 1 дм и 2,4 дм?

249. В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 25 см, а другая равна 10 см. Какая из них является основанием?

250. Найдите сторону равнобедренного треугольника, если две другие стороны равны: а) 5 см и 3 см; б) 8 см и 2 см; в) 10 см и 5 см.

251. Докажите, что каждая сторона треугольника больше разности двух других сторон.

Решение. Докажем, например, что в треугольнике ABC $AB > AC - BC$. Так как $AB + BC > AC$, то $AB > AC - BC$.

252. Два внешних угла треугольника при разных вершинах равны. Периметр треугольника равен 74 см, а одна из сторон равна 16 см. Найдите две другие стороны треугольника.

253. Периметр равнобедренного треугольника равен 25 см, разность двух сторон равна 4 см, а один из его внешних углов — острый. Найдите стороны треугольника.

§ 3. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

34. Некоторые свойства прямоугольных треугольников. Рассмотрим свойства прямоугольных треугольников, которые устанавливаются с помощью теоремы о сумме углов треугольника.

1°. *Сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.*

В самом деле, сумма углов треугольника равна 180°, а прямой угол равен 90°, поэтому сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

2°. *Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.*

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle A$ — прямой, $\angle B = 30°$ и, значит, $\angle C = 60°$ (рис. 131, *а*). Докажем, что $AC = \frac{1}{2}BC$.

Приложим к треугольнику ABC равный ему треугольник ABD так, как показано на рисунке 131, *б*. Получим треугольник BCD, в котором $\angle B = \angle D = 60°$, поэтому $DC = BC$. Но $AC = \frac{1}{2}DC$. Следовательно, $AC = \frac{1}{2}BC$, что и требовалось доказать.

3°. *Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30°.*

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, у которого катет AC равен половине гипотенузы BC (рис. 132, *а*). Докажем, что $\angle ABC = 30°$.

Приложим к треугольнику ABC равный ему треугольник ABD так, как показано на рисунке 132, *б*. Получим равносторонний треугольник BCD. Углы равностороннего треугольника равны

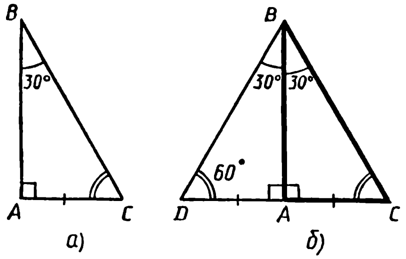


Рис. 131

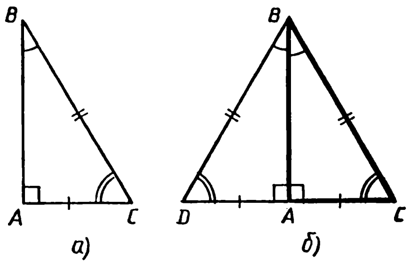


Рис. 132

друг другу (объясните почему), поэтому каждый из них равен 60°. В частности, $\angle DBC=60°$. Но $\angle DBC=2\angle ABC$. Следовательно, $\angle ABC=30°$, что и требовалось доказать.

35. Признаки равенства прямоугольных треугольников. Так как в прямоугольном треугольнике угол между двумя катетами прямой, а любые два прямых угла равны, то из первого признака равенства треугольников следует: *если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны.* Далее, из второго признака равенства треугольников следует: *если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему углу другого, то такие треугольники равны.*

Рассмотрим еще два признака равенства прямоугольных треугольников.

Теорема. ***Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны.***

Доказательство. Из свойства 1° п. 34 следует, что в таких треугольниках два других острых угла также равны, поэтому треугольники равны по второму признаку равенства треугольников, т. е. по стороне (гипотенузе) и двум прилежащим к ней углам. Теорема доказана.

Теорема. ***Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны.***

Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых углы C и C_1 — прямые, $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$ (рис. 133). Докажем, что $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$.

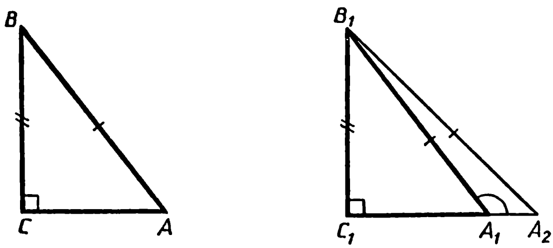


Рис. 133

Так как $\angle C = \angle C_1$, то треугольник ABC можно наложить на треугольник $A_1B_1C_1$ так, что вершина C совместится с вершиной C_1, а стороны CA и CB наложатся соответственно на лучи C_1A_1 и C_1B_1. Поскольку $CB = C_1B_1$, то вершина B совместится с вершиной B_1. Но тогда вершины A и A_1 также совместятся. В самом деле, если предположить, что точка A совместится с некоторой другой точкой A_2 луча C_1A_1, то получим равнобедренный треугольник $A_1B_1A_2$, в котором углы при основании A_1A_2 не равны (на рисунке 133 $\angle A_2$ — острый, а $\angle A_1$ — тупой, как смежный с острым углом $B_1A_1C_1$). Но это невозможно, поэтому вершины A и A_1 совместятся. Следовательно, полностью совместятся треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ и, значит, они равны. Теорема доказана.

36*. Уголковый отражатель. Мы знаем, что сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°. Это свойство лежит в основе конструкции простейшего *уголкового отражателя*. Прежде чем описать его устройство, рассмотрим следующую задачу.

З а д а ч а. *Угол между зеркалами OA и OB равен* 90°. *Луч света, падающий на зеркало OA под углом* α, *отражается от него, а затем отражается от зеркала OB* (рис. 134). *Доказать, что падающий и отраженный лучи параллельны.*

Р е ш е н и е. По закону отражения света падающий луч SM и луч MN составляют с прямой OA равные углы α. Так как треугольник MON прямоугольный, то угол MNO равен $90° - \alpha$. Применяя опять закон отражения света, получаем, что луч MN и отраженный луч NT составляют с прямой OB равные углы. Обращаясь к рисунку 134, мы видим, что $\angle SMN = 180° - 2\alpha$, $\angle MNT = 180° - 2(90° - \alpha) = 2\alpha$, поэтому $\angle SMN + \angle MNT = 180°$. Следовательно, падающий луч SM и отраженный луч NT параллельны, что и требовалось доказать.

Простейший уголковый отражатель представляет собой несколько зеркал, составленных так, что соседние зеркала образуют угол, равный 90°. На рисунке 135 в виде ломаной линии схематически изображен такой отражатель. Представим себе, что на этот отражатель падает пучок параллельных лучей (на рисунке эти лучи изображены сплошными линиями со стрелками). Тогда отраженные лучи будут параллельны падающим лучам (эти лучи изображены штриховыми линиями со стрелками). Таким

* Здесь и в дальнейшем пункты, отмеченные звездочкой, не являются обязательными.

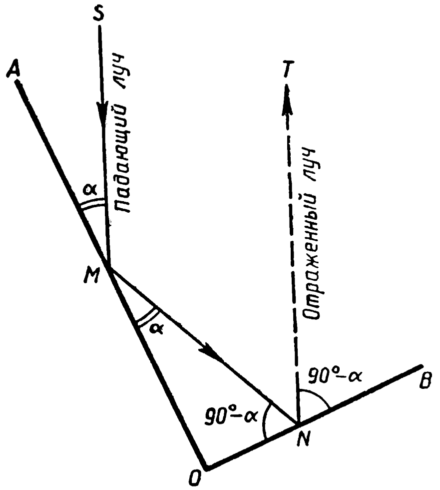


Рис. 134

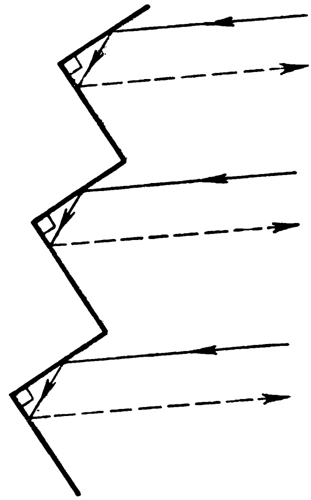


Рис. 135

образом, уголковый отражатель «возвращает назад» падающий на него пучок параллельных лучей при любом расположении отражателя по отношению к падающему пучку лучей.

Это свойство уголкового отражателя используется в технике. Так, уголковый отражатель устанавливается на заднем крыле велосипеда для того, чтобы «возвращать назад» свет автомобильных фар. Это дает возможность водителю автомобиля видеть ночью идущий впереди велосипед. Отметим, что уголковый отражатель, используемый в практике, устроен более сложно, чем описанный простейший, но принцип его действия тот же, что и у простейшего уголкового отражателя.

Уголковый отражатель был установлен на одной из советских автоматических станций, запущенных на Луну. С поверхности Земли участок Луны, на котором находилась автоматическая станция с уголковым отражателем, был освещен лучом лазера. Луч «вернулся» в то же место, где находился лазер. Измерив точное время от момента включения лазера до момента возвращения сигнала, удалось с весьма высокой точностью (до 1 см) найти расстояние от поверхности Земли до поверхности Луны.

Задачи

254. Найдите углы равнобедренного прямоугольного треугольника.

255. В равнобедренном треугольнике CDE с основанием CE проведена высота CF. Найдите $\angle ECF$, если $\angle D=54°$.

256. Один из углов прямоугольного треугольника равен 60°, а сумма гипотенузы и меньшего из катетов равна 26,4 см. Найдите гипотенузу треугольника.

257. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C внешний угол при вершине A равен 120°, $AC+AB=18$ см. Найдите AC и AB.

258. Из середины D стороны BC равностороннего треугольника ABC проведен перпендикуляр DM к прямой AC. Найдите AM, если $AB=12$ см.

259. Угол, противолежащий основанию равнобедренного треугольника, равен 120°. Высота, проведенная к боковой стороне, равна 9 см. Найдите основание треугольника.

260. Высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, равна 7,6 см, а боковая сторона треугольника равна 15,2 см. Найдите углы этого треугольника.

261. Докажите, что в равнобедренном треугольнике две высоты, проведенные из вершин основания, равны.

262. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ углы A и A_1 — прямые, BD и B_1D_1 — биссектрисы. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, если $\angle B=\angle B_1$ и $BD=B_1D_1$.

263. Высоты, проведенные к боковым сторонам AB и AC остроугольного равнобедренного треугольника ABC, пересекаются в точке M. Найдите углы треугольника, если $\angle BMC = 140°$.

264. Высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите $\angle AMB$, если $\angle A=55°$, $\angle B=67°$.

265. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведены биссектрисы AF и высота AH. Найдите углы треугольника AHF, если $\angle B=112°$.

266. На сторонах угла O отмечены точки A и B так, что $OA=OB$. Через эти точки проведены прямые, перпендикулярные к сторонам угла и пересекающиеся в точке C. Докажите, что луч OC — биссектриса угла O.

267. Докажите, что два остроугольных треугольника равны, если сторона и высоты, проведенные из концов этой стороны, одного треугольника соответственно равны стороне и высотам, проведенным из концов этой стороны, другого треугольника.

268. Сформулируйте и докажите признак равенства прямоугольных треугольников по катету и противолежащему углу.

269. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ и $BH = B_1H_1$, где BH и B_1H_1 — высоты треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

270. Внутри угла дана точка A. Постройте прямую, проходящую через точку A и отсекающую на сторонах угла равные отрезки.

§ 4. ПОСТРОЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА ПО ТРЕМ ЭЛЕМЕНТАМ

37. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между параллельными прямыми. Расстоянием между двумя точками мы назвали длину отрезка, соединяющего эти точки. Введем теперь понятия расстояния от точки до прямой и расстояния между параллельными прямыми.

Пусть отрезок AH — перпендикуляр, проведенный из точки A к прямой a, M — любая точка прямой a, отличная от H (рис. 136). Отрезок AM называется *наклонной, проведенной из точки A к прямой a.* В прямоугольном треугольнике AHM катет AH меньше гипотенузы AM. Следовательно, *перпендикуляр, проведенный из точки к прямой, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к этой прямой.*

Длина перпендикуляра, проведенного из точки к прямой, называется расстоянием от этой точки до прямой.

Отметим, что расстояние от точки до прямой равно наименьшему из расстояний от этой точки до точек прямой.

На рисунке 137 расстояние от точки B до прямой p равно 3 см, а расстояние от точки C до этой прямой равно 5 см.

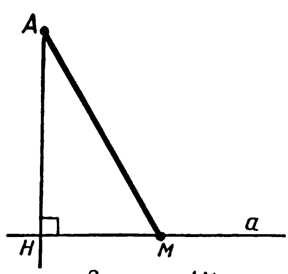


Рис. 136 Отрезок AM — наклонная к прямой a

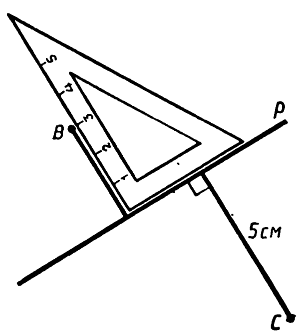


Рис. 137

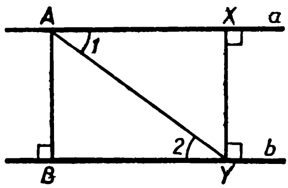


Рис. 138

Прежде чем ввести понятие расстояния между параллельными прямыми, рассмотрим одно из важнейших свойств параллельных прямых.

Теорема. ***Все точки каждой из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой.***

Доказательство. Рассмотрим параллельные прямые a и b. Отметим на прямой a точку A и проведем из этой точки перпендикуляр AB к прямой b (рис. 138). Докажем, что расстояние от любой точки X прямой a до прямой b равно AB.

Проведем из точки X перпендикуляр XY к прямой b. Так как $XY \perp b$, то $XY \perp a$. Прямоугольные треугольники ABY и YXA равны по гипотенузе и острому углу (AY — общая гипотенуза, $\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых a и b секущей AY). Следовательно, $XY = AB$. Итак, любая точка X прямой a находится на расстоянии AB от прямой b. Очевидно, все точки прямой b находятся на таком же расстоянии от прямой a. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что точка, движущаяся по одной из параллельных прямых, все время находится на одном и том же расстоянии от другой прямой.

Расстояние от произвольной точки одной из параллельных прямых до другой прямой называется расстоянием между этими прямыми.

Отметим, что расстояние между параллельными прямыми

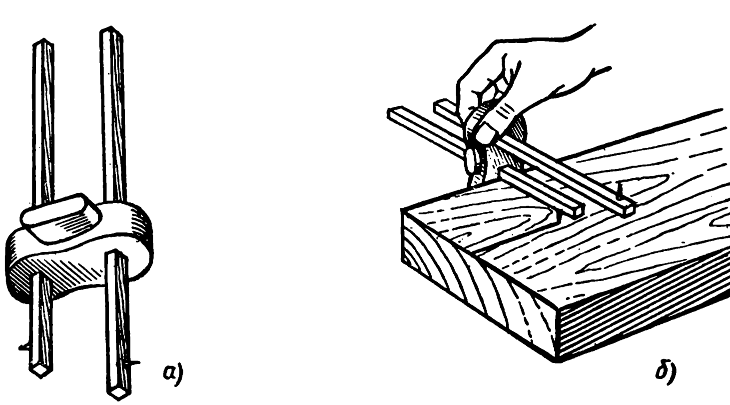


Рис. 139

равно наименьшему из расстояний от точек одной прямой до точек другой прямой.

Замечание. Справедливо утверждение, обратное доказанной теореме: все точки плоскости, расположенные по одну сторону от данной прямой и равноудаленные от нее, лежат на прямой, параллельной данной (докажите это самостоятельно). На этом свойстве основано устройство инструмента, называемого *рейсмусом* (рис. 139, *а*). Рейсмус используется в столярном деле для разметки на поверхности деревянного бруска прямой, параллельной краю бруска. При передвижении рейсмуса вдоль края бруска металлическая игла прочерчивает отрезок прямой, параллельный краю бруска (рис. 139, *б*).

38. Построение треугольника по трем элементам.

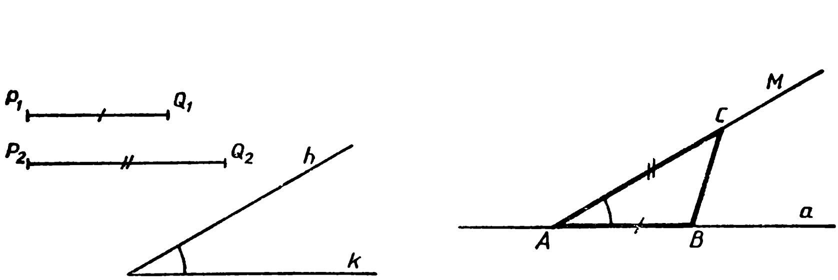
Задача 1. *Построить треугольник по двум сторонам и углу между ними.*

Решение. Прежде всего уточним, как нужно понимать эту задачу, т. е. что здесь дано и что нужно построить. Даны отрезки P_1Q_1, P_2Q_2 и угол hk (рис. 140, *а*). Требуется с помощью циркуля и линейки (без масштабных делений) построить такой треугольник ABC, у которого две стороны, скажем AB и AC, равны данным отрезкам P_1Q_1 и P_2Q_2, а угол A между этими сторонами равен данному углу hk.

Проведем прямую a и на ней с помощью циркуля отложим отрезок AB, равный отрезку P_1Q_1 (рис. 140, *б*). Затем построим угол BAM, равный данному углу hk (как это сделать, мы знаем). На луче AM отложим отрезок AC, равный отрезку P_2Q_2, и проведем отрезок BC. Треугольник ABC — искомый.

В самом деле, по построению $AB=P_1Q_1$, $AC=P_2Q_2$, $\angle A=\angle hk$.

Описанный ход построения показывает, что при любых данных



а) Построение треугольника по двум сторонам и углу между ними б)

Рис. 140

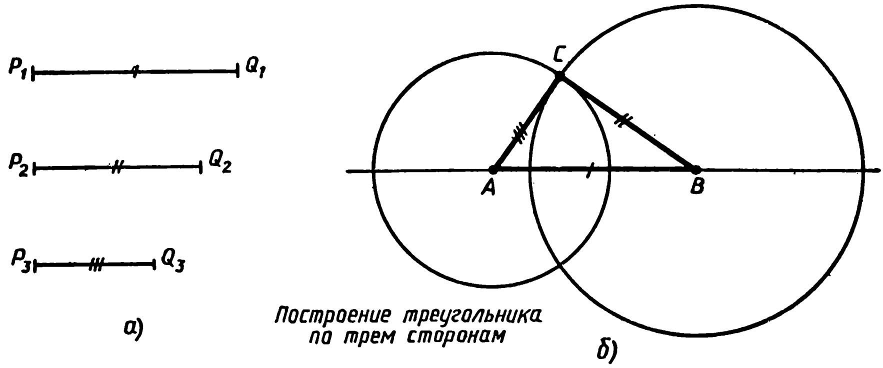


Рис. 141

отрезках P_1Q_1, P_2Q_2 и неразвернутом угле hk искомый треугольник построить можно. Так как прямую a и точку A на ней можно выбрать произвольно, то существует бесконечно много треугольников, удовлетворяющих условиям задачи. Все эти треугольники равны друг другу (по первому признаку равенства треугольников), поэтому принято говорить, *что данная задача имеет единственное решение.*

Задача 2. *Построить треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам.*

Решите эту задачу самостоятельно.

Задача 3. *Построить треугольник по трем сторонам.*

Решение. Пусть даны отрезки P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3 (рис. 141, *а*). Требуется построить треугольник ABC, в котором $AB=P_1Q_1$, $BC=P_2Q_2$, $CA=P_3Q_3$.

Проведем прямую и на ней с помощью циркуля отложим отрезок AB, равный отрезку P_1Q_1 (рис. 141, *б*). Затем построим две окружности: одну — с центром A и радиусом P_3Q_3, а другую — с центром B и радиусом P_2Q_2. Пусть C — одна из точек пересечения этих окружностей. Проведя отрезки AC и BC, получим искомый треугольник ABC. В самом деле, по построению $AB=P_1Q_1$, $BC=P_2Q_2$, $CA=P_3Q_3$, т. е. стороны треугольника ABC равны данным отрезкам.

Задача 3 не всегда имеет решение. Действительно, во всяком треугольнике сумма любых двух сторон больше третьей стороны, поэтому если какой-нибудь из данных отрезков больше или равен сумме двух других, то нельзя построить треугольник, стороны которого равнялись бы данным отрезкам.

Вопросы и задачи

271. Из точки к прямой проведены перпендикуляр и наклонная, сумма длин которых равна 17 см, а разность длин равна 1 см. Найдите расстояние от точки до прямой.

272. В равностороннем треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Расстояние от точки D до прямой AC равно 6 см. Найдите расстояние от вершины A до прямой BC.

273. Сумма гипотенузы CE и катета CD прямоугольного треугольника CDE равна 31 см, а их разность равна 3 см. Найдите расстояние от вершины C до прямой DE.

274. Докажите, что в равнобедренном треугольнике середина основания равноудалена от боковых сторон.

275. На основании AB равнобедренного треугольника ABC взята точка M, равноудаленная от боковых сторон. Докажите, что CM — высота треугольника ABC.

276. Через середину отрезка проведена прямая. Докажите, что концы отрезка равноудалены от этой прямой.

277. Расстояние между параллельными прямыми a и b равно 3 см, а между параллельными прямыми a и c равно 5 см. Найдите расстояние между прямыми b и c.

278. Прямая AB параллельна прямой CD. Найдите расстояние между этими прямыми, если $\angle ADC = 30°$, $AD = 6$ см.

279*. Докажите, что все точки плоскости, расположенные по одну сторону от данной прямой и равноудаленные от нее, лежат на прямой, параллельной данной.

280. Даны неразвернутый угол ABC и отрезок PQ. Что представляет собой множество всех точек, лежащих внутри данного угла и удаленных от прямой BC на расстояние PQ?

281. Что представляет собой множество всех точек плоскости, равноудаленных от двух данных параллельных прямых?

282. Прямые a и b параллельны. Докажите, что середины всех отрезков XY, где $X \in a$, $Y \in b$, лежат на прямой, параллельной прямым a и b и равноудаленной от этих прямых.

283. Что представляет собой множество всех точек плоскости, находящихся на данном расстоянии от данной прямой?

Задачи на построение

284. Даны прямая a и отрезок AB. Постройте прямую p, параллельную прямой a, так, чтобы расстояние между прямыми a и p было равно AB.

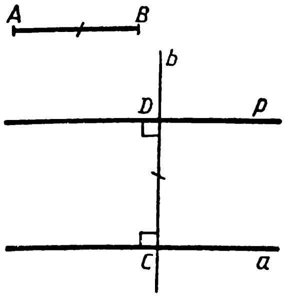


Рис. 142

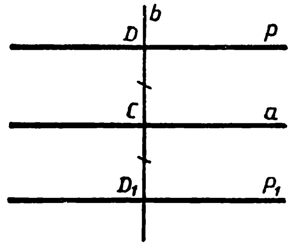


Рис. 143

Р е ш е н и е. Отметим на прямой a какую-нибудь точку C и проведем через точку C прямую b, перпендикулярную к прямой a (рис. 142). Затем на одном из лучей прямой b, исходящих из точки C, отложим отрезок CD, равный отрезку AB. Через точку D проведем прямую p, перпендикулярную к прямой b. Прямая p — искомая (объясните почему).

Как видно из построения, для любой данной прямой a и любого данного отрезка AB искомую прямую можно построить, причем задача имеет два решения (прямые p и p_1 на рисунке 143).

285. Даны пересекающиеся прямые a и b и отрезок PQ. На прямой a постройте точку, удаленную от прямой b на расстояние PQ.

286. Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и биссектрисе треугольника, проведенной из вершины этого угла.

287. Постройте треугольник по стороне, медиане, проведенной к одной из двух других сторон, и углу между данными стороной и медианой.

288. Даны отрезок PQ и угол hk. Постройте треугольник ABC так, чтобы: а) $AB=PQ$, $\angle ABC=\angle hk$, $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle hk$; б) $AB=PQ$, $\angle ABC=\angle hk$, $\angle BAC=\frac{1}{4}\angle hk$.

289. Даны два угла hk и h_1k_1 и отрезок PQ. Постройте треугольник ABC так, чтобы $AB=PQ$, $\angle A=\angle hk$, $\angle B=\frac{1}{2}\angle h_1k_1$.

290. Постройте прямоугольный треугольник: а) по двум катетам; б) по катету и прилежащему к нему острому углу.

291. Постройте равнобедренный треугольник: а) по боковой стороне и углу, противолежащему основанию; б) по основанию и углу при основании; в) по боковой стороне и углу при основании; г) по основанию и боковой стороне; д) по основанию и медиане, проведенной к основанию.

292. Даны отрезки P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3. Постройте треугольник ABC так, чтобы: а) $AB=P_1Q_1$, $BC=P_2Q_2$, $CA=2P_3Q_3$; б) $AB=2P_1Q_1$, $BC=P_2Q_2$, $CA=\frac{3}{2}P_3Q_3$. Всегда ли задача имеет решение?

293. Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и высоте, проведенной к этой стороне.

Решение. Даны отрезки P_1Q_1 и P_2Q_2 и угол hk (рис. 144, *а*). Требуется построить треугольник ABC, у которого одна из сторон, скажем AB, равна данному отрезку P_1Q_1, один из прилежащих к ней углов, например угол A, равен данному углу hk, а высота CH, проведенная к стороне AB, равна данному отрезку P_2Q_2.

Построим угол XAY, равный данному углу hk, и отложим на луче AX отрезок AB, равный данному отрезку P_1Q_1 (рис. 144, *б*). Для построения вершины C искомого треугольника заметим, что расстояние от точки C до прямой AB должно равняться P_2Q_2. Поэтому точка C должна лежать на прямой p, параллельной прямой AB и такой, что расстояние между прямыми p и AB равно P_2Q_2. Следовательно, искомая точка C есть точка пересечения прямой p и луча AY. Построение прямой p описано в решении задачи 284. Очевидно, треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи:

$$AB=P_1Q_1,\ CH=P_2Q_2,\ \angle A=\angle hk.$$

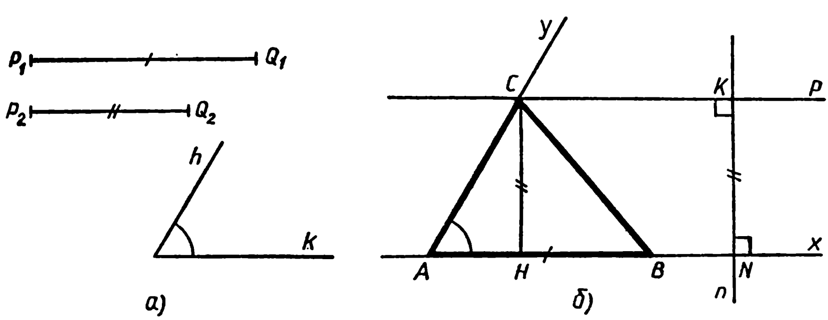


Рис. 144

294. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте к одной из этих сторон.

295. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане к одной из этих сторон.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ IV

1. Сформулируйте и докажите теорему о сумме углов треугольника.
2. Какой угол называется внешним углом треугольника? Докажите, что внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.
3. Докажите, что в любом треугольнике либо все углы острые, либо два угла острые, а третий тупой или прямой.
4. Какой треугольник называется остроугольным? Какой треугольник называется тупоугольным?
5. Какой треугольник называется прямоугольным? Как называются стороны прямоугольного треугольника?
6. Докажите, что в треугольнике: 1) против большей стороны лежит больший угол; 2) обратно, против большего угла лежит бóльшая сторона.
7. Докажите, что в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.
8. Докажите, что если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный.
9. Докажите, что каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон. Что такое неравенство треугольника?
10. Докажите, что сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.
11. Докажите, что катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.
12. Сформулируйте и докажите признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу.
13. Сформулируйте и докажите признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету.
14. Объясните, какой отрезок называется наклонной, проведенной из данной точки к данной прямой.
15. Докажите, что перпендикуляр, проведенный из точки к прямой, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к этой прямой.

16. Что называется расстоянием от точки до прямой?
17. Докажите, что все точки каждой из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой.
18. Что называется расстоянием между двумя параллельными прямыми?
19. Объясните, как построить треугольник: а) по двум сторонам и углу между ними; б) по стороне и двум прилежащим к ней углам.
20. Объясните, как построить треугольник по трем сторонам. Всегда ли эта задача имеет решение?

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

296. В равнобедренном треугольнике ABC биссектрисы равных углов B и C пересекаются в точке O. Докажите, что угол BOC равен внешнему углу треугольника при вершине B.

297. На стороне AD треугольника ADC отмечена точка B так, что $BC=BD$. Докажите, что прямая DC параллельна биссектрисе угла ABC.

298. На рисунке 145 $AD \parallel BE$, $AC=AD$ и $BC=BE$. Докажите, что угол DCE — прямой.

299. На рисунке 146 $AB=AC$, $AP=PQ=QR=RB=BC$. Найдите угол A.

300. Докажите, что в тупоугольном треугольнике основание высоты, проведенной из вершины тупого угла, лежит на стороне треугольника, а основания высот, проведенных из вершин острых углов,— на продолжениях сторон.

301. Из точки A к прямой a проведены перпендикуляр AH и на-

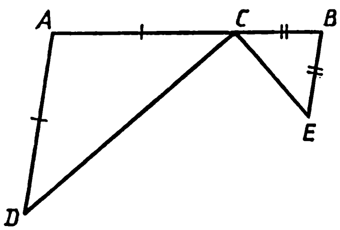


Рис. 145

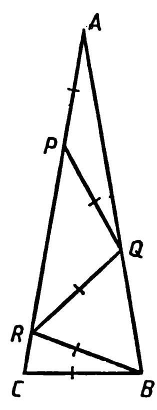


Рис. 146

клонные AM_1 и AM_2. Докажите, что: а) если $HM_1 = HM_2$, то $AM_1 = AM_2$; б) если $HM_1 < HM_2$, то $AM_1 < AM_2$.

302. Из точки A к прямой a проведены перпендикуляр AH и наклонные AM_1 и AM_2. Докажите, что: а) если $AM_1 = AM_2$, то $HM_1 = HM_2$; б) если $AM_1 < AM_2$, то $HM_1 < HM_2$.

303*. Два населенных пункта A и B находятся по одну сторону от прямой дороги. Где на дороге надо расположить автобусную остановку C, чтобы сумма расстояний $AC + CB$ была наименьшей?

304*. Докажите, что если точка M лежит внутри треугольника ABC, то $MB + MC < AB + AC$.

305. Докажите, что сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри треугольника, до его вершин меньше периметра треугольника.

306. Докажите, что если $AB = AC + CB$, то точки A, B и C лежат на одной прямой.

307. В прямоугольном треугольнике проведена высота из вершины прямого угла. Докажите, что данный треугольник и два образовавшихся треугольника имеют соответственно равные углы.

308. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC, равным 37 см, внешний угол при вершине B равен 60°. Найдите расстояние от вершины C до прямой AB.

309. В треугольнике с неравными сторонами AB и AC проведены высота AH и биссектриса AD. Докажите, что угол HAD равен полуразности углов B и C.

310. Докажите, что в равных треугольниках высоты, проведенные к равным сторонам, равны.

311. Что представляет собой множество всех точек плоскости, равноудаленных от двух данных пересекающихся прямых?

312. Отрезок соединяет вершину треугольника с точкой, лежащей на противоположной стороне. Докажите, что этот отрезок меньше большей из двух других сторон.

313*. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.

314. Постройте прямоугольный треугольник по: а) гипотенузе и острому углу; б) катету и противолежащему углу; в) гипотенузе и катету.

315. С помощью циркуля и линейки постройте угол, равный: а) 30°; б) 60°; в) 15°; г) 120°; д) 150°; е) 135°; ж) 165°; з) 75°; и) 105°.

316*. Постройте треугольник по стороне, высоте, проведенной к ней, и медиане, проведенной к одной из двух других сторон.

317. Дан треугольник ABC. Постройте отрезок DE, параллельный прямой AC, так, чтобы точки D и E лежали на сторонах AB и BC и $DE=AD+CE$.

318. Дан равносторонний треугольник ABC и точка B_1 на стороне AC. На сторонах BC и AB постройте точки A_1 и C_1 так, чтобы треугольник $A_1B_1C_1$ был равносторонним.

319*. Постройте треугольник по углу, высоте и биссектрисе, проведенным из вершины этого угла.

320*. Постройте треугольник по стороне, высоте и медиане, проведенным к этой стороне.

321*. Дан треугольник ABC с прямым углом A. На стороне AB постройте точку M, находящуюся на расстоянии AM от прямой BC.

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

Задачи к главе I

322. Пусть a — число, выражающее длину отрезка AB при единице измерения CD, а b — число, выражающее длину отрезка CD при единице измерения AB. Как связаны между собой числа a и b?

323. Длина отрезка AB при единице измерения E_1F_1 выражается числом m, а при единице измерения E_2F_2 — числом n. Каким числом выражается длина отрезка E_1F_1 при единице измерения E_2F_2?

324. Пусть $\angle hk$ — меньший из двух смежных углов hk и hl. Докажите, что $\angle hk = 90° - \frac{1}{2}(\angle hl - \angle hk)$, а $\angle hl = 90° + \frac{1}{2}(\angle hl - \angle hk)$.

325. Пять прямых пересекаются в одной точке (рис. 147). Найдите сумму углов 1, 2, 3, 4 и 5.

326. Даны шесть попарно пересекающихся прямых. Известно, что через точку пересечения любых двух прямых проходит по крайней мере еще одна из данных прямых. Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку.

327. Даны шесть точек. Известно, что прямая, проходящая через любые две точки, содержит по крайней мере еще одну из данных точек. Докажите, что все эти точки лежат на одной прямой.

Задачи к главе II

328. Точки C_1 и C_2 лежат по разные стороны от прямой AB и расположены так, что $AC_1 = BC_2$ и $\angle BAC_1 = \angle ABC_2$. До-

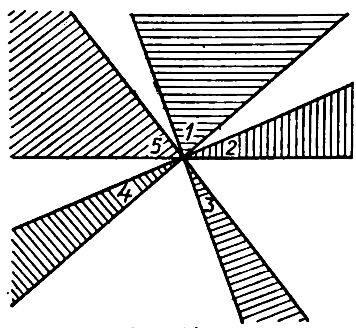


Рис. 147

кажите, что прямая C_1C_2 проходит через середину отрезка AB.

329. Докажите, что если угол, прилежащая к нему сторона и сумма двух других сторон одного треугольника соответственно равны углу, прилежащей к нему стороне и сумме двух других сторон другого треугольника, то такие треугольники равны.

330. Сторона и два угла одного треугольника равны какой-то стороне и каким-то двум углам другого. Могут ли эти треугольники быть неравными?

331. Две стороны и угол одного треугольника равны каким-то двум сторонам и углу другого треугольника. Могут ли эти треугольники быть неравными?

332. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O. Докажите, что $OC=OD$, если $AC=AO=BO=BD$.

Задачи к главам III и IV

333. Прямые, содержащие биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC, пересекаются в точке O. Найдите угол BOC, если угол A равен α.

334. Через каждую вершину данного треугольника проведена прямая, перпендикулярная к биссектрисе треугольника, исходящей из этой вершины. Отрезки этих прямых вместе со сторонами данного треугольника образуют три треугольника. Докажите, что углы этих треугольников соответственно равны.

335. В каждом из следующих случаев определите вид треугольника: а) сумма любых двух углов больше 90°; б) каждый угол меньше суммы двух других углов.

336. Докажите, что угол треугольника является острым, прямым или тупым, если медиана, проведенная из вершины этого угла, соответственно больше, равна или меньше половины противоположной стороны.

337. Внутри равнобедренного треугольника ABC с основанием BC взята точка M такая, что $\angle MBC=30°$, $\angle MCB=10°$. Найдите угол AMC, если $\angle BAC=80°$.

338. Докажите, что любой отрезок с концами на разных сторонах треугольника не больше наибольшей из сторон треугольника.

339. Отрезок BB_1 — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $BA>B_1A$ и $BC>B_1C$.

340. Внутри треугольника ABC взята точка D такая, что $AD=AB$. Докажите, что $AC>AB$.

341. В треугольнике ABC, в котором сторона AB больше AC, проведена биссектриса AD. Докажите, что $\angle ADB>\angle ADC$ и $BD>CD$.

342. Докажите теорему: если в треугольнике биссектриса является медианой, то треугольник равнобедренный.

343. Две стороны треугольника не равны друг другу. Докажите, что медиана, проведенная из их общей вершины, составляет с меньшей из сторон больший угол.

344. В треугольнике ABC, где $AB\neq AC$, проведен отрезок AM, соединяющий вершину A с произвольной точкой M стороны BC. Докажите, что треугольники AMB и AMC не равны друг другу.

345. Через вершину A треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла A, а из вершины B проведен перпендикуляр BH к этой прямой. Докажите, что периметр треугольника BCH больше периметра треугольника ABC.

346. В треугольнике ABC, где $AB<AC$, проведены биссектриса AD и высота AH. Докажите, что точка H лежит на луче DB.

347. Докажите, что в неравнобедренном треугольнике основание биссектрисы треугольника лежит между основаниями медианы и высоты, проведенных из этой же вершины.

348. Докажите, что в прямоугольном треугольнике с неравными катетами биссектриса прямого угла делит угол между высотой и медианой, проведенными из той же вершины, пополам.

349. Медиана и высота треугольника, проведенные из одной вершины угла треугольника, делят этот угол на три равные части. Докажите, что треугольник прямоугольный.

350. В треугольнике ABC высота AA_1 не меньше стороны BC, а высота BB_1 не меньше стороны AC. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный и прямоугольный.

Задачи на построение

Рассмотрим схему, по которой обычно решают задачи на построение циркулем и линейкой. Она состоит из четырех частей:

1) Отыскание способа решения задачи путем установления связей между искомыми элементами и данными задачи. Эта часть

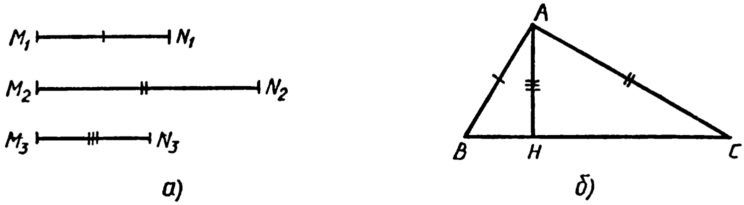


Рис. 148

называется *анализом* задачи. Анализ дает возможность составить план решения задачи.

2) Выполнение *построения* по намеченному плану.

3) *Доказательство* того, что построенная фигура удовлетворяет условиям задачи.

4) *Исследование* задачи, т. е. выяснение вопроса о том, при любых ли данных задача имеет решение, и если имеет, то сколько решений.

В тех случаях, когда задача достаточно простая, отдельные части, например, анализ или исследование, опускаются. Так мы поступали при решении простейших задач на построение. Рассмотрим теперь более сложные задачи.

351. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте к третьей стороне.

Решение. Даны три отрезка M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 (рис. 148, *а*). Требуется построить такой треугольник ABC, у которого две стороны, скажем AB и AC, равны соответственно данным отрезкам M_1N_1 и M_2N_2, а высота AH равна отрезку M_3N_3. Проведем решение задачи по описанной схеме.

Анализ. Допустим, что искомый треугольник ABC построен (рис. 148, *б*). Мы видим, что сторона AB и высота AH являются гипотенузой и катетом прямоугольного треугольника ABH. Поэтому построение треугольника ABC можно провести по такому плану: сначала построить прямоугольный треугольник ABH, а затем достроить его до всего треугольника ABC.

Построение. Строим прямоугольный треугольник ABH, у которого гипотенуза AB равна данному отрезку M_1N_1, а катет AH равен данному отрезку M_3N_3. Как это сделать, мы знаем (задача 314, *в*). На рисунке 149, *а* изображен построенный треугольник ABH. Затем проводим окружность радиуса M_2N_2 с центром в точке A. Одну из точек пересечения

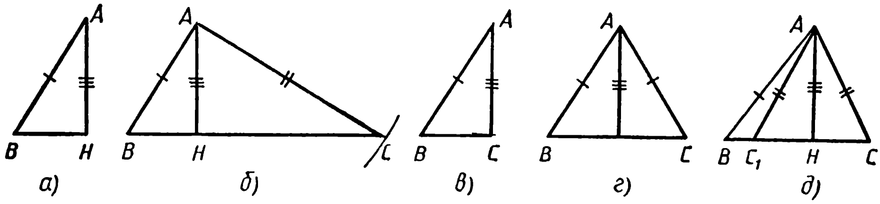


Рис. 149

этой окружности с прямой BH обозначим буквой C. Проведя отрезки BC и AC, получим искомый треугольник ABC (рис. 149, *б*).

Доказательство. Треугольник ABC действительно искомый, так как по построению сторона AB равна M_1N_1, сторона AC равна M_2N_2, а высота AH равна M_3N_3, т. е. треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи.

Исследование. Нетрудно сообразить, что задача имеет решение не при любых данных отрезках M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3. В самом деле, если хотя бы один из отрезков M_1N_1 и M_2N_2 меньше M_3N_3, то задача не имеет решения, так как наклонные AB и AC не могут быть меньше перпендикуляра AH. Задача не имеет решения и в том случае, когда $M_1N_1 = M_2N_2 = M_3N_3$ (объясните почему). В остальных случаях задача имеет решение. Если $M_1N_1 > M_3N_3$, а $M_2N_2 = M_3N_3$, то задача имеет единственное решение: в этом случае сторона AC совпадает с высотой AH и искомый треугольник является прямоугольным (рис. 149, *в*). Если $M_1N_1 > M_3N_3$, а $M_2N_2 = M_1N_1$, то задача также имеет единственное решение: в этом случае треугольник ABC равнобедренный (рис. 149, *г*). И наконец, если $M_1N_1 > M_3N_3$, $M_2N_2 > M_3N_3$ и $M_1N_1 \neq M_2N_2$, то задача имеет два решения — треугольники ABC и ABC_1 на рисунке 149, *д*.

352. Даны две точки A и B и прямая a, не проходящая через эти точки. На прямой a постройте точку, равноудаленную от точек A и B. Всегда ли задача имеет решение?

353. Постройте точку, лежащую на данной окружности и равноудаленную от концов данного отрезка. Сколько решений может иметь задача?

354. Через три данные точки проведите окружность. Всегда ли задача имеет решение?

355. Точки A и B лежат по одну сторону от прямой a. Постройте точку M прямой a так, чтобы сумма $AM+MB$ была бы меньше суммы $AX+XB$, где X — любая точка прямой a, отличная от M.

356. Постройте прямоугольный треугольник ABC, если даны острый угол B и биссектриса BD.

357. На данной окружности постройте точку, равноудаленную от двух данных пересекающихся прямых. Сколько решений может иметь задача?

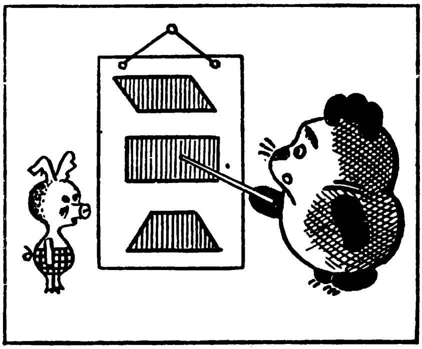
358. Даны три попарно пересекающиеся прямые, не проходящие через одну точку. Постройте точку, равноудаленную от этих прямых. Сколько решений имеет задача?

359. Дана окружность с центром O и точка A вне ее. Проведите через точку A прямую, пересекающую окружность в точках B и C таких, что $AB=BC$.

360. Постройте треугольник по периметру, одному из углов и высоте, проведенной из вершины другого угла.

361. Постройте треугольник по периметру и двум углам.

362. Постройте треугольник по стороне, разности углов при этой стороне и сумме двух других сторон.



8 класс

Глава V

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

§ 1. МНОГОУГОЛЬНИКИ

39. Многоугольник. Рассмотрим фигуру, составленную из отрезков AB, BC, CD, ..., EF, FA так, что *смежные* отрезки (т. е. AB и BC, BC и CD, ..., FA и AB) не лежат на одной прямой, а несмежные отрезки не имеют общих точек. Такая фигура называется *многоугольником* (рис. 150). Точки A, B, C, ..., E, F называются *вершинами,* а отрезки AB, BC, ..., EF, FA — *сторонами* многоугольника. Сумма длин всех сторон называется *периметром* многоугольника.

Многоугольник с n вершинами называется *n-угольником*; он имеет n сторон. Примером многоугольника является треугольник. На рисунке 151 изображены четырехугольник $ABCD$ и шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Фигура, изображенная на рисунке 152, не является многоугольником, так как несмежные отрезки C_1C_5 и C_2C_3 (а также C_3C_4 и C_1C_5) имеют общую точку.

Две вершины многоугольника, принадлежащие одной стороне, называются *соседними.* Отрезок, соединяющий любые две несоседние вершины, называется *диагональю* многоугольника.

Любой многоугольник разделяет плоскость на две части, одна из которых называется *внутренней,* а другая — *внешней областью* многоугольника. На рисунке 153 внутренние области многоугольников заштрихованы. Фигуру, состоящую из многоугольника и его внутренней области, также называют многоугольником.

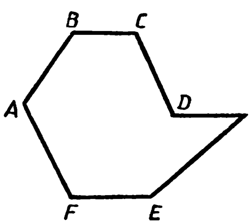


Рис. 150

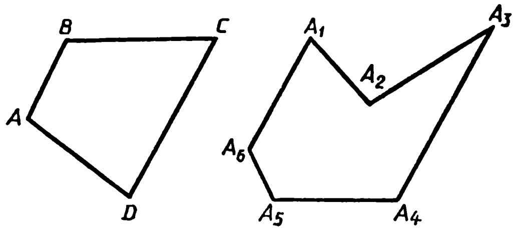


Рис. 151

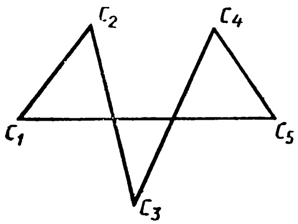


Рис. 152

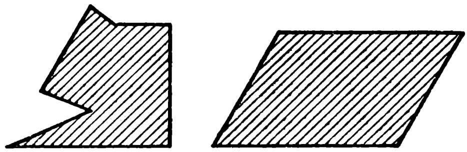


Рис. 153

40. Выпуклый многоугольник. Многоугольник называется *выпуклым*, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины. На рисунке 154 многоугольник F_1 выпуклый, а многоугольник F_2 невыпуклый.

Рассмотрим выпуклый n-угольник, изображенный на рисунке 155, *а*. Углы $A_nA_1A_2$, $A_1A_2A_3$, ..., $A_{n-1}A_nA_1$ называются *углами* этого многоугольника. Найдем их сумму. Для этого соединим диагоналями вершину A_1 с другими вершинами. В результате получим $n-2$ треугольника (рис. 155, *б*), сумма углов которых равна сумме углов n-угольника. Сумма углов каждого треугольника равна 180°, поэтому сумма углов многоугольника $A_1A_2...A_n$ равна $(n-2)\cdot 180°$.

Итак, *сумма углов выпуклого n-угольника равна* $(n-2)\cdot 180°$.

41. Четырехугольник. Каждый четырехугольник имеет четыре вершины, четыре стороны и две диагонали (рис. 156). Две несмежные стороны четырехугольника называются *противоположными.*

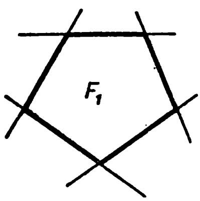
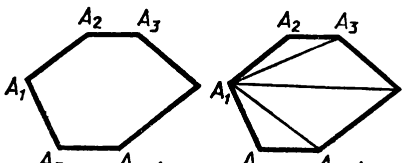
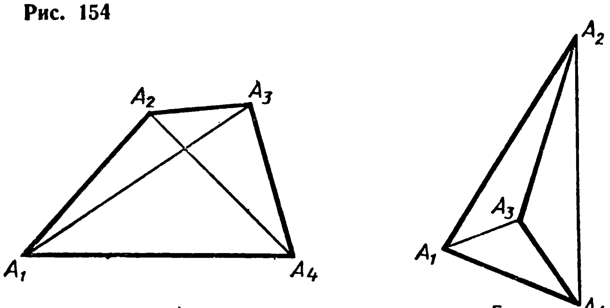


Рис. 154



а) б)

Рис. 155



а) б)

Рис. 156

Две вершины, не являющиеся соседними, называются также *противоположными.*

Четырехугольники бывают выпуклые и невыпуклые. На рисунке 156, *а* изображен выпуклый четырехугольник, а на рисунке 156, *б* — невыпуклый.

Каждая диагональ выпуклого четырехугольника разделяет его на два треугольника. Одна из диагоналей невыпуклого четырехугольника также разделяет его на два треугольника (см. рис. 156, *б*).

Так как сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n-2) \cdot 180°$, то *сумма углов выпуклого четырехугольника равна* 360°.

Вопросы и задачи

363. Начертите выпуклые пятиугольник и шестиугольник. В каждом многоугольнике из какой-нибудь вершины проведите все диагонали. На сколько треугольников разделяют проведенные диагонали каждый многоугольник?

364. Найдите сумму углов выпуклого: а) пятиугольника; б) шестиугольника; в) десятиугольника.

365. Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, каждый угол которого равен: а) 90°; б) 60°; в) 120°; г) 108°?

366. Найдите стороны четырехугольника, если его периметр равен 8 см, а одна сторона больше каждой из других соответственно на 3 мм, 4 мм и 5 мм.

367. Найдите стороны четырехугольника, если его периметр равен 66 см, первая сторона больше второй на 8 см и на столько же меньше третьей стороны, а четвертая — в три раза больше второй.

368. Найдите углы выпуклого четырехугольника, если они равны друг другу.

369. Найдите углы A, B и C выпуклого четырехугольника $ABCD$, если $\angle A = \angle B = \angle C$, а $\angle D = 135°$.

370. Найдите углы выпуклого четырехугольника, если они пропорциональны числам 1, 2, 4, 5.

§ 2. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ И ТРАПЕЦИЯ

42. Параллелограмм.

Определение. *Параллелограммом называется четырех-*

угольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

На рисунке 157 изображен параллелограмм $ABCD$: $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$. Параллелограмм является выпуклым четырехугольником (см. задачу 378).

Рассмотрим некоторые свойства параллелограмма.

1^0. *В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.*

Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (рис. 158). Диагональ AC разделяет его на два треугольника: ABC и ADC. Эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим углам (AC — общая сторона, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие углы при пересечении секущей AC параллельных прямых AB и CD, AD и BC соответственно). Поэтому $AB = CD$, $AD = BC$ и $\angle B = \angle D$. Далее, пользуясь равенствами углов 1 и 2, 3 и 4, получаем $\angle A = \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = \angle C$.

2^0. *Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.*

Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD параллелограмма $ABCD$ (рис. 159). Треугольники AOB и COD равны по стороне и двум прилежащим углам ($AB = CD$ как противоположные стороны параллелограмма, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущими AC и BD соответственно). Поэтому $AO = OC$ и $OB = OD$, что и требовалось доказать.

Рисунок 160 иллюстрирует все рассмотренные свойства.

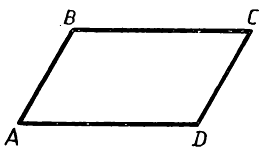


Рис. 157

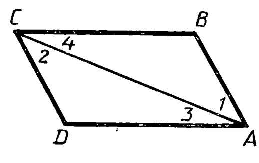


Рис. 158

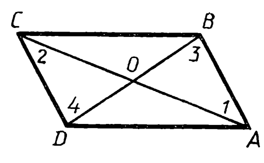
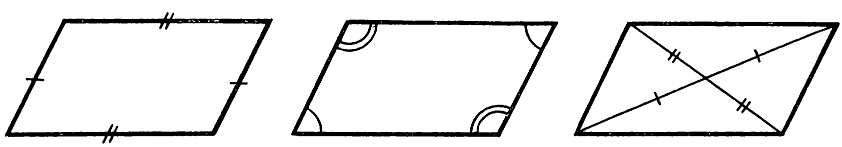


Рис. 159



Свойства параллелограмма

Рис. 160

43. Признаки параллелограмма. Рассмотрим три признака параллелограмма.

1^0. *Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм.*

Пусть в четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD параллельны и $AB=CD$ (см. рис. 158). Проведем диагональ AC, разделяющую данный четырехугольник на два треугольника: ABC и CDA. Эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними (AC — общая сторона, $AB=CD$ по условию, $\angle 1=\angle 2$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущей AC), поэтому $\angle 3=\angle 4$. Но углы 3 и 4 накрест лежащие при пересечении прямых AD и BC секущей AC, следовательно, $AD \parallel BC$. Таким образом, в четырехугольнике $ABCD$ противоположные стороны попарно параллельны, и, значит, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

2^0. *Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник — параллелограмм.*

Проведем диагональ AC данного четырехугольника $ABCD$, разделяющую его на треугольники ABC и CDA (см. рис. 158). Эти треугольники равны по трем сторонам (AC — общая сторона, $AB=CD$ и $BC=DA$ по условию), поэтому $\angle 1=\angle 2$. Отсюда следует, что $AB \parallel CD$. Так как $AB=CD$ и $AB \parallel CD$, то по признаку 1^0 четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

3^0. *Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.*

Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, в котором диагонали AC и BD пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам (см. рис. 159). Треугольники AOB и COD равны по первому признаку равенства треугольников ($AO=OC$, $BO=OD$ по условию, $\angle AOB=\angle COD$ как вертикальные углы), поэтому $AB=$ $=CD$ и $\angle 1=\angle 2$.

Из равенства углов 1 и 2 следует, что $AB \parallel CD$.

Итак, в четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны и параллельны, значит, по признаку 1^0 четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

44. Трапеция. *Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны.* Параллельные стороны трапеции называются ее *основаниями*, а две другие стороны — *боковыми сторонами* (рис. 161).

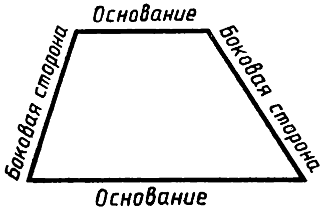


Рис. 161

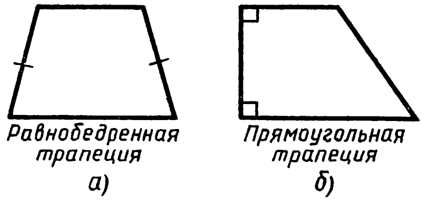


Рис. 162

Трапеция называется *равнобедренной*, если ее боковые стороны равны (рис. 162, *а*). Трапеция, один из углов которой прямой, называется *прямоугольной* (рис. 162, *б*).

Задачи

371. Докажите, что выпуклый четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, если: а) $\angle BAC = \angle ACD$ и $\angle BCA = \angle DAC$; б) $AB \parallel CD$, $\angle A = \angle C$.

372. Периметр параллелограмма равен 48 см. Найдите стороны параллелограмма, если: а) одна сторона на 3 см больше другой; б) разность двух сторон равна 7 см; в) одна из сторон в два раза больше другой.

373. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 50 см, $\angle C = 30°$, а перпендикуляр BH к прямой CD равен 6,5 см. Найдите стороны параллелограмма.

374. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр этого параллелограмма, если $BK = 15$ см, $KC = 9$ см.

375. Найдите периметр параллелограмма, если биссектриса одного из его углов делит сторону параллелограмма на отрезки 7 см и 14 см.

376. Найдите углы параллелограмма $ABCD$, если: а) $\angle A = 84°$; б) $\angle A - \angle B = 55°$; в) $\angle A + \angle C = 142°$; г) $\angle A = 2\angle B$; д) $\angle CAD = 16°$, $\angle ACD = 37°$.

377. В параллелограмме $MNPQ$ проведен перпендикуляр NH к прямой MQ, причем точка H лежит на стороне MQ. Найдите стороны и углы параллелограмма, если известно, что $MH = 3$ см, $HQ = 5$ см, $\angle MNH = 30°$.

378. Докажите, что параллелограмм является выпуклым четырехугольником.

Решение. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (см. рис. 157) и докажем, что он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины. Возьмем, например, прямую AB. Так как $AB \parallel CD$, то отрезок CD не имеет общих точек с прямой AB. Значит, этот отрезок лежит по одну сторону от прямой AB. Но тогда и отрезки BC и AD лежат по ту же сторону от прямой AB. Таким образом, параллелограмм $ABCD$ лежит по одну сторону от прямой AB.

379. Из вершин B и D параллелограмма $ABCD$, у которого $AB \neq BC$ и $\angle A$ острый, проведены перпендикуляры BK и DM к прямой AC. Докажите, что четырехугольник $BMDK$ — параллелограмм.

380. На сторонах AB, BC, CD и DA четырехугольника $ABCD$ отмечены соответственно точки M, N, P и Q так, что $AM = CP$, $BN = DQ$, $BM = DP$, $NC = QA$. Докажите, что $ABCD$ и $MNPQ$ — параллелограммы.

381. На рисунке 163 изображены два одинаковых колеса тепловоза. Радиусы O_1A и O_2B равны. Стержень AB, длина которого равна расстоянию O_1O_2 между центрами колес, передает движение от одного колеса к другому. Докажите, что отрезки AB и O_1O_2 либо параллельны, либо лежат на одной прямой.

382. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$, вершинами которого являются середины отрезков OA, OB, OC и OD,— параллелограмм.

383. На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ отмечены две точки P и Q так, что $PB = QD$. Докажите, что четырехугольник $APCQ$ — параллелограмм.

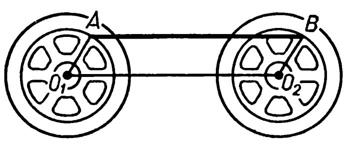


Рис. 163

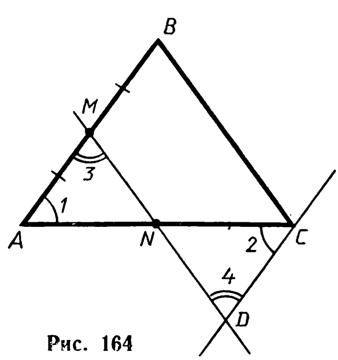
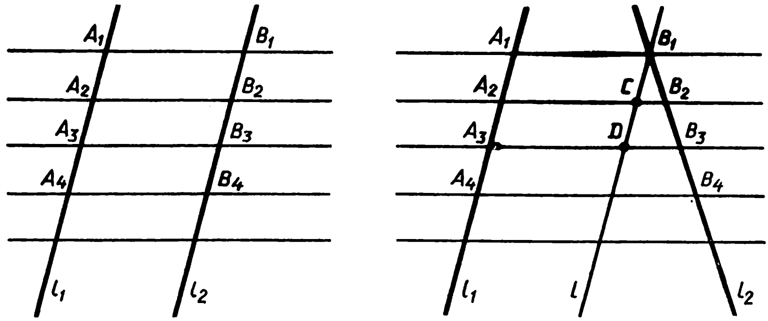


Рис. 164



а) Рис. 165 б)

384. Через середину M стороны AB треугольника ABC проведена прямая, параллельная стороне BC. Эта прямая пересекает сторону AC в точке N. Докажите, что $AN=NC$.

Решение. Через точку C проведем прямую, параллельную прямой AB, и обозначим буквой D точку пересечения этой прямой с прямой MN (рис. 164). Так как $AM=MB$ по условию, а $MB=CD$ как противоположные стороны параллелограмма $BCDM$, то $AM=DC$. Треугольники AMN и CDN равны по второму признаку равенства треугольников ($AM=CD$, $\angle 1=\angle 2$ и $\angle 3=\angle 4$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущими AC и MD), поэтому $AN=NC$.

385. Докажите *теорему Фалеса*[1]: если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки.

Решение. Пусть на прямой l_1 отложены равные отрезки A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ... и через их концы проведены параллельные прямые, которые пересекают прямую l_2 в точках B_1, B_2, B_3, B_4, ... (рис. 165). Требуется доказать, что отрезки B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, ... равны друг другу. Докажем, например, что $B_1B_2=B_2B_3$.

Рассмотрим сначала случай, когда прямые l_1 и l_2 параллельны (рис. 165, *а*). Тогда $A_1A_2=B_1B_2$ и $A_2A_3=B_2B_3$ как

[1] Фалес Милетский — древнегреческий ученый (ок. 625—547 гг. до н. э.).

противоположные стороны параллелограммов $A_1B_1B_2A_2$ и $A_2B_2B_3A_3$. Так как $A_1A_2 = A_2A_3$, то и $B_1B_2 = B_2B_3$.

Если прямые l_1 и l_2 не параллельны, то через точку B_1 проведем прямую l, параллельную прямой l_1 (рис. 165, *б*). Она пересечет прямые A_2B_2 и A_3B_3 в некоторых точках C и D. Так как $A_1A_2 = A_2A_3$, то по доказанному $B_1C = CD$. Отсюда получаем $B_1B_2 = B_2B_3$ (задача 384). Аналогично можно доказать, что $B_2B_3 = B_3B_4$ и т. д.

386. Докажите, что отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, параллелен основаниям трапеции.

387. Найдите углы B и D трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, если $\angle A = 36°$, $\angle C = 117°$.

388. Докажите, что в равнобедренной трапеции: а) углы при каждом основании равны; б) диагонали равны.

389. Докажите, что трапеция равнобедренная, если: а) углы при основании равны; б) диагонали трапеции равны.

390. Один из углов равнобедренной трапеции равен 68°. Найдите остальные углы трапеции.

391. Докажите, что из одинаковых плиток, имеющих форму равнобедренной трапеции, можно сделать паркет, полностью покрывающий любую часть плоскости.

392. Основания прямоугольной трапеции равны a и b, один из углов равен α. Найдите: а) бо́льшую боковую сторону трапеции, если $a = 4$ см, $b = 7$ см, $\alpha = 60°$; б) меньшую боковую сторону трапеции, если $a = 10$ см, $b = 15$ см, $\alpha = 45°$.

Задачи на построение

Рассмотрим схему, по которой обычно решаются задачи на построение циркулем и линейкой. Она состоит из четырех частей.

1) Отыскание способа решения задачи путем установления связей между искомыми элементами и данными задачи. Эта часть называется *анализом* задачи. Анализ дает возможность составить план решения задачи.

2) Выполнение *построения* по намеченному плану.

3) *Доказательство* того, что построенная фигура удовлетворяет условиям задачи.

4) *Исследование* задачи, т. е. выяснение вопроса о том, при любых ли данных задача имеет решение, и если имеет, то сколько решений.

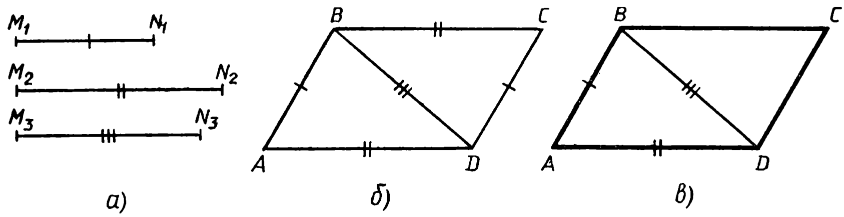


Рис. 166

В тех случаях, когда задача достаточно простая, отдельные части, например анализ или исследование, опускаются. Так мы поступали при решении простейших задач на построение в VII классе.

393. Постройте параллелограмм: а) по двум смежным сторонам и углу между ними; б) по двум диагоналям и углу между ними; в) по двум смежным сторонам и одной из диагоналей.

Решение. в) Уточним, как нужно понимать эту задачу. Даны три отрезка M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 (рис. 166, *а*). Требуется построить параллелограмм $ABCD$, у которого смежные стороны, скажем AB и BC, равны соответственно отрезкам M_1N_1 и M_2N_2, а одна из диагоналей, например BD, равна отрезку M_3N_3. Проведем решение задачи по описанной схеме.

Анализ. Допустим, что искомый параллелограмм $ABCD$ построен (рис. 166, *б*). Мы видим, что стороны треугольника BAD равны данным отрезкам M_1N_1, M_2N_2 и M_3N_3. Это обстоятельство подсказывает следующий путь решения задачи: сначала нужно построить по трем сторонам треугольник ABD, а затем достроить его до параллелограмма $ABCD$.

Построение. Строим треугольник ABD так, чтобы его стороны AB, AD и BD равнялись соответственно отрезкам M_1N_1, M_2N_2 и M_3N_3 (как это сделать, мы знаем из курса VII класса). Затем построим прямую, проходящую через точку B параллельно AD, и вторую прямую, проходящую через точку D параллельно AB (как это сделать, мы также знаем из курса VII класса). Точку пересечения этих прямых обозначим буквой C (рис. 166, *в*). Четырехугольник $ABCD$ и есть искомый параллелограмм.

Доказательство. По построению $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$, поэтому $ABCD$ — параллелограмм. Также по построению смежные стороны параллелограмма равны отрез-

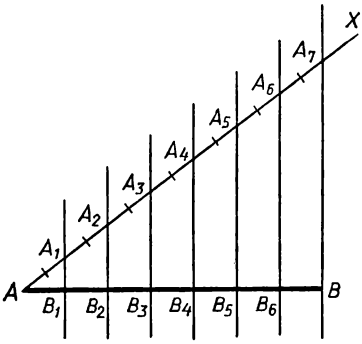


Рис. 167

кам M_1N_1 и M_2N_2, а диагональ BD равна отрезку M_3N_3, т. е. параллелограмм $ABCD$ — искомый.

Исследован е. Ясно, что если по трем данным отрезкам M_1N_1, M_2N_2 и M_3N_3 можно построить треугольник ABD, стороны которого равны этим отрезкам, то можно построить и параллелограмм $ABCD$. Но треугольник ABD можно построить не всегда. Если какой-то из трех данных отрезков больше или равен сумме двух других, то треугольник ABD, а значит, и параллелограмм $ABCD$ построить нельзя.

Попробуйте самостоятельно доказать, что если задача имеет решение, то это решение единственное (см. п. 38).

394. Даны три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Постройте параллелограмм так, чтобы три его вершины совпали с данными точками. Сколько таких параллелограммов можно построить?

395. Даны острый угол hk и два отрезка P_1Q_1 и P_2Q_2. Постройте параллелограмм $ABCD$ так, чтобы расстояние между параллельными прямыми AB и DC равнялось P_1Q_1, $AB=P_2Q_2$ и $\angle A=\angle hk$.

396. Разделите данный отрезок AB на n равных частей.

Решение. Проведем луч AX, не лежащий на прямой AB, и на нем от точки A отложим последовательно n равных отрезков AA_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$ (рис. 167), т. е. столько равных отрезков, на сколько равных частей нужно разделить данный отрезок AB (на рисунке 167 $n=7$). Проведем прямую A_nB (точка A_n — конец последнего отрезка) и построим прямые, проходящие через точки A_1, A_2, ..., A_{n-1} и параллельные прямой A_nB. Эти прямые пересекают отрезок AB в точках B_1, B_2, ..., B_{n-1}, которые по теореме Фалеса (задача 385) делят отрезок AB на n равных частей.

397. Постройте равнобедренную трапецию $ABCD$: а) по основанию AD, углу A и боковой стороне AB; б) по основанию BC, боковой стороне AB и диагонали BD.

398. Постройте прямоугольную трапецию $ABCD$ по основаниям и боковой стороне AD, перпендикулярной к основаниям.

§ 3. ПРЯМОУГОЛЬНИК, РОМБ, КВАДРАТ

45. Прямоугольник. *Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.* Так как прямоугольник является параллелограммом, то он обладает всеми свойствами параллелограмма: в прямоугольнике противоположные стороны равны, а диагонали точкой пересечения делятся пополам.

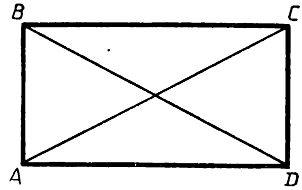


Рис. 168

Рассмотрим особое свойство прямоугольника.

Диагонали прямоугольника равны.

Действительно, обратимся к рисунку 168, на котором изображен прямоугольник $ABCD$ с диагоналями AC и BD. Прямоугольные треугольники ACD и DBA равны по двум катетам ($CD=BA$, AD — общий катет). Отсюда следует, что гипотенузы этих треугольников равны, т. е. $AC=BD$, что и требовалось доказать.

Докажем обратное утверждение (признак прямоугольника).

Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

Пусть в параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD равны (см. рис. 168). Треугольники ABD и DCA равны по трем сторонам ($AB=DC$, $BD=CA$, AD — общая сторона). Отсюда следует, что $\angle A=\angle D$. Так как в параллелограмме противоположные углы равны, то $\angle A=\angle C$ и $\angle B=\angle D$. Таким образом, $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D$. Параллелограмм — выпуклый четырехугольник, поэтому $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$. Следовательно, $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$, т. е. параллелограмм $ABCD$ является прямоугольником.

46. Ромб и квадрат. *Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.* Так как ромб является параллелограммом, то он обладает всеми свойствами параллелограмма. Рассмотрим особое свойство ромба.

Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.

Рассмотрим ромб $ABCD$ (рис. 169). Требуется доказать, что $AC\perp BD$ и каждая диагональ делит соответствующие углы ромба пополам. Докажем, например, что $\angle BAC=\angle DAC$.

По определению ромба $AB=AD$, поэтому треугольник BAD

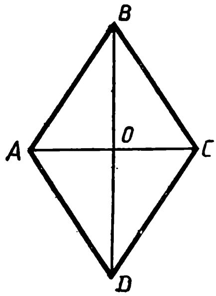


Рис. 169

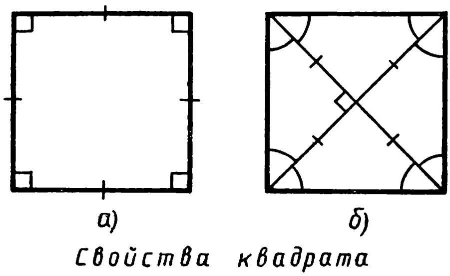


Рис. 170

равнобедренный. Так как ромб — параллелограмм, то его диагонали точкой O пересечения делятся пополам. Следовательно, AO — медиана равнобедренного треугольника BAD, а значит, высота и биссектриса этого треугольника. Поэтому $AC \perp BD$ и $\angle BAC = \angle DAC$, что и требовалось доказать.

Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны. Прямоугольник является параллелограммом, поэтому и квадрат является параллелограммом, у которого все стороны равны, т. е. ромбом. Отсюда следует, что квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба. Сформулируем основные свойства квадрата.

1. *Все углы квадрата прямые* (рис. 170, *а*).

2. *Диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны, точкой пересечения делятся пополам и делят углы квадрата пополам* (рис. 170, *б*).

47. Осевая и центральная симметрии. Две точки A и A_1 называются *симметричными относительно* прямой a, если эта прямая проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к нему (рис. 171, *а*). Каждая точка прямой a считается симметричной

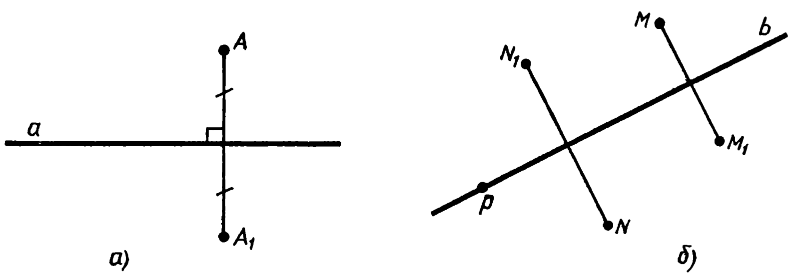
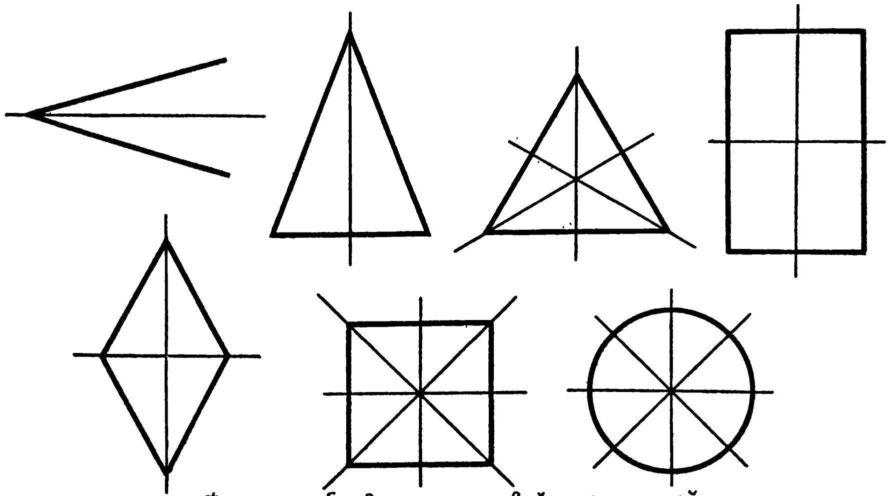


Рис. 171



Фигуры, обладающие осевой симметрией

Рис. 172

самой себе. На рисунке 171, *б* точки M и M_1, N и N_1 симметричны относительно прямой b, а точка P симметрична самой себе относительно этой прямой.

Фигура называется симметричной относительно прямой а, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно прямой а также принадлежит этой фигуре. Прямая a называется *осью симметрии фигуры*. Говорят также, что фигура *обладает осевой симметрией*. Приведем примеры фигур, обладающих осевой симметрией (рис. 172). У неразвернутого угла одна ось симметрии — прямая, на которой расположена биссектриса угла. Равнобедренный (но не равносторонний) треугольник имеет также одну ось симметрии, а равносторонний треугольник — три оси симметрии. Прямоугольник и ромб, не являющиеся квадратами, имеют по две оси симметрии, а квадрат — четыре оси симметрии. У окружности их бесконечно много — любая прямая, проходящая через ее центр, является осью симметрии. Имеются фигуры, у которых нет ни одной оси симметрии. К таким фигурам относятся параллелограмм, отличный от прямоугольника, разносторонний треугольник.

Две точки A и A_1 называются *симметричными относительно точки O*, если O — середина отрезка AA_1 (рис. 173, *а*). Точка

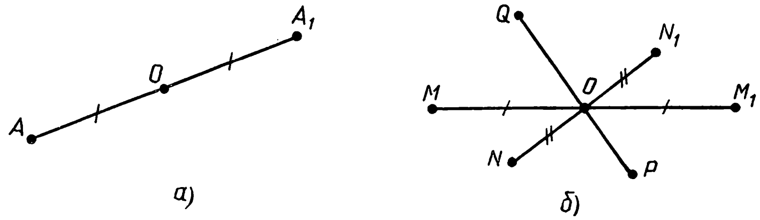
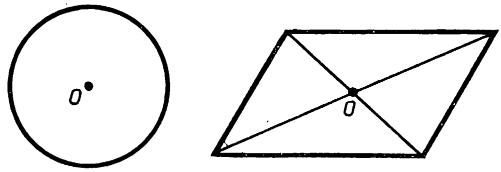


Рис. 173

O считается симметричной самой себе. На рисунке 173, *б* точки M и M_1, N и N_1 симметричны относительно точки O, а точки P и Q не симметричны относительно этой точки.

Фигура называется симметричной относительно точки O, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно точки O также принадлежит этой фигуре. Точка O называется *центром симметрии фигуры.* Говорят также, что фигура *обладает центральной симметрией.* Примерами фигур, обладающих центральной симметрией, являются окружность и параллелограмм (рис. 174). Центром симметрии окружности является центр окружности, а центром симметрии параллелограмма — точка пересечения его диагоналей. Прямая также обладает центральной симметрией, однако в отличие от окружности и параллелограмма, которые имеют только один центр симметрии (точка O на рисунке 174), у прямой их бесконечно много — любая точка прямой является ее центром симметрии. Примером фигуры, не имеющей центра симметрии, является треугольник.

Изображения на плоскости многих предметов окружающего нас мира имеют ось симметрии или центр симметрии. Многие листья деревьев и лепестки цветов симметричны относительно среднего стебля (рис. 175).



Фигуры, обладающие центральной симметрией

Рис. 174

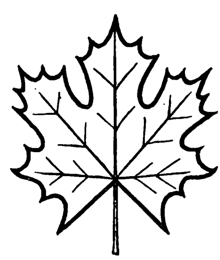


Рис. 175

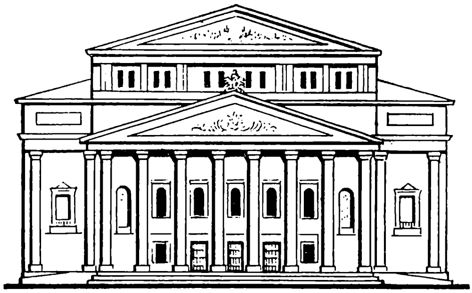


Рис. 176

С симметрией мы часто встречаемся в искусстве, архитектуре, технике, быту. Так, фасады многих зданий обладают осевой симметрией (рис. 176). В большинстве случаев симметричны относительно оси или центра узоры на коврах, тканях, комнатных обоях. Симметричны многие детали механизмов, например зубчатые колеса.

Вопросы и задачи

399. Докажите, что параллелограмм, один из углов которого прямой, является прямоугольником.

400. Докажите, что если в четырехугольнике все углы прямые, то четырехугольник является прямоугольником.

401. Найдите периметр прямоугольника $ABCD$, если биссектриса угла A делит: а) сторону BC на отрезки 45,6 см и 7,85 см; б) сторону DC на отрезки 2,7 дм и 4,5 дм.

402. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники AOD и AOB равнобедренные.

403. В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Найдите периметр треугольника AOB, если $\angle CAD = 30°$, $AC = 12$ см.

404. Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

405. В ромбе одна из диагоналей равна стороне. Найдите: а) углы ромба; б) углы, которые диагонали ромба образуют с его сторонами.

406. Найдите периметр ромба $ABCD$, если $\angle B = 60°$, $AC = 10{,}5$ см.

407. Найдите углы, которые образуют диагонали ромба с его сторонами, если один из углов ромба равен 45°.

408. Докажите, что параллелограмм является ромбом, если: а) его диагонали взаимно перпендикулярны; б) диагональ параллелограмма является биссектрисой его угла.

409. Докажите, что ромб, у которого один угол прямой, является квадратом.

410. Является ли четырехугольник квадратом, если его диагонали: а) равны и взаимно перпендикулярны; б) взаимно перпендикулярны и имеют общую середину; в) равны, взаимно перпендикулярны и имеют общую середину?

411. В прямоугольном треугольнике проведена биссектриса прямого угла. Через точку пересечения этой биссектрисы с гипотенузой проведены прямые, параллельные катетам. Докажите, что полученный четырехугольник — квадрат.

412. Даны равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, катетом $AC = 12$ см и квадрат $CDEF$, такой, что две его стороны лежат на катетах, а вершина E — на гипотенузе треугольника. Найдите периметр квадрата.

413. Постройте прямоугольник: а) по двум смежным сторонам; б) по стороне и диагонали; в) по диагонали и углу между диагоналями.

414. Постройте ромб: а) по двум диагоналям; б) по стороне и углу.

415. Постройте квадрат: а) по стороне; б) по диагонали.

416. Даны две точки A и B, симметричные относительно некоторой прямой, и точка M. Постройте точку, симметричную точке M относительно той же прямой.

417. Сколько осей симметрии имеет: а) отрезок; б) прямая; в) луч?

418. Какие из следующих букв имеют ось симметрии: А, Б, Г, Е, О, F?

419. Докажите, что прямая, проходящая через середины противоположных сторон прямоугольника, является его осью симметрии.

420. Докажите, что прямая, содержащая биссектрису равнобедренного треугольника, проведенную к основанию, является осью симметрии треугольника.

421. Даны точки A, B и M. Постройте точку, симметричную точке M относительно середины отрезка AB.

422. Имеют ли центр симметрии: а) отрезок; б) луч; в) пара пересекающихся прямых; г) квадрат?

423. Какие из следующих букв имеют центр симметрии: А, О, М, Х, К?

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ V

1. Объясните, какая фигура называется многоугольником. Что такое вершины, стороны, диагонали и периметр многоугольника?
2. Какой многоугольник называется выпуклым? Объясните, какие углы называются углами выпуклого многоугольника.
3. Выведите формулу для вычисления суммы углов выпуклого n-угольника.
4. Начертите четырехугольник и покажите его диагонали, противоположные стороны и противоположные вершины.
5. Чему равна сумма углов выпуклого четырехугольника?
6. Дайте определение параллелограмма. Является ли параллелограмм выпуклым четырехугольником?
7. Докажите, что в параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.
8. Докажите, что диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.
9. Сформулируйте и докажите признаки параллелограмма.
10. Какой четырехугольник называется трапецией? Как называются стороны трапеции?
11. Какая трапеция называется равнобедренной? прямоугольной?
12. Какой четырехугольник называется прямоугольником? Докажите, что диагонали прямоугольника равны.
13. Докажите, что если в параллелограмме диагонали равны, то параллелограмм является прямоугольником.
14. Какой четырехугольник называется ромбом? Докажите, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.
15. Какой четырехугольник называется квадратом? Сформулируйте основные свойства квадрата.
16. Какие две точки называются симметричными относительно данной прямой?
17. Какая фигура называется симметричной относительно данной прямой?
18. Какие две точки называются симметричными относительно данной точки?

19. Какая фигура называется симметричной относительно данной точки?
20. Приведите примеры фигур, обладающих: а) осевой симметрией; б) центральной симметрией; в) и осевой, и центральной симметрией.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

424. Докажите, что если не все углы выпуклого четырехугольника равны друг другу, то хотя бы один из них тупой.

425. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 46 см, $AB = 14$ см. Какую сторону параллелограмма пересекает биссектриса угла A? Найдите отрезки, которые образуются при этом пересечении.

426. Стороны параллелограмма равны 10 см и 3 см. Биссектрисы двух углов, прилежащих к большей стороне, делят противоположную сторону на три отрезка. Найдите эти отрезки.

427. Через произвольную точку основания равнобедренного треугольника проведены прямые, параллельные боковым сторонам треугольника. Докажите, что периметр получившегося четырехугольника равен сумме боковых сторон данного треугольника.

428. В параллелограмме, смежные стороны которого не равны, проведены биссектрисы углов. Докажите, что при их пересечении образуется прямоугольник.

429. Докажите, что выпуклый четырехугольник является параллелограммом, если сумма углов, прилежащих к каждой из двух смежных сторон, равна 180°.

430. Докажите, что выпуклый четырехугольник является параллелограммом, если его противоположные углы попарно равны.

431. Точка K — середина медианы AM треугольника ABC. Прямая BK пересекает сторону AC в точке D. Докажите, что $AD = \frac{1}{3}AC$.

432. Точки M и N — середины сторон AD и BC параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые AN и MC делят диагональ BD на три равные части.

433. Из вершины B ромба $ABCD$ проведены перпендикуляры BK и BM к прямым AD и DC. Докажите, что луч BD является биссектрисой угла KBM.

434. Докажите, что точка пересечения диагоналей ромба равноудалена от его сторон.

435. Докажите, что середина отрезка, соединяющего вершину треугольника с любой точкой противоположной стороны, лежит на отрезке с концами в серединах двух других сторон.

436. Диагональ AC квадрата $ABCD$ равна 18,4 см. Прямая, проходящая через точку A и перпендикулярная к прямой AC, пересекает прямые BC и CD соответственно в точках M и N. Найдите MN.

437. На диагонали AC квадрата $ABCD$ взята точка M так, что $AM=AB$. Через точку M проведена прямая, перпендикулярная к прямой AC и пересекающая BC в точке H. Докажите, что $BH=HM=MC$.

438. В трапеции $ABCD$ с бóльшим основанием AD диагональ AC перпендикулярна к боковой стороне CD, $\angle BAC=\angle CAD$. Найдите AD, если периметр трапеции равен 20 см, а $\angle D=60°$.

439*. Сумма углов при одном из оснований трапеции равна 90°. Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен их полуразности.

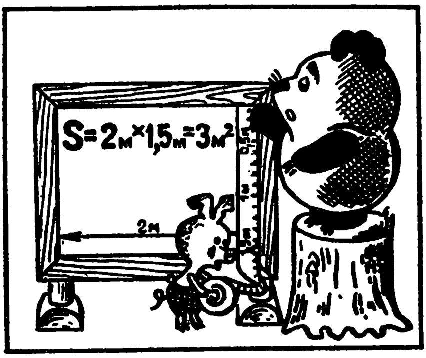
440*. На двух сторонах треугольника вне его построены квадраты. Докажите, что отрезок, соединяющий концы сторон квадратов, выходящих из одной вершины треугольника, в два раза больше медианы треугольника, выходящей из той же вершины.

441. Докажите, что прямые, содержащие диагонали ромба, являются его осями симметрии.

442. Докажите, что точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии.

443. Сколько центров симметрии имеет пара параллельных прямых?

444*. Докажите, что если фигура имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии, то точка их пересечения является центром симметрии фигуры.



Глава VI

ПЛОЩАДЬ

§ 1. ПЛОЩАДЬ МНОГОУГОЛЬНИКА

48. Понятие площади многоугольника. Понятие площади нам известно из повседневного опыта. Каждый понимает смысл слов: площадь комнаты равна шестнадцати квадратным метрам, площадь садового участка — восьми соткам и т. д. В этой главе мы рассмотрим вопрос о площадях многоугольников.

Можно сказать, что площадь многоугольника — это величина той части плоскости, которую занимает многоугольник. Измерение площадей проводится с помощью выбранной единицы измерения аналогично измерению длин отрезков. За единицу измерения площадей принимают квадрат, сторона которого равна единице измерения отрезков. Так, если за единицу измерения отрезков принят сантиметр, то за единицу измерения площадей принимают квадрат со стороной 1 см. Такой квадрат называется *квадратным сантиметром* и обозначается см^2. Аналогично определяется *квадратный метр* (м^2), *квадратный миллиметр* (мм^2) и т. д.

При выбранной единице измерения площадей площадь каждого многоугольника выражается положительным числом. Это число показывает, сколько раз единица измерения и ее части укладываются в данном многоугольнике. Рассмотрим примеры. На рисунке 177, *а* изображен прямоугольник, в котором квадратный сантиметр укладывается ровно 6 раз. Это означает, что площадь прямоугольника равна 6 см^2. В трапеции $ABCD$, изображенной на рисунке 177, *б*, квадратный сантиметр укладывается два раза и остается часть трапеции — треугольник CDE, в котором квадратный сантиметр не укладывается целиком. Для измерения площади этого треугольника нужно использовать доли квадратного сантиметра, например квадратный миллиметр. Он составляет 0,01 часть квадратного сантиметра. Это показано на рисунке

177, *в*, где квадратный сантиметр разбит на 100 квадратных миллиметров (этот рисунок, а также рисунок 177, *г* для большей наглядности даны в увеличенном масштабе). На рисунке 177, *г* видно, что квадратный миллиметр укладывается в треугольнике CDE 14 раз и остается часть этого треугольника (она заштрихована на рисунке), в которой квадратный миллиметр не укладывается целиком. Поэтому можно сказать, что площадь трапеции $ABCD$ приближенно равна 2,14 см^2. Оставшуюся часть треугольника CDE можно измерить с помощью более мелкой доли квадратного сантиметра и получить более точное значение площади трапеции. Описанный процесс измерения можно продолжить далее, однако на практике он неудобен. Обычно измеряют лишь некоторые связанные с многоугольником отрезки, а затем вычисляют площадь по определенным формулам. Вывод этих формул основан на свойствах площадей, которые мы сейчас рассмотрим.

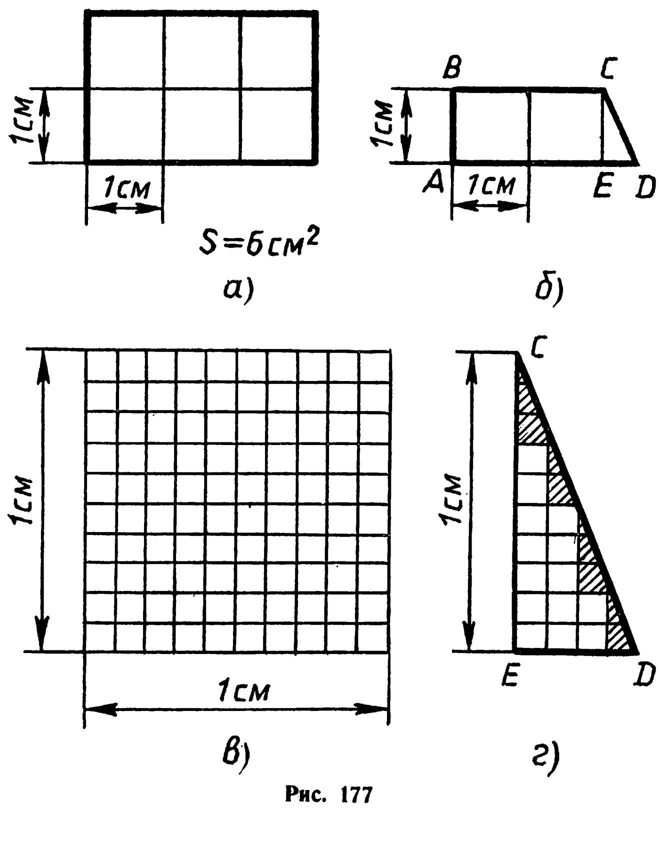


Рис. 177

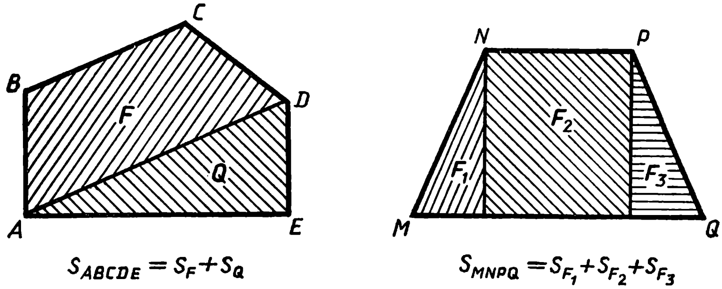


Рис. 178

Прежде всего отметим, что если два многоугольника равны, то единица измерения площадей и ее части укладываются в таких многоугольниках одинаковое число раз, т. е. имеет место следующее свойство:

1^0. *Равные многоугольники имеют равные площади.*

Далее, пусть многоугольник составлен из нескольких многоугольников (при этом мы предполагаем, что внутренние области любых двух из этих многоугольников не имеют общих точек, см. рисунок 178). Очевидно, величина части плоскости, занимаемой всем многоугольником, является суммой величин тех частей плоскости, которые занимают составляющие его многоугольники. Итак:

2^0. *Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.*

Свойства 1^0 и 2^0 называют *основными свойствами площадей.* Напомним, что аналогичными свойствами обладают длины отрезков.

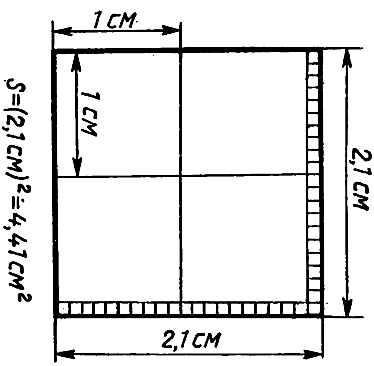


Рис. 179

Наряду с этими свойствами нам понадобится еще одно свойство площадей.

3^0. *Площадь квадрата равна квадрату его стороны.*

Краткую формулировку этого свойства следует понимать так: если сторона квадрата при выбранной единице измерения отрез-

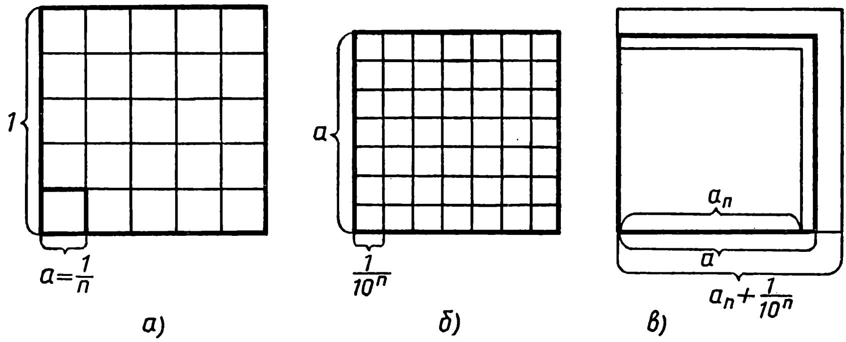


Рис. 180

ков выражается числом a, то площадь этого квадрата выражается числом a^2. На рисунке 179 изображен квадрат, сторона которого равна 2,1 см. Он состоит из четырех квадратных сантиметров и сорока одного квадратного миллиметра. Таким образом, площадь этого квадрата равна 4,41 см^2, что равно квадрату его стороны: $4{,}41=(2{,}1)^2$. Доказательство утверждения 3^0 приведено в следующем пункте.

49*. Площадь квадрата. Докажем, что площадь S квадрата со стороной a равна a^2.

Начнем с того случая, когда $a=\frac{1}{n}$, где n — целое число. Возьмем квадрат со стороной 1 и разобьем его на n^2 равных квадратов так, как показано на рисунке 180, a (на этом рисунке $n=5$). Так как площадь большого квадрата равна 1, то площадь каждого маленького квадрата равна $\frac{1}{n^2}$. Сторона каждого маленького квадрата равна $\frac{1}{n}$, т. е. равна a. Итак,

$$S=\frac{1}{n^2}=\left(\frac{1}{n}\right)^2=a^2. \qquad (1)$$

Пусть теперь число a представляет собой конечную десятичную дробь, содержащую n знаков после запятой (в частности, число a может быть целым, и тогда $n=0$). Тогда число $m=a\cdot 10^n$ целое. Разобьем данный квадрат со стороной a на m^2 равных квадратов так, как показано на рисунке 180, $б$ (на этом рисунке $m=7$). При этом каждая сторона данного квадрата разобьется на m равных частей, и, значит, сторона любого маленького квадрата равна $\frac{a}{m}=\frac{a}{a\cdot 10^n}=\frac{1}{10^n}$. По формуле (1) площадь каждого маленького квадрата равна $\left(\frac{1}{10^n}\right)^2$. Следовательно, площадь S данного квадрата равна

$$m^2\cdot\left(\frac{1}{10^n}\right)^2=\left(\frac{m}{10^n}\right)^2=\left(\frac{a\cdot 10^n}{10^n}\right)^2=a^2$$

Наконец, пусть число a представляет собой бесконечную десятичную дробь. Рассмотрим число a_n, получаемое из a отбрасыванием всех десятичных знаков после запятой, начиная с $(n+1)$-го. Так как число a отличается от a_n не более чем на $\frac{1}{10^n}$, то $a_n\leqslant a\leqslant a_n+\frac{1}{10^n}$, откуда

$$a_n^2\leqslant a^2\leqslant\left(a_n+\frac{1}{10^n}\right)^2. \qquad (2)$$

Ясно, что площадь S данного квадрата заключена между площадью квадрата со стороной a_n и площадью квадрата со стороной $a_n+\frac{1}{10^n}$ (рис. 180, *в*), т. е. между a_n^2 и $\left(a_n+\frac{1}{10^n}\right)^2$:

$$a_n^2\leqslant S\leqslant\left(a_n+\frac{1}{10^n}\right)^2. \qquad (3)$$

Будем неограниченно увеличивать число n. Тогда число $\frac{1}{10^n}$ становится сколь угодно малым, и, значит, число $\left(a_n+\frac{1}{10^n}\right)^2$ сколь угодно мало отличается от числа a_n^2. Поэтому из неравенств (2) и (3) следует, что число S сколь угодно мало отличается от числа a^2. Следовательно, они равны: $S=a^2$, что и требовалось доказать.

50. Площадь прямоугольника.

Теорема. ***Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон.***

Доказательство. Рассмотрим прямоугольник со сторонами a, b и площадью S (рис. 181, *а*). Докажем, что $S=ab$.

Достроим прямоугольник до квадрата со стороной $a+b$, как показано на рисунке 181, *б*. По свойству 3^0 площадь этого квадрата равна $(a+b)^2$.

С другой стороны, этот квадрат составлен из данного прямоугольника с площадью S, равного ему прямоугольника с площадью S (свойство 1^0 площадей) и двух квадратов с площадями a^2 и b^2 (свойство 3^0 площадей). По свойству 2^0 имеем:

$$(a+b)^2 = S+S+a^2+b^2,$$

или $a^2+2ab+b^2=2S+a^2+b^2$.

Отсюда получаем $S=ab$. Теорема доказана.

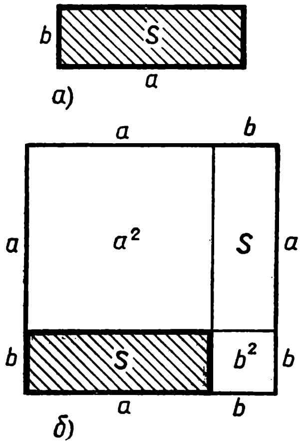


Рис. 181

Вопросы и задачи

445. Вырежьте из бумаги два равных прямоугольных треугольника и составьте из них: а) равнобедренный треугольник; б) прямоугольник; в) параллелограмм, отличный от прямоугольника. Сравните площади полученных фигур.

446. Начертите квадрат и примите его за единицу измерения площадей. Далее начертите: а) квадрат, площадь которого выражается числом 4; б) прямоугольник, отличный от квадрата, площадь которого выражается числом 4; в) треугольник, площадь которого выражается числом 2.

447. Начертите параллелограмм $ABCD$ и отметьте точку M, симметричную точке D относительно точки C. Докажите, что $S_{ABCD}=S_{AMD}$.

448. На стороне AD прямоугольника $ABCD$ построен треугольник ADE так, что его стороны AE и DE пересекают отрезок BC в точках M и N, причем точка M — середина отрезка AE. Докажите, что $S_{ABCD}=S_{ADE}$.

449. Найдите площадь квадрата, если его сторона равна: а) 1,2 см; б) $\frac{3}{4}$ дм; в) $3\sqrt{2}$ м.

450. Найдите сторону квадрата, если его площадь равна: а) 16 см^2; б) 2,25 дм^2; в) 12 м^2.

451. Площадь квадрата равна 24 см^2. Выразите площадь этого же квадрата: а) в квадратных миллиметрах; б) в квадратных дециметрах.

452. Пусть a и b — смежные стороны прямоугольника, а S — его площадь. Вычислите: а) S, если $a=8{,}5$ см, $b=3{,}2$ см;

б) S, если $a=2\sqrt{2}$ см, $b=3$ см; в) b, если $a=32$ см, $S=684{,}8$ см^2; г) a, если $b=4{,}5$ см, $S=12{,}15$ см^2.

453. Как изменится площадь прямоугольника, если: а) одну пару противоположных сторон увеличить в два раза; б) каждую сторону увеличить в два раза; в) одну пару противоположных сторон увеличить в два раза, а другую уменьшить в два раза?

454. Найдите стороны прямоугольника, если: а) его площадь равна 250 см^2, а одна сторона в 2,5 раза больше другой; б) его площадь равна 9 м^2, а периметр равен 12 м.

455. Пол комнаты, имеющий форму прямоугольника со сторонами 5,5 м и 6 м, нужно покрыть паркетом прямоугольной формы. Длина каждой дощечки паркета равна 30 см, а ширина — 5 см. Сколько потребуется таких дощечек для покрытия пола?

456. Сколько потребуется кафельных плиток квадратной формы со стороной 15 см, чтобы облицевать ими часть стены, имеющей форму прямоугольника со сторонами 3 м и 2,7 м?

457. Найдите сторону квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника со сторонами 8 м и 18 м.

458. Два участка земли огорожены заборами одинаковой длины. Первый участок имеет форму прямоугольника со сторонами 220 м и 160 м, а второй имеет форму квадрата. Площадь какого участка больше и на сколько?

§ 2. ПЛОЩАДИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА, ТРЕУГОЛЬНИКА И ТРАПЕЦИИ

51. Площадь параллелограмма. Условимся одну из сторон параллелограмма называть *основанием,* а перпендикуляр, проведенный из любой точки противоположной стороны к прямой, содержащей основание,— *высотой параллелограмма.*

Теорема. ***Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.***

Доказательство. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ с площадью S. Примем сторону AD за основание и проведем высоты BH и CK (рис. 182). Требуется доказать, что

$$S=AD\cdot BH.$$

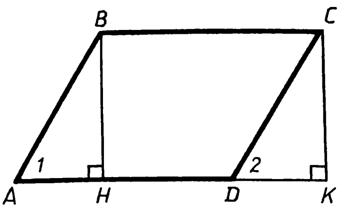


Рис. 182

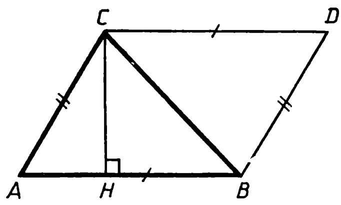


Рис. 183

Докажем сначала, что площадь прямоугольника $HBCK$ также равна S. Трапеция $ABCK$ составлена из параллелограмма $ABCD$ и треугольника DCK. С другой стороны, она составлена из прямоугольника $HBCK$ и треугольника ABH. Но прямоугольные треугольники DCK и ABH равны по гипотенузе и острому углу (их гипотенузы AB и CD равны как противоположные стороны параллелограмма, а углы 1 и 2 равны как соответственные углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущей AD), поэтому их площади равны. Следовательно, площади параллелограмма $ABCD$ и прямоугольника $HBCK$ также равны, т. е. площадь прямоугольника $HBCK$ равна S. По теореме о площади прямоугольника $S=BC\cdot BH$, а так как $BC=AD$, то $S=AD\cdot BH$. Теорема доказана.

52. Площадь треугольника. Одну из сторон треугольника часто называют его *основанием*. Если основание выбрано, то под словом «высота» подразумевают высоту треугольника, проведенную к основанию.

Теорема. ***Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.***

Доказательство. Пусть S — площадь треугольника ABC (рис. 183). Примем сторону AB за основание треугольника и проведем высоту CH. Докажем, что

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot CH.$$

Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$ так, как показано на рисунке 183. Треугольники ABC и DCB равны по трем сторонам (BC — их общая сторона, $AB=CD$ и $AC=BD$ как противоположные стороны параллелограмма $ABDC$), поэтому их площади равны. Следовательно, площадь S треугольника ABC

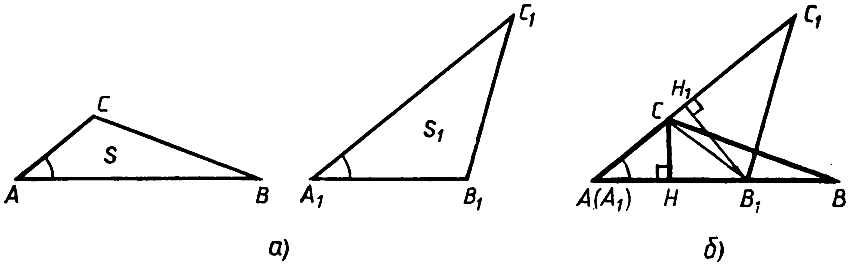


Рис. 184

равна половине площади параллелограмма $ABDC$, т. е. $S=$ $=\frac{1}{2}AB\cdot CH$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 1. *Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.*

С л е д с т в и е 2. *Если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся как основания.*

Воспользуемся следствием 2 для доказательства теоремы об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу.

Т е о р е м а. ***Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть S и S_1 — площади треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\angle A=\angle A_1$ (рис. 184, *а*). Докажем, что

$$\frac{S}{S_1}=\frac{AB\cdot AC}{A_1B_1\cdot A_1C_1}.$$

Наложим треугольник $A_1B_1C_1$ на треугольник ABC так, чтобы вершина A_1 совместилась с вершиной A, а стороны A_1B_1 и A_1C_1 наложились соответственно на лучи AB и AC (рис. 184, *б*). Треугольники ABC и AB_1C имеют общую высоту CH, поэтому $\frac{S}{S_{AB_1C}}=$ $=\frac{AB}{AB_1}$. Треугольники AB_1C и AB_1C_1 также имеют общую высоту — B_1H_1, поэтому $\frac{S_{AB_1C}}{S_{AB_1C_1}}=\frac{AC}{AC_1}$. Перемножая полученные равенства, находим:

$$\frac{S}{S_{AB_1C_1}}=\frac{AB\cdot AC}{AB_1\cdot AC_1} \text{ или } \frac{S}{S_1}=\frac{AB\cdot AC}{A_1B_1\cdot A_1C_1}.$$

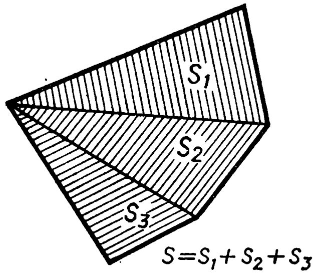


Рис. 185

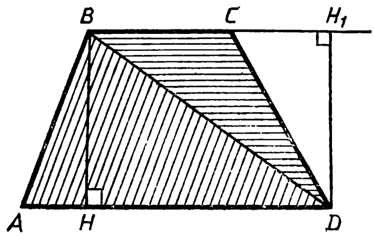


Рис. 186

Теорема доказана.

53. Площадь трапеции. Для вычисления площади произвольного многоугольника обычно поступают так: разбивают многоугольник на треугольники и находят площадь каждого треугольника. Сумма площадей этих треугольников равна площади данного многоугольника (рис. 185). Используя этот прием, выведем формулу для вычисления площади трапеции. Условимся *высотой трапеции* называть перпендикуляр, проведенный из любой точки одного из оснований к прямой, содержащей другое основание. На рисунке 186 отрезок BH (а также отрезок DH_1) — высота трапеции $ABCD$.

Теорема. ***Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту.***

Доказательство. Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC, высотой BH и площадью S (рис. 186). Докажем, что

$$S=\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot BH.$$

Диагональ BD разделяет трапецию на два треугольника ABD и BCD, поэтому $S=S_{ABD}+S_{BCD}$.

Примем отрезки AD и BH за основание и высоту треугольника ABD, а отрезки BC и DH_1 за основание и высоту треугольника BCD. Тогда $S_{ABD}=\frac{1}{2}AD\cdot BH$, $S_{BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot DH_1$. Так как $DH_1=BH$, то $S_{BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot BH$. Таким образом,

$$S=\frac{1}{2}AD\cdot BH+\frac{1}{2}BC\cdot BH=\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot BH.$$

Теорема доказана.

Задачи

459. Пусть a — основание, h — высота, а S — площадь параллелограмма. Найдите: а) S, если $a=15$ см, $h=12$ см; б) a, если $S=34$ см^2, $h=8{,}5$ см; в) a, если $S=162$ см^2, $h=\frac{1}{2}a$; г) h, если $h=3a$, $S=27$.

460. Диагональ параллелограмма, равная 13 см, перпендикулярна к стороне параллелограмма, равной 12 см. Найдите площадь параллелограмма.

461. Смежные стороны параллелограмма равны 12 см и 14 см, а его острый угол равен 30°. Найдите площадь параллелограмма.

462. Сторона ромба равна 6 см, а один из углов равен 150°. Найдите площадь ромба.

463. Сторона параллелограмма равна 8,1 см, а диагональ, равная 14 см, образует с ней угол в 30°. Найдите площадь параллелограмма.

464. Пусть a и b — смежные стороны параллелограмма, а h_1 и h_2 — его высоты. Найдите: а) h_2, если $a=18$ см, $b=30$ см, $h_1=6$ см, $h_2>h_1$; б) h_1, если $a=10$ см, $b=15$ см, $h_2=6$ см, $h_2>h_1$; в) h_1 и h_2, если $S=54$ см^2, $a=4{,}5$ см, $b=6$ см.

465. Острый угол параллелограмма равен 30°, а высоты, проведенные из вершины тупого угла, равны 2 см и 3 см. Найдите площадь параллелограмма.

466. Диагональ параллелограмма равна его стороне. Найдите площадь параллелограмма, если бóльшая его сторона равна 15,2 см, а один из его углов равен 45°.

467. Квадрат и ромб, не являющийся квадратом, имеют одинаковые периметры. Сравните площади этих фигур.

468. Пусть a — основание, h — высота, а S — площадь треугольника. Найдите: а) S, если $a=7$ см, $h=11$ см; б) S, если $a=2\sqrt{3}$ см, $h=5$ см; в) h, если $S=37{,}8$ см^2, $a=14$ см; г) a, если $S=12$ см^2, $h=3\sqrt{2}$ см.

469. Стороны AB и BC треугольника ABC равны соответственно 16 см и 22 см, а высота, проведенная к стороне AB, равна 11 см. Найдите высоту, проведенную к стороне BC.

470. Две стороны треугольника равны 7,5 см и 3,2 см. Высота, проведенная к большей стороне, равна 2,4 см. Найдите высоту, проведенную к меньшей из данных сторон.

471. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если катеты равны: а) 4 см и 11 см; б) 1,2 дм и 3 дм.

472. Площадь прямоугольного треугольника равна 168 см^2. Найдите катеты, если отношение их длин равно $\frac{7}{12}$.

473. Через вершину C треугольника ABC проведена прямая m, параллельная стороне AB. Докажите, что все треугольники с вершинами на прямой m и основанием AB имеют равные площади.

474. Сравните площади двух треугольников, на которые разделяется данный треугольник его медианой.

475. Начертите треугольник ABC. Через вершину A проведите две прямые так, чтобы они разделили этот треугольник на три треугольника, имеющие равные площади.

476. Докажите, что площадь ромба равна половине произведения его диагоналей. Вычислите площадь ромба, если его диагонали равны: а) 3,2 дм и 14 см; б) 4,6 дм и 2 дм.

477. Найдите диагонали ромба, если одна из них в 1,5 раза больше другой, а площадь ромба равна 27 см^2.

478. В выпуклом четырехугольнике диагонали взаимно перпендикулярны. Докажите, что площадь четырехугольника равна половине произведения его диагоналей.

479. Точки D и E лежат на сторонах AB и AC треугольника ABC. Найдите: а) S_{ADE}, если $AB=5$ см, $AC=6$ см, $AD=3$ см, $AE=2$ см, $S_{ABC}=10$ см^2; б) AD, если $AB=8$ см, $AC=3$ см, $AE=2$ см, $S_{ABC}=10$ см^2, $S_{ADE}=2$ см^2.

480. Найдите площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD, если: а) $AB=21$ см, $CD=17$ см, высота BH равна 7 см; б) $\angle D=30°$, $AB=2$ см, $CD=10$ см, $DA=8$ см; в) $BC \perp AB$, $AB=5$ см, $BC=8$ см, $CD=13$ см.

481. Найдите площадь прямоугольной трапеции, у которой две меньшие стороны равны 6 см, а больший угол равен 135°.

482. Тупой угол равнобедренной трапеции равен 135°, а высота, проведенная из вершины этого угла, делит большее основание на отрезки 1,4 см и 3,4 см. Найдите площадь трапеции.

§ 3. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

54. Теорема Пифагора. Пользуясь свойствами площадей многоугольников, мы установим теперь замечательное соотношение

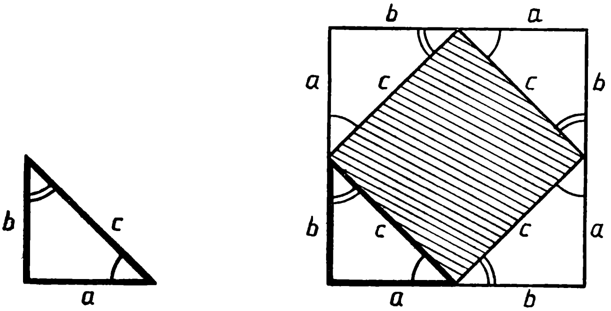


Рис. 187 а) б) $(a+b)^2=4(\frac{1}{2}ab)+c^2$

между гипотенузой и катетами прямоугольного треугольника. Теорема, которую мы докажем, называется *теоремой Пифагора* и является важнейшей теоремой геометрии.

Теорема. ***В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.***

Доказательство. Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c (рис. 187, a). Докажем, что $c^2=a^2+b^2$.

Достроим треугольник до квадрата со стороной $a+b$ так, как показано на рисунке 187, *б*. Площадь S этого квадрата равна $(a+b)^2$. С другой стороны, этот квадрат составлен из четырех равных прямоугольных треугольников, площадь каждого из которых равна $\frac{1}{2}a\cdot b$, и квадрата со стороной c, поэтому

$$S=4\cdot\frac{1}{2}ab+c^2=2ab+c^2.$$

Таким образом,

$$(a+b)^2=2ab+c^2,$$

откуда

$$c^2=a^2+b^2.$$

Теорема доказана.

Интересна история теоремы Пифагора. Хотя эта теорема и свя-

Пифагор — древнегреческий ученый VI в. до н. э.

зывается с именем Пифагора, она была известна задолго до него. В вавилонских текстах эта теорема встречается за 1200 лет до Пифагора. Возможно, что тогда еще не знали ее доказательства, а само соотношение между гипотенузой и катетами было установлено опытным путем на основе измерений. Пифагор, по-видимому, нашел доказательство этого соотношения. Сохранилось древнее предание, что в честь своего открытия Пифагор принес в жертву богам быка, по другим свидетельствам — даже сто быков. На протяжении последующих веков были найдены различные другие доказательства теоремы Пифагора. В настоящее время их насчитывается более ста. С одним из них мы уже познакомились, еще с одним познакомимся в следующей главе (задача 578). Многие известные мыслители и писатели прошлого обращались к этой замечательной теореме и посвятили ей свои строки.

55. Теорема, обратная теореме Пифагора.

Теорема. ***Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный.***

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC $AB^2=AC^2+BC^2$. Докажем, что угол C прямой. Рассмотрим прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$ с прямым углом C_1, у которого $A_1C_1=AC$ и $B_1C_1=BC$. По теореме Пифагора $A_1B_1^2=A_1C_1^2+B_1C_1^2$, и, значит, $A_1B_1^2=AC^2+BC^2$.

Но $AC^2+BC^2=AB^2$ по условию теоремы. Следовательно, $A_1B_1^2=AB^2$, откуда $A_1B_1=AB$. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трем сторонам, поэтому $\angle C=\angle C_1$, т. е. треугольник ABC прямоугольный с прямым углом C. Теорема доказана.

По теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник со сторонами 3, 4 и 5 является прямоугольным: $5^2=3^2+4^2$. Прямоугольными являются также треугольники со сторонами 5, 12, 13; 8, 15, 17 и 7, 24, 25 (объясните почему). Прямоугольные треугольники, у которых длины сторон выражаются целыми числами, называются *пифагоровыми треугольниками*. Можно доказать, что катеты a, b и гипотенуза c таких треугольников выражаются формулами $a=2m\cdot n$, $b=m^2-n^2$; $c=m^2+n^2$, где m и n — любые натуральные числа, такие, что $m>n$. Треугольник со сторонами 3, 4, 5 часто называют *египетским треугольником*, так как он был известен еще древним египтянам. Для построения прямых углов египтяне поступали так: на веревке делали метки, делящие ее на 12 равных частей, связывали ее концы и растягивали на земле с помощью кольев в виде треугольника со сторонами 3, 4 и 5. Тогда угол между сторонами, равными 3 и 4, оказывался прямым.

Задачи

483. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника по данным катетам a и b: а) $a=6$, $b=8$; б) $a=5$, $b=6$; в) $a=\frac{3}{7}$, $b=\frac{4}{7}$; г) $a=8$, $b=8\sqrt{3}$.

484. В прямоугольном треугольнике a и b — катеты, а c — гипотенуза. Найдите b, если: а) $a=12$, $c=13$; б) $a=7$, $c=9$; в) $a=12$, $c=2b$; г) $a=2\sqrt{3}$, $c=2b$; д) $a=3b$, $c=2\sqrt{10}$.

485. Найдите катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла 60°, если гипотенуза равна c.

486. В прямоугольнике $ABCD$ найдите: а) AD, если $AB=5$, $AC=13$; б) BC, если $CD=1{,}5$, $AC=2{,}5$; в) CD, если $BD=17$, $BC=15$.

487. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 17 см, а основание равно 16 см. Найдите высоту, проведенную к основанию.

488. Найдите: а) высоту равностороннего треугольника, если его сторона равна 6 см; б) сторону равностороннего треугольника, если его высота равна 4 см.

489. Докажите, что площадь равностороннего треугольника вычисляется по формуле $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где a — сторона треугольника. Найдите площадь равностороннего треугольника, если его сторона равна: а) 5 см; б) 1,2 см; в) $2\sqrt{2}$ дм.

490. Найдите боковую сторону и площадь равнобедренного треугольника, если: а) основание равно 12 см, а высота, проведенная к основанию, равна 8 см; б) основание равно 18 см, а угол, противолежащий основанию, равен 120°; в) треугольник прямоугольный и высота, проведенная к гипотенузе, равна 7 см.

491. По данным катетам a и b прямоугольного треугольника найдите высоту, проведенную к гипотенузе: а) $a=5$, $b=12$; б) $a=12$, $b=16$.

492. Найдите высоты треугольника со сторонами 10 см, 10 см и 12 см.

493. Найдите сторону и площадь ромба, если его диагонали равны 10 см и 24 см.

494. Найдите диагональ и площадь ромба, если его сторона равна 10 см, а другая диагональ — 12 см.

495. Найдите площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD, если: а) $AB=10$ см, $BC=DA=13$ см, $CD=20$ см; б) $\angle C=\angle D=60°$, $AB=BC=8$ см; в) $\angle C=\angle D=45°$, $AB=6$ см, $BC=9\sqrt{2}$ см.

496. Основание D высоты CD треугольника ABC лежит на стороне AB, причем $AD=BC$. Найдите AC, если $AB=3$, а $CD=\sqrt{3}$.

497. Одна из диагоналей параллелограмма является его высотой. Найдите эту диагональ, если периметр параллелограмма равен 50 см, а разность смежных сторон равна 1 см.

498. Выясните, является ли треугольник прямоугольным, если его стороны выражаются числами: а) 6, 8, 10; б) 5, 6, 7; в) 9, 12, 15; г) 10, 24, 26; д) 3, 4, 6; е) 11, 9, 13; ж) 15, 20, 25. В каждом случае ответ обоснуйте.

499. Найдите меньшую высоту треугольника, если его стороны равны: а) 24 см, 25 см, 7 см; б) 15 см, 17 см, 8 см.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ VI

1. Расскажите, как измеряются площади многоугольников.
2. Сформулируйте основные свойства площадей многоугольников.
3. Сформулируйте и докажите теорему о вычислении площади прямоугольника.
4. Сформулируйте и докажите теорему о вычислении площади параллелограмма.
5. Сформулируйте и докажите теорему о вычислении площади треугольника. Как вычислить площадь прямоугольного треугольника по его катетам?
6. Сформулируйте и докажите теорему об отношении площадей двух треугольников, имеющих по равному углу.
7. Сформулируйте и докажите теорему о вычислении площади трапеции.
8. Сформулируйте и докажите теорему Пифагора.

9. Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме Пифагора.
10. Какие треугольники называются пифагоровыми? Приведите примеры пифагоровых треугольников.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

500. Докажите, что площадь квадрата, построенного на катете равнобедренного прямоугольного треугольника, вдвое больше площади квадрата, построенного на высоте, проведенной к гипотенузе.

501. Площадь земельного участка равна 27 га. Выразите площадь этого же участка: а) в квадратных метрах; б) в квадратных километрах.

502. Высоты параллелограмма равны 5 см и 4 см, а периметр равен 42 см. Найдите площадь параллелограмма.

503. Найдите периметр параллелограмма, если его площадь равна 24 см^2, а точка пересечения диагоналей удалена от сторон на 2 см и 3 см.

504. Меньшая сторона параллелограмма равна 29 см. Перпендикуляр, проведенный из точки пересечения диагоналей к большей стороне, делит ее на отрезки, равные 33 см и 12 см. Найдите площадь параллелограмма.

505. Докажите, что из всех треугольников, у которых одна сторона равна a, а другая — b, наибольшую площадь имеет тот, у которого эти стороны перпендикулярны.

506. Как провести две прямые через вершину квадрата, чтобы разделить его на три фигуры, площади которых равны?

507*. Каждая сторона одного треугольника больше любой стороны другого треугольника. Следует ли из этого, что площадь первого треугольника больше площади второго треугольника?

508*. Докажите, что сумма расстояний от точки на основании равнобедренного треугольника до боковых сторон не зависит от положения этой точки.

509. Докажите, что сумма расстояний от точки, лежащей внутри равностороннего треугольника, до его сторон не зависит от положения этой точки.

510*. Через точку D, лежащую на стороне BC треугольника ABC, проведены прямые, параллельные двум другим сторонам и пересекающие стороны AB и AC соответственно в точках E и F. Докажите, что треугольники CDE и BDF имеют равные площади.

511. В трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами AB и CD диагонали пересекаются в точке O. а) Сравните площади треугольников ABD и ACD. б) Сравните площади треугольников ABO и CDO. в) Докажите, что $OA \cdot OB = OC \cdot OD$.

512*. Основания трапеции равны a и b. Отрезок с концами на боковых сторонах трапеции, параллельный основаниям, разделяет трапецию на две трапеции, площади которых равны. Найдите длину этого отрезка.

513. Диагонали ромба равны 18 м и 24 м. Найдите периметр ромба и расстояние между параллельными сторонами.

514. Площадь ромба равна 540 см^2, а одна из его диагоналей равна 4,5 дм. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей до стороны ромба.

515. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если: а) боковая сторона равна 20 см, а угол при основании равен 30°; б) высота, проведенная к боковой стороне, равна 6 см и образует с основанием угол в 45°.

516. В треугольнике ABC $BC = 34$ см. Перпендикуляр MN, проведенный из середины BC к прямой AC, делит сторону AC на отрезки $AN = 25$ см и $NC = 15$ см. Найдите площадь треугольника ABC.

517. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если $AB = 5$ см, $BC = 13$ см, $CD = 9$ см, $DA = 15$ см, $AC = 12$ см.

518. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если: а) ее меньшее основание равно 18 см, высота — 9 см и острый угол равен 45°; б) ее основания равны 16 см и 30 см, а диагонали взаимно перпендикулярны.

519. Найдите площадь равнобедренной трапеции, у которой высота равна h, а диагонали взаимно перпендикулярны.

520. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны, а сумма ее оснований равна $2a$. Найдите площадь трапеции.

521. Докажите, что если диагонали четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны, то $AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$.

522. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 17$ см, $BC = 5$ см и боковой стороной $AB = 10$ см через вершину B проведена прямая, делящая диагональ AC пополам и пересекающая основание AD в точке M. Найдите площадь треугольника BDM.

523. Два квадрата со стороной a имеют одну общую вершину, причем сторона одного из них лежит на диагонали другого. Найдите площадь общей части этих квадратов.

Задачи для решения с помощью микрокалькулятора

524. Основание параллелограмма равно 11,735 м, а высота меньше основания на 3,485 м. Найдите площадь параллелограмма с точностью: а) до 0,001 м^2; б) до 0,01 м^2; в) до 0,1 м^2.

525. В треугольнике ABC $AB=6{,}52$ см, $AC=4{,}47$ см, а в треугольнике $A_1B_1C_1$ $A_1B_1=5{,}27$ см, $A_1C_1=2{,}12$ см. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника $A_1B_1C_1$ с точностью до 0,01, если $\angle A=\angle A_1$.

526. Основания трапеции равны 1,17 дм и 3,58 дм, а высота трапеции равна 2,33 дм. Найдите площадь трапеции с точностью до 0,01 дм^2.

527. Площадь прямоугольника равна 17,635 см^2, а одна из его сторон равна 5,28 см. Найдите смежную сторону с точностью: а) до 0,01 см; б) до 0,1 см.

528. Две стороны треугольника равны 5,62 м и 7,19 м, а высота, проведенная к первой стороне, равна 4,35 м. Найдите высоту, проведенную ко второй стороне, с точностью до 1 см.

529*. Стороны a и b прямоугольника измерены с точностью до 0,1 см. Можно ли, пользуясь этими измерениями, вычислить площадь S прямоугольника с точностью до 1 см^2, если в результате измерений получено: а) $a=2{,}5$ см, $b=1{,}7$ см; б) $a=3{,}2$ см, $b=2{,}5$ см; в) $a=5{,}6$ см, $b=7{,}2$ см?

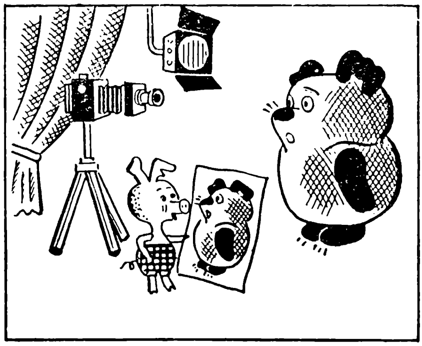
530. Катеты прямоугольного треугольника равны 7,25 см и 3,67 см. Найдите гипотенузу с точностью до 0,01 см.

531. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 11,2 дм, а один из катетов в три раза меньше гипотенузы. Найдите другой катет с точностью: а) до 1 см; б) до 0,1 см.

532*. Катеты a и b прямоугольного треугольника измерены с точностью до 0,1 см, и получены следующие результаты: $a\approx 3{,}5$ см, $b\approx 4{,}8$ см. Можно ли, пользуясь этими результатами измерений, вычислить гипотенузу c с точностью: а) до 0,1 см; б) до 0,2 см?

Глава VII

ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ



§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОДОБНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

56. Пропорциональные отрезки. *Отношением отрезков* AB и CD называется отношение их длин, т. е. $\frac{AB}{CD}$. Говорят, что *отрезки* AB и CD *пропорциональны отрезкам* A_1B_1 и C_1D_1, если $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{CD}{C_1D_1}$. Например, отрезки AB и CD, длины которых равны 2 см и 1 см, пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1, длины которых равны 3 см и 1,5 см. В самом деле,

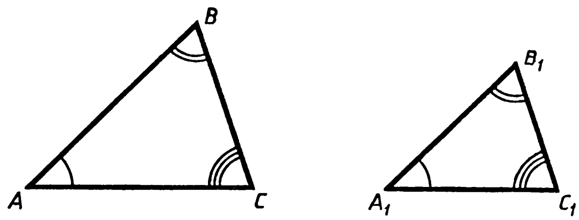
$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{2}{3}.$$

Понятие пропорциональности вводится и для большего числа отрезков. Так, например, три отрезка AB, CD и EF *пропорциональны* трем отрезкам A_1B_1, C_1D_1 и E_1F_1, если

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{EF}{E_1F_1}.$$

57. Определение подобных треугольников. В повседневной жизни встречаются предметы одинаковой формы, но разных размеров, например футбольный и теннисный мячи, круглая тарелка и большое круглое блюдо. В геометрии фигуры одинаковой формы принято называть подобными. Так, подобными являются любые два квадрата, любые два круга. Введем понятие подобных треугольников.

Пусть у двух треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ углы соответственно равны: $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$. В этом случае стороны AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 называются *сходственными* (рис. 188).



AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 — сходственные стороны

Рис. 188

Определение. ***Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого.***

Другими словами, два треугольника подобны, если их можно обозначить буквами ABC и $A_1B_1C_1$ так, что

$$\angle A = \angle A_1, \ \angle B = \angle B_1, \ \angle C = \angle C_1, \qquad (1)$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k. \qquad (2)$$

Число k, равное отношению сходственных сторон треугольников, называется *коэффициентом подобия.*

Подобие треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ обозначается так: $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$. На рисунке 188 изображены подобные треугольники.

Оказывается, что подобие треугольников можно установить, проверив только некоторые из равенств (1) и (2). В следующем параграфе мы рассмотрим три признака подобия треугольников.

58. Отношение площадей подобных треугольников.

Теорема. ***Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.***

Доказательство. Пусть треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, причем коэффициент подобия равен k. Обозначим буквами S и S_1 площади этих треугольников. Так как $\angle A = \angle A_1$, то $\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$ (по теореме об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу, п. 52). По формулам (2) имеем: $\frac{AB}{A_1B_1} = k$, $\frac{AC}{A_1C_1} = k$, поэтому $\frac{S}{S_1} = k^2$. Теорема доказана.

Вопросы и задачи

533. Найдите отношение отрезков AB и CD, если их длины равны соответственно 15 см и 20 см. Изменится ли это отношение, если длины отрезков выразить в миллиметрах?

534. Пропорциональны ли изображенные на рисунке 189 отрезки: а) AC, CD и M_1M_2, MM_1; б) AB, BC, CD и MM_2, MM_1, M_1M_2; в) AB, BD и MM_1, M_1M_2?

535. Докажите, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

Решение. Пусть AD — биссектриса треугольника ABC. Докажем, что $\frac{BD}{AB}=\frac{DC}{AC}$ (рис. 190).

Треугольники ABD и ACD имеют общую высоту AH, поэтому $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{BD}{DC}$. С другой стороны, эти же треугольники имеют по равному углу ($\angle 1=\angle 2$), поэтому

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{AB\cdot AD}{AC\cdot AD}=\frac{AB}{AC}.$$

Из двух равенств для отношения площадей получаем

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}, \text{ или } \frac{BD}{AB}=\frac{DC}{AC},$$

что и требовалось доказать.

536. Отрезок BD является биссектрисой треугольника ABC.
а) Найдите AB, если $BC=9$ см, $AD=7{,}5$ см, $DC=4{,}5$ см.
б) Найдите DC, если $AB=30$, $AD=20$, $BD=16$ и $\angle BDC=\angle C$.

537. Отрезок AD является биссектрисой треугольника ABC. Найдите BD и DC, если $AB=14$ см, $BC=20$ см, $AC=21$ см.

538. Биссектриса AD треугольника ABC делит сторону BC на отрезки CD и BD, равные соответственно 4,5 см и 13,5 см.

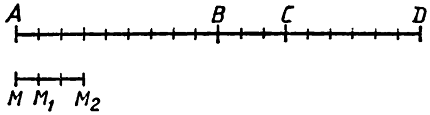


Рис. 189

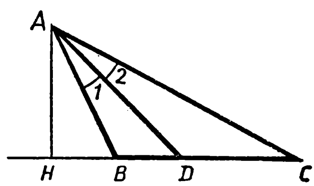


Рис. 190

Найдите AB и AC, если периметр треугольника ABC равен 42 см.

539. В треугольник MNK вписан ромб $MDEF$ так, что вершины D, E и F лежат соответственно на сторонах MN, NK и MK. Найдите отрезки NE и EK, если $MN=7$ см, $NK=6$ см, $MK=5$ см.

540. Периметр треугольника CDE равен 55 см. В этот треугольник вписан ромб $DMFN$ так, что вершины M, F и N лежат соответственно на сторонах CD, CE и DE. Найдите стороны CD и DE, если $CF=8$ см, $EF=12$ см.

541. Подобны ли треугольники ABC и DEF, если $\angle A=106°$, $\angle B=34°$, $\angle E=106°$, $\angle F=40°$, $AC=4{,}4$ см, $AB=5{,}2$ см, $BC=7{,}6$ см, $DE=15{,}6$ см, $DF=22{,}8$ см, $EF=13{,}2$ см?

542. В подобных треугольниках ABC и KMN стороны AB и KM, BC и MN являются сходственными. Найдите стороны треугольника KMN, если $AB=4$ см, $BC=5$ см, $CA=7$ см, $\frac{KM}{AB}=2{,}1$.

543. Докажите, что отношение сходственных сторон подобных треугольников равно отношению высот, проведенных к этим сторонам.

544. Площади двух подобных треугольников равны 75 м^2 и 300 м^2. Одна из сторон второго треугольника равна 9 м. Найдите сходственную ей сторону первого треугольника.

545. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, и их сходственные стороны относятся как 6:5. Площадь треугольника ABC больше площади треугольника $A_1B_1C_1$ на 77 см^2. Найдите площади треугольников.

546. План земельного участка имеет форму треугольника. Площадь изображенного на плане треугольника равна 87,5 см^2. Найдите площадь земельного участка, если план выполнен в масштабе 1:100 000.

547. Докажите, что отношение периметров двух подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

548. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Сходственные стороны BC и B_1C_1 соответственно равны 1,4 м и 56 см. Найдите отношение периметров треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

549. Стороны данного треугольника равны 15 см, 20 см и 30 см. Найдите стороны треугольника, подобного данному, если его периметр равен 26 см.

§ 2. ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

59. Первый признак подобия треугольников.

Теорема. ***Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.***

Доказательство. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника, у которых $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 191). Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

По теореме о сумме углов треугольника $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$, $\angle C_1 = 180° - \angle A_1 - \angle B_1$, и, значит, $\angle C = \angle C_1$. Таким образом, углы треугольника ABC соответственно равны углам треугольника $A_1B_1C_1$.

Докажем, что сходственные стороны треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ пропорциональны. Так как $\angle A = \angle A_1$ и $\angle C = \angle C_1$, то

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} \text{ и } \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{CA \cdot CB}{C_1A_1 \cdot C_1B_1} \text{ (см. п. 52).}$$

Из этих равенств следует: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$. Аналогично, используя равенства $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, получаем $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$. Итак, сходственные стороны треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ пропорциональны. Теорема доказана.

60. Второй признак подобия треугольников.

Теорема. ***Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.***

Доказательство. Рассмотрим два треугольника ABC и

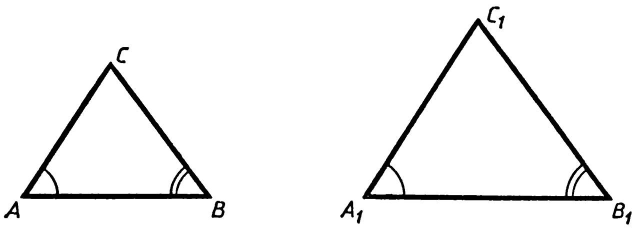


Рис. 191

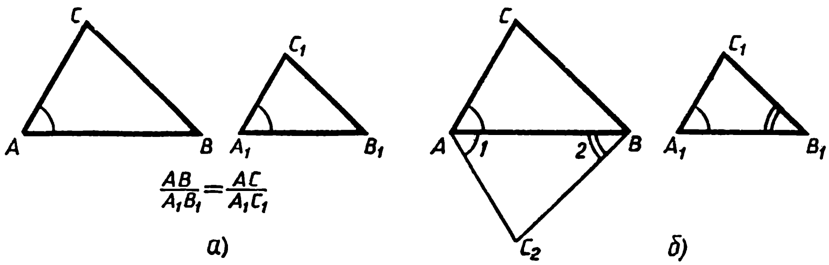


Рис. 192

$A_1B_1C_1$, у которых $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$, $\angle A=\angle A_1$ (рис. 192, *а*). Докажем, что $\triangle ABC \infty \triangle A_1B_1C_1$. Для этого, учитывая первый признак подобия треугольников, достаточно доказать, что $\angle B=\angle B_1$.

Рассмотрим треугольник ABC_2, у которого $\angle 1=\angle A_1$, $\angle 2=$ $=\angle B_1$ (рис. 192, *б*). Треугольники ABC_2 и $A_1B_1C_1$ подобны по первому признаку подобия треугольников, поэтому $\frac{AB}{A_1B_1}=$ $=\frac{AC_2}{A_1C_1}$. С другой стороны, по условию $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$. Из этих двух равенств получаем $AC=AC_2$. Треугольники ABC и ABC_2 равны по двум сторонам и углу между ними (AB — общая сторона, $AC=AC_2$ и $\angle A=\angle 1$, поскольку $\angle A=\angle A_1$ и $\angle 1=\angle A_1$). Отсюда следует, что $\angle B=\angle 2$, а так как $\angle 2=\angle B_1$, то $\angle B=\angle B_1$. Теорема доказана.

61. Третий признак подобия треугольников.

Теорема. ***Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны.***

Доказательство. Пусть стороны треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ пропорциональны:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CA}{C_1A_1}. \qquad (1)$$

Докажем, что $\triangle ABC \infty \triangle A_1B_1C_1$. Для этого, учитывая второй признак подобия треугольников, достаточно доказать, что $\angle A=$ $=\angle A_1$. Рассмотрим треугольник ABC_2, у которого $\angle 1=\angle A_1$, $\angle 2=\angle B_1$ (рис. 192, *б*). Треугольники ABC_2 и $A_1B_1C_1$ подобны по

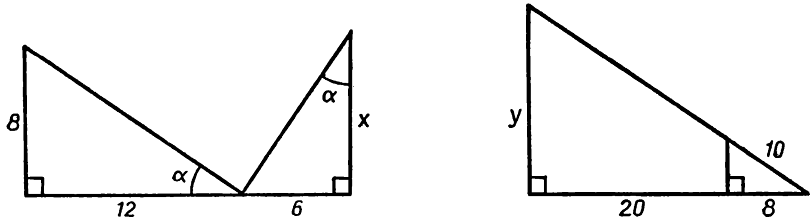


Рис. 193

первому признаку подобия треугольников, поэтому

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC_2}{B_1C_1}=\frac{C_2A}{C_1A_1}.$$

Сравнивая эти равенства с равенствами (1), получаем: $BC=BC_2$, $CA=C_2A$. Треугольники ABC и ABC_2 равны по трем сторонам. Отсюда следует, что $\angle A=\angle 1$, а так как $\angle 1=\angle A_1$, то $\angle A=\angle A_1$. Теорема доказана.

Вопросы и задачи

550. По данным рисунка 193 найдите x и y.

551. На стороне CD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E. Прямые AE и BC пересекаются в точке F. Найдите: а) EF и FC, если $DE=8$ см, $EC=4$ см, $BC=7$ см, $AE=10$ см; б) DE и EC, если $AB=8$ см, $AD=5$ см, $CF=2$ см.

552. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD пересекаются в точке O. Найдите: а) AB, если $OB=4$ см, $OD=10$ см, $DC=25$ см; б) $\frac{AO}{OC}$ и $\frac{BO}{OD}$, если $AB=a$, $DC=b$; в) AO, если $AB=9{,}6$ дм, $DC=24$ см, $AC=15$ см.

553. Подобны ли равнобедренные треугольники, если они имеют: а) по равному острому углу; б) по равному тупому углу; в) по прямому углу? Ответ обоснуйте.

554. Основания трапеции равны 5 см и 8 см. Боковые стороны, равные 3,6 см и 3,9 см, продолжены до пересечения в точке M. Найдите расстояния от точки M до концов меньшего основания.

555. Точки M, N и P лежат соответственно на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC, причем $MN \parallel AC$, $NP \parallel AB$. Найдите стороны четырехугольника $AMNP$, если: а) $AB=10$ см, $AC=15$ см, $PN:MN=2:3$; б) $AM=AP$, $AB=a$, $AC=b$.

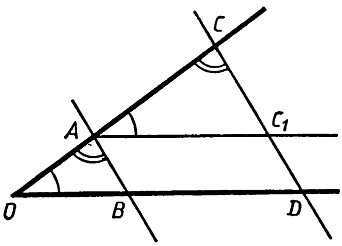


Рис. 194

556. Стороны угла O пересечены параллельными прямыми AB и CD. Докажите, что отрезки OA и AC пропорциональны отрезкам OB и BD (рис. 194).

Решение. Проведем через точку A прямую AC_1, параллельную прямой BD (C_1 — точка пересечения этой прямой с прямой CD). Тогда $\triangle OAB \sim \triangle ACC_1$ по первому признаку подобия треугольников ($\angle O = \angle CAC_1$, $\angle OAB = \angle C$), следовательно, $\frac{OA}{AC} = \frac{OB}{AC_1}$. Так как $AC_1 = BD$ (объясните почему), то $\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}$, что и требовалось доказать.

557. Стороны угла A пересечены параллельными прямыми BC и DE, причем точки B и D лежат на одной стороне угла, а C и E — на другой. Найдите: а) AC, если $CE = 10$ см, $AD = 22$ см, $BD = 8$ см; б) BD и DE, если $AB = 10$ см, $AC = 8$ см, $BC = 4$ см, $CE = 4$ см; в) BC, если $AB : BD = 2 : 1$ и $DE = 12$ см.

558. Прямые a и b пересечены параллельными прямыми AA_1, BB_1, CC_1, причем точки A, B и C лежат на прямой a, а A_1, B_1 и C_1 — на прямой b. Докажите, что $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$.

559. На одной из сторон данного угла A отложены отрезки $AB = 5$ см и $AC = 16$ см. На другой стороне этого же угла отложены отрезки $AD = 8$ см и $AF = 10$ см. Подобны ли треугольники ACD и AFB? Ответ обоснуйте.

560. Подобны ли треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, если: а) $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $CA = 7$ см, $A_1B_1 = 4{,}5$ см, $B_1C_1 = 7{,}5$ см, $C_1A_1 = 10{,}5$ см; б) $AB = 1{,}7$ см, $BC = 3$ см, $CA = 4{,}2$ см, $A_1B_1 = 34$ дм, $B_1C_1 = 60$ дм, $C_1A_1 = 84$ дм?

561. Докажите, что два равносторонних треугольника подобны.

562. В треугольнике ABC сторона AB равна a, а высота CH равна h. Найдите сторону квадрата, вписанного в треугольник ABC так, что две соседние вершины квадрата лежат на стороне AB, а две другие — соответственно на сторонах AC и BC.

563. Через точку M, взятую на медиане AD треугольника ABC, и вершину B проведена прямая, пересекающая сторону AC в точке K. Найдите отношение $\frac{AK}{KC}$, если: а) M — середина отрезка AD; б) $\frac{AM}{MD}=\frac{1}{2}$.

§ 3. ПРИМЕНЕНИЕ ПОДОБИЯ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМ И РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

62. Средняя линия треугольника. *Средней линией треугольника* называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон. Докажем теорему о средней линии треугольника.

Теорема. ***Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.***

Доказательство. Пусть MN — средняя линия треугольника ABC (рис. 195). Докажем, что $MN \parallel AC$ и $MN=\frac{1}{2}AC$.

Треугольники BMN и BAC подобны по второму признаку подобия треугольников $\left(\angle B \text{ — общий, } \frac{BM}{BA}=\frac{BN}{BC}=\frac{1}{2}\right)$, поэтому $\angle 1 = \angle 2$ и $\frac{MN}{AC}=\frac{1}{2}$. Из равенства $\angle 1 = \angle 2$ следует, что $MN \parallel AC$ (объясните почему), а из второго равенства, что $MN=\frac{1}{2}AC$. Теорема доказана.

Пользуясь этой теоремой, решим следующую задачу:

Задача 1. *Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении* 2:1, *считая от вершины.*

Решение. Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Обозначим буквой O точку пересечения его медиан AA_1 и BB_1 и проведем среднюю линию A_1B_1 этого треугольника (рис. 196).

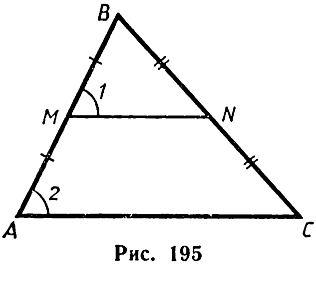


Рис. 195

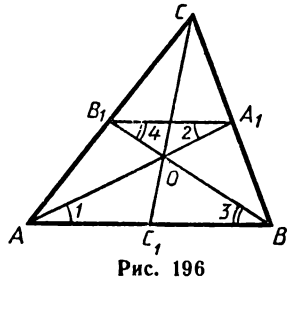


Рис. 196

Отрезок A_1B_1 параллелен стороне AB, поэтому $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$. Следовательно, треугольники AOB и A_1OB_1 подобны по двум углам, и, значит, их стороны пропорциональны:

$$\frac{AO}{A_1O} = \frac{BO}{B_1O} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

Но $AB = 2A_1B_1$, поэтому $AO = 2A_1O$ и $BO = 2B_1O$. Таким образом, точка O пересечения медиан AA_1 и BB_1 делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины.

Аналогично доказывается, что точка пересечения медиан BB_1 и CC_1 делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины, и, следовательно, совпадает с точкой O. Итак, все три медианы треугольника ABC пересекаются в точке O и делятся ею в отношении 2:1, считая от вершины.

63. Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике.

Задача 2. *Доказать, что высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, разделяет треугольник на два подобных прямоугольных треугольника, каждый из которых подобен данному треугольнику.*

Решение. Пусть ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом C, а CD — высота, проведенная из вершины C к гипотенузе AB (рис. 197). Докажем, что

$$\triangle ABC \sim \triangle ACD, \quad \triangle ABC \sim \triangle CBD, \quad \triangle ACD \sim \triangle CBD.$$

Треугольники ABC и ACD подобны по первому признаку подобия треугольников ($\angle A$ — общий, $\angle ACB = \angle ADC = 90°$). Точно так же подобны треугольники ABC и CBD ($\angle B$ — общий и $\angle ACB = \angle BDC = 90°$), поэтому $\angle A = \angle BCD$. Наконец, треугольники ACD и CBD также подобны по первому признаку подобия (в этих треугольниках углы с вершиной D прямые и $\angle A = \angle BCD$), что и требовалось доказать.

Отрезок XY называется *средним пропорциональным* (или *средним геометрическим*) между отрезками AB и CD, если

$$XY = \sqrt{AB \cdot CD}.$$

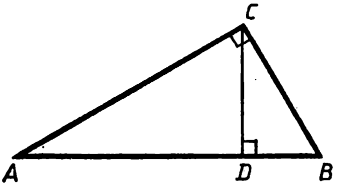
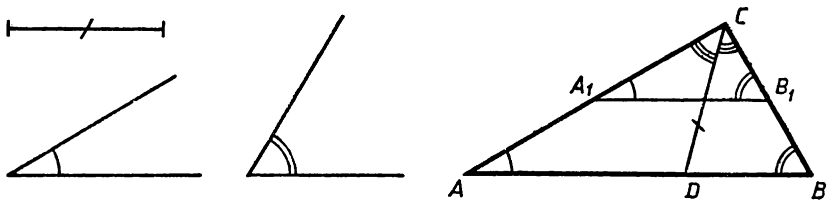


Рис. 197

На основе задачи 2 докажем следующие утверждения:

1^0. *Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между отрезками, на которые делится гипотенуза этой высотой.*



а) б)

Рис. 198

Действительно, $\triangle ADC \sim \triangle CBD$ (см. рис. 197), поэтому $\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{DB}$, и, следовательно, $CD^2=AD \cdot DB$, откуда $CD=$ $=\sqrt{AD \cdot DB}$.

2^0. *Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и отрезком гипотенузы, заключенным между катетом и высотой, проведенной из вершины прямого угла.*

В самом деле, $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ (см. рис. 197), поэтому $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD}$, и, следовательно, $AC=\sqrt{AB \cdot AD}$.

64. Практические приложения подобия треугольников.

а) Задачи на построение.

При решении многих задач на построение треугольников применяют так называемый *метод подобия*. Он состоит в том, что сначала на основании некоторых данных строят треугольник, подобный искомому, а затем, используя остальные данные, строят искомый треугольник.

Рассмотрим пример.

Задача 3. *Построить треугольник по двум углам и биссектрисе при вершине третьего угла.*

Решение. На рисунке 198, *а* изображены два данных угла и данный отрезок. Требуется построить треугольник, у которого два угла соответственно равны двум данным углам, а биссектриса при вершине третьего угла равна данному отрезку.

Сначала построим какой-нибудь треугольник, подобный искомому. Для этого начертим произвольный отрезок A_1B_1 и построим треугольник A_1B_1C, у которого углы A_1 и B_1 соответственно равны данным углам (рис. 198, *б*).

Далее построим биссектрису угла C и отложим на ней отрезок CD, равный данному отрезку. Через точку D проведем прямую, параллельную A_1B_1. Она пересекает стороны угла C в некоторых точках A и B (рис. 198, *б*). Треугольник ABC искомый.

В самом деле, так как $AB \parallel A_1B_1$, то $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, и, следовательно, два угла треугольника ABC соответственно равны данным углам. По построению биссектриса CD треугольника ABC равна данному отрезку. Итак, треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи.

Очевидно, задача имеет решение, если сумма двух данных углов меньше $180°$. Так как отрезок A_1B_1 можно выбрать произвольно, то существует бесконечно много треугольников, удовлетворяющих условию задачи. Все эти треугольники равны друг другу (объясните почему), поэтому задача имеет единственное решение.

б) Измерительные работы на местности.

Свойства подобных треугольников могут быть использованы для проведения различных измерительных работ на местности. Мы рассмотрим две задачи: определение высоты предмета и расстояния до недоступной точки.

Определение высоты предмета. Предположим, что нам нужно определить высоту какого-нибудь предмета, например высоту телеграфного столба A_1C_1, изображенного на рисунке 199. Для этого поставим на некотором расстоянии от столба шест AC с вращающейся планкой и направим планку на верхнюю точку A_1 столба, как показано на рисунке. Отметим на поверхности земли точку B, в которой прямая A_1A пересекается с поверхностью земли. Прямоугольные треугольники A_1C_1B и ACB подобны по первому признаку подобия треугольников ($\angle C_1 = \angle C = 90°$, $\angle B$ — общий). Из подобия треугольников следует:

$$\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{BC_1}{BC}, \text{ откуда } A_1C_1 = \frac{AC \cdot BC_1}{BC}.$$

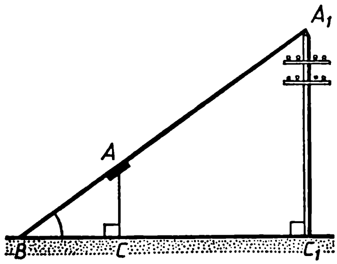


Рис. 199

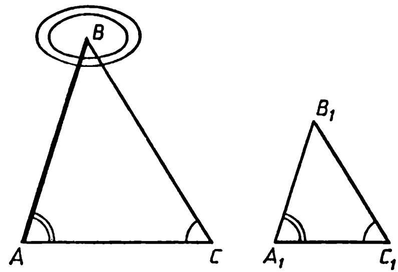


Рис. 200

Измерив расстояния BC_1 и BC и зная длину AC шеста, по полученной формуле определяем высоту A_1C_1 телеграфного столба. Если, например, $BC_1=6{,}3$ м, $BC=2{,}1$ м, $AC=1{,}7$ м, то $A_1C_1=\frac{1{,}7\cdot 6{,}3}{2{,}1}=5{,}1$ м.

Определение расстояния до недоступной точки. Предположим, что нам нужно найти расстояние от пункта A до недоступного пункта B (рис. 200). Для этого на местности выбираем точку C, провешиваем отрезок AC и измеряем его. Затем с помощью астролябии измеряем углы A и C. На листе бумаги строим какой-нибудь треугольник $A_1B_1C_1$, у которого $\angle A_1=\angle A$, $\angle C_1=\angle C$, и измеряем длины сторон A_1B_1 и A_1C_1 этого треугольника. Так как $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, то $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$, откуда $AB=\frac{AC\cdot A_1B_1}{A_1C_1}$. По известным расстояниям AC, A_1C_1 и A_1B_1 находим расстояние AB.

Для упрощения вычислений удобно построить треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы $A_1C_1:AC=1:1000$. Например, если $AC=$ $=130$ м, то расстояние A_1C_1 возьмем равным 130 мм. В этом случае $AB=\frac{AC}{A_1C_1}\cdot A_1B_1=1000\cdot A_1B_1$, поэтому, измерив расстояние A_1B_1 в миллиметрах, мы сразу получаем расстояние AB в метрах.

Пример. Пусть $AC=130$ м, $\angle A=73°$, $\angle C=58°$ (см. рис. 200). На бумаге строим треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы $\angle A_1=73°$, $\angle C_1=58°$, $A_1C_1=130$ мм, и измеряем отрезок A_1B_1. Он равен 153 мм, поэтому искомое расстояние равно 153 м.

65. О подобии произвольных фигур. Понятие подобия можно ввести не только для треугольников, но и для произвольных фигур. Фигуры F и F_1 называются *подобными,* если каждой точке фигуры F можно сопоставить точку фигуры F_1 так, что для любых двух точек M и N фигуры F и сопоставленных им точек M_1 и N_1 фигуры F_1 выполняется условие $\frac{M_1N_1}{MN}=k$, где k — одно и то же положительное число для всех точек. При этом предполагается, что каждая точка фигуры F_1 оказывается сопоставленной какой-то точке фигуры F. Число k называется *коэффициентом подобия* фигур F и F_1.

Сопоставление точек подобных фигур хорошо знакомо нам из повседневного опыта. Так, при проектировании киноленты на экран каждой точке изображения на кинокадре сопоставляется точка на

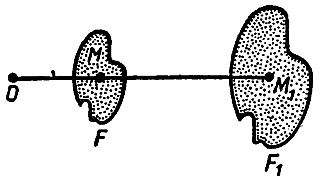


Рис. 201

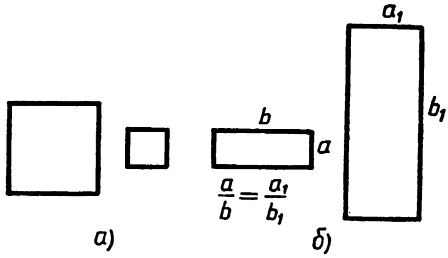


Рис. 202

экране, причем все расстояния увеличиваются в одинаковое число раз.

На рисунке 201 представлен способ построения фигуры F_1, подобной данной фигуре F. Каждой точке M фигуры F сопоставляется точка M_1 плоскости так, что точки M и M_1 лежат на луче с началом в некоторой фиксированной точке O, причем $OM_1 = k \cdot OM$ (на рисунке 201 $k=3$). В результате такого сопоставления получается фигура F_1, подобная фигуре F. В этом случае фигуры F и F_1 называются *центрально-подобными.*

Можно доказать, что для треугольников общее определение подобия равносильно определению, данному в п. 57.

Примерами подобных четырехугольников являются любые два квадрата (рис. 202, *а*), а также два прямоугольника, у которых две смежные стороны одного пропорциональны двум смежным сторонам другого (рис. 202, *б*). Примерами подобных фигур произвольной формы являются две географические карты одного и того же района, выполненные в разных масштабах, а также фотографии одного и того же предмета, сделанные при разных увеличениях.

Вопросы и задачи

564. Дан треугольник, стороны которого равны 8 см, 5 см, 7 см. Найдите периметр треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.

565. Расстояние от точки пересечения диагоналей прямоугольника до прямой, содержащей его бо́льшую сторону, равно 2,5 см. Найдите меньшую сторону прямоугольника.

566. Точки P и Q — середины сторон AB и AC треугольника ABC.

Найдите периметр треугольника ABC, если периметр треугольника APQ равен 21 см.

567. Докажите, что середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

568. Докажите, что четырехугольник есть ромб, если его вершинами являются середины сторон: а) прямоугольника; б) равнобедренной трапеции.

569. Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен ее основаниям и равен полуразности оснований.

570. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ равна 18 см. Середина M стороны AB соединена с вершиной D. Найдите отрезки, на которые делится диагональ AC отрезком DM.

571. В треугольнике ABC медианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника ABO равна S.

В условиях задач 572—574 использованы следующие обозначения для элементов прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C и высотой CH: $BC=a$, $AB=c$, $AC=b$, $CH=h$, $AH=b_c$, $HB=a_c$.

572. Найдите: а) h, a и b, если $b_c=25$, $a_c=16$; б) h, a и b, если $b_c=36$, $a_c=64$; в) a, c и a_c, если $b=12$, $b_c=6$; г) b, c и b_c, если $a=8$, $a_c=4$; д) h, b, a_c и b_c, если $a=6$, $c=9$.

573. Выразите a_c и b_c через a, b и c.

574. Докажите, что: а) $h=\frac{ab}{c}$; б) $\frac{a^2}{a_c}=\frac{b^2}{b_c}$.

575. Катеты прямоугольного треугольника относятся как 3:4, а гипотенуза равна 50 мм. Найдите отрезки, на которые гипотенуза делится высотой, проведенной из вершины прямого угла.

576. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки, один из которых на 11 см больше другого. Найдите гипотенузу, если катеты треугольника относятся как 6:5.

577. В треугольнике, стороны которого равны 5 см, 12 см и 13 см, проведена высота к большей стороне. Найдите отрезки, на которые высота делит эту сторону.

578. Используя утверждение 2^0, п. 63, докажите теорему Пифагора: в прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C $AC^2+BC^2=AB^2$.

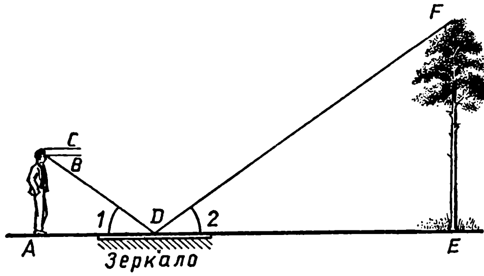


Рис. 203

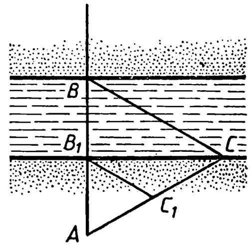


Рис. 204

Р е ш е н и е. Пусть CD — высота треугольника ABC (см. рис. 197). На основе утверждения 2°, п. 63, имеем $AC = \sqrt{AD \cdot AB}$, или $AC^2 = AD \cdot AB$. Аналогично $BC^2 = BD \cdot AB$. Складывая эти равенства почленно и учитывая, что $AD + BD = AB$, получаем

$$AC^2 + BC^2 = AD \cdot AB + BD \cdot AB = (AD + BD)\,AB = AB^2.$$

579. Для определения высоты столба A_1C_1, изображенного на рисунке 199, использован шест с вращающейся планкой. Чему равна высота столба, если $BC_1 = 6{,}3$ м, $BC = 3{,}4$ м, $AC = 1{,}7$ м?

580. Длина тени дерева равна 10,2 м, а длина тени человека, рост которого 1,7 м, равна 2,5 м. Найдите высоту дерева.

581. Для определения высоты дерева можно использовать зеркало так, как показано на рисунке 203. Луч света FD, отражаясь от зеркала в точке D, попадает в глаз человека (точку B). Определите высоту дерева, если $AC = 165$ см, $BC = 12$ см, $AD = 120$ см, $DE = 4{,}8$ м, $\angle 1 = \angle 2$.

582. Для определения расстояния от точки A до недоступной точки B на местности выбрали точку C и измерили отрезок AC и углы BAC и ACB. Затем построили на бумаге треугольник $A_1B_1C_1$, подобный треугольнику ABC. Найдите AB, если $AC = 42$ м, $A_1C_1 = 6{,}3$ см, $A_1B_1 = 7{,}2$ см.

583. На рисунке 204 показано, как можно определить ширину BB_1 реки, рассматривая два подобных треугольника ABC и AB_1C_1. Определите BB_1, если $AC = 100$ м, $AC_1 = 32$ м, $AB_1 = 34$ м.

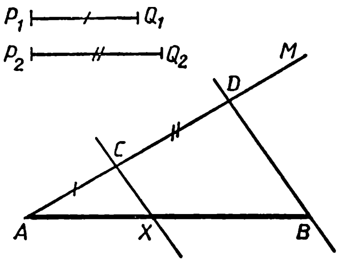


Рис. 205

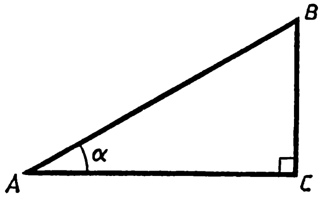


Рис. 206

Задачи на построение

584. Разделите данный отрезок AB на два отрезка AX и XB, пропорциональные данным отрезкам P_1Q_1 и P_2Q_2.

Решение. Проведем какой-нибудь луч AM, не лежащий на прямой AB, и на этом луче отложим последовательно отрезки AC и CD, равные отрезкам P_1Q_1 и P_2Q_2 (рис. 205). Затем проведем прямую BD и прямую, проходящую через точку C параллельно прямой BD. Она пересечет отрезок AB в искомой точке X (см. задачу 556).

585. Начертите отрезок AB и разделите его в отношении: а) 2:5; б) 3:7; в) 4:3.

586. Постройте треугольник по двум углам и биссектрисе, проведенной из вершины меньшего из данных углов.

587. Постройте треугольник по двум углам и высоте, проведенной из вершины третьего угла.

588. Постройте треугольник ABC по углу A и медиане AM, если известно, что $AB:AC=2:3$.

589. Постройте треугольник ABC по углу A и стороне BC, если известно, что $AB:AC=2:1$.

590. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и отношению катетов.

§ 4. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

66. Синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C (рис. 206). Катет BC этого треугольника является противолежащим углу A, а катет AC — прилежащим к этому углу.

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему.

Синус, косинус и тангенс угла α обозначаются символами $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ (читается: «синус альфа», «косинус альфа» и «тангенс альфа»). На рисунке 206

$$\sin A=\frac{BC}{AB}, \qquad (1)$$

$$\cos A=\frac{AC}{AB}, \qquad (2)$$

$$\operatorname{tg} A=\frac{BC}{AC}. \qquad (3)$$

Из формул (1) и (2) получаем: $\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{BC}{AB}\cdot\frac{AB}{AC}=\frac{BC}{AC}$. Сравнивая с формулой (3), находим:

$$\operatorname{tg} A=\frac{\sin A}{\cos A}, \qquad (4)$$

т. е. *тангенс угла равен отношению синуса к косинусу этого угла.*

Докажем, что *если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то синусы этих углов равны, косинусы этих углов равны и тангенсы этих углов равны.* В самом деле, пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два прямоугольных треугольника с прямыми углами C и C_1 и равными острыми углами A и A_1. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны по первому признаку подобия треугольников, поэтому $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$. Из этих равенств следует, что $\frac{BC}{AB}=\frac{B_1C_1}{A_1B_1}$, т. е. $\sin A=\sin A_1$. Аналогично $\frac{AC}{AB}=\frac{A_1C_1}{A_1B_1}$, т. е. $\cos A=\cos A_1$, и $\frac{BC}{AC}=\frac{B_1C_1}{A_1C_1}$, т. е. $\operatorname{tg} A=\operatorname{tg} A_1$.

Докажем теперь справедливость равенства

$$\sin^2 A+\cos^2 A=1. \qquad (5)$$

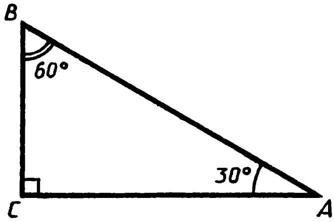


Рис. 207

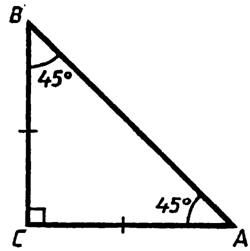


Рис. 208

Из формул (1) и (2) получаем

$$\sin^2 A + \cos^2 A = \frac{BC^2}{AB^2} + \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2}.$$

По теореме Пифагора $BC^2 + AC^2 = AB^2$, поэтому $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.

Равенство (5) называется *основным тригонометрическим тождеством*[1].

67. Значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30°, 45° и 60°. Найдем сначала значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30° и 60°. Для этого рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, у которого $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$ (рис. 207). Так как катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы, то $\frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}$. Но $\frac{BC}{AB} = \sin A = \sin 30°$. С другой стороны, $\frac{BC}{AB} = \cos B = \cos 60°$. Итак, $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$. Из основного тригонометрического тождества получаем:

$$\cos 30° = \sqrt{1 - \sin^2 30°} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin 60° = \sqrt{1 - \cos^2 60°} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

По формуле (4) находим:

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{tg} 60° = \frac{\sin 60°}{\cos 60°} = \sqrt{3}.$$

Найдем теперь $\sin 45°$, $\cos 45°$ и $\operatorname{tg} 45°$. Для этого рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C (рис. 208). В этом треугольнике $AC = BC$, $\angle A = \angle B = 45°$.

---

[1] Слово «тригонометрия» в переводе с греческого языка означает «измерение треугольников».

По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2AC^2 = 2BC^2$, откуда $AC = BC = \frac{AB}{\sqrt{2}}$. Следовательно, $\sin 45° = \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 45° = \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 45° = \operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = 1$.

Составим таблицу значений $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ для углов α, равных 30°, 45°, 60°:

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Задачи

591. Найдите синус, косинус и тангенс углов A и B треугольника ABC с прямым углом C, если: а) $BC = 8$, $AB = 17$; б) $BC = 21$, $AC = 20$; в) $BC = 1$, $AC = 2$; г) $AC = 24$, $AB = 25$.

592. Постройте угол α, если: а) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$; б) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$; в) $\cos\alpha = 0{,}2$; г) $\cos\alpha = \frac{2}{3}$; д) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; е) $\sin\alpha = 0{,}4$.

593. Найдите: а) $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{1}{2}$; б) $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{2}{3}$; в) $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{4}$.

594. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен b, а противолежащий угол равен β. а) Выразите другой катет, противолежащий ему угол и гипотенузу через b и β. б) Найдите их значения, если $b = 10$ см, $\beta = 50°$.

595. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен b, а прилежащий к нему угол равен α. а) Выразите второй катет, прилежащий к нему острый угол и гипотенузу через b и α. б) Найдите их значения, если $b = 12$ см, $\alpha = 42°$.

596. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна c, а один из острых углов равен α. Выразите второй острый угол и катеты через c и α и найдите их значения, если $c=24$ см, а $\alpha=35°$.

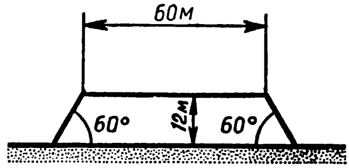


Рис. 209

597. **В прямоугольном треугольнике катеты равны a и b. Выразите через a и b гипотенузу и острые углы треугольника и найдите их значения при $a=12$, $b=15$.**

598. **Найдите площадь равнобедренного треугольника с углом α при основании, если: а) боковая сторона равна b; б) основание равно a.**

599. **Найдите площадь равнобедренной трапеции с основаниями 2 см и 6 см, если угол при большем основании равен α.**

600. **Насыпь шоссейной дороги имеет в верхней части ширину 60 м. Какова ширина насыпи в нижней ее части, если угол наклона откосов к горизонту равен 60°, а высота насыпи равна 12 м (рис. 209)?**

601. **Найдите углы ромба, если его диагонали равны $2\sqrt{3}$ и 2.**

602. Стороны прямоугольника равны 3 см и $\sqrt{3}$ см. Найдите углы, которые образует диагональ со сторонами прямоугольника.

603. В параллелограмме $ABCD$ сторона AD равна 12 см, а угол BAD равен 47°50′. Найдите площадь параллелограмма, если его диагональ BD перпендикулярна к стороне AB.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ VII

1. Что называется отношением двух отрезков?
2. В каком случае говорят, что отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1?
3. Дайте определение подобных треугольников.
4. Сформулируйте и докажите теорему об отношении площадей подобных треугольников.
5. Сформулируйте и докажите первый признак подобия треугольников.
6. Сформулируйте и докажите второй признак подобия треугольников.

7. Сформулируйте и докажите третий признак подобия треугольников.
8. Какой отрезок называется средней линией треугольника? Сформулируйте и докажите теорему о средней линии треугольника.
9. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.
10. Сформулируйте и докажите утверждение о том, что высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, разделяет треугольник на подобные треугольники.
11. Сформулируйте и докажите утверждения о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике.
12. Приведите пример решения задачи на построение методом подобия.
13. Расскажите, как определить на местности высоту предмета и расстояние до недоступной точки.
14. Объясните, какие две фигуры называются подобными. Что такое коэффициент подобия фигур?
15. Что называется синусом, косинусом, тангенсом острого угла прямоугольного треугольника?
16. Докажите, что если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то синусы этих углов равны, косинусы этих углов равны и тангенсы этих углов равны.
17. Какое равенство называют основным тригонометрическим тождеством?
18. Чему равны значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30°, 45°, 60°? Объясните, как найти эти значения.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

604. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, $AB=6$ см, $BC=$ $=9$ см, $CA=10$ см. Наибольшая сторона треугольника $A_1B_1C_1$ равна 7,5 см. Найдите две другие стороны треугольника $A_1B_1C_1$.

605. Диагональ AC трапеции $ABCD$ делит ее на два подобных треугольника. Докажите, что $AC^2=a\cdot b$, где a и b — основания трапеции.

606. Биссектрисы MD и NK треугольника MNP пересекаются в точке O. Найдите отношение $OK:ON$, если $MN=5$ см, $NP=3$ см, $MP=7$ см.

607. Основание равнобедренного треугольника относится к боковой стороне как 4:3, а высота, проведенная к основанию, равна 30 см. Найдите отрезки, на которые эту высоту делит биссектриса угла при основании.

608. На продолжении боковой стороны OB равнобедренного треугольника AOB с основанием AB взята точка C так, что точка B лежит между точками O и C. Отрезок AC пересекает биссектрису угла AOB в точке M. Докажите, что $AM<MC$.

609. На стороне BC треугольника ABC взята точка D так, что $\frac{BD}{AB}=\frac{DC}{AC}$. Докажите, что AD — биссектриса треугольника ABC.

610. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, делит сторону AC в отношении 2:7, считая от вершины A. Найдите стороны отсеченного треугольника, если $AB=10$ см, $BC=18$ см, $CA=21{,}6$ см.

611. Докажите, что медиана AM треугольника ABC делит пополам любой отрезок, параллельный стороне BC, концы которого лежат на сторонах AB и AC.

612. Два шеста AB и CD разной длины a и b установлены вертикально на некотором расстоянии друг от друга так, как показано на рисунке 210. Концы A и D, B и C соединены веревками, которые пересекаются в точке O. По данным рисунка докажите, что: а) $\frac{m}{d}=\frac{x}{b}$ и $\frac{n}{d}=\frac{x}{a}$; б) $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=1$.

Найдите x и докажите, что x не зависит от расстояния d между шестами AB и CD.

613. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, если:

а) $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BM}{B_1M_1}$, где BM и B_1M_1 — медианы треугольников;

б) $\angle A=\angle A_1$, $\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BH}{B_1H_1}$, где BH и B_1H_1 — высоты треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

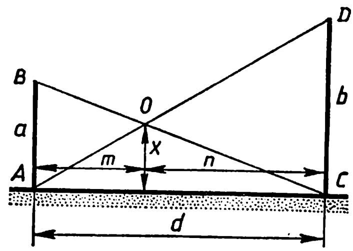


Рис. 210

614. Диагонали прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом A взаимно перпендикулярны. Основание AB равно 6 см, а боковая сторона AD равна 4 см. Найдите DC, DB и CB.

615*. Отрезок с концами на боковых сторонах трапеции параллелен ее основаниям и проходит через точку пересечения диагоналей. Найдите длину этого отрезка, если основания трапеции равны a и b.

616. Докажите, что вершины треугольника равноудалены от прямой, содержащей его среднюю линию.

617. Докажите, что середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.

618. Точки M и N являются соответственно серединами сторон CD и BC параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые AM и AN делят диагональ BD на три равные части.

619. Биссектриса внешнего угла при вершине A треугольника ABC пересекает прямую BC в точке D. Докажите, что $\frac{BD}{AB}=\frac{DC}{AC}$.

620. В треугольнике ABC $(AB \neq AC)$ через середину стороны BC проведена прямая, параллельная биссектрисе угла A, которая пересекает прямые AB и AC соответственно в точках D и E. Докажите, что $BD=CE$.

621. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC сумма оснований равна b, диагональ AC равна a, $\angle ACB=\alpha$. Найдите площадь трапеции.

622. Дан треугольник ABC. Постройте треугольник $A_1B_1C_1$, подобный треугольнику ABC, площадь которого в два раза больше площади треугольника ABC.

623. Даны три отрезка, длины которых соответственно равны a, b и c. Постройте отрезок, длина которого равна $\frac{ab}{c}$.

624. Постройте треугольник, если даны середины его сторон.

625. Постройте треугольник по стороне и медианам, проведенным к двум другим сторонам.

Задачи для решения с помощью микрокалькулятора

В условиях задач 626—630 использованы следующие обозначения для элементов прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C и высотой CH: $BC=a$, $AB=c$, $AC=b$, $CH=h$, $AH=b_c$, $HB=a_c$.

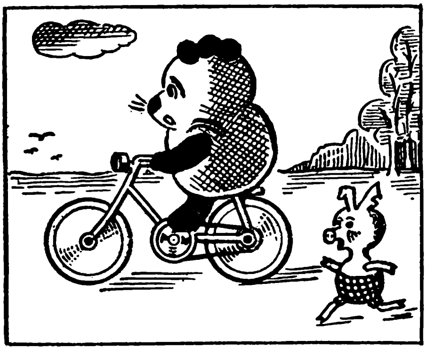
626. Найдите h, a и b с точностью до 0,01 см, если: а) $a_c=5{,}23$ см, $b_c=7{,}35$ см; б) $a_c=1{,}19$ см, $c=3{,}52$ см; в) $b_c=17{,}92$ см, $c=25{,}34$ см.

627. Найдите b и c с точностью до 1 см, если: а) $a=3{,}27$ м, $h=2{,}11$ м; б) $a=8{,}74$ м, $a_c=5{,}42$ м; в) $h=1{,}25$ м, $a_c=$ $=2{,}82$ м.

628. Найдите отношение площадей треугольников ABC и ACH с точностью до 0,01, если $a=21{,}3$ дм, $b=37{,}8$ дм.

629*. Известно, что $\frac{a}{b}=2{,}3$ и $h=10$ см. Найдите a, b и c с точностью до 0,1 см.

630*. Найдите отношения $\frac{a}{b}$ и $\frac{a}{c}$ с точностью до 0,01, если $\frac{S_{ACH}}{S_{BCH}}=0{,}85$.



Глава VIII

ОКРУЖНОСТЬ

§ 1. КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТИ

68. Взаимное расположение прямой и окружности. Выясним, сколько общих точек могут иметь прямая и окружность в зависимости от их взаимного расположения. Ясно, что если прямая проходит через центр окружности, то она пересекает окружность в двух точках — концах диаметра, лежащего на этой прямой.

Пусть прямая p не проходит через центр O окружности радиуса r. Проведем перпендикуляр OH к прямой p и обозначим буквой d длину этого перпендикуляра, т. е. расстояние от центра данной окружности до прямой (рис. 211). Исследуем взаимное расположение прямой и окружности в зависимости от соотношения между d и r. Возможны три случая.

1) $d<r$. На прямой p от точки H отложим два отрезка HA и HB, длины которых равны $\sqrt{r^2-d^2}$ (рис. 211, a). По теореме Пифагора $OA=\sqrt{OH^2+HA^2}=\sqrt{d^2+(r^2-d^2)}=r$, $OB=\sqrt{OH^2+HB^2}=$ $=\sqrt{d^2+(r^2-d^2)}$. Следовательно, точки A и B лежат на окружности и, значит, являются общими точками прямой p и данной окружности.

Докажем, что прямая p и данная окружность не имеют других

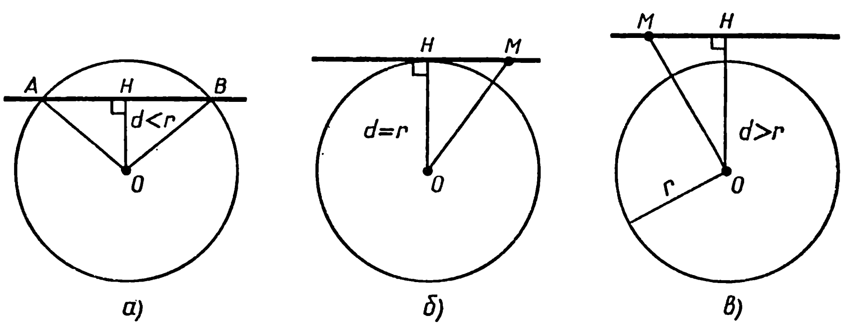


Рис. 211

общих точек. Предположим, что они имеют еще одну общую точку C. Тогда медиана OD равнобедренного треугольника OAC, проведенная к основанию AC, является высотой этого треугольника, поэтому $OD \perp p$. Отрезки OD и OH не совпадают, так как середина D отрезка AC не совпадает с точкой H — серединой отрезка AB. Мы получили, что из точки O проведены два перпендикуляра: OH и OD — к прямой p, что невозможно. Итак, *если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности* ($d < r$), *то прямая и окружность имеют две общие точки.* В этом случае прямая называется *секущей* по отношению к окружности.

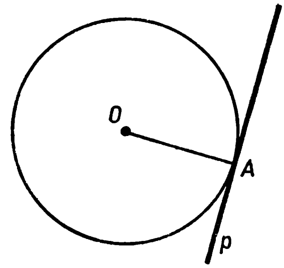


Рис. 212

2) $d = r$. В этом случае $OH = r$, т. е. точка H лежит на окружности и, значит, является общей точкой прямой и окружности (рис. 211, *б*). Прямая p и окружность не имеют других общих точек, так как для любой точки M прямой p, отличной от точки H, $OM > OH = r$ (наклонная OM больше перпендикуляра OH), и, следовательно, точка M не лежит на окружности. Итак, *если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности, то прямая и окружность имеют только одну общую точку.*

3) $d > r$. В этом случае $OH > r$; поэтому для любой точки M прямой p $OM \geqslant OH > r$ (рис. 211, *в*). Следовательно, точка M не лежит на окружности. Итак, *если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности, то прямая и окружность не имеют общих точек.*

69. Касательная к окружности. Мы доказали, что прямая и окружность могут иметь одну или две общие точки и могут не иметь ни одной общей точки. *Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется касательной к окружности, а их общая точка называется точкой касания прямой и окружности.* На рисунке 212 прямая p — касательная к окружности с центром O, A — точка касания.

Докажем теорему о свойстве касательной.

Теорема. ***Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.***

Доказательство. Пусть p — касательная к окружности

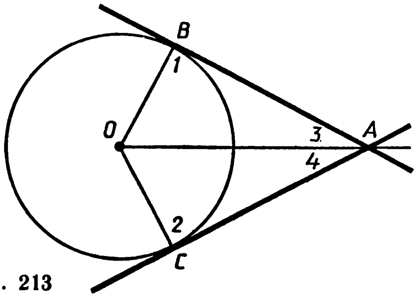


Рис. 213

с центром O, A — точка касания (см. рис. 212). Докажем, что касательная p перпендикулярна к радиусу OA.

Предположим, что это не так. Тогда радиус OA является наклонной к прямой p. Так как перпендикуляр, проведенный из точки O к прямой p, меньше наклонной OA, то расстояние от центра O окружности до прямой p меньше радиуса. Следовательно, прямая p и окружность имеют две общие точки. Но это противоречит условию: прямая p — касательная. Таким образом, прямая p перпендикулярна к радиусу OA. Теорема доказана.

Рассмотрим две касательные к окружности с центром O, проходящие через точку A и касающиеся окружности в точках B и C (рис. 213). Отрезки AB и AC назовем *отрезками касательных, проведенными из точки A*. Они обладают следующим свойством, вытекающим из доказанной теоремы:

Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

Для доказательства этого утверждения обратимся к рисунку 213. По теореме о свойстве касательной углы 1 и 2 прямые, поэтому треугольники ABO и ACO прямоугольные. Они равны, так как имеют общую гипотенузу OA и равные катеты OB и OC. Следовательно, $AB = AC$ и $\angle 3 = \angle 4$, что и требовалось доказать.

Докажем теперь теорему, обратную теореме о свойстве касательной (признак касательной).

Теорема. ***Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной.***

Доказательство. Из условия теоремы следует, что данный радиус является перпендикуляром, проведенным из центра окружности к данной прямой. Поэтому расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу, и, следовательно, прямая и окружность имеют только одну общую точку. Но это и означает, что данная прямая является касательной к окружности. Теорема доказана.

На этой теореме основано решение задач на построение касательной. Решим одну из таких задач.

З а д а ч а. *Через данную точку A окружности с центром O провести касательную к этой окружности.*

Р е ш е н и е. Проведем прямую OA, а затем построим прямую p, проходящую через точку A перпендикулярно к прямой OA. По признаку касательной прямая p является искомой касательной.

Задачи

631. Пусть d — расстояние от центра окружности радиуса r до прямой p. Каково взаимное расположение прямой p и окружности, если: а) $r=16$ см, $d=12$ см; б) $r=5$ см, $d=4{,}2$ см; в) $r=7{,}2$ дм, $d=3{,}7$ дм; г) $r=8$ см, $d=1{,}2$ дм; д) $r=5$ см, $d=50$ мм?

632. Расстояние от точки A до центра окружности меньше радиуса окружности. Докажите, что любая прямая, проходящая через точку A, является секущей по отношению к данной окружности.

633. Даны квадрат $OABC$, сторона которого равна 6 см, и окружность с центром в точке O радиуса 5 см. Какие из прямых OA, AB, BC и AC являются секущими по отношению к этой окружности?

634. Радиус OM окружности с центром O делит хорду AB пополам. Докажите, что касательная, проведенная через точку M, параллельна хорде AB.

635. Через точку A окружности проведены касательная и хорда, равная радиусу окружности. Найдите угол между ними.

636. Через концы хорды AB, равной радиусу окружности, проведены две касательные, пересекающиеся в точке C. Найдите угол ACB.

637. Угол между диаметром AB и хордой AC равен 30°. Через точку C проведена касательная, пересекающая прямую AB в точке D. Докажите, что треугольник ACD равнобедренный.

638. Прямая AB касается окружности с центром O радиуса r в точке B. Найдите AB, если $OA=2$ см, а $r=1{,}5$ см.

639. Прямая AB касается окружности с центром O радиуса r в точке B. Найдите AB, если $\angle AOB=60°$, а $r=12$ см.

640. Даны окружность с центром O радиуса 4,5 см и точка A, такая, что $OA=9$ см. Через точку A проведены две касательные к данной окружности. Найдите угол между ними.

641. Отрезки AB и AC являются отрезками касательных к окружности с центром O, проведенными из точки A. Найдите угол BAC, если середина отрезка AO лежит на окружности.

642. На рисунке 213 $OB=3$ см, $OA=6$ см. Найдите AB, AC, $\angle 3$ и $\angle 4$.

643. Прямые AB и AC касаются окружности с центром O в точках B и C. Найдите BC, если $\angle OAB=30°$, $AB=5$ см.

644. Прямые MA и MB касаются окружности с центром O в точках A и B. Точка C симметрична точке O относительно точки B. Докажите, что $\angle AMC=3\angle BMC$.

645. Из концов диаметра AB данной окружности проведены перпендикуляры AA_1 и BB_1 к касательной, которая не перпендикулярна к диаметру AB. Докажите, что точка касания является серединой отрезка A_1B_1.

646. В треугольнике ABC угол B прямой. Докажите, что: а) прямая BC является касательной к окружности с центром A радиуса AB; б) прямая AB является касательной к окружности с центром C радиуса CB; в) прямая AC не является касательной к окружности с центром B и радиусами BA и BC.

647. Отрезок AH — перпендикуляр, проведенный из точки A к прямой, проходящей через центр O окружности радиуса 3 см. Является ли прямая AH касательной к окружности, если: а) $OA=5$ см, $AH=4$ см; б) $\angle HAO=45°$, $OA=4$ см; в) $\angle HAO=30°$, $OA=6$ см?

648. Постройте касательную к окружности: а) параллельную данной прямой; б) перпендикулярную к данной прямой.

§ 2. ЦЕНТРАЛЬНЫЕ И ВПИСАННЫЕ УГЛЫ

70. Градусная мера дуги окружности. Отметим на окружности две точки A и B. Они разделяют окружность на две дуги. Чтобы различить эти дуги, на каждой из них отмечают промежуточную точку, например L и M (рис. 214). Обозначают дуги так: $\smile ALB$ и $\smile AMB$. Иногда используется обозначение без промежуточной точки: $\smile AB$ (когда ясно, о какой из двух дуг идет речь).

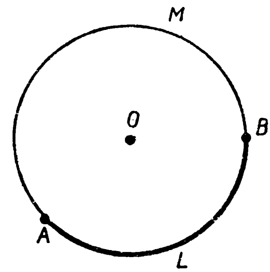


Рис. 214

Дуга называется *полуокружностью,* если отрезок, соединяющий ее концы, является диаметром окружности. На рисунке 215, *а* изображены две полуокружности, одна из которых выделена жирной линией.

Угол с вершиной в центре окружности называется ее *центральным углом.* Пусть стороны центрального угла окружности с центром O пересекают ее в точках A и B. Центральному углу AOB соответствуют две дуги с концами A и B (рис. 215). Если $\angle AOB$ развернутый, то ему соответствуют две полуокружности (рис. 215, *а*). Если $\angle AOB$ неразвернутый, то говорят, что дуга AB, расположенная внутри этого угла, *меньше полуокружности.* На рисунке 215, *б* эта дуга выделена жирной линией. Про другую дугу с концами A и B говорят, что она *больше полуокружности* (дуга ALB на рисунке 215, *б*).

Дугу окружности можно измерять в градусах. *Если дуга AB окружности с центром O меньше полуокружности или является полуокружностью, то ее градусная мера считается равной градусной мере центрального угла AOB* (см. рис. 215, *а, б*). *Если же дуга AB больше полуокружности, то ее градусная мера считается равной* $360° - \angle AOB$ (см. рис. 215, *в*).

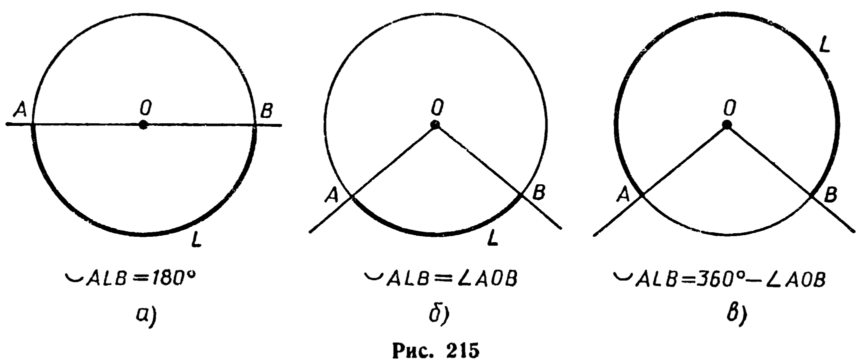


Рис. 215

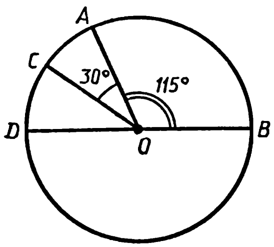


Рис. 216

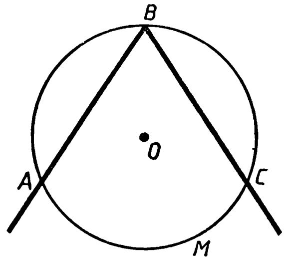


Рис. 217

Отсюда следует, что *сумма градусных мер двух дуг окружности с общими концами равна* 360°.

Градусная мера дуги *AB* (дуги *ALB*), как и сама дуга, обозначается символом $\smile AB$ ($\smile ALB$).

На рисунке 216 градусная мера дуги *CAB* равна 145°. Обычно говорят кратко: «Дуга *CAB* равна 145°» — и пишут: $\smile CAB = 145°$. На этом же рисунке $\smile ADB = 360° - 115° = 245°$, $\smile CDB = 360° - 145° = 215°$, $\smile DB = 180°$.

71. Теорема о вписанном угле. *Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется вписанным углом.*

На рисунке 217 угол *ABC* вписанный, дуга *AMC* расположена внутри этого угла. В таком случае говорят, что вписанный угол *ABC опирается на дугу AMC*. Докажем теорему о вписанном угле.

Теорема. ***Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.***

Доказательство. Пусть $\angle ABC$ — вписанный угол окружности с центром *O*, опирающийся на дугу *AC* (рис. 218).

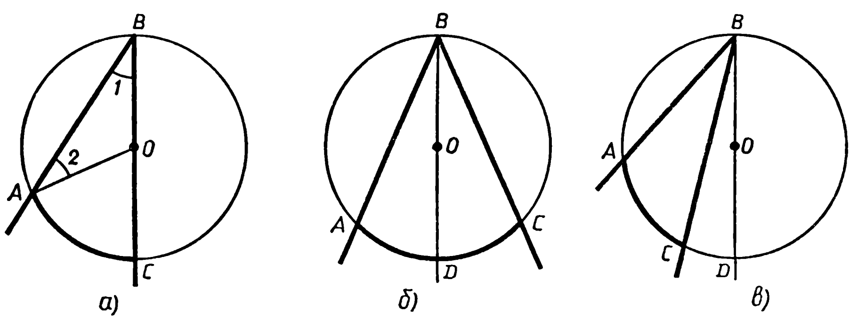


Рис. 218

Докажем, что $\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC$. Рассмотрим три возможных случая расположения луча BO относительно угла ABC.

1) *Луч BO совпадает с одной из сторон угла ABC*, например со стороной BC (рис. 218, *а*). В этом случае дуга AC меньше полуокружности, поэтому $\angle AOC = \smile AC$. Так как угол AOC — внешний угол равнобедренного треугольника ABO, а углы 1 и 2 при основании равнобедренного треугольника равны, то $\angle AOC = \angle 1 + \angle 2 = 2\angle 1$. Отсюда следует, что $2\angle 1 = \smile AC$ или $\angle ABC = \angle 1 = \frac{1}{2} \smile AC$.

2) *Луч BO делит угол ABC на два угла.* В этом случае луч BO пересекает дугу AC в некоторой точке D (рис. 218, *б*). Точка D разделяет дугу AC на две дуги: $\smile AD$ и $\smile DC$. По доказанному $\angle ABD = \frac{1}{2} \smile AD$ и $\angle DBC = \frac{1}{2} \smile DC$. Складывая эти равенства почленно, получаем:

$$\angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2} \smile AD + \frac{1}{2} \smile DC, \quad \text{или} \quad \angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC.$$

3) *Луч BO не делит угол ABC на два угла и не совпадает со сторонами этого угла.* Для этого случая, пользуясь рисунком 218, *в*, проведите доказательство самостоятельно.

Следствие 1. *Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны* (рис. 219).

Следствие 2. *Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, — прямой* (рис. 220).

Используя следствие 1, докажем теорему о произведении отрезков пересекающихся хорд.

Теорема. ***Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.***

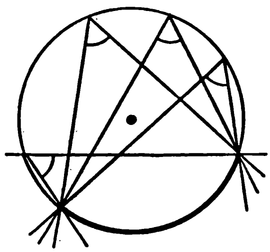


Рис. 219

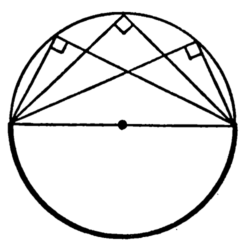


Рис. 220

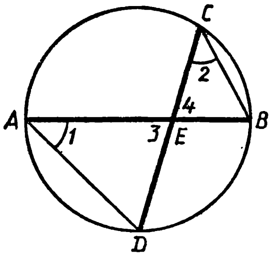


Рис. 221

Доказательство. Пусть хорды AB и CD пересекаются в точке E (рис. 221). Докажем, что

$$AE \cdot BE = CE \cdot DE.$$

Рассмотрим треугольники ADE и CBE. В этих треугольниках углы 1 и 2 равны, так как они вписанные и опираются на одну и ту же дугу BD, а углы 3 и 4 равны как вертикальные. По первому признаку подобия треугольников: $\triangle ADE \sim \triangle CBE$. Отсюда следует, что $\frac{AE}{CE} = \frac{DE}{BE}$, или $AE \cdot BE = CE \cdot DE$. Теорема доказана.

Задачи

649. Начертите окружность с центром O и отметьте на ней точку A. Постройте хорду AB так, чтобы: а) $\angle AOB = 60°$; б) $\angle AOB = 90°$; в) $\angle AOB = 120°$; г) $\angle AOB = 180°$.

650. Радиус окружности с центром O равен 16. Найдите хорду AB, если: а) $\angle AOB = 60°$; б) $\angle AOB = 90°$; в) $\angle AOB = 180°$.

651. Хорды AB и CD окружности с центром O равны. а) Докажите, что две дуги с концами A и B соответственно равны двум дугам с концами C и D. б) Найдите дуги с концами C и D, если $\angle AOB = 112°$.

652. На полуокружности AB взяты точки C и D так, что $\smile AC = 37°$, $\smile BD = 23°$. Найдите хорду CD, если радиус окружности равен 15 см.

653. Найдите вписанный угол ABC, если дуга AC, на которую он опирается, равна: а) 48°; б) 57°; в) 90°; г) 124°; д) 180°.

654. По данным рисунка 222 найдите x.

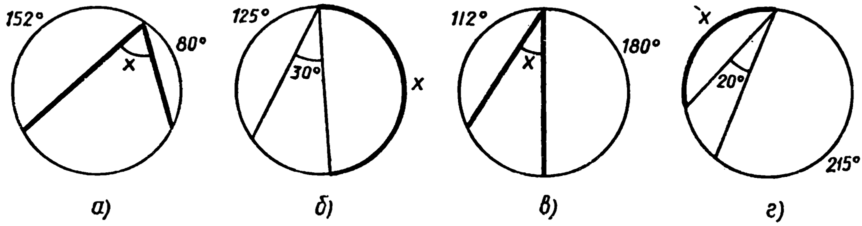


Рис. 222

655. Центральный угол AOB на 30° больше вписанного угла, опирающегося на дугу AB. Найдите каждый из этих углов.

656. Хорда AB стягивает дугу, равную 115°, а хорда AC — дугу в 43°. Найдите угол BAC.

657. Точки A и B разделяют окружность на две дуги, меньшая из которых равна 140°, а бо́льшая точкой M делится в отношении 6:5, считая от точки A. Найдите угол BAM.

658. Через точку A к данной окружности проведены касательная AB (B — точка касания) и секущая AD, проходящая через центр O (D — точка на окружности, O лежит между A и D). Найдите $\angle BAD$ и $\angle ADB$, если $\smile BD = 110°20'$.

659. Докажите, что градусные меры дуг окружности, заключенных между параллельными хордами, равны.

660. Через точку, лежащую вне окружности, проведены две секущие, образующие угол в 32°. Бо́льшая дуга окружности, заключенная между сторонами этого угла, равна 100°. Найдите меньшую дугу.

661. Найдите острый угол, образованный двумя секущими, проведенными из точки, лежащей вне окружности, если дуги, заключенные между секущими, равны 140° и 52°.

662. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке E. Найдите угол BEC, если $\smile AD = 54°$, $\smile BC = 70°$.

663. Отрезок AC — диаметр окружности, AB — хорда, MA — касательная, угол MAB острый. Докажите, что $\angle MAB = \angle ACB$.

664. Прямая AM — касательная к окружности, AB — хорда этой окружности. Докажите, что угол MAB измеряется половиной дуги AB, расположенной внутри угла MAB.

665. Вершины треугольника ABC лежат на окружности. Докажите, что если AB — диаметр окружности, то $\angle C > \angle A$ и $\angle C > \angle B$.

666. Хорды AB и CD пересекаются в точке E. Найдите ED, если: а) $AE = 5$, $BE = 2$, $CE = 2{,}5$; б) $AE = 16$, $BE = 9$, $CE = ED$; в) $AE = 0{,}2$, $BE = 0{,}5$, $CE = 0{,}4$.

667. Диаметр AA_1 окружности перпендикулярен к хорде BB_1 и пересекает ее в точке C. Найдите BB_1, если $AC = 4$ см, $CA_1 = 8$ см.

668. Докажите, что перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки окружности к диаметру, есть среднее пропорциональ-

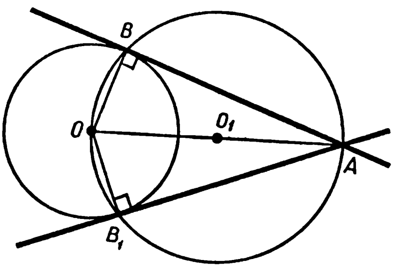


Рис. 223

ное между отрезками, на которые основание перпендикуляра делит диаметр.

669. Пользуясь предыдущей задачей, постройте отрезок, средний пропорциональный между данными отрезками.

670. Через точку A проведены касательная AB (B — точка касания) и секущая, которая пересекает окружность в точках P и Q. Докажите, что $AB^2 = AP \cdot AQ$.

671. Через точку A проведены касательная AB (B — точка касания) и секущая, которая пересекает окружность в точках C и D. Найдите CD, если: а) $AB = 4$ см, $AC = 2$ см; б) $AB = 5$ см, $AD = 10$ см.

672. Через точку A, лежащую вне окружности, проведены две секущие, одна из которых пересекает окружность в точках B_1, C_1, а другая — в точках B_2, C_2. Докажите, что $AB_1 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AC_2$.

673. К данной окружности постройте касательную, проходящую через данную точку вне окружности.

Решение. Пусть даны окружность с центром O и точка A вне этой окружности. Допустим, что задача решена и AB — искомая касательная (рис. 223). Так как прямая AB перпендикулярна к радиусу OB, то решение задачи сводится к построению точки B окружности, для которой $\angle ABO$ прямой. Эту точку можно построить следующим образом: проводим отрезок OA и строим его середину O_1. Затем проводим окружность с центром в точке O_1 радиуса O_1A. Эта окружность пересекает данную окружность в двух точках: B и B_1. Прямые AB и AB_1 — искомые касательные, так как $AB \perp OB$ и $AB_1 \perp OB_1$. Действительно, углы ABO и AB_1O, вписанные в окружность с центром O_1, опираются на полуокружности, поэтому они прямые. Очевидно, задача имеет два решения.

§ 3. ЧЕТЫРЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ ТРЕУГОЛЬНИКА

72. Свойства биссектрисы угла и серединного перпендикуляра к отрезку. Докажем теорему о биссектрисе угла.

Теорема. ***Каждая точка биссектрисы неразвернутого угла равноудалена от его сторон[1]. Обратно: каждая точка, лежащая внутри угла и равноудаленная от сторон угла, лежит на его биссектрисе.***

Доказательство. 1) Возьмем произвольную точку M на биссектрисе угла BAC, проведем перпендикуляры MK и ML к прямым AB и AC и докажем, что $MK=ML$ (рис. 224). Рассмотрим прямоугольные треугольники AMK и AML. Они равны по гипотенузе и острому углу (AM — общая гипотенуза, $\angle 1=\angle 2$ по условию). Следовательно, $MK=ML$.

2) Пусть точка M лежит внутри угла BAC и равноудалена от его сторон AB и AC. Докажем, что луч AM — биссектриса угла BAC (рис. 224). Проведем перпендикуляры MK и ML к прямым AB и AC. Прямоугольные треугольники AKM и ALM равны гипотенузе и катету (AM — общая гипотенуза, $MK=ML$ по условию). Следовательно, $\angle 1=\angle 2$. Но это и означает, что луч AM — биссектриса угла BAC. Теорема доказана.

Следствие. *Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

В самом деле, обозначим буквой O точку пересечения биссектрис AA_1 и BB_1 треугольника ABC и проведем из этой точки перпендикуляры OK, OL и OM соответственно к прямым AB, BC и CA (рис. 225). По доказанной теореме $OK=OM$ и $OK=OL$. Поэтому $OM=OL$, т. е. точка O равноудалена от сторон угла ACB и, значит, лежит на биссектрисе CC_1 этого угла.

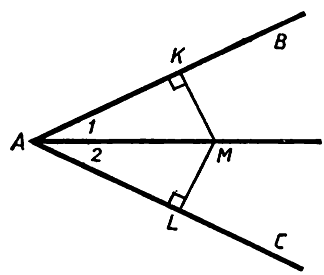


Рис. 224

[1] То есть равноудалена от прямых, содержащих стороны угла.

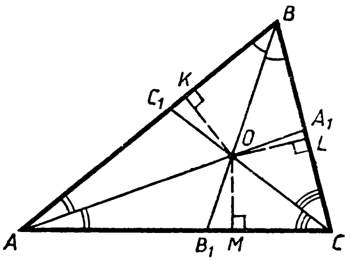


Рис. 225

Следовательно, все три биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке O, что и требовалось доказать.

Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, проходящая через середину отрезка и перпендикулярная к нему.

На рисунке 226 прямая a — серединный перпендикуляр к отрезку AB.

Докажем теорему о серединном перпендикуляре к отрезку.

Теорема. ***Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка. Обратно: каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.***

Доказательство. Пусть прямая m — серединный перпендикуляр к отрезку AB, точка O — середина отрезка (рис. 227, *а*).

1) Рассмотрим произвольную точку M прямой m и докажем, что $AM = BM$. Если точка M совпадает с точкой O, то это равенство верно, так как O — середина отрезка AB. Пусть M и O — различные точки. Прямоугольные треугольники OAM и OBM равны по двум катетам ($OA = OB$, OM — общий катет), поэтому $AM = BM$.

2) Рассмотрим произвольную точку N, равноудаленную от концов отрезка AB, и докажем, что точка N лежит на прямой m. Если N — точка прямой AB, то она совпадает с серединой O отрезка AB и потому лежит на прямой m. Если точка

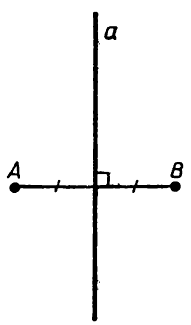


Рис. 226

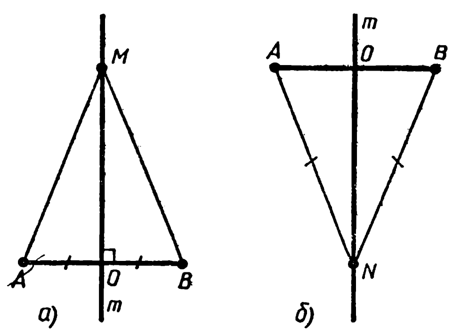


Рис. 227

N не лежит на прямой AB, то рассмотрим треугольник ANB, который равнобедренный, так как $AN = BN$ (рис. 227, *б*). Отрезок NO — медиана этого треугольника, а следовательно, и высота. Таким образом, $NO \perp AB$, поэтому прямые ON и m совпадают, и, значит, N — точка прямой m. Теорема доказана.

Следствие. *Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.*

В самом деле, обозначим буквой O точку пересечения серединных перпендикуляров m и n к сторонам AB и BC треугольника ABC (рис. 228). По доказанной теореме $OB = OA$ и $OB = OC$. Поэтому $OA = OC$, т. е. точка O равноудалена от концов отрезка AC и, значит, лежит на серединном перпендикуляре p к этому отрезку. Следовательно, все три серединных перпендикуляра m, n и p к сторонам треугольника ABC пересекаются в точке O.

73. Теорема о пересечении высот треугольника. Мы доказали, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке и также серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке. Ранее было доказано, что медианы треугольника пересекаются в одной точке (п. 62). Оказывается, аналогичным свойством обладают и высоты треугольника.

Теорема. ***Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.***

Доказательство. Рассмотрим произвольный треугольник ABC и докажем, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1, содержащие его высоты, пересекаются в одной точке (рис. 229). Проведем через каждую вершину треугольника ABC прямую, параллельную противоположной стороне. Получим треугольник $A_2B_2C_2$. Точки A,

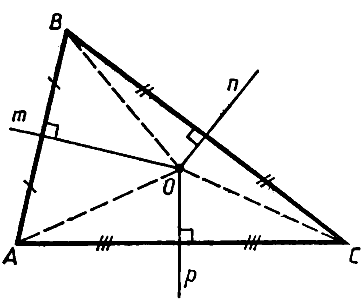


Рис. 228

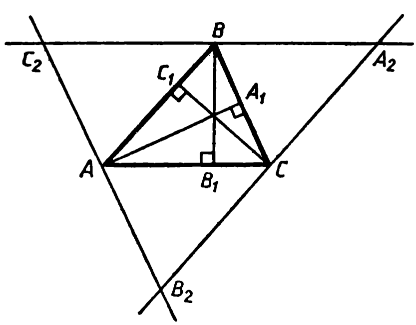


Рис. 229

B и C являются серединами сторон этого треугольника. Действительно, $AB = A_2C$ и $AB = CB_2$ как противоположные стороны параллелограммов ABA_2C и $ABCB_2$, поэтому $A_2C = CB_2$. Аналогично $C_2A = AB_2$ и $C_2B = BA_2$. Кроме того, как следует из построения, $CC_1 \perp A_2B_2$, $AA_1 \perp B_2C_2$ и $BB_1 \perp A_2C_2$. Таким образом, прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника $A_2B_2C_2$. Следовательно, они пересекаются в одной точке. Теорема доказана.

Итак, с каждым треугольником связаны четыре точки: точка пересечения медиан, точка пересечения биссектрис, точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам и точка пересечения высот (или их продолжений). Эти четыре точки называются *замечательными точками треугольника.*

Задачи

674. Из точки M биссектрисы неразвернутого угла O проведены перпендикуляры MA и MB к сторонам этого угла. Докажите, что $AB \perp OM$.

675. Стороны угла O касаются каждой из двух окружностей, имеющих общую касательную в точке A. Докажите, что центры этих окружностей лежат на прямой OA.

676. Стороны угла A касаются окружности с центром O радиуса r. Найдите: а) OA, если $r = 5$ см, $\angle A = 60°$; б) r, если $OA = 14$ дм, $\angle A = 90°$.

677. Биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC пересекаются в точке O. Докажите, что точка O является центром окружности, касающейся прямых AB, BC, AC.

678. Биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите углы ACM и BCM, если: а) $\angle AMB = 136°$; б) $\angle AMB = 111°$.

679. Серединный перпендикуляр к стороне BC треугольника ABC пересекает сторону AC в точке D. Найдите: а) AD и CD, если $BD = 5$ см, $AC = 8{,}5$ см; б) AC, если $BD = 11{,}4$ см, $AD = 3{,}2$ см.

680. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и AC треугольника ABC пересекаются в точке D стороны BC. Докажите, что: а) D — середина стороны BC; б) $\angle A = \angle B + \angle C$.

681. Серединный перпендикуляр к стороне AB равнобедренного треугольника ABC пересекает сторону BC в точке E. Найдите основание AC треугольника, если периметр треугольника AEC равен 27 см, а $AB=18$ см.

682. Равнобедренные треугольники ABC и ABD имеют общее основание AB. Докажите, что прямая CD проходит через середину отрезка AB.

683. Докажите, что если в треугольнике ABC стороны AB и AC не равны, то медиана AM треугольника не является высотой.

684. Биссектрисы углов при основании AB равнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке M. Докажите, что прямая CM перпендикулярна к прямой AB.

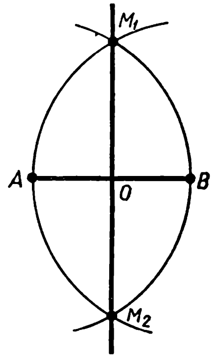


Рис. 230

685. Высоты AA_1 и BB_1 равнобедренного треугольника ABC, проведенные к боковым сторонам, пересекаются в точке M. Докажите, что прямая MC — серединный перпендикуляр к отрезку AB.

686. Постройте серединный перпендикуляр к данному отрезку. Решение. Пусть AB — данный отрезок. Построим две окружности с центрами в точках A и B радиуса AB (рис. 230). Эти окружности пересекаются в двух точках M_1 и M_2. Отрезки AM_1, AM_2, BM_1, BM_2 равны друг другу как радиусы этих окружностей.

Проведем прямую M_1M_2. Она является искомым серединным перпендикуляром к отрезку AB. В самом деле, точки M_1 и M_2 равноудалены от концов отрезка AB, поэтому они лежат на серединном перпендикуляре к этому отрезку. Значит, прямая M_1M_2 и есть серединный перпендикуляр к отрезку AB.

687. Даны прямая a и две точки A и B, лежащие по одну сторону от прямой. На прямой a постройте точку M, равноудаленную от точек A и B.

688. Даны угол и отрезок. Постройте точку, лежащую внутри угла, равноудаленную от его сторон и равноудаленную от концов данного отрезка.

§ 4. ВПИСАННАЯ И ОПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТИ

74. Вписанная окружность. Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется *вписанной* в многоугольник, а многоугольник — *описанным* около этой окружности. На рисунке 231 четырехугольник $EFMN$ описан около окружности с центром O, а четырехугольник $DKMN$ не является описанным около этой окружности, так как сторона DK не касается окружности. На рисунке 232 треугольник ABC описан около окружности с центром O.

Докажем теорему об окружности, вписанной в треугольник.

Теорема. ***В любой треугольник можно вписать окружность.***

Доказательство. Рассмотрим произвольный треугольник ABC и обозначим буквой O точку пересечения его биссектрис. Проведем из точки O перпендикуляры OK, OL и OM соответственно к сторонам AB, BC и CA (см. рис. 232). Так как точка O равноудалена от сторон треугольника ABC, то $OK = OL = OM$. Поэтому окружность с центром O радиуса OK проходит через точки K, L и M. Стороны треугольника ABC касаются этой окружности в точках K, L, M, так как они перпендикулярны к радиусам OK, OL и OM. Значит, окружность с центром O радиуса OK является вписанной в треугольник ABC. Теорема доказана.

Замечания. 1) Отметим, что в треугольник *можно вписать только одну окружность*. В самом деле, допустим, что в треугольник можно вписать две окружности. Тогда центр каждой окружности равноудален от сторон треугольника и, значит, совпадает с точкой O пересечения биссектрис треугольника, а радиус равен расстоянию от точки O до сторон треугольника. Следовательно, эти окружности совпадают.

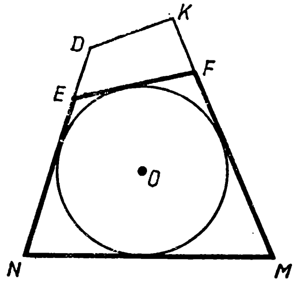


Рис. 231

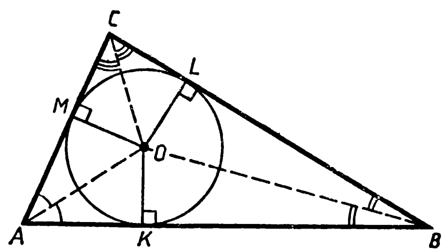
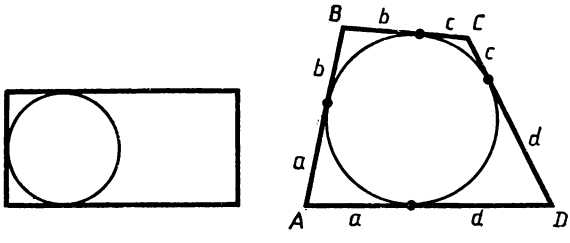


Рис. 232



а)   б)

Рис. 233

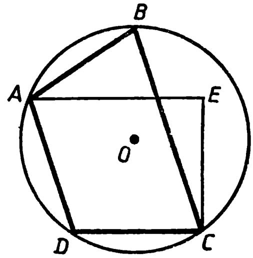


Рис. 234

2) В отличие от треугольника не во всякий четырехугольник можно вписать окружность. Рассмотрим, например, прямоугольник, у которого смежные стороны не равны, т. е. прямоугольник, не являющийся квадратом. Ясно, что в такой прямоугольник можно «поместить» окружность, касающуюся трех его сторон (рис. 233, *а*), но нельзя «поместить» окружность так, чтобы она касалась всех четырех его сторон, т. е. нельзя вписать окружность. Если же в четырехугольник можно вписать окружность, то его стороны обладают следующим замечательным свойством:

В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.

Это свойство легко установить, используя рисунок 233, *б*, на котором одними и теми же буквами обозначены равные отрезки касательных. В самом деле, $AB+CD=a+b+c+d$, $BC+AD=$ $=a+b+c+d$, поэтому $AB+CD=BC+AD$.

Оказывается, верно и обратное утверждение: если суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность (см. задачу 724).

75. Описанная окружность. Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называется *описанной* около многоугольника, а многоугольник — *вписанным* в эту окружность. На рисунке 234 четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O, а четырехугольник $AECD$ не является вписанным в эту окружность, так как вершина E не лежит на окружности. Треугольник ABC на рисунке 235 вписан в окружность с центром O.

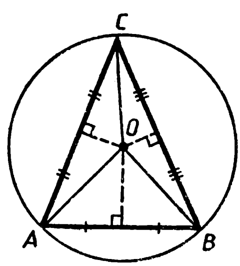


Рис. 235

Докажем теорему об окружности, описанной около треугольника.

Теорема. ***Около любого треугольника можно описать окружность.***

Доказательство. Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Обозначим буквой O точку пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам и проведем отрезки OA, OB и OC (рис. 235). Так как точка O равноудалена от вершин треугольника ABC, то $OA=OB=OC$. Поэтому окружность с центром O радиуса OA проходит через все три вершины треугольника и, значит, является описанной около треугольника ABC. Теорема доказана.

Замечания. 1) Отметим, что около треугольника можно описать только одну окружность. В самом деле, допустим, что около треугольника можно описать две окружности. Тогда центр каждой из них равноудален от его вершин и поэтому совпадает с точкой O пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, а радиус равен расстоянию от точки O до вершин треугольника. Следовательно, эти окружности совпадают.

2) В отличие от треугольника около четырехугольника не всегда можно описать окружность. Например, нельзя описать окружность около ромба, не являющегося квадратом (объясните почему). Если же около четырехугольника можно описать окружность, то его углы обладают следующим замечательным свойством: *В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180°.*

Это свойство легко установить, если обратиться к рисунку 236 и воспользоваться теоремой о вписанном угле. В самом деле,

$$\angle A=\frac{1}{2}\smile BCD,\ \angle C=\frac{1}{2}\smile BAD,$$

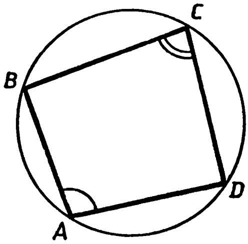


Рис. 236

поэтому

$$\angle A+\angle C=\frac{1}{2}(\smile BCD+\smile BAD)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 360°=180°.$$

Оказывается, верно и обратное: *если сумма противоположных углов четырех-*

угольника равна 180°, то около него можно описать окружность (см. задачу 729).

Задачи

689. В равнобедренном треугольнике основание равно 10 см, а боковая сторона равна 13 см. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

690. Найдите основание равнобедренного треугольника, если центр вписанной в него окружности делит высоту, проведенную к основанию, в отношении 12:5, считая от вершины, а боковая сторона равна 60 см.

691. Точка касания окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, делит одну из боковых сторон на отрезки, равные 3 см и 4 см, считая от основания. Найдите периметр треугольника.

692. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон AB, BC и AC в точках P, Q и R. Найдите AP, PB, BQ, QC, CR, RA, если $AB = 10$ см, $BC = 12$ см, $CA = 5$ см.

693. В прямоугольный треугольник вписана окружность радиуса r. Найдите периметр треугольника, если: а) гипотенуза равна 26 см, $r = 4$ см; б) точка касания делит гипотенузу на отрезки, равные 5 см и 12 см.

694. Найдите диаметр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, если гипотенуза треугольника равна c, а сумма катетов равна m.

695. Сумма двух противоположных сторон описанного четырехугольника равна 15 см. Найдите периметр этого четырехугольника.

696. Докажите, что если в параллелограмм можно вписать окружность, то этот параллелограмм — ромб.

697. Докажите, что площадь описанного многоугольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности.

698. Сумма двух противоположных сторон описанного четырехугольника равна 12 см, а радиус вписанной в него окружности равен 5 см. Найдите площадь четырехугольника.

699. Сумма двух противоположных сторон описанного четырехугольника равна 10 см, а его площадь — 12 см^2. Найдите радиус окружности, вписанной в этот четырехугольник.

700. Докажите, что в любой ромб можно вписать окружность.

701. Начертите три треугольника: остроугольный, прямоугольный и тупоугольный. В каждый из них впишите окружность.

702. В окружность вписан треугольник ABC так, что AB — диаметр окружности. Найдите углы треугольника, если: а) $\smile BC=134°$; б) $\smile AC=70°$.

703. В окружность вписан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC. Найдите углы треугольника, если $\smile BC=$ $=102°$.

704. Окружность с центром O описана около прямоугольного треугольника. а) Докажите, что точка O — середина гипотенузы. б) Найдите стороны треугольника, если диаметр окружности равен d, а один из острых углов треугольника равен α.

705. Около прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C описана окружность. Найдите радиус этой окружности, если: а) $AC=8$ см, $BC=6$ см; б) $AC=18$ см, $\angle B=30°$.

706. Найдите сторону равностороннего треугольника, если радиус описанной около него окружности равен 10 см.

707. Угол, противолежащий основанию равнобедренного треугольника, равен 120°, боковая сторона треугольника равна 8 см. Найдите диаметр окружности, описанной около этого треугольника.

708. Докажите, что можно описать окружность: а) около любого прямоугольника; б) около любой равнобедренной трапеции.

709. Докажите, что если около параллелограмма можно описать окружность, то этот параллелограмм — прямоугольник.

710. Докажите, что если около трапеции можно описать окружность, то эта трапеция равнобедренная.

711. Начертите три треугольника: тупоугольный, прямоугольный и равносторонний. Для каждого из них постройте описанную окружность.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ VIII

1. Исследуйте взаимное расположение прямой и окружности в зависимости от соотношения между радиусом окружности и расстоянием от ее центра до прямой. Сформулируйте полученные выводы.

2. Какая прямая называется секущей по отношению к окружности?
3. Какая прямая называется касательной к окружности? Какая точка называется точкой касания прямой и окружности?
4. Сформулируйте и докажите теорему о свойстве касательной.
5. Докажите, что отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.
6. Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме о свойстве касательной.
7. Объясните, как через данную точку окружности провести касательную к этой окружности.
8. Какой угол называется центральным углом окружности?
9. Объясните, какая дуга называется полуокружностью, какая дуга меньше полуокружности, а какая больше полуокружности.
10. Как определяется градусная мера дуги? Как она обозначается?
11. Какой угол называется вписанным? Сформулируйте и докажите теорему о вписанном угле.
12. Докажите, что вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.
13. Докажите, что вписанный угол, опирающийся на полуокружность,— прямой.
14. Сформулируйте и докажите теорему об отрезках пересекающихся хорд.
15. Сформулируйте и докажите теорему о биссектрисе угла.
16. Докажите, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.
17. Какая прямая называется серединным перпендикуляром к отрезку?
18. Сформулируйте и докажите теорему о серединном перпендикуляре к отрезку.
19. Докажите, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.
20. Сформулируйте и докажите теорему о пересечении высот треугольника.
21. Какая окружность называется вписанной в многоугольник? Какой многоугольник называется описанным около окружности?

22. Сформулируйте и докажите теорему об окружности, вписанной в треугольник. Сколько окружностей можно вписать в данный треугольник?
23. Каким свойством обладают стороны четырехугольника, описанного около окружности?
24. Какая окружность называется описанной около многоугольника? Какой многоугольник называется вписанным в окружность?
25. Сформулируйте и докажите теорему об окружности, описанной около треугольника. Сколько окружностей можно описать около данного треугольника?
26. Каким свойством обладают углы четырехугольника, вписанного в окружность?

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

712. Докажите, что касательные, проведенные через концы хорды, не являющейся диаметром окружности, пересекаются.

713. Прямые AB и AC — касательные к окружности с центром O, B и C — точки касания. Через произвольную точку X, взятую на дуге BC, проведена касательная к этой окружности, пересекающая отрезки AB и AC в точках M и N. Докажите, что периметр треугольника AMN и угол MON не зависят от выбора точки X на дуге BC.

714.* Две окружности имеют общую точку M и общую касательную в этой точке. Прямая AB касается одной окружности в точке A, а другой — в точке B. Докажите, что точка M лежит на окружности с диаметром AB.

715. Диаметр AA_1 окружности перпендикулярен к хорде BB_1. Докажите, что градусные меры дуг AB и AB_1, меньших полуокружности, равны.

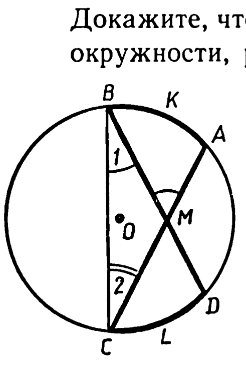


Рис. 237

716. Точки A, B, C и D лежат на окружности. Докажите, что если $\smile AB = \smile CD$, то $AB = CD$.

717. Отрезок AB является диаметром окружности, а хорды BC и AD параллельны. Докажите, что хорда CD является диаметром.

718. По рисунку 237 докажите, что $\angle AMB = \frac{1}{2}(\smile CLD + \smile AKB)$.

Решение. Проведем хорду BC. Так как $\angle AMB$ — внешний угол треугольника BMC, то $\angle AMB = \angle 1 + \angle 2$. По теореме о вписанном угле $\angle 1 = \frac{1}{2} \smile CLD$, $\angle 2 = \frac{1}{2} \smile AKB$, поэтому

$$\angle AMB = \frac{1}{2}(\smile CLD + \smile AKB).$$

719. Через точку, лежащую вне окружности, проведены две секущие. Докажите, что угол между ними измеряется полуразностью дуг, заключенных внутри угла.

720. Может ли вершина разностороннего треугольника лежать на серединном перпендикуляре к какой-либо стороне? Ответ обоснуйте.

721. Докажите, что если в прямоугольник можно вписать окружность, то этот прямоугольник — квадрат.

722. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности радиуса r. Известно, что $AB:CD = 2:3$, $AD:BC = 2:1$. Найдите стороны четырехугольника, если его площадь равна S.

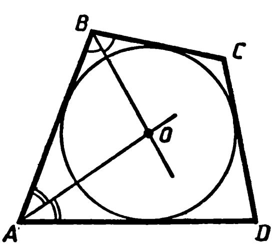
723. Докажите, что если прямые, содержащие основания трапеции, касаются окружности и точки касания принадлежат основаниям, то средняя линия трапеции проходит через центр окружности.

724. Докажите, что если в выпуклом четырехугольнике суммы противоположных сторон равны, то в этот четырехугольник можно вписать окружность.

Решение. Пусть в выпуклом четырехугольнике $ABCD$

$$AB + CD = BC + AD. \qquad (1)$$

Точка O пересечения биссектрис углов A и B равноудалена от сторон AD, AB и BC, поэтому можно провести окружность с центром O, касающуюся указанных трех сторон (рис. 238, *а*). Докажем, что эта окружность касается также



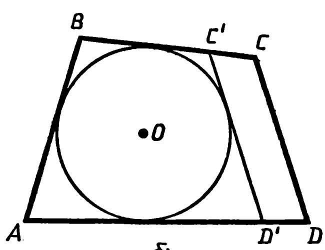


Рис. 238

стороны CD и, значит, является вписанной в четырехугольник $ABCD$.

Предположим, что это не так. Тогда прямая CD либо не имеет общих точек с окружностью, либо является секущей. Рассмотрим первый случай (рис. 238, *б*). Проведем касательную $C'D'$, параллельную стороне CD (C' и D' — точки пересечения касательной со сторонами BC и AD). Так как $ABC'D'$ — описанный четырехугольник, то по свойству его сторон

$$AB + C'D' = BC' + AD'. \qquad (2)$$

Но $BC' = BC - C'C$, $AD' = AD - D'D$, поэтому из равенства (2) получаем:

$$C'D' + C'C + D'D = BC + AD - AB.$$

Правая часть этого равенства в силу (1) равна CD. Таким образом, приходим к равенству

$$C'D' + C'C + D'D = CD,$$

т. е. в четырехугольнике $C'CDD'$ одна сторона равна сумме трех других сторон. Но этого не может быть, и, значит, наше предположение неверно. Аналогично можно доказать, что прямая CD не может быть секущей окружности. Следовательно, окружность касается стороны CD, что и требовалось доказать.

725. Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольную трапецию с основаниями a и b.

726. Центр описанной около треугольника окружности лежит на медиане. Докажите, что этот треугольник либо равнобедренный, либо прямоугольный.

727. В равнобедренный треугольник вписана окружность с центром O_1 и около него описана окружность с центром O_2. Докажите, что точки O_1 и O_2 лежат на серединном перпендикуляре к основанию треугольника.

728. Докажите, что если около ромба можно описать окружность, то этот ромб — квадрат.

729*. Докажите, что если в четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180°, то около этого четырехугольника можно описать окружность.

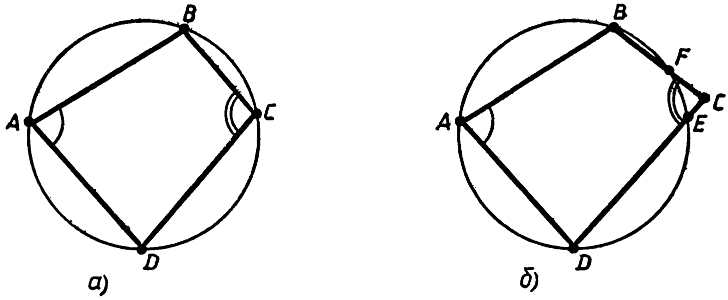


Рис. 239

Решение. Пусть в четырехугольнике $ABCD$

$$\angle A + \angle C = 180^\circ. \qquad (1)$$

Проведем окружность через три вершины четырехугольника: A, B и D (рис. 239, *а*) — и докажем, что она проходит также через вершину C, т. е. является описанной около четырехугольника $ABCD$. Предположим, что это не так. Тогда вершина C лежит либо вне круга, либо внутри него. Рассмотрим первый случай (рис. 239, *б*). В этом случае $\angle C = \frac{1}{2}(\smile DAB - \smile EF)$ (задача 719), и, следовательно, $\angle C < \frac{1}{2} \smile DAB$. Так как $\angle A = \frac{1}{2} \smile BED$, то $\angle A + \angle C < \frac{1}{2}(\smile BED + \smile DAB) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$. Итак, мы получили, что $\angle A + \angle C < 180^\circ$. Но это противоречит условию (1), и, значит, наше предположение неверно. Аналогично можно доказать (опираясь на задачу 718), что вершина C не может лежать внутри круга. Следовательно, вершина C лежит на окружности, что и требовалось доказать.

730. Через точки A и B проведены прямые, перпендикулярные к сторонам угла AOB и пересекающиеся в точке C внутри угла. Докажите, что около четырехугольника $ACBO$ можно описать окружность.

731. Докажите, что около выпуклого четырехугольника $ABCD$, образованного при пересечении биссектрис углов трапеции, можно описать окружность.

732. В прямоугольном треугольнике ABC из точки M стороны AC проведен перпендикуляр MH к гипотенузе AB. Докажите, что углы MHC и MBC равны.

733. Найдите радиус вписанной в равносторонний треугольник окружности, если радиус описанной окружности равен 10 см.

734. Докажите, что если в параллелограмм можно вписать окружность и можно описать около него окружность, то этот параллелограмм — квадрат.

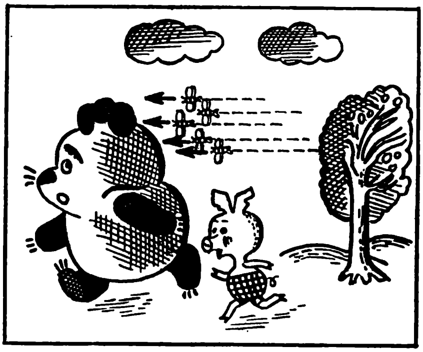
735. В трапецию с основаниями a и b можно вписать окружность и около этой трапеции можно описать окружность. Найдите радиус вписанной окружности.

736. Даны прямая a, точка A, лежащая на этой прямой, и точка B, не лежащая на ней. Постройте окружность, проходящую через точку B и касающуюся прямой a в точке A.

737. Даны две параллельные прямые и точка, не лежащая ни на одной из них. Постройте окружность, проходящую через данную точку и касающуюся данных прямых.

Глава IX

ВЕКТОРЫ



§ 1. ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА

76. Понятие вектора. Многие физические величины, например сила, перемещение материальной точки, скорость, характеризуются не только своим числовым значением, но и направлением в пространстве. Такие физические величины называются *векторными величинами* (или коротко *векторами*).

Рассмотрим пример. Пусть на тело действует сила в 8Н. На рисунке силу изображают отрезком со стрелкой (рис. 240). Стрелка указывает направление силы, а длина отрезка соответствует в выбранном масштабе числовому значению силы. Так, на рисунке 240 сила в 1Н изображена отрезком длиной 0,4 см, поэтому сила в 8Н изображена отрезком длиной 3,2 см.

Отвлекаясь от конкретных свойств физических векторных величин, мы приходим к геометрическому понятию вектора.

Рассмотрим произвольный отрезок. На нем можно указать два направления: от одного конца к другому и наоборот (рис. 241). Чтобы выбрать одно из направлений, один конец отрезка назовем *началом*, а другой — *концом* и будем считать, что отрезок направлен от начала к концу.

Определение. *Отрезок, для которого указано, какой из*

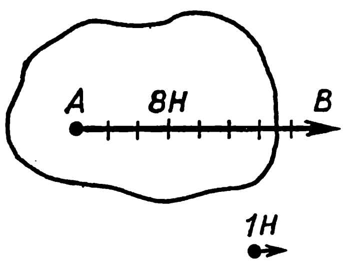


Рис. 240

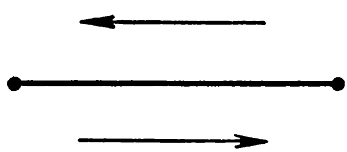


Рис. 241

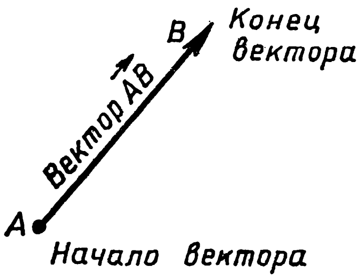


Рис. 242

его концов считается началом, а какой — концом, называется направленным отрезком или вектором.

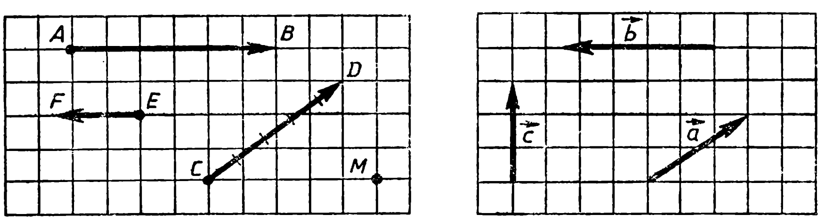
На рисунках вектор изображается отрезком со стрелкой, показывающей направление вектора. Векторы обозначают двумя заглавными латинскими буквами со стрелкой над ними, например $\overrightarrow{AB}$. Первая буква обозначает начало вектора, вторая — конец (рис. 242).

На рисунке 243, *а* изображены векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$; точки A, C, E — начала данных векторов, а B, D, F — их концы. Векторы часто обозначают и одной строчной латинской буквой со стрелкой над ней: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (рис. 243, *б*).

Для дальнейшего целесообразно условиться, что любая точка плоскости также является вектором. В этом случае вектор называется *нулевым*. Начало нулевого вектора совпадает с его концом, на рисунке такой вектор изображается одной точкой. Если, например, точка, изображающая нулевой вектор, обозначена буквой M, то данный нулевой вектор можно обозначить $\overrightarrow{MM}$ (рис. 243, *а*). Нулевой вектор обозначается также символом $\vec{0}$. На рисунке 243 векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ ненулевые, а вектор $\overrightarrow{MM}$ нулевой.

Длиной или *модулем* ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB. Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ (вектора $\vec{a}$) обозначается так: $|\overrightarrow{AB}|$ ($|\vec{a}|$). Длина нулевого вектора считается равной нулю: $|\vec{0}|=0$.

Длины векторов, изображенных на рисунках 243, *а* и 243, *б*,



а) б)

Рис. 243

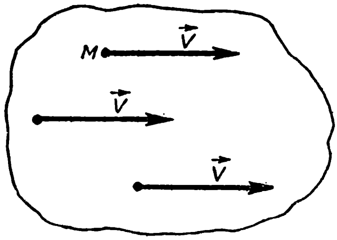


Рис. 244

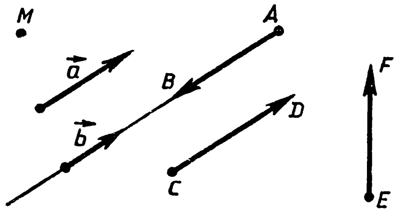


Рис. 245

таковы: $|\overrightarrow{AB}|=6$, $|\overrightarrow{CD}|=5$, $|\overrightarrow{EF}|=2{,}5$, $|\overrightarrow{MM}|=0$, $|\vec{a}|=\sqrt{13}$, $|\vec{b}|=4{,}5$, $|\vec{c}|=3$ (каждая клетка на рисунке имеет сторону, равную единице измерения отрезков).

77. Равенство векторов. Прежде чем дать определение равных векторов, обратимся к примеру. Рассмотрим движение тела, при котором все его точки движутся с одной и той же скоростью и в одном и том же направлении. Скорость каждой точки M тела является векторной величиной, поэтому ее можно изобразить направленным отрезком, начало которого совпадает с точкой M (рис. 244). Так как все точки тела движутся с одной и той же скоростью, то все направленные отрезки, изображающие скорости этих точек, имеют одно и то же направление и длины их равны.

Этот пример подсказывает нам, как определить равенство векторов. Предварительно введем понятие коллинеарных векторов.

Ненулевые векторы называются коллинеарными, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых; нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

На рисунке 245 векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{MM}$ (вектор $\overrightarrow{MM}$ нулевой) коллинеарны, а векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{EF}$, а также $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF}$ не коллинеарны.

Если два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то они могут быть направлены либо одинаково, либо противоположно. В первом случае векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *сонаправленными*, а во втором — *противоположно направленными*[1]. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправ-

[1] Нетрудно дать и точное определение этих понятий. Например, два ненулевых вектора, лежащие на параллельных прямых, называются сонаправленными (противоположно направленными), если их концы лежат по одну сторону (по разные стороны) от прямой, проходящей через начала. Как сформулировать аналогичное определение для ненулевых векторов, лежащих на одной прямой?

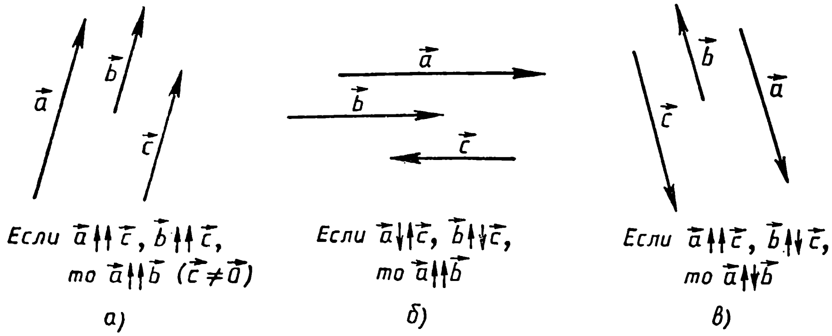


Рис. 246

лены, то пишут: $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, а если они противоположно направлены, пишут: $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$. На рисунке 245 $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, $\vec{a}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CD}$, $\vec{a}\uparrow\downarrow\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CD}$, $\vec{b}\uparrow\downarrow\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CD}$.

Начало нулевого вектора совпадает с его концом, поэтому нулевой вектор не имеет какого-либо определенного направления. Иначе говоря, любое направление можно считать направлением нулевого вектора. Условимся считать, что нулевой вектор сонаправлен с любым вектором. Таким образом, на рисунке 245 $\overrightarrow{MM}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MM}\uparrow\uparrow\vec{a}$ и т. д.

Ненулевые коллинеарные векторы обладают свойствами, которые проиллюстрированы на рисунке 246, *а, б, в*.

Дадим теперь определение равных векторов.

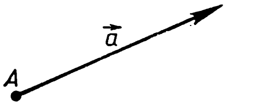
Определение. *Векторы называются равными, если они сонаправлены и их длины равны.*

Таким образом, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны, если $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ и $|\vec{a}|=|\vec{b}|$. Равенство векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a}=\vec{b}$.

78. Откладывание вектора от данной точки. Если точка A — начало вектора $\vec{a}$, то говорят, что *вектор $\vec{a}$ отложен от точки A* (рис. 247). Докажем следующее утверждение:

От любой точки M можно отложить вектор, равный данному вектору $\vec{a}$, и притом только один.

В самом деле, если $\vec{a}$ — нулевой вектор, то искомым вектором является вектор $\overrightarrow{MM}$. Допустим, что вектор $\vec{a}$ ненулевой, а точки A и B — его начало и конец. Проведем через точку M прямую p, параллельную AB (рис. 248) (если M — точка прямой AB, то в



Вектор $\vec{a}$ отложен от точки A

Рис. 247

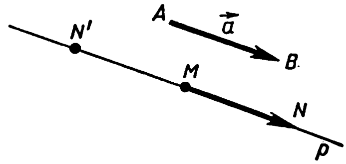


Рис. 248

качестве прямой p возьмем саму прямую AB). На прямой p отложим отрезки MN и MN', равные отрезку AB, и выберем из векторов $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{MN'}$ тот, который сонаправлен с вектором $\vec{a}$ (на рисунке 248 вектор $\overrightarrow{MN}$). Этот вектор и является искомым вектором, равным вектору $\vec{a}$. Из построения следует, что такой вектор только один.

З а м е ч а н и е. Равные векторы, отложенные от разных точек, часто обозначают одной и той же буквой. Так обозначены, например, равные векторы скорости различных точек на рисунке 244. Иногда про такие векторы говорят, что это один и тот же вектор, но отложенный от разных точек.

Практические задания

738. Отметьте три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Начертите все ненулевые векторы, начало и конец которых совпадают с какими-то двумя из этих точек. Выпишите все полученные векторы и укажите начало и конец каждого вектора.

739. Выбрав подходящий масштаб, начертите векторы, изображающие полет самолета сначала на 300 км на юг от города A до B, а потом на 500 км на восток от города B до C. Затем начертите вектор $\overrightarrow{AC}$, который изображает перемещение из начальной точки полета в конечную.

740. Начертите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF}$ так, чтобы: а) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF}$ были коллинеарны и $|\overrightarrow{AB}|=1$ см, $|\overrightarrow{CD}|=2{,}5$ см, $|\overrightarrow{EF}|=4{,}5$ см; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{EF}$ были коллинеарны, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ были не коллинеарны и $|\overrightarrow{AB}|=3$ см, $|\overrightarrow{CD}|=1{,}5$ см, $|\overrightarrow{EF}|=$ $=1$ см.

741. Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Изобразите несколько векторов: а) сонаправленных с вектором $\vec{a}$; б) сонаправленных с вектором $\vec{b}$; в) противоположно направленных вектору $\vec{b}$; г) противоположно направленных вектору $\vec{a}$.

742. Начертите два вектора: а) имеющие равные длины и неколлинеарные; б) имеющие равные длины и сонаправленные; в) имеющие равные длины и противоположно направленные. В каком случае полученные векторы равны?

743. Начертите ненулевой вектор $\vec{a}$ и отметьте на плоскости три точки A, B и C. Отложите от точек A, B и C векторы, равные $\vec{a}$.

Вопросы и задачи

744. Какие из следующих величин являются векторными: скорость, масса, сила, время, температура, длина, площадь, работа?

745. В прямоугольнике $ABCD$ $AB=3$ см, $BC=4$ см, M — середина стороны AB. Найдите длины векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC}$.

746. Основание AD прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом A равно 12 см, $AB=5$ см, $\angle D=45°$. Найдите длины векторов $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AC}$.

747. Выпишите пары коллинеарных векторов, которые определяются сторонами: а) параллелограмма $MNPQ$; б) трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC; в) треугольника FGH. Укажите среди них пары сонаправленных и противоположно направленных векторов.

748. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Равны ли векторы: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$; в) $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{OC}$; г) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$? Ответ обоснуйте.

749. Точки S и T являются серединами боковых сторон MN и LK равнобедренной трапеции $MNLK$. Равны ли векторы: а) $\overrightarrow{NL}$ и $\overrightarrow{KL}$; б) $\overrightarrow{MS}$ и $\overrightarrow{SN}$; в) $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{KL}$; г) $\overrightarrow{TS}$ и $\overrightarrow{KM}$; д) $\overrightarrow{TL}$ и $\overrightarrow{KT}$?

750. Докажите, что если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны, то середины отрезков AD и BC совпадают. Докажите обратное утверждение: если середины отрезков AD и BC совпадают, то $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

751. Определите вид четырехугольника $ABCD$, если: а) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ и $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|$; б) $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{DC}$, а векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ не коллинеарны.

752. Верно ли утверждение: а) если $\vec{a}=\vec{b}$, то $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$; б) если $\vec{a}=\vec{b}$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны; в) если $\vec{a}=\vec{b}$, то $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$; г) если $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, то $\vec{a}=\vec{b}$; д) если $\vec{a}=\vec{0}$, то $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$?

§ 2. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ

79. Сумма двух векторов. Рассмотрим пример. Пусть материальная точка переместилась из точки A в точку B, а затем из точки B в точку C (рис. 249). В результате этих двух перемещений, которые можно представить векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, материальная точка переместилась из точки A в точку C. Поэтому результирующее перемещение можно представить вектором $\overrightarrow{AC}$. Поскольку перемещение из точки A в точку C складывается из перемещения из A в B и перемещения из B в C, то вектор $\overrightarrow{AC}$ естественно назвать суммой векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

Рассмотренный пример приводит нас к понятию суммы двух векторов. *Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два вектора. Отметим произвольную точку A и отложим от этой точки вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$* (рис. 250). *Затем от точки B отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.*

Это правило сложения векторов называется *правилом треугольника.* Рисунок 250 поясняет это название.

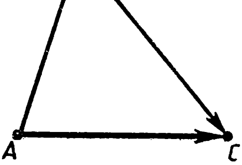


Рис. 249

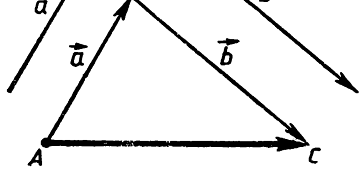


Рис. 250

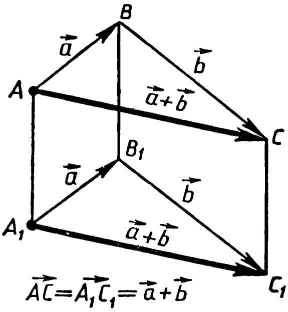


Рис. 251

Докажем, что если при сложении векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ точку A, от которой откладывается вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, заменить другой точкой A_1, то вектор $\overrightarrow{AC}$ заменится равным ему вектором $\overrightarrow{A_1C_1}$. Иными словами, докажем, что если $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B_1C_1}$, то $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}$ (рис. 251).

Допустим, что точки A, B, A_1, точки B, C, B_1 и точки A, C, A_1 не лежат на одной прямой (остальные случаи рассмотрите самостоятельно). Из равенства $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$ следует, что стороны AB и A_1B_1 четырехугольника ABB_1A_1 равны и параллельны, поэтому этот четырехугольник — параллелограмм. Следовательно, $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BB_1}$. Аналогично из равенства $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B_1C_1}$ следует, что четырехугольник BCC_1B_1 — параллелограмм. Поэтому $\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{CC_1}$. На основе полученных равенств заключаем, что $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{CC_1}$. Поэтому AA_1C_1C — параллелограмм, и, значит, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}$, что и требовалось доказать.

Сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a}+\vec{b}$.

Складывая по правилу треугольника произвольный вектор $\vec{a}$ с нулевым вектором, приходим к выводу, что *для любого вектора $\vec{a}$ справедливо равенство $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.*

Правило треугольника можно сформулировать также следующим образом: *если A, B и C — произвольные точки, то* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. Подчеркнем, что это равенство справедливо для произвольных точек A, B и C, в частности, в том случае, когда две из них или даже все три совпадают.

80. Законы сложения векторов. Правило параллелограмма.

Теорема. ***Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливы равенства:***

1^0. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ *(переместительный закон).*

2^0. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ *(сочетательный закон).*

Доказательство. 1^0. Рассмотрим случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны (случай коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ рассмот-

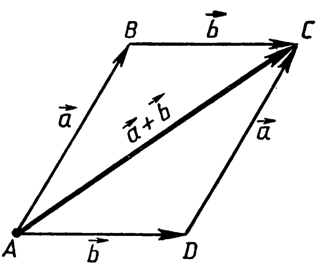


Рис. 252

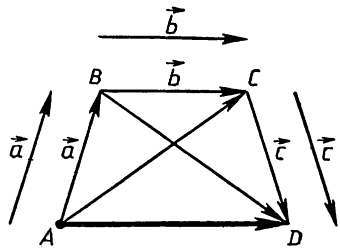


Рис. 253

рите самостоятельно). От произвольной точки A отложим векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ и на этих векторах построим параллелограмм $ABCD$, как показано на рисунке 252. По правилу треугольника $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b}$. Аналогично $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\vec{b}+\vec{a}$. Отсюда следует, что $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

2^0. От произвольной точки A отложим вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, от точки B — вектор $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, а от точки C — вектор $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$ (рис. 253). Применяя правило треугольника, получим:

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD},$$
$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}.$$

Отсюда следует, что $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$. Теорема доказана.

При доказательстве свойства 1^0 мы обосновали так называемое *правило параллелограмма* сложения неколлинеарных векторов: чтобы сложить неколлинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, нужно отложить от какой-нибудь точки A векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ и построить параллелограмм $ABCD$ (см. рис. 252). Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ равен $\vec{a}+\vec{b}$. Правило параллелограмма часто используется в физике, например при сложении двух сил.

81. Сумма нескольких векторов. Сложение нескольких векторов производится следующим образом: первый вектор складывается со вторым, затем их сумма складывается с третьим вектором и т. д. Из закона сложения векторов следует, что сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком порядке они складываются. На рисунке 253 показано построение суммы векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: от произвольной точки A отложен вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, затем от точки B отложен вектор $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ и, наконец, от точки C отложен

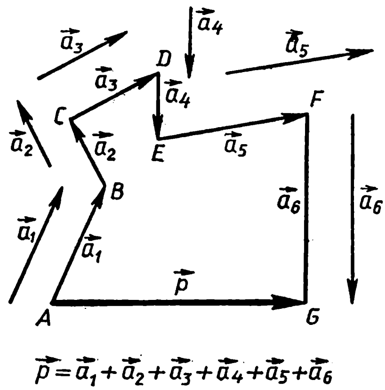


Рис. 254

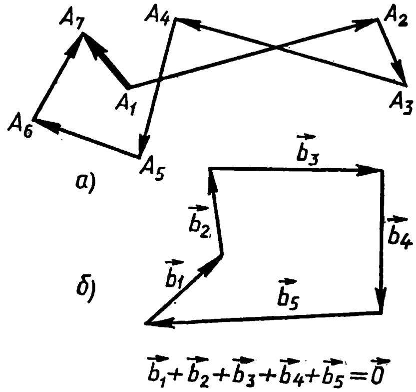


Рис. 255

вектор $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$. В результате получается вектор $\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. Аналогично можно построить сумму четырех, пяти и вообще любого числа векторов. На рисунке 254 показано построение суммы шести векторов. Это правило построения суммы нескольких векторов называется *правилом многоугольника*. Рисунок 254 поясняет название.

Правило многоугольника можно сформулировать также следующим образом: если $A_1, A_2, ..., A_n$ — произвольные точки плоскости, то $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+...+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}$ (на рисунке 255, *а* $n=7$). Это равенство справедливо для любых точек $A_1, A_2, ..., A_n$, в частности, в том случае, когда некоторые из них совпадают. Например, если начало первого вектора совпадает с концом последнего вектора, то сумма данных векторов равна нулевому вектору (рис. 255, *б*).

82. Вычитание векторов. *Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.*

Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a}-\vec{b}$.

Рассмотрим задачу о построении разности двух векторов.

Задача. *Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Построить вектор $\vec{a}-\vec{b}$.*

Решение. Отметим на плоскости произвольную точку O и отложим от этой точки векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ (рис. 256). По правилу треугольника $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$, или $\vec{b}+\overrightarrow{BA}=\vec{a}$. Таким образом, сумма векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$. По определе-

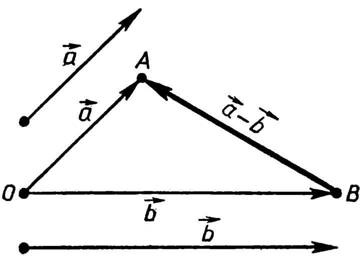


Рис. 256

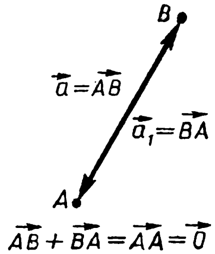


Рис. 257

нию разности векторов это означает, что $\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$, т. е. вектор $\overrightarrow{BA}$ искомый.

Задачу о построении разности двух векторов можно решить и другим способом. Прежде чем указать этот способ, введем понятие вектора, противоположного данному.

Пусть $\vec{a}$ — произвольный ненулевой вектор. Вектор $\vec{a}_1$ называется *противоположным* вектору $\vec{a}$, если векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}$ имеют равные длины и противоположно направлены. На рисунке 257 вектор $\vec{a}_1=\overrightarrow{BA}$ является противоположным вектору $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$. Вектором, противоположным нулевому вектору, считается нулевой вектор.

Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается так: $-\vec{a}$. Очевидно, $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Докажем теорему о разности векторов.

Теорема. ***Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо равенство $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.***

Доказательство. По определению разности векторов $(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}=\vec{a}$. Прибавив к обеим частям этого равенства вектор $(-\vec{b})$, получим:

$$(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}+(-\vec{b})=\vec{a}+(-\vec{b}),$$

или $(\vec{a}-\vec{b})+\vec{0}=\vec{a}+(-\vec{b})$,

откуда $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$. Теорема доказана.

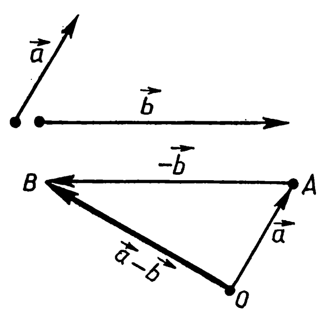


Рис. 258

Приведем теперь другое решение задачи о построении разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отметим на плоскости произвольную точку O и отложим от этой точки вектор $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ (рис. 258). Затем от точки A отложим вектор $\overrightarrow{AB}=-\vec{b}$.

По теореме о разности векторов $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$, поэтому $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$, т. е. вектор $\overrightarrow{OB}$ искомый.

Практические задания

753. Турист прошел 20 км на восток из города A в город B, а потом 30 км на восток в город C. Выбрав подходящий масштаб, начертите векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$. Равны ли векторы $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$?

754. Начертите попарно неколлинеарные векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ и постройте векторы $\vec{x}+\vec{y}$, $\vec{x}+\vec{z}$, $\vec{z}+\vec{y}$.

755. Начертите попарно неколлинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ и, пользуясь правилом многоугольника, постройте вектор $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}$.

756. Начертите попарно неколлинеарные векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ и постройте векторы $\vec{x}-\vec{y}$, $\vec{z}-\vec{y}$, $\vec{x}-\vec{z}$, $-\vec{x}$, $-\vec{y}$, $-\vec{z}$.

757. Начертите векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ так, чтобы $\vec{x}\uparrow\uparrow\vec{y}$, $\vec{x}\uparrow\downarrow\vec{z}$. Постройте векторы $\vec{x}+\vec{y}$, $\vec{y}-\vec{z}$, $\vec{x}+\vec{z}$.

758. Начертите два ненулевых коллинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ так, чтобы $|\vec{a}|\neq|\vec{b}|$. Постройте векторы: а) $\vec{a}-\vec{b}$; б) $\vec{b}-\vec{a}$; в) $-\vec{a}+\vec{b}$. Выполните еще раз построение для случая, когда $|\vec{a}|=|\vec{b}|$.

Вопросы и задачи

759. Дан произвольный четырехугольник $MNPQ$. Докажите, что: а) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PQ}$; б) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{QP}$.

760. Докажите, что для любых двух неколлинеарных векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ справедливо неравенство $|\vec{x}+\vec{y}|<|\vec{x}|+|\vec{y}|$.

761. Докажите, что если A, B, C и D — произвольные точки, то $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$.

762. Сторона равностороннего треугольника ABC равна a. Найдите: а) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|$; б) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$; в) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}|$; г) $|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}|$; д) $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$.

763. В треугольнике ABC $AB=6$, $BC=8$, $\angle B=90°$. Найдите: а) $|\overrightarrow{BA}|-|\overrightarrow{BC}|$ и $|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}|$; б) $|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|$ и $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|$; в) $|\overrightarrow{BA}|+|\overrightarrow{BC}|$ и $|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}|$; г) $|\overrightarrow{AB}|-|\overrightarrow{BC}|$ и $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}|$.

764. Пользуясь правилом многоугольника, упростите выражения:

а) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{MC})+(\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{KD})$;

б) $(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})-(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KD})$.

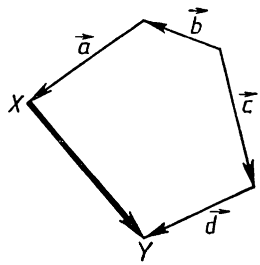


Рис. 259

765. Пусть X, Y и Z — произвольные точки. Докажите, что векторы $\vec{p}=\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{ZX}+\overrightarrow{YZ}$, $\vec{q}=(\overrightarrow{XY}-\overrightarrow{XZ})+\overrightarrow{YZ}$ и $\vec{r}=(\overrightarrow{ZY}-\overrightarrow{XY})-\overrightarrow{ZX}$ нулевые.

766. На рисунке 259 изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\overrightarrow{XY}$. Представьте вектор $\overrightarrow{XY}$ в виде суммы остальных или им противоположных векторов.

767. Дан треугольник ABC. Выразите через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ следующие векторы: а) $\overrightarrow{BA}$; б) $\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$.

Р е ш е н и е. а) Векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AB}$ — противоположные, поэтому $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$, или $\overrightarrow{BA}=-\vec{a}$. б) По правилу треугольника $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$. Но $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}$, поэтому $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+(-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\vec{a}-\vec{b}$.

768. Точки M и N — середины сторон AB и AC треугольника ABC. Выразите векторы $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BN}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AM}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AN}$.

769. Отрезок BB_1 — медиана треугольника ABC. Выразите векторы $\overrightarrow{B_1C}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ через $\vec{x}=\overrightarrow{AB_1}$ и $\vec{y}=\overrightarrow{AB}$.

770. Дан параллелограмм $ABCD$. Выразите вектор $\overrightarrow{AC}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если: а) $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$; б) $\vec{a}=\overrightarrow{CB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CD}$; в) $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{DA}$.

771. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Выразите через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$ следующие векторы: $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DA}$.

772. Дан параллелограмм $ABCD$. Докажите, что $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC}=$

$=\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XD}$, где X — произвольная точка плоскости.

773. Докажите, что для любых двух векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ справедливо неравенство $|\vec{x}-\vec{y}| \leqslant |\vec{x}|+|\vec{y}|$. В каком случае $|\vec{x}-\vec{y}|=|\vec{x}|+|\vec{y}|$?

774. Парашютист спускался на землю со скоростью 3 м/с. Порывом ветра его начинает относить в сторону со скоростью $3\sqrt{3}$ м/с. Под каким углом к вертикали спускается парашютист?

§ 3. УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО. ПРИМЕНЕНИЕ ВЕКТОРОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

83. Произведение вектора на число. *Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k|\cdot|\vec{a}|$, причем векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены при $k \geqslant 0$ и противоположно направлены при $k<0$. Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.*

Произведение вектора $\vec{a}$ на число k обозначается так: $k\vec{a}$. На рисунке 260 изображены вектор $\vec{a}$ и векторы $3\vec{a}$, $-1{,}5\vec{a}$, $\sqrt{2}\vec{a}$.

Из определения произведения вектора на число непосредственно следует, что: 1) *произведение любого вектора на число нуль есть нулевой вектор;* 2) *для любого числа k и любого вектора $\vec{a}$ векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ коллинеарны.*

Умножение вектора на число обладает следующими основными свойствами:

Для любых чисел k, l и любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ справедливы равенства:

1^0. $(kl)\vec{a}=k(l\vec{a})$ *(сочетательный закон).*

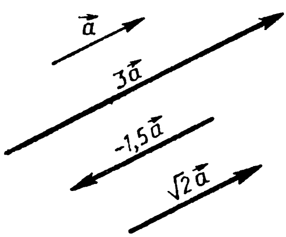


Рис. 260

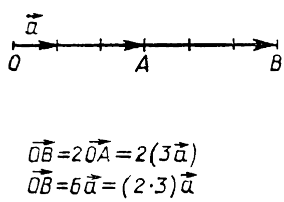


Рис. 261

2^0. $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$ *(первый распределительный закон).*
3^0. $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ *(второй распределительный закон).*

Рисунок 261 иллюстрирует сочетательный закон. На этом рисунке представлен случай, когда $k=2$, $l=3$.

Рисунок 262 иллюстрирует первый распределительный закон. На этом рисунке представлен случай, когда $k=3$, $l=2$.

Рисунок 263 иллюстрирует второй распределительный закон. На этом рисунке треугольники OAB и OA_1B_1 подобны с коэффициентом подобия k, поэтому $\overrightarrow{OA}=k\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=k\vec{b}$, $\overrightarrow{OB}=k(\vec{a}+\vec{b})$. С другой стороны, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=k\vec{a}+k\vec{b}$. Таким образом,

$$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}.$$

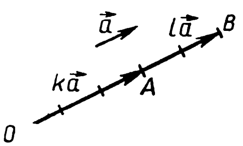
Замечание. Рассмотренные нами свойства действий над векторами позволяют в выражениях, содержащих суммы, разности векторов и произведения векторов на числа, выполнять преобразования по тем же правилам, что и в числовых выражениях. Например, выражение $\vec{p}=2(\vec{a}-\vec{b})+(\vec{c}+\vec{a})-3(\vec{b}-\vec{c}+\vec{a})$ можно преобразовать так: $\vec{p}=2\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}+\vec{a}-3\vec{b}+3\vec{c}-3\vec{a}=-5\vec{b}+4\vec{c}$.

84. Применение векторов к решению задач. Векторы могут использоваться для решения геометрических задач и доказательства теорем. Приведем примеры. Рассмотрим сначала вспомогательную задачу.

Задача 1. *Точка C — середина отрезка AB, а O — произвольная точка плоскости* (рис. 264). *Доказать, что*

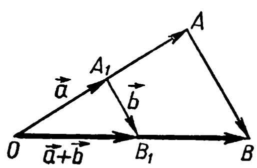
$$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}).$$

Решение. По правилу треугольника $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}$. Складывая эти равенства, получаем: $2\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC})$. Так как точка C — середина отрезка AB, то



$\overrightarrow{OA}=k\vec{a}$; $\overrightarrow{AB}=l\vec{a}$
$\overrightarrow{OB}=(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$

Рис. 262



$\overrightarrow{OB}=k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

Рис. 263

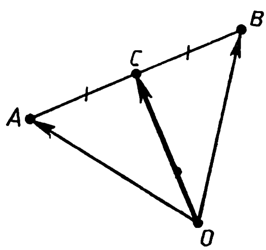


Рис. 264

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$. Таким образом, $2\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, или $\overrightarrow{OC}=$ $=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$.

Задача 2. *Доказать, что прямая, проведенная через середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения продолжений боковых сторон.*

Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, M и N — середины оснований BC и AD, а O — точка пересечения прямых AB и CD (рис. 265). Докажем, что точка O лежит на прямой MN.

Треугольники OAD и OBC подобны по первому признаку подобия треугольников (объясните почему), поэтому $\frac{OA}{OB}=\frac{OD}{OC}=k$. Так как $\overrightarrow{OB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}\uparrow\uparrow\overrightarrow{OD}$, то

$$\overrightarrow{OA}=k\cdot\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OD}=k\cdot\overrightarrow{OC}. \qquad (1)$$

Точка M — середина отрезка BC, поэтому $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+$ $+\overrightarrow{OC})$. Аналогично $\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})$. Подставив в это равенство выражения (1) для $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OD}$, получим:

$$\overrightarrow{ON}=k\,\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=k\cdot\overrightarrow{OM}.$$

Отсюда следует, что векторы $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{OM}$ коллинеарны, и, значит, точка O лежит на прямой MN.

85. Средняя линия трапеции. *Средней линией* трапеции называется отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон. Докажем теорему о средней линии трапеции.

Теорема. ***Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.***

Доказательство. Пусть MN — средняя линия трапеции $ABCD$ (рис. 266). Докажем, что $MN\parallel AD$ и $MN=\frac{AD+BC}{2}$.

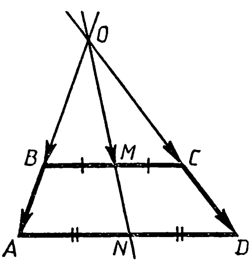


Рис. 265

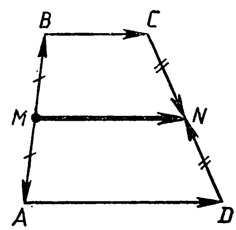


Рис. 266

По правилу многоугольника $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$ и $\overrightarrow{MN}=$ $=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}$. Сложив эти равенства, получим:

$$2\overrightarrow{MN}=(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{DN}).$$

Но M и N — середины сторон AB и CD, поэтому $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}$ и $\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{DN}=\vec{0}$. Следовательно, $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$, откуда $\overrightarrow{MN}=$ $=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$. Так как векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ сонаправлены, то векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{AD}$ также сонаправлены, а длина вектора $(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$ равна $AD+BC$. Отсюда следует, что $MN \parallel AD$ и $MN=\frac{AD+BC}{2}$. Теорема доказана.

Практические задания

775. Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{p}$ и $\vec{q}$, начала которых не совпадают, и отметьте какую-нибудь точку O. От точки O отложите векторы, равные $2\vec{p}$ и $\frac{1}{2}\vec{q}$.

776. Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ и постройте векторы: а) $\vec{x}+2\vec{y}$; б) $\frac{1}{2}\vec{y}+\vec{x}$; в) $3\vec{x}+\frac{1}{2}\vec{y}$; г) $1\frac{1}{2}\vec{x}-$ $-3\vec{y}$; д) $0\vec{x}+3\vec{y}$; е) $-2\vec{x}+0\vec{y}$. Выполните задания а) — е) для двух коллинеарных ненулевых векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

777. Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{p}$ и $\vec{q}$, начала которых не совпадают. Постройте векторы $\vec{m}=2\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{q}$, $\vec{n}=\vec{p}+3\vec{q}$, $\vec{l}=-2\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{q}$, $\vec{s}=\frac{2}{3}\vec{q}-\vec{p}$.

778. Начертите попарно неколлинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Постройте векторы: а) $2\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{c}$; б) $\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$.

Задачи

779. Дан вектор $\vec{p}=3\vec{a}$, где $\vec{a}\neq\vec{0}$. Укажите, как направлен каждый из векторов $\vec{a}$, $-\vec{a}$, $\frac{1}{2}\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $6\vec{a}$ по отношению к вектору $\vec{p}$, и выразите их длины через $|\vec{p}|$.

780. Докажите, что для любого вектора $\vec{a}$ справедливы равенства: а) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$; б) $(-1)\cdot\vec{a}=-\vec{a}$.

781. Пусть $\vec{x}=\vec{m}+\vec{n}$, $\vec{y}=\vec{m}-\vec{n}$. Выразите через $\vec{m}$ и $\vec{n}$ векторы: а) $2\vec{x}-2\vec{y}$; б) $2\vec{x}+\frac{1}{2}\vec{y}$; в) $-\vec{x}-\frac{1}{3}\vec{y}$.

782. В параллелограмме $ABCD$ точка E — середина стороны AD, точка G — середина стороны BC. Выразите векторы $\overrightarrow{EC}$ и $\overrightarrow{AG}$ через векторы $\overrightarrow{DC}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$.

783. Точка M лежит на стороне BC параллелограмма $ABCD$, причем $BM:MC=3:1$. Выразите векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MD}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AD}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$.

784. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, а M — точка на стороне AD, такая, что $AM=\frac{1}{2}MD$. Выразите через векторы $\vec{x}=\overrightarrow{AD}$ и $\vec{y}=\overrightarrow{AB}$ следующие векторы: а) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA}$; б) $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{OM}$.

785. Точки M и N — середины диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$. Докажите, что $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB})$.

786. Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 — медианы треугольника ABC. Выразите векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AC}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$.

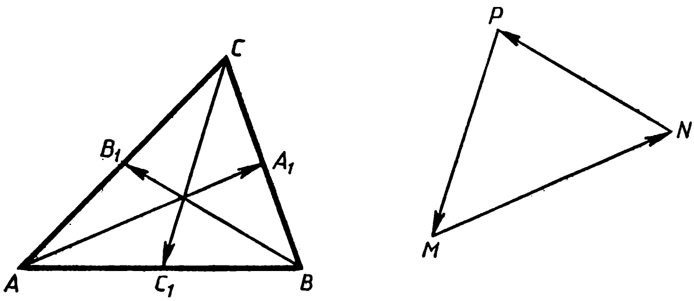
787. Точка O — середина медианы EG треугольника DEF. Выразите вектор $\overrightarrow{DO}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{ED}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{EF}$.

Применение векторов к решению задач

788. Дан произвольный треугольник ABC. Докажите, что существует треугольник, стороны которого соответственно параллельны и равны медианам треугольника ABC.

Решение. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — медианы треугольника ABC. Тогда $\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{BB_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})$, $\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$ (см. задачу 1, п. 84). Сложив эти равенства, получим $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}((\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}))=\vec{0}$.

Отсюда следует, что если мы построим сумму векторов $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ по правилу многоугольника (п. 81), то получим треугольник, удовлетворяющий условиям задачи (треугольник MNP на рисунке 267).



$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{CC_1}$

Рис. 267

789. На сторонах треугольника ABC построены параллелограммы ABB_1A_2, BCC_1B_2, ACC_2A_1. Докажите, что существует треугольник, стороны которого соответственно параллельны и равны отрезкам A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2.

790. Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен ее основаниям и равен полуразности оснований.

791. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон произвольного четырехугольника, точкой пересечения делятся пополам.

792. Докажите теорему о средней линии треугольника (п. 62).

Средняя линия трапеции

793. Боковые стороны трапеции равны 13 см и 15 см, а периметр равен 48 см. Найдите среднюю линию трапеции.

794. Сторона AB треугольника ABC разделена на четыре равные части, и через точки деления проведены прямые, параллельные стороне BC. Стороны AB и AC треугольника отсекают на этих параллельных прямых три отрезка, наименьший из которых равен 3,4. Найдите два других отрезка.

795. Найдите диаметр окружности, если его концы удалены от некоторой касательной на 18 см и 12 см.

796. Из концов диаметра CD данной окружности проведены перпендикуляры CC_1 и DD_1 к касательной, не перпендикулярной к диаметру CD. Найдите DD_1, если $CC_1=11$ см, а $CD=27$ см.

797. Докажите, что средняя линия трапеции проходит через середины диагоналей.

798. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна 48 см, а средняя линия делится диагональю на два отрезка, равные 11 см и 35 см. Найдите углы трапеции.

799. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$. Перпендикуляр, проведенный из вершины B к большему основанию AD, делит это основание на два отрезка, больший из которых равен 7 см. Найдите среднюю линию трапеции.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ IX

1. Приведите примеры векторных величин, известных вам из курса физики.
2. Дайте определение вектора. Объясните, какой вектор называется нулевым.
3. Что называется длиной ненулевого вектора? Чему равна длина нулевого вектора?
4. Какие векторы называются коллинеарными? Изобразите на рисунке сонаправленные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и противоположно направленные векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$.
5. Дайте определение равных векторов.
6. Объясните смысл выражения: «Вектор $\vec{a}$ отложен от точки A». Докажите, что от любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.
7. Объясните, какой вектор называется суммой двух векторов. В чем заключается правило треугольника сложения двух векторов?
8. Докажите, что для любого вектора $\vec{a}$ справедливо равенство $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.
9. Сформулируйте и докажите теорему о законах сложения векторов.
10. В чем заключается правило параллелограмма сложения двух неколлинеарных векторов?
11. В чем заключается правило многоугольника сложения нескольких векторов?
12. Какой вектор называется разностью двух векторов? Постройте разность двух данных векторов.
13. Какой вектор называется противоположным данному? Сформулируйте и докажите теорему о разности векторов.

14. Какой вектор называется произведением данного вектора на данное число?
15. Чему равно произведение $k\vec{a}$, если: а) $\vec{a}=\vec{0}$; б) $k=0$?
16. Могут ли векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ быть неколлинеарными?
17. Сформулируйте основные свойства умножения вектора на число.
18. Приведите пример применения векторов к решению геометрических задач.
19. Какой отрезок называется средней линией трапеции?
20. Сформулируйте и докажите теорему о средней линии трапеции.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

800. Докажите, что если векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ сонаправлены, то $|\vec{m}+\vec{n}|=|\vec{m}|+|\vec{n}|$, а если $\vec{m}$ и $\vec{n}$ противоположно направлены, причем $|\vec{m}|\geqslant|\vec{n}|$, то $|\vec{m}+\vec{n}|=|\vec{m}|-|\vec{n}|$.

801. Докажите, что для любых векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ справедливы неравенства $|\vec{x}|-|\vec{y}|\leqslant|\vec{x}+\vec{y}|\leqslant|\vec{x}|+|\vec{y}|$.

802. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка N так, что $BN=2NC$. Выразите вектор $\overrightarrow{AN}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{BA}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$.

803. На сторонах MN и NP треугольника MNP отмечены соответственно точки X и Y так, что $\frac{MX}{XN}=\frac{3}{2}$ и $\frac{NY}{YP}=\frac{3}{2}$. Выразите векторы $\overrightarrow{XY}$ и $\overrightarrow{MP}$ через $\vec{a}=\overrightarrow{NM}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{NP}$.

804. В трапеции $ABCD$ основание AD в три раза больше основания BC. На стороне AD отмечена точка K, такая, что $AK=\frac{1}{3}AD$. Выразите векторы $\overrightarrow{CK}$, $\overrightarrow{KD}$ и $\overrightarrow{BC}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{BA}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{CD}$.

805. Три точки A, B и C расположены так, что $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Докажите, что для любой точки O справедливо равенство $\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$.

806. Точка C делит отрезок AB в отношении $m:n$, считая от точки A. Докажите, что для любой точки O справедливо равенство $\overrightarrow{OC}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$.

807. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — медианы треугольника ABC, а O — произвольная точка. Докажите, что $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=$ $=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}$.

808*. Точки A и C — середины противоположных сторон произвольного четырехугольника, а точки B и D — середины двух других его сторон. Докажите, что для любой точки O выполняется равенство $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

809. В прямоугольной трапеции один из углов равен 120°. Найдите ее среднюю линию, если меньшая диагональ и бóльшая боковая сторона трапеции равны a.

810. Докажите, что вершина угла, образованного биссектрисами двух углов трапеции, прилежащих к боковой стороне, лежит на прямой, содержащей среднюю линию трапеции.

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

Задачи к главе V

811. Дан выпуклый шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, все углы которого равны. Докажите, что $A_1A_2-A_4A_5=A_5A_6-A_2A_3=$ $=A_3A_4-A_6A_1$.

812. Положительные числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 и a_6 удовлетворяют условиям $a_1-a_4=a_5-a_2=a_3-a_6$. Докажите, что существует выпуклый шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, все углы которого равны, причем $A_1A_2=a_1$, $A_2A_3=a_2$, $A_3A_4=a_3$, $A_4A_5=$ $=a_4$, $A_5A_6=a_5$, $A_6A_1=a_6$.

813. Докажите, что из одинаковых плиток, имеющих форму произвольного выпуклого четырехугольника, можно сделать паркет, полностью покрывающий любую часть плоскости.

814. Докажите, что диагонали выпуклого четырехугольника пересекаются.

815. Докажите, что в любом четырехугольнике какие-то две противоположные вершины лежат по разные стороны от прямой, проходящей через две другие вершины.

816. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AD. Прямая, проведенная через точку D перпендикулярно к AD, пересекает прямую AC в точке E. Точки M и K — основания перпендикуляров, проведенных из точек B и D к прямой AC. Найдите MK, если $AE=a$.

817. Докажите, что в треугольнике сумма трех медиан меньше периметра, но больше половины периметра.

818. Диагонали выпуклого четырехугольника разбивают его на четыре треугольника, периметры которых равны. Докажите, что этот четырехугольник — ромб.

819. Найдите множество середин всех отрезков, соединяющих данную точку со всеми точками данной прямой, не проходящей через эту точку.

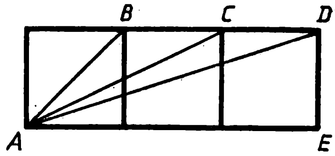


Рис. 268

820. Докажите, что прямая, проходящая через середины оснований равнобедренной трапеции, перпендикулярна к основаниям. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

821. При пересечении биссектрис всех углов прямоугольника образовался четырехугольник. Докажите, что этот четырехугольник — квадрат.

822. На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Докажите, что точки пересечения диагоналей этих квадратов являются вершинами квадрата.

823. На стороне CD квадрата $ABCD$ отмечена точка M. Биссектриса угла BAM пересекает сторону BC в точке K. Докажите, что $AM = BK + DM$.

824. На рисунке 268 изображены три квадрата. Найдите сумму $\angle BAE + \angle CAE + \angle DAE$.

825. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка M, такая, что $\angle MAB = 60°$, $\angle MCD = 15°$. Найдите $\angle MBC$.

826. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $BCDE$, $ACTM$, $BAHK$, а затем параллелограммы $TCDQ$ и $EBKP$. Докажите, что треугольник APQ прямоугольный и равнобедренный.

827. Постройте равнобедренную трапецию по основаниям и диагоналям.

828. Докажите, что если треугольник имеет: а) ось симметрии, то он равнобедренный; б) более чем одну ось симметрии, то он равносторонний.

Задачи к главе VI

829. Через точку M, лежащую внутри параллелограмма $ABCD$, проведены прямые, параллельные его сторонам и пересекающие стороны AB, BC, CD и DA соответственно в точках P, Q, R и T. Докажите, что если точка M лежит на диагонали AC, то площади параллелограммов $MPBQ$ и $MRDT$ равны и, обратно, если площади параллелограммов $MPBQ$ и $MRDT$ равны, то точка M лежит на диагонали AC.

830. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M и K. Отрезки AK и BM пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника CMK, если площади треугольников OMA, OAB и OBK равны соответственно S_1, S_2, S_3.

831. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты точки M и K, а на отрезке MK — точка P так, что $\frac{AM}{MC}=\frac{CK}{KB}=\frac{MP}{PK}$. Найдите площадь треугольника ABC, если площади треугольников AMP и BKP равны S_1 и S_2.

832. Точки P, Q, R и T соответственно середины сторон AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$. Докажите, что при пересечении прямых AQ, BR, CT и DP образуется параллелограмм, и найдите отношение его площади к площади параллелограмма $ABCD$.

833. Докажите, что площадь трапеции равна произведению одной из боковых сторон на перпендикуляр, проведенный из середины другой боковой стороны к прямой, содержащей первую боковую сторону.

834. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD диагонали пересекаются в точке O. Площади треугольников BOC и AOD равны S_1 и S_2. Найдите площадь трапеции.

835. Через концы меньшего основания трапеции проведены две параллельные прямые, пересекающие большее основание. Диагонали трапеции и эти прямые делят трапецию на семь треугольников и один пятиугольник. Докажите, что площадь пятиугольника равна сумме площадей трех треугольников, прилежащих к боковым сторонам и меньшему основанию трапеции.

836. Прямая, проходящая через середины диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$, пересекает стороны AB и CD в точках M и K. Докажите, что площади треугольников DCM и AKB равны.

837. Сторона AB параллелограмма $ABCD$ продолжена за точку B на отрезок BE, а сторона AD продолжена за точку D на отрезок DK. Прямые ED и KB пересекаются в точке O. Докажите, что площади четырехугольников $ABOD$ и $CEOK$ равны.

838. Два непересекающихся отрезка делят каждую из двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника на три равные части. Докажите, что площадь той части четырехугольника, которая заключена между этими отрезками, в три раза меньше площади самого четырехугольника.

839. Середины K и M сторон AB и DC выпуклого четырехугольника $ABCD$ соединены отрезками KD, KC, MA и MB с вершинами. Докажите, что площадь четырехугольника, заключенного между этими отрезками, равна сумме площадей двух треугольников, прилежащих к сторонам AD и BC.

840. Точка A лежит внутри угла, равного 60°. Расстояния от точки A до сторон угла равны a и b. Найдите расстояние от точки A до вершины угла.

841. Прямая, проходящая через вершину C параллелограмма $ABCD$, пересекает прямые AB и AD в точках K и M. Найдите площадь этого параллелограмма, если площади треугольников KBC и CDM равны S_1 и S_2.

842. Через точку пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ проведена прямая, пересекающая отрезок AB в точке M и отрезок CD в точке K. Прямая, проведенная через точку K параллельно AB, пересекает BD в точке T, а прямая, проведенная через точку M параллельно CD, пересекает AC в точке E. Докажите, что прямые BE и CT параллельны.

843. Сторона AB треугольника ABC продолжена за точку A на отрезок AD, равный AC. На лучах BA и BC взяты точки K и M так, что площади треугольников BDM и BCK равны. Найдите угол BKM, если $\angle BAC = \alpha$.

844. Внутри прямоугольника $ABCD$ взята точка M. Известно, что $MB = a$, $MC = b$ и $MD = c$. Найдите MA.

845. В треугольнике ABC проведена высота BD. Отрезок KA перпендикулярен к AB и равен DC, отрезок CM перпендикулярен к BC и равен AD. Докажите, что отрезки MB и KB равны.

846. Внутри прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C взята точка O так, что $S_{OAB} = S_{OAC} = S_{OBC}$. Докажите, что $OA^2 + OB^2 = 5OC^2$.

Задачи к главе VII

847. На рисунке 269 изображен правильный пятиугольник $ABCDE$, т. е. выпуклый пятиугольник, у которого все

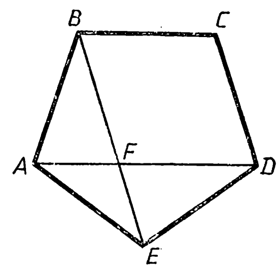


Рис. 269

углы равны и все стороны равны. Докажите, что:

а) $\triangle AED \sim \triangle AFE$; б) $\frac{DA}{DF}=\frac{DF}{AF}$.

848. В треугольнике ABC ($AB \neq AC$) через середину M стороны BC проведена прямая, параллельная биссектрисе угла A, которая пересекает прямые AB и AC соответственно в точках D и E. Докажите, что $BD=CE$.

849. Докажите, что отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, образуют треугольник, в котором эти высоты являются биссектрисами.

850. Точки E и F лежат на стороне AB треугольника ABC, причем так, что точка E лежит на отрезке AF и $AE=BF$. Прямая, проведенная через точку E параллельно стороне AC, пересекает прямую, проведенную через точку F параллельно стороне BC, в точке K. Докажите, что точка K лежит на медиане треугольника ABC, проведенной к стороне AB.

851. Гипотенуза прямоугольного треугольника является стороной квадрата, не перекрывающегося с этим треугольником. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей квадрата до вершины прямого угла треугольника, если сумма катетов равна a.

852. В треугольнике ABC $\angle A=\frac{180^\circ}{7}$ и $\angle B=\frac{360^\circ}{7}$. Докажите, что $\frac{1}{BC}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AB}$.

853. Из точки M внутренней области угла AOB проведены перпендикуляры MP и MQ к его сторонам OA и OB. Из точек P и Q проведены перпендикуляры PR и QS соответственно к OB и OA. Докажите, что $RS \perp OM$.

854. В равнобедренном треугольнике ABC из середины D основания AC проведен перпендикуляр DH к стороне BC. Пусть M — середина отрезка DH. Докажите, что $BM \perp AH$.

855. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведен перпендикуляр CD к гипотенузе, а из точки D — перпендикуляры DE и DF к катетам AC и BC. Докажите, что: а) $CD^3=AB \cdot AE \cdot BF$; б) $AE^2+BF^2+3CD^2=AB^2$; в) $\sqrt[3]{AE^2}+\sqrt[3]{BF^2}=\sqrt[3]{AB^2}$.

856. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке P. Известно, что $\angle ADP=\frac{1}{2}\angle PDC$, $\angle ADP=\frac{2}{3}\angle PAD$ и $AD=BD=CD$. а) Найдите все углы четырехугольника. б) Докажите, что $AB^2=BP \cdot BD$.

857. Точка M не лежит на прямых, содержащих стороны параллелограмма $ABCD$. Докажите, что существуют точки N, P и Q, расположенные так, что A, B, C и D являются соответственно серединами отрезков MN, NP, PQ и QM.

858. Докажите, что если противоположные стороны выпуклого четырехугольника не параллельны, то их полусумма больше отрезка, соединяющего середины двух других противоположных сторон.

859. Докажите, что если сумма расстояний между серединами противоположных сторон выпуклого четырехугольника равна половине его периметра, то этот четырехугольник — параллелограмм.

860. Докажите, что если отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника, равен полусумме двух других сторон, то этот четырехугольник — трапеция или параллелограмм.

861. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Треугольник ABO, где AB — меньшее основание трапеции, равносторонний. Докажите, что треугольник, вершинами которого являются середины отрезков OA, OD и BC, равносторонний.

862. Из вершины A треугольника ABC проведены перпендикуляры AM и AK к биссектрисам внешних углов этого треугольника при вершинах B и C. Докажите, что отрезок MK равен половине периметра треугольника ABC.

863. Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 соединяют вершины треугольника ABC с внутренними точками противоположных сторон. Докажите, что середины этих отрезков не лежат на одной прямой.

864. Середины трех высот треугольника лежат на одной прямой. Докажите, что этот треугольник прямоугольный.

865. В треугольнике ABC, сторона AC которого в два раза больше стороны BC, проведены биссектриса CM и биссектриса внешнего угла при вершине C, пересекающая прямую AB в точке K. Докажите, что $S_{BCM}=\frac{1}{2}S_{ACM}=\frac{1}{3}S_{ABC}=\frac{1}{4}S_{CMK}$.

866. Стороны треугольника EFG соответственно равны медианам треугольника ABC. Докажите, что $\frac{S_{EFG}}{S_{ABC}}=\frac{3}{4}$.

867. В треугольнике ABC прямая, проходящая через вершину A и делящая медиану BM в отношении $1:2$, считая от вершины, пересекает сторону BC в точке K. Найдите отношение площадей треугольников ABK и ABC.

868. Через вершину A параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые BD, CD и BC соответственно в точках M, N и P. Докажите, что отрезок AM является средним пропорциональным между MN и MP.

869. Постройте точку, принадлежащую большему основанию равнобедренной трапеции и отстоящую от данной боковой стороны в n раз дальше, чем от другой ($n=2$, 3, 4).

870. Точка C лежит на отрезке AB. Постройте точку D прямой AB, не лежащую на отрезке AB, так, чтобы $\frac{AD}{DB}=\frac{AC}{CB}$. Всегда ли задача имеет решение?

871. Постройте равнобедренный треугольник по углу между боковыми сторонами и сумме основания и высоты, проведенной к основанию.

872. Постройте треугольник по двум сторонам и биссектрисе угла между ними.

873. Постройте треугольник ABC, если даны $\angle A$, $\angle C$ и отрезок, равный сумме стороны AC и высоты BH.

874. Постройте треугольник по трем высотам.

875. Постройте трапецию по боковой стороне, большему основанию, углу между ними и отношению двух других сторон.

876. Постройте ромб, площадь которого равна площади данного квадрата, если известно, что отношение диагоналей этого ромба равно отношению данных отрезков.

Задачи к главе VIII

877. Две окружности имеют единственную общую точку M. Через эту точку проведены две секущие, пересекающие одну окружность в точках A и A_1, а другую — в точках B и B_1. Докажите, что $AA_1 \parallel BB_1$.

878. Прямая AC — касательная к окружности с центром O_1, а прямая BD — касательная к окружности с центром O_2 (рис. 270). Докажите, что: а) $AD \parallel BC$; б) $AB^2=AD \cdot BC$; в) $BD^2:AC^2=$ $=AD:BC$.

879. Точки B_1 и C_1 — середины дуг AB и AC (рис. 271). Докажите, что $AM=AN$.

880. Окружность отсекает на двух прямых, которые пересекаются в точке, не лежащей на окружности, равные хорды. Докажи-

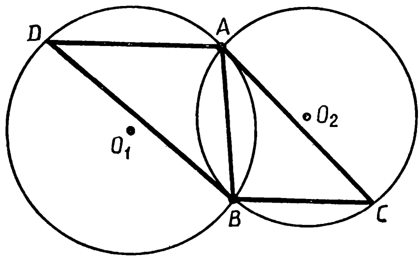


Рис. 270

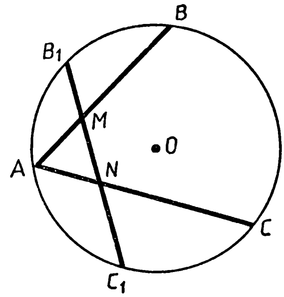


Рис. 271

те, что расстояния от точки пересечения этих прямых до концов той и другой хорды соответственно равны между собой.

881. Докажите, что для всех хорд AB данной окружности величина $\frac{AB^2}{AD}$, где AD — расстояние от точки A до касательной в точке B, имеет одно и то же значение.

882. Через точку A пересечения двух окружностей с центрами в точках O_1 и O_2 проведена прямая, пересекающая одну окружность в точке B, а другую — в точке C. Докажите, что отрезок BC будет наибольшим тогда, когда он параллелен прямой O_1O_2.

883. Отрезок AB является диаметром окружности с центром O. На каждом радиусе OM окружности отложен от центра O отрезок, равный расстоянию от конца M этого радиуса до прямой AB. Найдите множество концов построенных таким образом отрезков.

884. Внутри угла ABC равностороннего треугольника ABC взята точка M так, что $\angle BMC=30°$, $\angle BMA=17°$. Найдите углы BAM и BCM.

885. Через каждую вершину треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла треугольника при этой вершине. Проведенные прямые, пересекаясь, образуют новый треугольник. Докажите, что вершины этого треугольника лежат на прямых, содержащих биссектрисы треугольника ABC.

886. Пусть H — точка пересечения прямых, содержащих высоты треугольника ABC, а A', B', C' — точки, симметричные точке H относительно прямых BC, CA, AB. Докажите, что точки

A', B', C' лежат на окружности, описанной около треугольника ABC.

887. Отрезок BD — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC$.

888. В треугольнике ABC из вершины B проведены высота BH и биссектриса угла B, которая пересекает в точке E описанную около треугольника окружность с центром O. Докажите, что луч BE является биссектрисой угла OBH.

889. Произвольная точка X окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC, соединена отрезками с его вершинами. Докажите, что один из отрезков AX, BX и CX равен сумме двух других отрезков.

890. Докажите, что если диагонали вписанного четырехугольника перпендикулярны, то сумма квадратов противоположных сторон четырехугольника равна квадрату диаметра описанной окружности.

891. В четырехугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке, лежащей на стороне CD. Докажите, что $CD = BC + AD$.

892. Докажите, что площадь прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равна произведению ее оснований.

893. Докажите, что в любом четырехугольнике, вписанном в окружность, произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон (теорема Птолемея).

894. Докажите, что в любом треугольнике радиус R описанной окружности, радиус r вписанной окружности и расстояние d между центрами этих окружностей связаны равенством

$$d^2 = R^2 - 2Rr$$

(формула Эйлера).

895. Для неравностороннего треугольника ABC точка O является центром описанной окружности, H — точка пересечения прямых, содержащих высоты AA_1, BB_1, CC_1, точки A_2, B_2, C_2 — середины отрезков AH, BH, CH, а точки A_3, B_3, C_3 — середины сторон треугольника ABC. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 лежат на одной окружности (окружность Эйлера).

896. Докажите, что основания перпендикуляров, проведенных из произвольной точки окружности, описанной около треугольника, к прямым, содержащим стороны этого треугольника, лежат на одной прямой (прямая Симпсона).

897. Постройте общую касательную к двум данным окружностям.

898. Даны окружность с центром O, точка M и отрезки P_1Q_1 и P_2Q_2. Постройте прямую p так, чтобы окружность отсекала на ней хорду, равную P_1Q_1, и расстояние от точки M до прямой p равнялось P_2Q_2.

899. Внутри окружности дана точка. Постройте хорду, проходящую через эту точку, так, чтобы она была наименьшей из всех хорд, проходящих через эту точку.

900. Постройте треугольник: а) по стороне, противолежащему углу и высоте, проведенной к данной стороне; б) по углу, высоте, проведенной из вершины данного угла, и периметру.

901. Постройте треугольник, если дана описанная окружность и на ней точки H, B и M, через которые проходят прямые, содержащие высоту, биссектрису и медиану треугольника, проведенные из одной вершины.

902. Даны три точки, не лежащие на одной прямой. Постройте треугольник, для которого эти точки являются основаниями высот. Сколько решений имеет задача?

Задачи к главе IX

903. Докажите основные свойства умножения вектора на число (п. 83).

Решение. 1. Докажем, что для любых чисел k, l и любого вектора $\vec{a}$ справедливо равенство $(kl)\,\vec{a}=k\,(l\vec{a})$. Если $\vec{a}=\vec{0}$, то справедливость этого равенства очевидна. Пусть $\vec{a}\neq\vec{0}$. Имеем:

$$|(kl)\,\vec{a}|=|kl|\,|\vec{a}|=|k|\,|l|\,|\vec{a}|=|k|\,|l\vec{a}|=|k\,(l\vec{a})|.$$

Далее, если $kl\geqslant 0$, то $(kl)\,\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{a}$ и $k\,(l\vec{a})\uparrow\uparrow\vec{a}$; если же $kl<0$, то $(kl)\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}$ и $k(l\vec{a})\uparrow\downarrow\vec{a}$. И в том, и в другом случае $(kl)\vec{a}\uparrow\uparrow k(l\vec{a})$. Следовательно, $(kl)\,\vec{a}=k\,(l\vec{a})$.

2. Докажем, что для любого числа k и любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо равенство $k\,(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$. Если $k=0$, то справедливость этого равенства очевидна. Пусть $k\neq 0$.

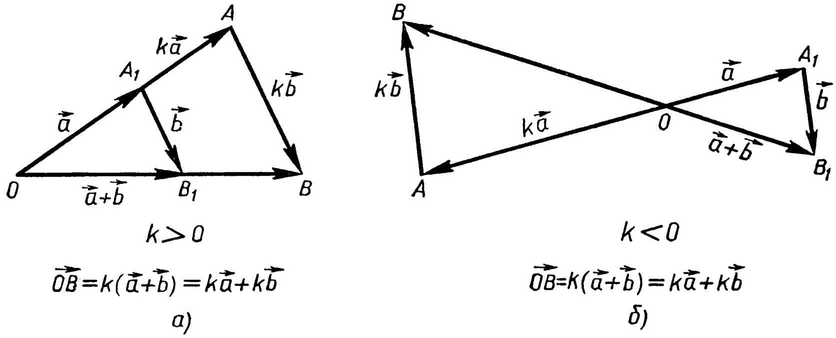


Рис. 272

Рассмотрим случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны (случай $\vec{a} \parallel \vec{b}$ рассмотрите самостоятельно). Отложим от какой-нибудь точки O векторы $\overrightarrow{OA_1}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OA}=k\vec{a}$, а от точек A_1 и A векторы $\overrightarrow{A_1B_1}=\vec{b}$ и $\overrightarrow{AB}=k\vec{b}$ (рис. 272, *а, б*). Треугольники OA_1B_1 и OAB подобны с коэффициентом подобия $|k|$. Следовательно, $\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{OB_1}=k(\vec{a}+\vec{b})$. С другой стороны, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=k\vec{a}+k\vec{b}$. Итак, $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$.

3. Докажем, что для любых чисел k, l и любого вектора $\vec{a}$ справедливо равенство $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$. Если $k=l=0$, то справедливость этого равенства очевидна. Пусть хотя бы одно из чисел k, l отлично от нуля. Для определенности будем считать, что $|k| \geqslant |l|$, и, следовательно, $k \neq 0$ и $\left|\frac{l}{k}\right| \leqslant 1$. Рассмотрим вектор $\vec{a}+\frac{l}{k}\vec{a}$. Очевидно, $(\vec{a}+\frac{l}{k}\vec{a}) \uparrow\uparrow \vec{a}$. Далее, $\left|\vec{a}+\frac{l}{k}\vec{a}\right|=|\vec{a}|+\frac{l}{k}|\vec{a}|=\left(1+\frac{l}{k}\right)|\vec{a}|$. Следовательно, согласно определению произведения вектора на число, $\vec{a}+\frac{l}{k}\vec{a}=\left(1+\frac{l}{k}\right)\vec{a}$. Умножая обе части этого равенства на k, получим $k\vec{a}+l\vec{a}=(k+l)\vec{a}$.

904. Даны четырехугольник $MNPQ$ и точка O. Что представляет собой данный четырехугольник, если $\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}$?

905. Даны четырехугольник $ABCD$ и точка O. Точки E, F, G и H симметричны точке O относительно соответственно середин сторон AB, BC, CD и DA. Что представляет собой четырехугольник $EFGH$?

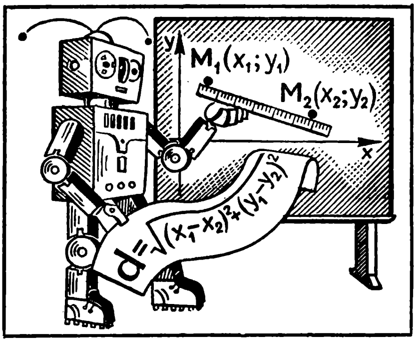
906. Дан треугольник ABC. Докажите, что вектор $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ направлен вдоль биссектрисы угла A, а вектор $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}-\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ — вдоль биссектрисы внешнего угла при вершине A.

907. Докажите следующее утверждение: три точки A, B и C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда существуют числа k, l и m, одновременно не равные нулю, такие, что $k+l+m=0$ и для произвольной точки O выполняется равенство $k\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OB}+m\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

908. Используя векторы, докажите, что середины диагоналей четырехугольника и точка пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, лежат на одной прямой.

909. Биссектрисы внешних углов треугольника ABC при вершинах A, B и C пересекают прямые BC, CA и AB соответственно в точках A_1, B_1 и C_1. Используя векторы, докажите, что A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

910. Пусть H — точка пересечения прямых, содержащих высоты неравностороннего треугольника ABC, а O — центр описанной около этого треугольника окружности. Используя векторы, докажите, что точка G пересечения медиан треугольника принадлежит отрезку HO и делит этот отрезок в отношении $2:1$, т. е. $\frac{HG}{GO}=2$.



9 класс

Глава X

МЕТОД КООРДИНАТ

§ 1. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

86. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам. Докажем сначала лемму[1] о коллинеарных векторах.

Л е м м а. *Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует такое число k, что $\vec{b} = k\vec{a}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возможны два случая: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Рассмотрим эти случаи в отдельности.

1) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Возьмем число $k = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Так как $k \geqslant 0$, то векторы $k\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены (рис. 273, *а*). Кроме того, их длины равны: $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = |\vec{b}|$. Поэтому $\vec{b} = k\vec{a}$.

2) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Возьмем число $k = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Так как $k < 0$, то векторы $k\vec{a}$ и $\vec{b}$ снова сонаправлены (рис. 273, *б*). Их длины также равны:

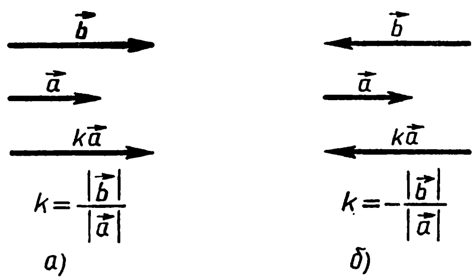
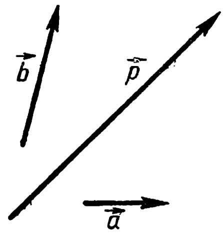


Рис. 273

[1] *Леммой* называется вспомогательная теорема, с помощью которой доказывается следующая теорема или несколько теорем.



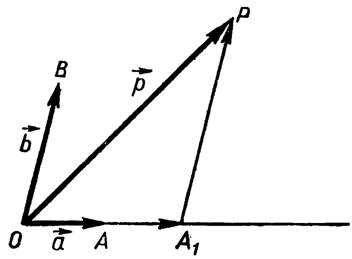


Рис. 274

$|k\vec{a}|=|k||\vec{a}|=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\cdot|\vec{a}|=|\vec{b}|$. Поэтому $\vec{b}=k\vec{a}$. Лемма доказана.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два данных вектора. Если вектор $\vec{p}$ представлен в виде $\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}$, где x и y — некоторые числа, то говорят, что *вектор $\vec{p}$ разложен по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$*. Числа x и y называются *коэффициентами разложения*. Докажем теорему о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам.

Теорема. ***Любой вектор можно разложить по двум данным неколлинеарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.***

Доказательство. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — данные неколлинеарные векторы. Докажем сначала, что любой вектор $\vec{p}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Возможны два случая.

1) Вектор $\vec{p}$ коллинеарен одному из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, например вектору $\vec{b}$. В этом случае по лемме о коллинеарных векторах вектор $\vec{p}$ можно представить в виде $\vec{p}=y\vec{b}$, где y — некоторое число, и, следовательно, $\vec{p}=0\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b}$, т. е. вектор $\vec{p}$ разложен по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2) Вектор $\vec{p}$ не коллинеарен ни вектору $\vec{a}$, ни вектору $\vec{b}$. Отметим какую-нибудь точку O и отложим от нее векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$ (рис. 274). Через точку P проведем прямую, параллельную прямой OB, и обозначим через A_1 точку пересечения этой прямой с прямой OA. По правилу треугольника $\vec{p}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1P}$. Но векторы $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{A_1P}$ коллинеарны соответственно векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, поэтому существуют числа x и y, такие, что

$\overrightarrow{OA_1}=x\vec{a}$, $\overrightarrow{A_1P}=y\vec{b}$. Следовательно, $\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}$, т. е. вектор $\vec{p}$ разложен по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Докажем теперь, что коэффициенты x и y разложения определяются единственным образом. Допустим, что наряду с разложением $\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}$ имеет место другое разложение $\vec{p}=x_1\vec{a}+y_1\vec{b}$. Вычитая второе равенство из первого и используя правила действий над векторами, получаем $\vec{0}=(x-x_1)\vec{a}+(y-y_1)\vec{b}$. Это равенство может выполняться только в том случае, когда коэффициенты $x-x_1$ и $y-y_1$ равны нулю. В самом деле, если предположить, например, что $x-x_1\neq 0$, то из полученного равенства найдем $\vec{a}=-\frac{y-y_1}{x-x_1}\vec{b}$, а значит, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Но это противоречит условию теоремы. Следовательно, $x-x_1=0$ и $y-y_1=0$, откуда $x=x_1$ и $y=y_1$. Это и означает, что коэффициенты разложения вектора $\vec{p}$ определяются единственным образом. Теорема доказана.

87. Координаты вектора. Понятие прямоугольной системы координат нам известно из курса алгебры. Напомним, что для задания прямоугольной системы координат нужно провести две взаимно перпендикулярные прямые, на каждой из них выбрать направление (оно обозначается стрелкой) и выбрать единицу измерения отрезков. При выбранной единице измерения отрезков длина каждого отрезка выражается положительным числом. В дальнейшем под длиной отрезка мы будем понимать это число.

Отложим от начала координат O единичные векторы (т. е. векторы, длины которых равны единице) $\vec{i}$ и $\vec{j}$ так, чтобы направление вектора $\vec{i}$ совпало с направлением оси Ox, а направление вектора $\vec{j}$ — с направлением оси Oy (рис. 275). Векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ назовем *координатными векторами*.

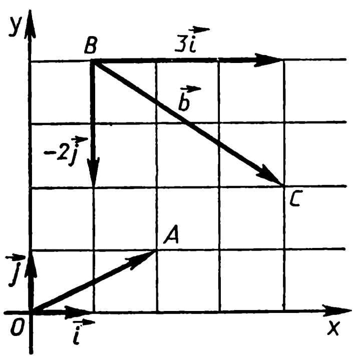


Рис. 275

Координатные векторы не коллинеарны, поэтому любой вектор $\vec{p}$ можно разложить по координатным векторам, т. е. представить в виде $\vec{p}=x\vec{i}+y\vec{j}$, причем коэффициенты разложения (числа x и y) определяются единственным образом. Коэффициенты разложения вектора $\vec{p}$ по координатным векторам называются *координатами вектора* $\vec{p}$ в данной системе координат. Координаты вектора будем записывать в фигурных скобках после обозначения вектора: $\vec{p}\{x;\ y\}$. На рисунке 275 $\overrightarrow{OA}\ \{2;\ 1\}$ и $\vec{b}\ \{3;\ -2\}$.

Так как нулевой вектор можно представить в виде $\vec{0}=0\cdot\vec{i}+$ $+0\cdot\vec{j}$, то его координаты равны нулю: $\vec{0}\{0;\ 0\}$. Если векторы $\vec{a}=$ $=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}$ и $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}$ равны, то $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$. Таким образом, *координаты равных векторов соответственно равны.*

Рассмотрим правила, позволяющие по координатам векторов находить координаты их суммы, разности и произведения вектора на число.

1^0. *Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов.*

Докажем это утверждение для двух векторов. Рассмотрим векторы $\vec{a}\ \{x_1;\ y_1\}$ и $\vec{b}\ \{x_2;\ y_2\}$. Так как $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}$, $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}$, то, пользуясь свойствами сложения векторов и умножения вектора на число, получим:

$$\vec{a}+\vec{b}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+x_2\vec{i}+y_2\vec{j}=(x_1+x_2)\,\vec{i}+(y_1+y_2)\,\vec{j}.$$

Отсюда следует, что координаты вектора $\vec{a}+\vec{b}$ равны $\{x_1+x_2;\ y_1+y_2\}$.

Аналогично доказывается следующее утверждение:

2^0. *Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.*

Иными словами, если $\vec{a}\{x_1;\ y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;\ y_2\}$ — данные векторы, то вектор $\vec{a}-\vec{b}$ имеет координаты $\{x_1-x_2;\ y_1-y_2\}$. Проведите доказательство самостоятельно.

3^0. *Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число.*

В самом деле, пусть вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\{x;\ y\}$. Найдем координаты вектора $k\vec{a}$, где k — произвольное число. Так как $\vec{a}=$ $=x\vec{i}+y\vec{j}$, то $k\vec{a}=kx\vec{i}+ky\vec{j}$. Отсюда следует, что координаты вектора $k\vec{a}$ равны $\{kx;\ ky\}$.

Рассмотренные правила позволяют определить координаты любого вектора, представленного в виде алгебраической суммы данных векторов с известными координатами. Пусть, например, требуется найти координаты вектора $\vec{p}=2\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{c}$, если известно, что $\vec{a}\ \{1;\ -2\}$, $\vec{b}\ \{0;\ 3\}$, $\vec{c}\ \{-2;\ 3\}$.

По правилу 3^0 вектор $2\vec{a}$ имеет координаты $\{2;\ -4\}$, а вектор $-\frac{1}{3}\vec{b}$ — координаты $\{0;\ -1\}$. Так как $\vec{p}=(2\vec{a})+\left(-\frac{1}{3}\vec{b}\right)+\vec{c}$, то координаты вектора $\vec{p}$ можно найти по правилу 1^0: $\{2+0-2;\ -4-$ $-1+3\}$. Итак, вектор $\vec{p}$ имеет координаты $\{0;\ -2\}$.

Задачи

911. Найдите такое число k, чтобы выполнялось равенство $\vec{n}=k\vec{m}$, если известно, что: а) векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ противоположно направлены и $|\vec{m}|=0{,}5$ см, $|\vec{n}|=2$ см; б) векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ сонаправлены и $|\vec{m}|=12$ см, $|\vec{n}|=24$ дм; в) векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ противоположно направлены и $|\vec{m}|=400$ мм, $|\vec{n}|=4$ дм; г) векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ сонаправлены и $|\vec{m}|=\sqrt{2}$ см, $|\vec{n}|=\sqrt{50}$ см.

912. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O, M — середина отрезка AO. Найдите, если это возможно, такое число k, чтобы выполнялось равенство: а) $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AO}$; б) $\overrightarrow{BO}=k\overrightarrow{BD}$; в) $\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{CA}$; г) $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{DC}$; д) $\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{DA}$; е) $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{CA}$; ж) $\overrightarrow{MC}=k\overrightarrow{AM}$; з) $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{CM}$; и) $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BC}$; к) $\overrightarrow{AO}=k\overrightarrow{BD}$.

913. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Коллинеарны ли векторы: а) $\vec{a}+3\vec{b}$ и $\vec{a}$; б) $\vec{b}-2\vec{a}$ и $\vec{a}$? Ответ обоснуйте.

914. Докажите, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то: а) векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ не коллинеарны; б) векторы $2\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{a}+\vec{b}$ не коллинеарны; в) векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}+3\vec{b}$ не коллинеарны.

915. Точка M лежит на диагонали AC параллелограмма $ABCD$, причем $AM:MC=4:1$. Разложите вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$

916. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Найдите числа x и y, удовлетворяющие равенству: а) $3\vec{a}-x\vec{b}=y\vec{a}+\vec{b}$; б) $4\vec{a}-x\vec{a}+5\vec{b}+y\vec{b}=\vec{0}$; в) $x\vec{a}+3\vec{b}-y\vec{b}=\vec{0}$; г) $\vec{a}+\vec{b}-3y\vec{a}+x\vec{b}=\vec{0}$.

917. Начертите прямоугольную систему координат Oxy и координатные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Постройте векторы с началом в точке O, заданные координатами $\vec{a}\{3;\ 0\}$, $\vec{b}\{2;\ -1\}$, $\vec{c}\{0;\ -3\}$, $\vec{d}\{1;\ 1\}$, $\vec{e}\{2;\ \sqrt{2}\}$.

918. Разложите векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ и $\vec{f}$, изображенные на рисунке 276, *а, б, в,* по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ и найдите их координаты.

919. Выпишите координаты векторов $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{b}=-\frac{1}{2}\vec{i}-2\vec{j}$, $\vec{c}=8\vec{i}$, $\vec{d}=\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{e}=-2\vec{j}$, $\vec{f}=-\vec{i}$.

920. Запишите разложение по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ вектора: а) $\vec{x}\left\{-3;\ \frac{1}{5}\right\}$; б) $\vec{y}\{-2;\ -3\}$; в) $\vec{z}\{-1;\ 0\}$; г) $\vec{u}\{0;\ 3\}$; д) $\vec{v}\{0;\ 1\}$.

921. Найдите числа x и y, удовлетворяющие условию: а) $x\vec{i}+y\vec{j}=5\vec{i}-2\vec{j}$; б) $-3\vec{i}+y\vec{j}=x\vec{i}+7\vec{j}$; в) $x\vec{i}+y\vec{j}=-4\vec{i}$; г) $x\vec{i}+y\vec{j}=\vec{0}$.

922. Найдите координаты вектора $\vec{a}+\vec{b}$, если: а) $\vec{a}\{3;\ 2\}$, $\vec{b}\{2;\ 5\}$;

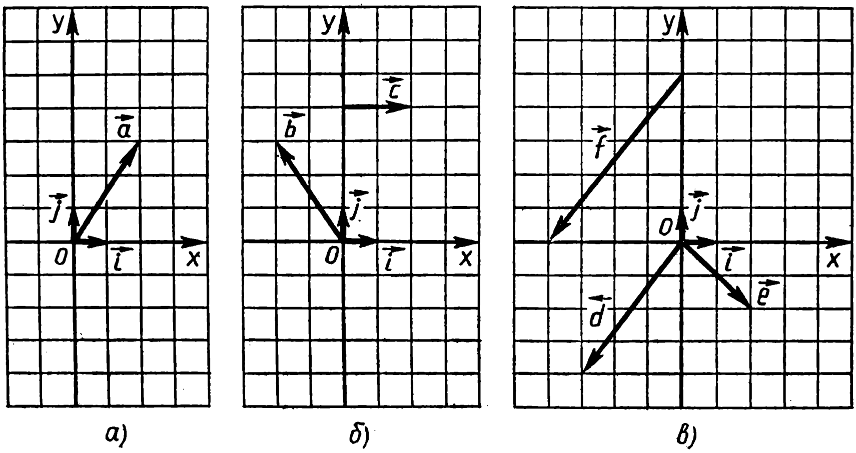


Рис. 276

б) $\vec{a}\{3;\ -4\}$, $\vec{b}\{1;\ 5\}$; в) $\vec{a}\{-4;\ -2\}$, $\vec{b}\{5;\ 3\}$; г) $\vec{a}\{2;\ 7\}$, $\vec{b}\{-3;\ -7\}$.

923. Найдите координаты вектора $\vec{a}-\vec{b}$, если: а) $\vec{a}\{5;\ 3\}$, $\vec{b}\{2;\ 1\}$; б) $\vec{a}\{3;\ 2\}$, $\vec{b}\{-3;\ 2\}$; в) $\vec{a}\{3;\ 6\}$, $\vec{b}\{4;\ -3\}$; г) $\vec{a}\{-5;\ -6\}$, $\vec{b}\{2;\ -4\}$.

924. Найдите координаты векторов $2\vec{a}$, $3\vec{a}$, $-\vec{a}$, $-3\vec{a}$, если $\vec{a}\{3;\ 2\}$.

925. Даны векторы $\vec{a}\{2;\ 4\}$, $\vec{b}\{-2;\ 0\}$, $\vec{c}\{0;\ 0\}$, $\vec{d}\{-2;\ -3\}$, $\vec{e}\{2;\ -3\}$, $\vec{f}\{0;\ 5\}$. Найдите координаты векторов, противоположных данным.

926. Найдите координаты вектора $\vec{v}$, если: а) $\vec{v}=3\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{a}\{2;\ -5\}$, $\vec{b}\{-5;\ 2\}$; б) $\vec{v}=2\vec{a}-3\vec{b}+4\vec{c}$, $\vec{a}\{4;\ 1\}$, $\vec{b}\{1;\ 2\}$, $\vec{c}\{2;\ 7\}$; в) $\vec{v}=3\vec{a}-2\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$, $\vec{a}\{-7;\ -1\}$, $\vec{b}\{-1;\ 7\}$, $\vec{c}\{4;\ -6\}$; г) $\vec{v}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{a}\{7;\ -2\}$, $\vec{b}\{2;\ 5\}$, $\vec{c}\{-3;\ 3\}$.

927. Докажите, что если два вектора коллинеарны, то координаты одного вектора пропорциональны координатам другого. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

928. Даны векторы $\vec{a}\{3;\ 7\}$, $\vec{b}\{-2;\ 1\}$, $\vec{c}\{6;\ 14\}$, $\vec{d}\{2;\ -1\}$, $\vec{e}\{2;\ 4\}$. Укажите среди этих векторов пары коллинеарных векторов.

§ 2. ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ В КООРДИНАТАХ

88. Связь между координатами вектора и координатами его начала и конца. Рассмотрим прямоугольную систему координат и какую-нибудь точку M с координатами $(x;\ y)$. Напомним, как определяются числа x и y. Проведем через точку M прямые, перпендикулярные к осям координат, и обозначим через M_1 и M_2 точки пере-

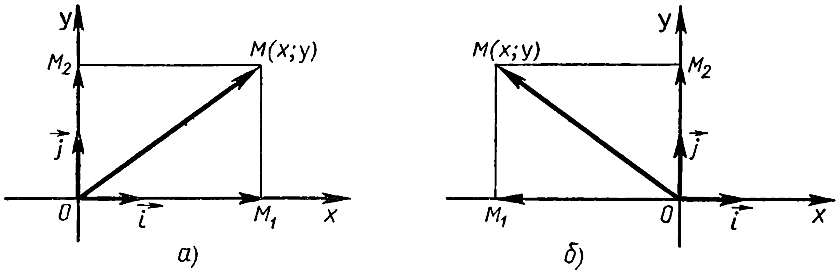


Рис. 277

сечения этих прямых с осями Ox и Oy (рис. 277). Число x (абсцисса точки M) определяется так: $x=OM_1$, если M_1 — точка положительной полуоси (рис. 277, *а*); $x=-OM_1$, если M_1 — точка отрицательной полуоси (рис. 277, *б*); $x=0$, если M_1 совпадает с точкой O.

Аналогично определяется число y (ордината точки M). На рисунке 278 изображена прямоугольная система координат Oxy и отмечены точки $A\,(3;\ 2)$, $B\,(-4;\ 3)$, $C\,(-2{,}5;\ 0)$.

Вектор $\overrightarrow{OM}$ назовем *радиус-вектором* точки M. Докажем, что *координаты точки M равны соответствующим координатам ее радиус-вектора*. Воспользуемся равенством $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$ (см. рис. 277) и докажем, что $\overrightarrow{OM_1}=x\vec{i}$ и $\overrightarrow{OM_2}=y\vec{j}$. В самом деле, если $x>0$ (как на рисунке 277, *а*), то $x=OM_1$, а векторы $\overrightarrow{OM_1}$ и $\vec{i}$ сонаправлены. Поэтому $\overrightarrow{OM_1}=OM_1\vec{i}=x\vec{i}$. Если $x<0$ (как на рисунке 277, *б*), то $x=-OM_1$, а векторы $\overrightarrow{OM_1}$ и $\vec{i}$ противоположно направлены. Поэтому $\overrightarrow{OM_1}=-OM_1\vec{i}=x\vec{i}$. Наконец, если $x=0$, то $\overrightarrow{OM_1}=\vec{0}$ и равенство $\overrightarrow{OM_1}=x\vec{i}$ в этом случае также справедливо. Таким образом, в любом случае $\overrightarrow{OM_1}=x\vec{i}$. Аналогично доказывается, что $\overrightarrow{OM_2}=y\vec{j}$. Следовательно, $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}=x\vec{i}+y\vec{j}$. Отсюда следует, что координаты радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ равны $\{x;\ y\}$, т. е. равны соответствующим координатам точки M, что и требовалось доказать.

Пользуясь доказанным утверждением, выразим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ через координаты его начала A и конца B. Пусть точка A имеет координаты $(x_1;\ y_1)$, а точка B — координаты $(x_2;\ y_2)$. Вектор $\overrightarrow{AB}$ равен разности векторов $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$ (рис. 279), поэтому его координаты равны разностям соответствующих координат векторов $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$. Но $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$ — радиус-векторы точек B и A, и, значит, $\overrightarrow{OB}$ имеет координаты $\{x_2;\ y_2\}$, а $\overrightarrow{OA}$ имеет коорди-

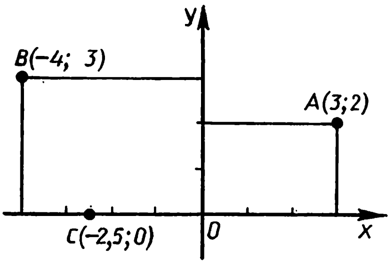


Рис. 278

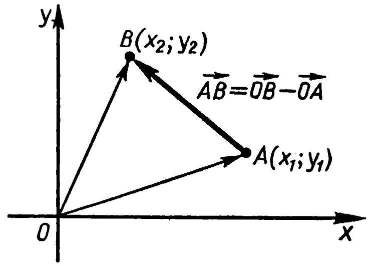


Рис. 279

наты $\{x_1;\ y_1\}$. Следовательно, вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $\{x_2-x_1;\ y_2-y_1\}$.

Таким образом, *каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала.*

На рисунке 275 точки B и C имеют координаты (1; 4) и (4; 2), поэтому координаты вектора $\overrightarrow{BC}$ равны $\{3;\ -2\}$.

89. Простейшие задачи в координатах. Введение системы координат дает возможность изучать геометрические фигуры и их свойства с помощью уравнений и неравенств и, таким образом, использовать в геометрии методы алгебры. Такой подход к изучению свойств геометрических фигур называется *методом координат.*

Рассмотрим три вспомогательные задачи.

а) Координаты середины отрезка. Пусть в системе координат Oxy точка A имеет координаты $(x_1;\ y_1)$, а точка B — координаты $(x_2;\ y_2)$. Выразим координаты $(x;\ y)$ середины C отрезка AB через координаты его концов.

Так как точка C — середина отрезка AB, то

$$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}). \qquad (1)$$

(Это равенство было доказано в п. 84.)

Координаты векторов $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ равны соответствующим координатам точек C, A и B: $\overrightarrow{OC}\ \{x;\ y\}$, $\overrightarrow{OA}\ \{x_1;\ y_1\}$, $\overrightarrow{OB}\ \{x_2;\ y_2\}$. Записывая равенство (1) в координатах, получим:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Таким образом, *каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.*

б) Вычисление длины вектора по его координатам. Докажем, что *длина вектора $\vec{a}\ \{x;\ y\}$ вычисляется по формуле*

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

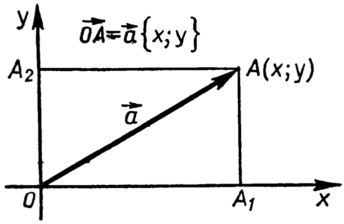


Рис. 280

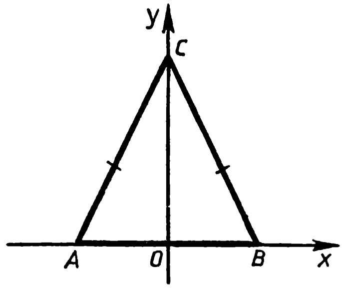


Рис. 281

Отложим от начала координат вектор $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и проведем через точку A перпендикуляры AA_1 и AA_2 к осям Ox и Oy (рис. 280). Координаты точки A равны координатам вектора $\overrightarrow{OA}$, т. е. $(x;\ y)$. Поэтому $OA_1=|x|$, $AA_1=OA_2=|y|$ (мы рассматриваем случай, когда $x\neq 0$ и $y\neq 0$; другие случаи рассмотрите самостоятельно). По теореме Пифагора

$$OA=\sqrt{OA_1^2+AA_1^2}=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Но $|\vec{a}|=|\overrightarrow{OA}|=OA$, поэтому $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$, что и требовалось доказать.

в) Расстояние между двумя точками. Пусть точка M_1 имеет координаты $(x_1;\ y_1)$, а точка M_2 — координаты $(x_2;\ y_2)$. Выразим расстояние d между точками M_1 и M_2 через их координаты.

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$. Его координаты равны $\{x_2-x_1;\ y_2-y_1\}$. Следовательно, длина этого вектора может быть найдена по формуле

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Но $|\overrightarrow{M_1M_2}|=d$. Таким образом, расстояние d между точками $M_1\,(x_1;\ y_1)$ и $M_2\,(x_2;\ y_2)$ выражается формулой

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Задачи

929. Точка A лежит на положительной полуоси Ox, а точка B — на положительной полуоси Oy. Найдите координаты вершин треугольника ABO, если: а) $OA=5$, $OB=3$; б) $OA=a$, $OB=b$.

930. Точка A лежит на положительной полуоси Ox, а точка B — на положительной полуоси Oy. Найдите координаты вершин прямоугольника $OACB$, если: а) $OA=6{,}5$, $OB=3$; б) $OA=a$, $OB=b$.

931. Начертите квадрат $MNPQ$ так, чтобы вершина P имела координаты $(-3;\ 3)$, а диагонали квадрата пересекались в начале координат. Найдите координаты точек M, N и Q.

932. Найдите координаты вершин равнобедренного треугольника ABC, изображенного на рисунке 281, если $AB=2a$, а высота CO равна h.

933. Найдите координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, если $A\,(0;\ 0)$, $B\,(5;\ 0)$, $C\,(12;\ -3)$.

934. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, зная координаты его начала и конца: а) $A\,(2;\ 7)$, $B\,(-2;\ 7)$; б) $A\,(-5;\ 1)$, $B\,(-5;\ 27)$; в) $A\,(-3;\ 0)$, $B\,(0;\ 4)$; г) $A\,(0;\ 3)$, $B\,(-4;\ 0)$.

935. Перечертите таблицу в тетрадь, заполните пустые клетки и найдите x и y:

A	$(0;\ 0)$	$(x;\ -3)$		$(a;\ b)$	$(1;\ 2)$
B	$(1;\ 1)$	$(2;\ -7)$	$(3;\ 1)$		
$\overrightarrow{AB}$		$\{5;\ y\}$	$\left\{-3;\ -\frac{1}{2}\right\}$	$\{c;\ d\}$	$\{0;\ 0\}$

936. Перечертите таблицу в тетрадь и, используя формулы для вычисления координат середины M отрезка AB, заполните пустые клетки:

A	$(2;\ -3)$		$(0;\ 1)$	$(0;\ 0)$	$(c;\ d)$	$(3;\ 5)$	$(3t+5;\ 7)$	$(1;\ 3)$
B	$(-3;\ 1)$	$(4;\ 7)$		$(-3;\ 7)$		$(3;\ 8)$	$(t+7;\ -7)$	
M		$(-3;\ -2)$	$(3;\ -5)$		$(a;\ b)$			$(0;\ 0)$

937. Даны точки $A\,(0;\ 1)$ и $B\,(5;\ -3)$. Найдите координаты точек C и D, если известно, что точка B — середина отрезка AC, а точка D — середина отрезка BC.

938. Найдите длины векторов: а) $\vec{a}\,\{5;\ 9\}$; б) $\vec{b}\,\{-3;\ 4\}$; в) $\vec{c}\,\{-10;\ -10\}$; г) $\vec{d}\,\{10;\ 17\}$; д) $\vec{e}\,\{11;\ -11\}$; е) $\vec{f}\,\{10;\ 0\}$.

939. Найдите расстояние от точки $M\,(3;\ -2)$: а) до оси абсцисс; б) до оси ординат; в) до начала координат.

940. Найдите расстояние между точками A и B, если: а) $A\,(2;\ 7)$, $B\,(-2;\ 7)$; б) $A\,(-5;\ 1)$, $B\,(-5;\ -7)$; в) $A\,(-3;\ 0)$, $B\,(0;\ 4)$; г) $A\,(0;\ 3)$, $B\,(-4;\ 0)$.

941. Найдите периметр треугольника MNP, если $M\,(4;\ 0)$, $N\,(12;\ -2)$, $P\,(5;\ -9)$.

942. Найдите медиану AM треугольника ABC, вершины которого имеют координаты: $A\,(0;\ 1)$, $B\,(1;\ -4)$, $C\,(5;\ 2)$.

943. Точки B и C лежат соответственно на положительных полуосях Ox и Oy, а точка A лежит на отрицательной полуоси Ox, причем $OA=a$, $OB=b$, $OC=h$. Найдите стороны AC и BC треугольника ABC.

944. Вершина A параллелограмма $OACB$ лежит на положительной полуоси Ox, вершина B имеет координаты $(b;\ c)$, а $OA=a$. Найдите: а) координаты вершины C; б) сторону AC и диагональ CO.

945. Найдите сторону AC и диагональ OC трапеции $OBCA$ с основаниями $OA=a$ и $BC=d$, если точка A лежит на положительной полуоси Ox, а вершина B имеет координаты $(b;\ c)$.

946. Найдите x, если: а) расстояние между точками $A\,(2;\ 3)$ и $B\,(x;\ 1)$ равно 2; б) расстояние между точками $M_1\,(-1;\ x)$ и $M_2\,(2x;\ 3)$ равно 7.

947. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный, и найдите его площадь, если вершины треугольника имеют координаты: а) $A\,(0;\ 1)$, $B\,(1;\ -4)$, $C\,(5;\ 2)$; б) $A\,(-4;\ 1)$, $B\,(-2;\ 4)$, $C\,(0;\ 1)$.

948. На оси ординат найдите точку, равноудаленную от точек: а) $A\,(-3;\ 5)$ и $B\,(6;\ 4)$; б) $C\,(4;\ -3)$ и $D\,(8;\ 1)$.

949. На оси абсцисс найдите точку, равноудаленную от точек: а) $A\,(1;\ 2)$ и $B\,(-3;\ 4)$; б) $C\,(1;\ 1)$ и $D\,(3;\ 5)$.

950. Докажите, что четырехугольник $MNPQ$ является параллелограммом, и найдите его диагонали, если: а) $M\,(1;\ 1)$, $N\,(6;\ 1)$, $P\,(7;\ 4)$, $Q\,(2;\ 4)$; б) $M\,(-5;\ 1)$, $N\,(-4;\ 4)$, $P\,(-1;\ 5)$, $Q\,(-2;\ 2)$.

951. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является прямоугольником, и найдите его площадь, если: а) $A\,(-3;\ -1)$, $B\,(1;\ -1)$, $C\,(1;\ -3)$, $D\,(-3;\ -3)$; б) $A\,(4;\ 1)$, $B\,(3;\ 5)$, $C\,(-1;\ 4)$, $D\,(0;\ 0)$.

Применение метода координат к решению задач

Формулы координат середины отрезка и расстояния между двумя точками можно использовать для решения более сложных геометрических задач. С этой целью следует ввести прямоугольную систему координат и записать условие задачи в координатах. После этого решение задачи проводится с помощью алгебраических вычислений.

952. Докажите, что середина гипотенузы прямоугольного треугольника равноудалена от всех его вершин.

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Обозначим буквой M середину гипотенузы AB. Введем прямоугольную систему координат так, как показано на рисунке 282. Если $BC=a$, $AC=b$, то вершины треугольника имеют координаты $C\,(0;\ 0)$, $B\,(a;\ 0)$, $A\,(0;\ b)$. По формулам координат середины отрезка находим коорди-

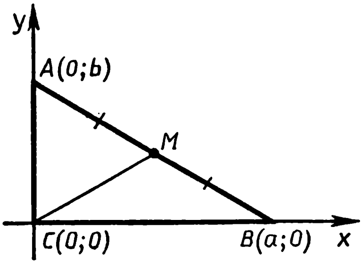


Рис. 282

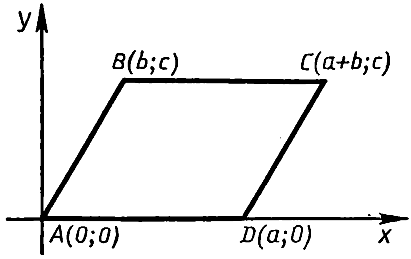


Рис. 283

наты точки M: $M\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$.

Пользуясь формулой расстояния между двумя точками, найдем длины отрезков MC и MA:

$$MC=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2},$$
$$MA=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}-b\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}.$$

Таким образом, $MA=MB=MC$, что и требовалось доказать.

953. Докажите, что сумма квадратов всех сторон параллелограмма равна сумме квадратов его диагоналей.

Решение. Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм. Введем прямоугольную систему координат так, как показано на рисунке 283. Если $AD=BC=a$, а точка B имеет координаты $(b; c)$, то точка D имеет координаты $(a; 0)$, а точка C — координаты $(a+b; c)$. Используя формулу расстояния между двумя точками, находим:

$$AB^2=b^2+c^2;\ AD^2=a^2;\ AC^2=(a+b)^2+c^2;\ BD^2=(a-b)^2+c^2.$$

Отсюда получаем:

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2\,(AB^2+AD^2)=2\,(a^2+b^2+c^2),$$
$$AC^2+BD^2=(a+b)^2+c^2+(a-b)^2+c^2=2\,(a^2+b^2+c^2).$$

Таким образом, $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2$,

что и требовалось доказать.

954. Медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, равна 160 см, а основание треугольника равно 80 см. Найдите две другие медианы этого треугольника.

955. Высота треугольника, равная 10 см, делит основание на два отрезка, равные 10 см и 4 см. Найдите медиану, проведенную к меньшей из двух других сторон.

956. Докажите, что в равнобедренной трапеции диагонали равны. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

957. Докажите, что если диагонали параллелограмма равны, то параллелограмм является прямоугольником.

958. Дан прямоугольник $ABCD$. Докажите, что для произвольной точки M плоскости справедливо равенство

$$AM^2+CM^2=BM^2+DM^2.$$

§ 3. УРАВНЕНИЯ ОКРУЖНОСТИ И ПРЯМОЙ

90. Уравнение линии на плоскости. При изучении алгебры мы строили графики некоторых функций в прямоугольной системе координат, например график функции $y=x$. Известно, что графиком этой функции является прямая, проходящая через точки $O(0;\ 0)$ и $A(1;\ 1)$ (рис. 284). Координаты любой точки $M(x;\ y)$, лежащей на прямой OA, удовлетворяют уравнению $y=x$ (так как $MM_1=$ $=MM_2$), а координаты любой точки, не лежащей на прямой OA, этому уравнению не удовлетворяют. Говорят, что уравнение $y=x$ является уравнением прямой OA. Введем теперь понятие уравнения произвольной линии.

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат Oxy и дана некоторая линия L (рис. 285). *Уравнение с двумя переменными x и y называется уравнением линии L, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки линии L и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой линии.*

При изучении линий методом координат возникают две задачи: 1) по геометрическим свойствам данной линии найти ее уравнение; 2) обратная задача: по заданному уравнению линии исследовать ее геометрические свойства. В следующем пункте мы рассмотрим первую из этих задач применительно к окружности. Вторая задача рассматривалась в курсе алгебры при построении графиков функций.

91. Уравнение окружности. Выведем уравнение окружности радиуса r с центром C в заданной прямоугольной системе координат. Пусть точка C имеет координаты $(x_0;\ y_0)$ (рис. 286).

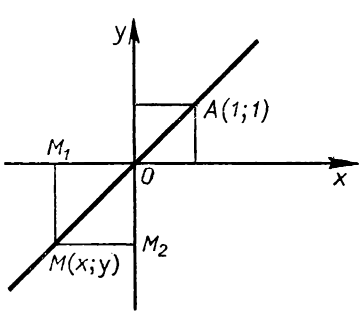


Рис. 284

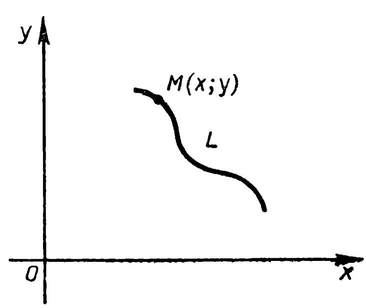


Рис. 285

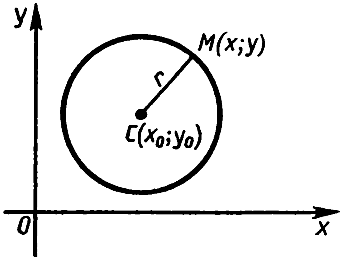


Рис. 286

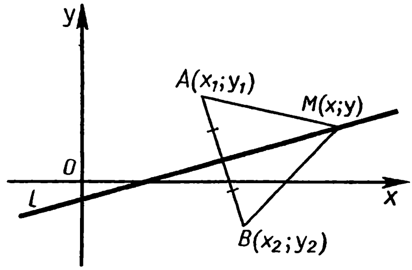


Рис. 287

Расстояние от произвольной точки $M(x;\ y)$ до точки C вычисляется по формуле $MC=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. Если точка M лежит на данной окружности, то $MC=r$, или $MC^2=r^2$, т. е. координаты точки M удовлетворяют уравнению

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2. \tag{1}$$

Если же точка $M(x;\ y)$ не лежит на данной окружности, то $MC^2\neq r^2$, и, значит, координаты точки M не удовлетворяют уравнению (1). Следовательно, в *прямоугольной системе координат уравнение окружности радиуса r с центром в точке $C(x_0;\ y_0)$ имеет вид:*

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2.$$

В частности, уравнение окружности радиуса r с центром в **начале** координат имеет вид:

$$x^2+y^2=r^2.$$

З а д а ч а. *Найти уравнение окружности с центром в точке $(-3;\ 4)$, проходящей через начало координат.*

Р е ш е н и е. Центр окружности имеет координаты $(-3;\ 4)$. Поэтому уравнение этой окружности можно записать в виде $(x+3)^2+(y-4)^2=r^2$, где r — пока неизвестный радиус окружности. Найдем его. Для этого воспользуемся тем, что окружность проходит через начало координат, т. е. координаты точки $O\ (0;\ 0)$ удовлетворяют этому уравнению: $(0+3)^2+(0-4)^2=r^2$. Отсюда $r^2=25$, и, значит, $r=5$. Итак, искомое уравнение окружности имеет вид

$$(x+3)^2+(y-4)^2=25.$$

Если раскрыть скобки и привести подобные члены, то получится уравнение $x^2+y^2+6x-8y=0$, которое также является уравнением данной окружности.

92. Уравнение прямой. Выведем уравнение данной прямой l в заданной прямоугольной системе координат. Отметим две точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$ так, чтобы прямая l была серединным перпендикуляром к отрезку AB (рис. 287). Если точка $M(x;\ y)$ лежит на прямой l, то $AM=BM$, или $AM^2=BM^2$, т. е. координа-

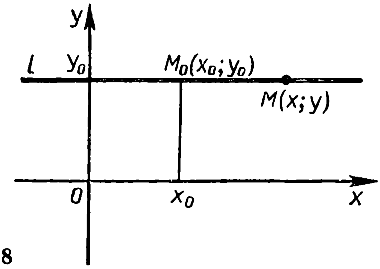


Рис. 288

ты точки M удовлетворяют уравнению

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2. \quad (2)$$

Если же точка $M(x;\ y)$ не лежит на прямой l, то $AM^2 \neq BM^2$, и, значит, координаты точки M не удовлетворяют уравнению (2). Следовательно, уравнение (2) является уравнением прямой l в заданной системе координат. После возведения выражений в скобках в квадрат и приведения подобных членов уравнение (2) принимает вид

$$ax+by+c=0, \quad (3)$$

где $a=2(x_1-x_2)$, $b=2(y_1-y_2)$, $c=x_2^2+y_2^2-x_1^2-y_1^2$. Так как $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$ — различные точки, то хотя бы одна из разностей (x_1-x_2) и (y_1-y_2) не равна нулю, т. е. хотя бы один из коэффициентов a и b отличен от нуля. Таким образом, *уравнение прямой в прямоугольной системе координат является уравнением первой степени.*

Выведем уравнение прямой l, проходящей через точку $M_0(x_0;\ y_0)$ и параллельной оси Ox (рис. 288). Ордината любой точки $M(x;\ y)$ прямой l равна y_0, т. е. координаты любой точки $M(x;\ y)$ прямой l удовлетворяют уравнению $y=y_0$. В то же время координаты любой точки, не лежащей на прямой l, этому уравнению не удовлетворяют.

Следовательно, уравнение $y=y_0$ является уравнением прямой l. Аналогично уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;\ y_0)$ параллельно оси Oy, имеет вид $x=x_0$.

Ясно, что ось Ox имеет уравнение $y=0$, а ось Oy — уравнение $x=0$.

Задачи

959. Начертите окружность, заданную уравнением: а) $x^2+y^2=9$; б) $(x-1)^2+(y+2)^2=4$; в) $(x+5)^2+(y-3)^2=25$; г) $(x-1)^2+y^2=4$; д) $x^2+(y+2)^2=2$.

960. Какие из точек $A(3;\ -4)$, $B(1;\ 0)$, $C(0;\ 5)$, $D(0;\ 0)$ и $E(0;\ 1)$ лежат на окружности, заданной уравнением: а) $x^2+y^2=25$; б) $(x-1)^2+(y+3)^2=9$; в) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$?

961. Окружность задана уравнением $(x+5)^2+(y-1)^2=16$. Не пользуясь чертежом, укажите, какие из точек $A(-2;\ 4)$, $B(-5;\ -3)$, $C(-7;\ -2)$ и $D(1;\ 5)$ лежат: а) внутри круга, ограниченного данной окружностью; б) на окружности; в) вне круга, ограниченного данной окружностью.

962. Даны окружность $x^2+y^2=25$ и две точки $A(3;\ 4)$ и $B(4;\ -3)$. Докажите, что AB — хорда данной окружности.

963. На окружности, заданной уравнением $x^2+y^2=25$, найдите точки: а) с абсциссой -4; б) с ординатой 3.

964. На окружности, заданной уравнением $(x-3)^2+(y-5)^2=25$, найдите точки: а) с абсциссой 3; б) с ординатой 5.

965. Напишите уравнения окружностей с центром в начале координат и радиусами $r_1=3$, $r_2=\sqrt{2}$, $r_3=\frac{5}{2}$.

966. Напишите уравнение окружности радиуса r с центром A, если: а) $A(0;\ 5)$, $r=3$; б) $A(-1;\ 2)$, $r=2$; в) $A(-3;\ -7)$, $r=\frac{1}{2}$; г) $A(4;\ -3)$, $r=10$.

967. Напишите уравнение окружности с центром в начале координат, проходящей через точку $B(-1;\ 3)$.

968. Напишите уравнение окружности с центром в точке $A(0;\ 6)$, проходящей через точку $B(-3;\ 2)$.

969. Напишите уравнение окружности с диаметром MN, если: а) $M(-3;\ 5)$, $N(7;\ -3)$; б) $M(2;\ -1)$, $N(4;\ 3)$.

970. Напишите уравнение окружности, проходящей через точку $A(1;\ 3)$, если известно, что центр окружности лежит на оси абсцисс, а радиус равен 5. Сколько существует таких окружностей?

971. Напишите уравнение окружности, проходящей через точки $A(-3;\ 0)$ и $B(0;\ 9)$, если известно, что центр окружности лежит на оси ординат.

972. Напишите уравнение прямой, проходящей через две данные точки: а) $A(1;\ -1)$ и $B(-3;\ 2)$; б) $C(2;\ 5)$ и $D(5;\ 2)$; в) $M(0;\ 1)$ и $N(-4;\ -5)$.

Р е ш е н и е. а) Уравнение прямой AB имеет вид $ax+by+c=0$. Так как точки A и B лежат на прямой AB, то их координаты удовлетворяют этому уравнению:

$$a\cdot 1+b(-1)+c=0,\ a\cdot(-3)+b\cdot 2+c=0$$
$$\text{или } a-b+c=0,\ -3a+2b+c=0.$$

Из этих уравнений выразим коэффициенты a и b через c: $a=3c$, $b=4c$. Подставив эти значения в уравнение прямой, получим $3cx+4cy+c=0$. При любом $c\neq 0$ это уравнение является уравнением прямой AB. Сократив на c, запишем искомое уравнение в виде $3x+4y+1=0$.

973. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(4;\ 6)$, $B(-4;\ 0)$, $C(-1;\ -4)$. Напишите уравнение прямой, содержащей медиану CM.

974. Даны координаты вершин трапеции $ABCD$: $A(-2;\ -2)$, $B(-3;\ 1)$, $C(7;\ 7)$ и $D(3;\ 1)$. Напишите уравнения прямых, содержащих: а) диагонали AC и BD; б) среднюю линию трапеции.

975. Найдите координаты точек пересечения прямой $3x-4y+12=0$ с осями координат. Начертите эту прямую.

976. Найдите координаты точки пересечения прямых

$$4x+3y-6=0 \text{ и } 2x+y-4=0.$$

977. Напишите уравнения прямых, проходящих через точку $M(2;\ 5)$ и параллельных осям координат.

978. Начертите прямую, заданную уравнением: а) $y=3$; б) $x=-2$; в) $y=-4$; г) $x=7$.

979. Найдите ординату точки M, лежащей на прямой AB, если известно, что $A(-8;\ -6)$, $B(-3;\ -1)$ и абсцисса точки M равна 5.

980. Напишите уравнения прямых, содержащих стороны ромба, диагонали которого равны 10 см и 4 см, если известно, что его диагонали лежат на осях координат.

Использование уравнений окружности и прямой при решении задач

981. Даны две точки A и B. Найдите множество всех точек, для каждой из которых расстояние от точки A в два раза больше расстояния от точки B.

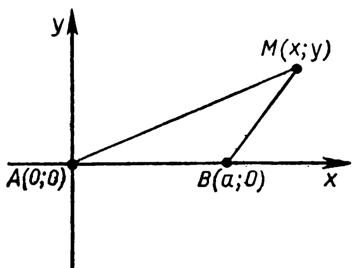
Решение. Введем прямоугольную систему координат так, как показано на рисунке 289, *а*. Тогда точки A и B имеют координаты $A(0;\ 0)$, $B(a;\ 0)$, где $a=AB$.

Найдем расстояния от произвольной точки $M(x;\ y)$ до точек A и B:

$$AM=\sqrt{x^2+y^2},\quad BM=\sqrt{(x-a)^2+y^2}.$$

Если точка $M(x;\ y)$ принадлежит искомому множеству, то $AM=2BM$ или $AM^2=4BM^2$. Поэтому ее координаты удовлетворяют уравнению

$$x^2+y^2=4\left((x-a)^2+y^2\right). \qquad (4)$$



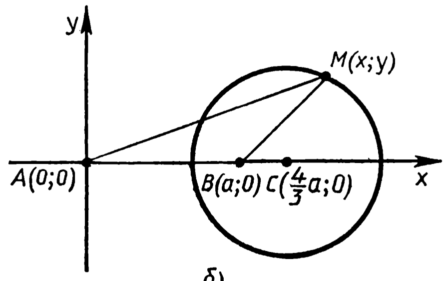


Рис. 289

Если же точка M не принадлежит искомому множеству, то ее координаты не удовлетворяют этому уравнению.

Следовательно, уравнение (4) и есть уравнение искомого множества точек в выбранной системе координат. Раскрывая скобки и группируя слагаемые соответствующим образом, уравнение (4) приводим к виду $\left(x-\frac{4}{3}a\right)^2+y^2=\left(\frac{2}{3}a\right)^2$.

Таким образом, искомым множеством точек является окружность радиуса $\frac{2}{3}a$ с центром в точке $C\left(\frac{4}{3}a;\ 0\right)$. Эта окружность изображена на рисунке 289, *б*.

Замечание. Аналогично можно доказать, что множеством всех точек M, удовлетворяющих условию $AM=kBM$, где k — данное положительное число, не равное единице, является окружность радиуса $\frac{ka}{|k^2-1|}$ с центром в точке $\left(\frac{k^2a}{k^2-1};\ 0\right)$.

Эти окружности, соответствующие различным значениям $k\neq 1$, называют *окружностями Аполлония,* поскольку они рассматривались еще древнегреческим математиком Аполлонием в его трактате «О кругах» во II в. до н. э.

Если $k=1$, то задача сводится к известной нам задаче о нахождении множества всех точек, равноудаленных от точек A и B. Таким множеством, как мы знаем, является серединный перпендикуляр к отрезку AB.

982. Точка B — середина отрезка AC, длина которого равна 2. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых: а) $AM^2+BM^2+CM^2=50$; б) $AM^2+2BM^2+3CM^2=4$.

983. Даны две точки A и B. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых $AM^2+BM^2=k^2$, где k — данное число.

984. Даны две точки A и B. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых $AM^2-BM^2=k$, где k — данное число.
Решение. Введем прямоугольную систему координат так, чтобы точка A была началом координат, а точка B имела координаты $(a;\ 0)$, где $a=AB$.

Найдем расстояния от произвольной точки $M\ (x;\ y)$ до точек A и B:

$$AM=\sqrt{x^2+y^2},\quad BM=\sqrt{(x-a)^2+y^2}.$$

Если точка $M\ (x;\ y)$ принадлежит искомому множеству, то $AM^2-BM^2=k$, поэтому координаты точки M удовлетворяют уравнению $x^2+y^2-(x-a)^2-y^2=k$, или $2ax-a^2-k=0$. Если же точка M не принадлежит искомому множеству, то ее координаты не удовлетворяют этому уравнению. Итак, полученное уравнение является уравнением искомого множества точек. Но этим уравнением определяется прямая, параллельная оси Oy, если $a^2+k\neq0$, и сама ось Oy, если $a^2+k=0$. Таким образом, искомым множеством точек является прямая, перпендикулярная к прямой AB.

985. Даны две точки A и B. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых $BM^2-AM^2=2AB^2$.

986. Дан прямоугольник $ABCD$. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых

$$(AM^2+DM^2)-(BM^2+CM^2)=2AB^2.$$

987*. Дан ромб $ABCD$, диагонали которого равны $2a$ и $2b$. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых

$$AM^2+DM^2=BM^2+CM^2.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ X

1. Сформулируйте и докажите лемму о коллинеарных векторах.
2. Что значит разложить вектор по двум данным векторам?
3. Сформулируйте и докажите теорему о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам.
4. Объясните, как вводится прямоугольная система координат.
5. Что такое координатные векторы?
6. Сформулируйте и докажите утверждение о разложении произвольного вектора по координатным векторам.
7. Что такое координаты вектора? Чему равны координаты координатных векторов? Как связаны между собой координаты равных векторов?
8. Сформулируйте и докажите правила нахождения координат суммы и разности векторов, а также произведения вектора на число по заданным координатам векторов.
9. Что такое радиус-вектор точки? Докажите, что координаты точки равны соответствующим координатам ее радиус-вектора.
10. Выведите формулы для вычисления координат вектора по координатам его начала и конца.
11. Выведите формулы для вычисления координат середины отрезка по координатам его концов.
12. Выведите формулу для вычисления длины вектора по его координатам.
13. Выведите формулу для вычисления расстояния между двумя точками по их координатам.
14. Приведите пример решения геометрической задачи с применением метода координат.
15. Какое уравнение называется уравнением данной линии? Приведите пример.
16. Выведите уравнение окружности данного радиуса с центром в данной точке.
17. Напишите уравнение окружности данного радиуса с центром в начале координат.
18. Выведите уравнение данной прямой в прямоугольной системе координат.

19. Напишите уравнения прямых, проходящих через данную точку $M_0(x_0;\ y_0)$ и параллельных осям координат.
20. Напишите уравнения осей координат.
21. Приведите примеры использования уравнений окружности и прямой при решении геометрических задач.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

988. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Найдите такое число x (если это возможно), чтобы векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ были коллинеарны: а) $\vec{p}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}+x\vec{b}$; б) $\vec{p}=x\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}+x\vec{b}$; в) $\vec{p}=\vec{a}+x\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}-2\vec{b}$; г) $\vec{p}=2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{q}=x\vec{a}+\vec{b}$.

989. Найдите координаты вектора $\vec{p}$ и его длину, если:
а) $\vec{p}=7\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{a}\{1;\ -1\}$, $\vec{b}\{5;\ -2\}$;
б) $\vec{p}=4\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{a}\{6;\ 3\}$, $\vec{b}\{5;\ 4\}$;
в) $\vec{p}=5\vec{a}-4\vec{b}$, $\vec{a}\left\{\frac{3}{5};\ \frac{1}{5}\right\}$, $\vec{b}\{6;\ -1\}$;
г) $\vec{p}=3(-2\vec{a}-4\vec{b})$, $\vec{a}\{1;\ 5\}$, $\vec{b}\{-1;\ -1\}$.

990. Даны векторы $\vec{a}\{3;\ 4\}$, $\vec{b}\{6;\ -8\}$, $\vec{c}\{1;\ 5\}$.
а) Найдите координаты векторов $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{r}=2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{s}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$. б) Найдите $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{p}|$, $|\vec{q}|$.

991. Докажите, что расстояние между любыми двумя точками $M_1(x_1;\ 0)$ и $M_2(x_2;\ 0)$ оси абсцисс вычисляется по формуле $d=|x_1-x_2|$.

992. Докажите, что треугольник ABC, вершины которого имеют координаты $A(4;\ 8)$, $B(12;\ 11)$, $C(7;\ 0)$, является равнобедренным, но не равносторонним.

993. Докажите, что углы A и C треугольника ABC равны, если $A(-5;\ 6)$, $B(3;\ -9)$ и $C(-12;\ -17)$.

994. Докажите, что точка D равноудалена от точек A, B и C, если: а) $D(1;\ 1)$, $A(5;\ 4)$, $B(4;\ -3)$, $C(-2;\ 5)$; б) $D(1;\ 0)$, $A(7;\ -8)$, $B(-5;\ 8)$, $C(9;\ 6)$.

995. На оси абсцисс найдите точку, равноудаленную от точек $M_1(-2;\ 4)$ и $M_2(6;\ 8)$.

996. Вершины треугольника ABC имеют координаты $A(-5;\ 13)$, $B(3;\ 5)$, $C(-3;\ -1)$. Найдите: а) координаты середин сторон треугольника; б) медиану, проведенную к стороне AC; в) средние линии треугольника.

997. Докажите, что четырехугольник $ABCD$, вершины которого имеют координаты $A(3;\ 2)$, $B(0;\ 5)$, $C(-3;\ 2)$, $D(0;\ -1)$, является квадратом.

998. Докажите, что четырехугольник $ABCD$, вершины которого имеют координаты $A(-2;\ -3)$, $B(1;\ 4)$, $C(8;\ 7)$, $D(5;\ 0)$, является ромбом. Найдите его площадь.

999. Найдите координаты четвертой вершины параллелограмма по заданным координатам трех его вершин: $(-4;\ 4)$, $(-5;\ 1)$ и $(-1;\ 5)$. Сколько решений имеет задача?

1000. Выясните, какие из данных уравнений являются уравнениями окружности. Найдите координаты центра и радиус каждой окружности:

а) $(x-1)^2+(y+2)^2=25$;

б) $x^2+(y+7)^2=1$;

в) $x^2+y^2+8x-4y+40=0$;

г) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$;

д) $x^2+y^2-4x-2y+1=0$.

1001. Напишите уравнение окружности, проходящей через точки $A\ (3;\ 0)$ и $B\ (-1;\ 2)$, если центр ее лежит на прямой $y=x+2$.

1002. Напишите уравнение окружности, проходящей через три данные точки: а) $A\ (1;\ -4)$, $B\ (4;\ 5)$, $C\ (3;\ -2)$; б) $A\ (3;\ -7)$, $B\ (8;\ -2)$, $C\ (6;\ 2)$.

1003. Вершины треугольника ABC имеют координаты $A\ (-7;\ 5)$, $B\ (3;\ -1)$, $C\ (5;\ 3)$. Составьте уравнения: а) серединных перпендикуляров к сторонам треугольника; б) прямых AB, BC и CA; в) прямых, на которых лежат средние линии треугольника.

1004. Докажите, что прямые, заданные уравнениями $3x-1{,}5y+1=0$ и $2x-y-3=0$, параллельны.

1005. Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой, если: а) $A\ (-2;\ 0)$, $B\left(3;\ 2\frac{1}{2}\right)$, $C\ (6;\ 4)$; б) $A\ (3;\ 10)$, $B\ (3;\ 12)$, $C\ (3;\ -6)$; в) $A\ (1;\ 2)$, $B\ (2;\ 5)$, $C\ (-10;\ -31)$.

Применение метода координат к решению задач

1006. Две стороны треугольника равны 17 см и 28 см, а высота, проведенная к большей из них, равна 15 см. Найдите медианы треугольника.

1007. Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.

1008. Дан параллелограмм $ABCD$. Докажите, что для всех точек M величина $(AM^2+CM^2)-(BM^2+DM^2)$ имеет одно и то же значение.

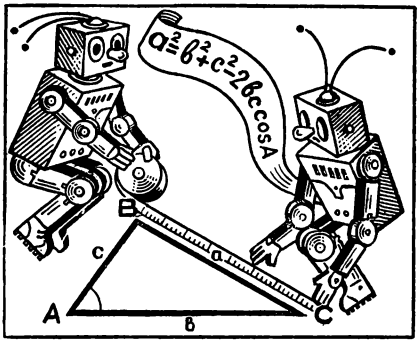
1009. Докажите, что медиану AA_1 треугольника ABC можно вычислить по формуле $AA_1=\frac{1}{2}\sqrt{2AC^2+2AB^2-BC^2}$. Используя эту формулу, докажите, что если две медианы треугольника равны, то треугольник равнобедренный.

1010. Даны две точки A и B. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых:

а) $2AM^2-BM^2=2AB^2$; б) $AM^2+2BM^2=6AB^2$.

Глава XI

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ



§ 1. СИНУС, КОСИНУС И ТАНГЕНС УГЛА

93. Синус, косинус, тангенс. Введем прямоугольную систему координат Oxy и построим полуокружность радиуса 1 с центром в начале координат, расположенную в первом и втором квадрантах (рис. 290). Назовем ее *единичной полуокружностью*. Из точки O проведем луч h, пересекающий единичную полуокружность в точке $M\ (x;\ y)$. Обозначим буквой α угол между лучом h и положительной полуосью абсцисс (если луч h совпадает с положительной полуосью абсцисс, то будем считать, что $\alpha=0°$).

Если угол α острый, то из прямоугольного треугольника DOM (см. рис. 290) имеем

$$\sin\alpha=\frac{MD}{OM},\ \cos\alpha=\frac{OD}{OM}.$$

Но $OM=1$, $MD=y$, $OD=x$, поэтому

$$\sin\alpha=y,\ \cos\alpha=x. \tag{1}$$

Итак, синус острого угла α равен ординате y точки M, а косинус угла α — абсциссе x точки M. Если угол α прямой, тупой или развернутый (углы AOC, AON и AOB на рисунке 290) или $\alpha=0°$, то синус и косинус угла α также определим по формулам (1). Таким образом, *для любого угла α из промежутка $0°\leqslant\alpha\leqslant180°$ синусом угла α называется ордината y точки M, а косинусом угла α — абсцисса x точки M*. Так как координаты $(x;\ y)$ точек единичной полуокружности заключены в промежутках $0\leqslant y\leqslant1$, $-1\leqslant x\leqslant1$, то для любого α из промежутка $0°\leqslant\alpha\leqslant180°$ справедливы неравенства

$$0\leqslant\sin\alpha\leqslant1,\quad -1\leqslant\cos\alpha\leqslant1.$$

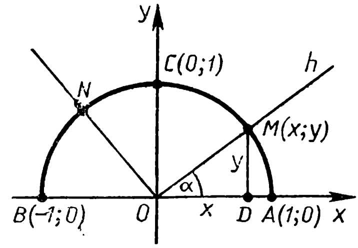


Рис. 290

Найдем значения синуса и косинуса для углов 0°, 90° и 180°. Для

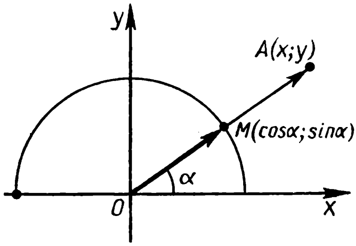


Рис. 291

этого рассмотрим лучи OA, OC и OB, соответствующие этим углам (см. рис. 290). Так как точки A, C и B имеют координаты $A\,(1;\ 0)$, $C\,(0;\ 1)$, $B\,(-1;\ 0)$, то

$$\sin 0^\circ = 0,\ \sin 90^\circ = 1,$$
$$\sin 180^\circ = 0,\quad \cos 0^\circ = 1,\quad \cos 90^\circ = 0,$$
$$\cos 180^\circ = -1. \qquad (2)$$

Тангенсом угла α ($\alpha \neq 90^\circ$) *называется отношение* $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \qquad (3)$$

При $\alpha = 90^\circ$ $\operatorname{tg}\alpha$ не определен, поскольку $\cos 90^\circ = 0$ и в формуле (3) знаменатель обращается в нуль. Используя формулы (2), находим: $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$, $\operatorname{tg} 180^\circ = 0$.

94. Основное тригонометрическое тождество. Формулы приведения. На рисунке 290 изображены система координат Oxy и единичная полуокружность ACB с центром O. Эта полуокружность является дугой окружности, уравнение которой имеет вид $x^2 + y^2 = 1$. Подставив сюда выражения для x и y из формул (1), получим равенство

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad (4)$$

которое выполняется для любого α из промежутка $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$. Равенство (4) называется *основным тригонометрическим тождеством*. В VIII классе оно было доказано для острых углов.

Справедливы также следующие тождества:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha,\ \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha \text{ при } 0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 90^\circ, \quad (5)$$
$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha,\ \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha \text{ при } 0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ. \quad (6)$$

Они называются *формулами приведения* и доказываются в курсе алгебры.

95. Формулы для вычисления координат точки. Пусть задана система координат Oxy и дана произвольная точка $A\,(x;\ y)$ с неотрицательной ординатой y (рис. 291). Выразим координаты точки A через длину отрезка OA и угол α между лучом OA и положительной полуосью Ox. Для этого обозначим буквой M точку пересечения луча OA с единичной полуокружностью. По формулам (1) координаты точки M соответственно равны $\cos\alpha$, $\sin\alpha$. Вектор $\overrightarrow{OM}$ имеет те же координаты, что и точка M, т. е. $\overrightarrow{OM}\,\{\cos\alpha;\ \sin\alpha\}$. Вектор $\overrightarrow{OA}$ имеет те же координаты, что и точка A, т. е. $\overrightarrow{OA}\,\{x;\ y\}$. Но $\overrightarrow{OA} = OA \cdot \overrightarrow{OM}$ (объясните почему), поэтому

$$x = OA\cos\alpha,\ y = OA\sin\alpha. \qquad (7)$$

Задачи

1011. Ответьте на вопросы: а) Может ли абсцисса точки единичной полуокружности иметь значения 0,3; $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$; $1\frac{2}{3}$; $-2{,}8$? б) Может ли ордината точки единичной полуокружности иметь значения 0,6; $\frac{1}{7}$; $-0{,}3$; 7; 1,002? Ответы обоснуйте.

1012. Проверьте, что точки $M_1(0;\ 1)$, $M_2\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $M_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $M_4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$, $A(1;\ 0)$, $B(-1;\ 0)$ лежат на единичной полуокружности. Выпишите значения синуса, косинуса и тангенса углов AOM_1, AOM_2, AOM_3, AOM_4, AOB.

1013. Найдите $\sin\alpha$, если: а) $\cos\alpha=\frac{1}{2}$; б) $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$; в) $\cos\alpha=-1$.

1014. Найдите $\cos\alpha$, если: а) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin\alpha=\frac{1}{4}$; в) $\sin\alpha=0$.

1015. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если: а) $\cos\alpha=1$; б) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $0°<\alpha<90°$; г) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ и $90°<\alpha<180°$.

1016. Вычислите синусы, косинусы и тангенсы углов 120°, 135°, 150°.

1017. Постройте $\angle A$, если: а) $\sin A=\frac{2}{3}$; б) $\cos A=\frac{3}{4}$; в) $\cos A=-\frac{2}{5}$.

1018. Угол между лучом OA, пересекающим единичную полуокружность, и положительной полуосью Ox равен α. Найдите координаты точки A, если: а) $OA=3$, $\alpha=45°$; б) $OA=1{,}5$, $\alpha=90°$; в) $OA=5$, $\alpha=150°$; г) $OA=1$, $\alpha=180°$; д) $OA=2$, $\alpha=30°$.

1019. Найдите угол между лучом OA и положительной полуосью Ox, если точка A имеет координаты: а) $(2;\ 2)$; б) $(0;\ 3)$; в) $(-\sqrt{3};\ 1)$; г) $(-2\sqrt{2};\ 2\sqrt{2})$.

§ 2. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА

96. Теорема о площади треугольника.

Теорема. ***Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.***

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC $BC=a$, $CA=b$ и S — площадь этого треугольника. Докажем, что

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C.$$

Введем систему координат с началом в точке C так, чтобы точка B лежала на положительной полуоси Cx, а точка A имела положительную ординату (рис. 292). Площадь данного треугольника можно вычислить по формуле $S=\frac{1}{2}ah$, где h — высота треугольника. Но h равна ординате точки A, т. е. $h=b\sin C$. Следовательно, $S=\frac{1}{2}ab\sin C$. Теорема доказана.

97. Теорема синусов.

Теорема. ***Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.***

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$. Докажем, что

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

По теореме о площади треугольника

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C,\ S=\frac{1}{2}bc\sin A,\ S=\frac{1}{2}ca\sin B.$$

Из первых двух равенств получаем $\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A$, откуда $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$. Точно так же из второго и третьего равенств следует $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$. Итак,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Можно доказать (см. задачу 1033), что отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности. Следовательно, для любого треугольника ABC со сторонами $AB=c$, $BC=a$ и $CA=b$ имеют

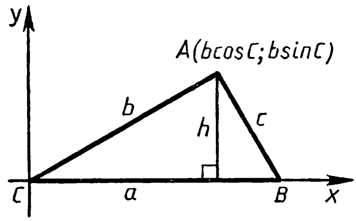


Рис. 292

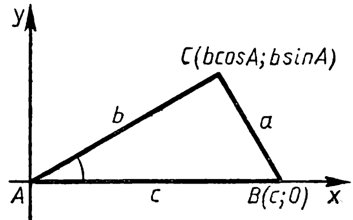


Рис. 293

место равенства

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R,$$

где R — радиус описанной окружности.

98. Теорема косинусов.

Теорема. ***Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.***

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$. Докажем, например, что

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A. \qquad (1)$$

Введем систему координат с началом в точке A так, как показано на рисунке 293. Тогда точка B имеет координаты $(c; 0)$, а точка C — координаты $(b\cos A;\ b\sin A)$. По формуле расстояния между двумя точками получаем:

$$BC^2=a^2=(b\cos A-c)^2+b^2\sin^2 A=$$
$$=b^2\cos^2 A+b^2\sin^2 A-2bc\cos A+c^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

Теорема доказана.

Теорему косинусов называют иногда *обобщенной теоремой Пифагора.* Такое название объясняется тем, что в теореме косинусов содержится как частный случай теорема Пифагора. В самом деле, если в треугольнике ABC угол A прямой, то $\cos A=\cos 90°=0$ и по формуле (1) получаем $a^2=b^2+c^2$, т. е. квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

99. Решение треугольников. Решением треугольника называется нахождение всех его шести элементов (т. е. трех сторон и трех углов) по каким-нибудь трем данным элементам, определяющим треугольник. Рассмотрим три задачи на решение треугольника. При этом будем пользоваться следующими обозначениями для сторон треугольника ABC: $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$.

Задача 1 (решение треугольника по двум сторонам и углу между ними). *Дано:* a, b, $\angle C$. *Найти:* c, $\angle A$, $\angle B$.

Решение. 1. По теореме косинусов находим c:

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}.$$

2. Пользуясь теоремой косинусов, получаем:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Угол A находим с помощью микрокалькулятора или по таблице[1].

3. $\angle B=180°-\angle A-\angle C$.

---

[1] О том, как пользоваться таблицей, рассказано в приложении 2.

З а д а ч а 2 (решение треугольника по стороне и прилежащим к ней углам). *Дано:* a, $\angle B$, $\angle C$. *Найти:* $\angle A$, b, c.

Р е ш е н и е. 1. $\angle A = 180° - \angle B - \angle C$.

2. С помощью теоремы синусов вычисляем b и c:

$$b = a\frac{\sin B}{\sin A}, \quad c = a\frac{\sin C}{\sin A}.$$

З а д а ч а 3 (решение треугольника по трем сторонам). *Дано:* a, b и c. *Найти:* $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$.

Р е ш е н и е. 1. Пользуясь теоремой косинусов, получаем:

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Угол A находим с помощью микрокалькулятора или по таблице.

2. Аналогично находим угол B.

3. $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$.

П р и м е р. Футбольный мяч находится в точке A футбольного поля на расстояниях 23 м и 24 м от оснований B и C стоек ворот (рис. 294). Футболист направляет мяч в ворота. Найдите угол α попадания мяча в ворота, если ширина ворот равна 7 м.

Р е ш е н и е. Рассмотрим треугольник ABC, вершинами которого являются точка A расположения мяча и точки B и C в основаниях стоек ворот. По условию задачи $c = AB = 23$ м, $b = AC = 24$ м и $a = BC = 7$ м. Эти данные позволяют решить треугольник ABC и найти угол α, равный углу A (см. задачу 3). С помощью теоремы косинусов определяем $\cos A$:

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{24^2+23^2-7^2}{2\cdot 24\cdot 23}.$$

Угол α находим с помощью микрокалькулятора по программе

$$24\boxed{F}\boxed{x^2}23\boxed{F}\boxed{x^2}\boxed{+}7\boxed{F}\boxed{x^2}\boxed{-}2\boxed{\div}23\boxed{\div}24\boxed{\div}$$
$$\boxed{\div}\boxed{F}\boxed{\cos^{-1}}$$

На индикаторе высвечивается значение угла α в градусах: 16,957426. Если перевести доли градуса в минуты, получим $\alpha \approx 16°57'$. Этот же результат можно получить по таблице.

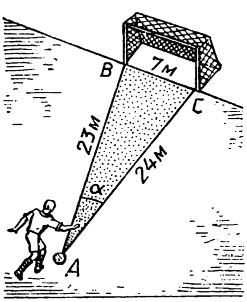


Рис. 294

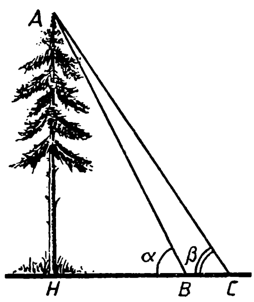


Рис. 295

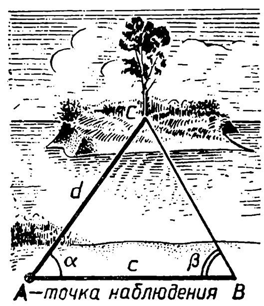


Рис. 296

100. Измерительные работы. Тригонометрические формулы используются при проведении различных измерительных работ на местности.

а) Измерение высоты предмета. Предположим, что требуется определить высоту AH какого-то предмета (рис. 295). Для этого отметим точку B на определенном расстоянии a от основания H предмета и измерим угол ABH: $\angle ABH=\alpha$. По этим данным из прямоугольного треугольника AHB находим высоту предмета: $AH=a \operatorname{tg} \alpha$.

Если основание предмета недоступно, то можно поступить так: на прямой, проходящей через основание H предмета, отметим две точки B и C на определенном расстоянии a друг от друга и измерим углы ABH и ACB: $\angle ABH=\alpha$ и $\angle ACB=\beta$ (см. рис. 295). Эти данные позволяют определить все элементы треугольника ABC, в частности AB. В самом деле, $\angle ABH$ — внешний угол треугольника ABC, поэтому $\angle A=\alpha-\beta$. Используя теорему синусов, находим AB:

$$AB=\frac{a\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

Из прямоугольного треугольника ABH находим высоту AH предмета: $AH=AB\cdot\sin\alpha$. Итак,

$$AH=\frac{a\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

б) Измерение расстояния до недоступной точки. Предположим, что нам надо найти расстояние d от пункта A до недоступного пункта C (рис. 296). Напомним, что эту задачу мы уже решали в VIII классе с помощью признаков подобия треугольников. Рассмотрим теперь другой способ решения задачи — с использованием формул тригонометрии.

На местности выберем точку B и измерим длину c отрезка AB. Затем измерим, например с помощью астролябии, углы A и B: $\angle A=\alpha$ и $\angle B=\beta$. Эти данные, т. е. c, α и β, позволяют решить треугольник ABC и найти искомое расстояние $d=AC$.

Сначала находим $\angle C$ и $\sin C$:

$\angle C=180°-\alpha-\beta$; $\sin C=\sin(180°-\alpha-\beta)=\sin(\alpha+\beta)$.

Затем с помощью теоремы синусов находим d. Так как $\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}$, $AC=d$, $AB=c$, $\angle B=\beta$, то $d=\frac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Задачи

1020. Найдите площадь треугольника ABC, если: а) $AB=6\sqrt{8}$ см, $AC=4$ см, $\angle A=60°$; б) $BC=3$ см, $AB=18\sqrt{2}$ см, $\angle B=45°$; в) $AC=14$ см, $CB=7$ см, $\angle C=48°$.

1021. Докажите, что площадь параллелограмма равна произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними.

1022. Площадь треугольника ABC равна 60 см^2. Найдите сторону AB, если $AC=15$ см, $\angle A=30°$.

1023. Найдите площадь прямоугольника, диагональ которого равна 10 см, а угол между диагоналями 30°.

1024. Найдите площадь треугольника ABC, если: а) $\angle A=\alpha$, а высоты, проведенные из вершин B и C, соответственно равны h_b и h_c; б) $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, а высота, проведенная из вершины B, равна h.

1025. С помощью теорем синусов и косинусов решите треугольник ABC, если:

а) $\angle A=60°$, $\angle B=40°$, $c=14$;

б) $\angle A=30°$, $\angle C=75°$, $b=4{,}5$;

в) $\angle A=80°$, $a=16$, $b=10$;

г) $\angle B=45°$, $\angle C=70°$, $a=24{,}6$;

д) $\angle A=60°$, $a=10$, $b=7$;

е) $a=6{,}3$, $b=6{,}3$, $\angle C=54°$;

ж) $b=32$, $c=45$, $\angle A=87°$;

з) $a=14$, $b=18$, $c=20$;

и) $a=6$, $b=7{,}3$, $c=4{,}8$.

1026. В треугольнике ABC $AC=12$ см, $\angle A=75°$, $\angle C=60°$. Найдите AB и S_{ABC}.

1027. Найдите стороны треугольника ABC, если $\angle A=45°$, $\angle C=30°$, а высота AD равна 3 м.

1028. В параллелограмме $ABCD$ $AD=7\frac{1}{3}$ м, $BD=4{,}4$ м, $\angle A=22°30'$. Найдите $\angle BDC$ и $\angle DBC$.

1029. Найдите биссектрисы треугольника, если одна из его сторон равна a, а прилежащие к этой стороне углы равны α и β.

1030. Смежные стороны параллелограмма равны a и b, а один из его углов равен α. Найдите диагонали параллелограмма и угол между ними.

1031. Выясните, является ли треугольник остроугольным, прямоугольным или тупоугольным, если его стороны равны: а) 5, 4 и 4; б) 17, 8 и 15; в) 9, 5 и 6.

1032. Две равные по величине силы приложены к одной точке под углом 72° друг к другу. Найдите величины этих сил, если величина их равнодействующей равна 120 кг.

1033. Докажите, что отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности.

Решение. Пусть R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC. Докажем, что $\frac{BC}{\sin A}=2R$, или $BC=2R\sin A$.

Проведем диаметр BA_1 (рис. 297) и рассмотрим треугольник A_1BC (случай, когда точки A_1 и C совпадают, рассмотрите самостоятельно). Угол C этого треугольника прямой, поэтому $BC=BA_1\sin A_1$. Но $\sin A_1=\sin A$. Действительно, если точка A_1 лежит на дуге BAC (рис. 297, *а*), то $\angle A_1=\angle A$, а если на дуге BDC (рис. 297, *б*), то $\angle A_1=180°-\angle A$. И в том, и в другом случае $\sin A_1=\sin A$. Следовательно,

$$BC=BA_1\sin A, \text{ или } BC=2R\sin A.$$

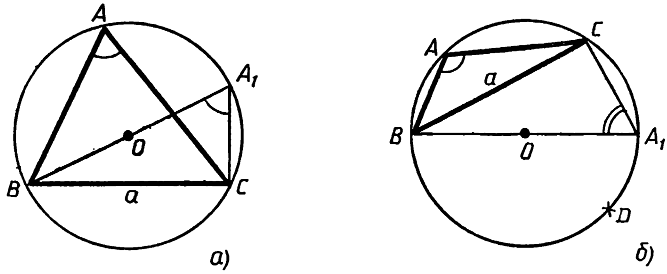


Рис. 297

1034. В равнобедренной трапеции меньшее основание равно боковой стороне, большее основание равно 10 см, а угол при основании равен 70°. Найдите периметр трапеции.

1035. В окружности проведены хорды AB и CD, пересекающиеся в точке E. Найдите острый угол между этими хордами, если $AB=13$ см, $CE=9$ см, $ED=4$ см и расстояние между точками B и D равно $4\sqrt{3}$ см.

1036. Наблюдатель находится на расстоянии 50 м от башни, высоту которой хочет определить (рис. 298). Основание башни он видит под углом 10° к горизонту, а вершину — под углом 45° к горизонту. Какова высота башни?

1037. Для определения ширины реки отметили два пункта A и B на берегу реки на расстоянии 70 м друг от друга и измерили углы CAB и ABC, где C — дерево, стоящее на другом берегу у кромки воды. Оказалось, что $\angle CAB=12°30'$, $\angle ABC=72°42'$. Найдите ширину реки.

1038. На горе находится башня, высота которой равна 100 м (рис. 299). Некоторый предмет A у подножия горы наблюдают сначала с вершины B башни под углом 60° к горизонту, а потом с ее основания C под углом 30°. Найдите высоту H горы.

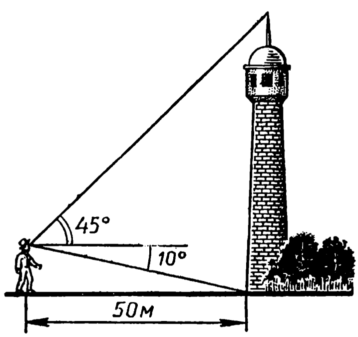


Рис. 298

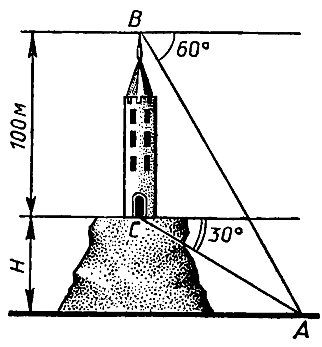


Рис. 299

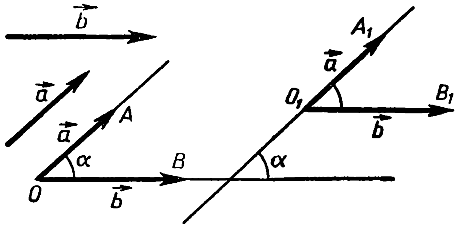


Рис. 300

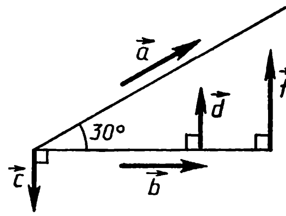


Рис. 301

§ 3. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

101. Угол между векторами. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два данных вектора. Отложим от произвольной точки O векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не являются сонаправленными, то лучи OA и OB образуют угол AOB (рис. 300). Градусную меру этого угла обозначим α и будем говорить, что *угол между векторами* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *равен* α. Ясно, что α не зависит от выбора точки O, от которой откладываются векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (пользуясь рисунком 300, докажите это). Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, в частности один из них или оба нулевые, то будем считать, что угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 0°. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$.

На рисунке 301 углы между векторами таковы: $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}=30°$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{c}}=120°$, $\widehat{\vec{b}\,\vec{c}}=90°$, $\widehat{\vec{d}\,\vec{f}}=0°$, $\widehat{\vec{d}\,\vec{c}}=180°$.

Два вектора называются *перпендикулярными,* если угол между ними равен 90°. На рисунке 301 $\vec{b}\perp\vec{c}$, $\vec{b}\perp\vec{d}$, $\vec{b}\perp\vec{f}$.

102. Скалярное произведение векторов. Мы знаем, как выполняется сложение векторов и умножение вектора на число. Введем еще одно действие над векторами — скалярное умножение векторов.

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $\vec{a}\vec{b}$. По определению

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}). \qquad (1)$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, т. е. $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}=90°$, то $\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})=0$, и поэтому $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. Обратно: если $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые, то из равенства (1) получаем $\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})=0$, и, следовательно, $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}=90°$, т. е. векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

Таким образом, *скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.*

Из формулы (1) также следует, что скалярное произведение ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ положительно (отрицательно) тогда и только тогда, когда $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}<90°$ ($\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}>90°$).

На рисунке 302 $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}=35°$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{c}}=90°$, $\widehat{\vec{b}\,\vec{c}}=125°$, поэтому $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$, $\vec{b}\cdot\vec{c}<0$.

Если $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, то по формуле (1) получаем $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$. В частности, $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$. Скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$ называется *скалярным квадратом* вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^2$. Таким образом, *скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.*

Скалярное произведение векторов широко используется в физике. Например, из курса механики известно, что работа A постоянной силы $\vec{F}$ при перемещении тела из точки M в точку N (рис. 303) равна произведению длин векторов силы $\vec{F}$ и перемещения $\overrightarrow{MN}$ на косинус угла между ними:

$$A=|\vec{F}|\cdot|\overrightarrow{MN}|\cdot\cos\varphi.$$

Правая часть этого равенства представляет собой скалярное произведение векторов $\vec{F}$ и $\overrightarrow{MN}$, т. е. работа A силы $\vec{F}$ равна скалярному произведению векторов силы и перемещения: $A=\vec{F}\cdot\overrightarrow{MN}$.

103. Скалярное произведение в координатах. Скалярное произведение двух векторов можно вычислить, зная координаты этих векторов.

Теорема. ***Скалярное произведение векторов $\vec{a}\{x_1;\ y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;\ y_2\}$ выражается формулой***

$$\vec{a}\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2. \qquad (2)$$

Доказательство. Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нулевой, то справедливость равенства (2) очевидна, так как координаты нулевого вектора равны нулю. Рассмотрим случай, когда

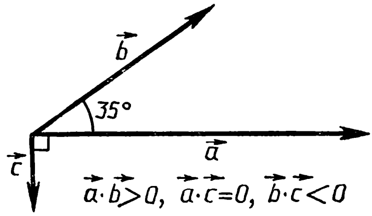


Рис. 302

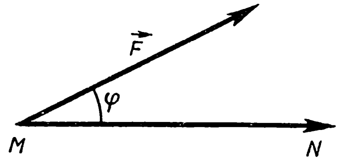


Рис. 303

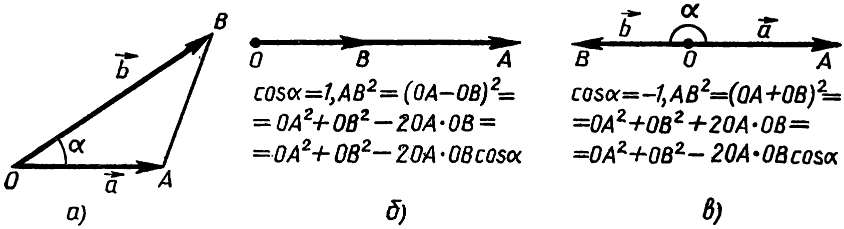


Рис. 304

векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые. Отложим от произвольной точки O векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны (рис. 304, *а*), то по теореме косинусов

$$AB^2=OA^2+OB^2-2\cdot OA\cdot OB\cdot\cos\alpha. \qquad (3)$$

Это равенство верно и в том случае, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны (см. рис. 304, *б, в*).

Так как $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, то равенство (3) можно записать так: $|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\vec{b}$, откуда

$$\vec{a}\vec{b}=\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{b}-\vec{a}|^2). \qquad (4)$$

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{b}-\vec{a}$ имеют координаты $\{x_1;\ y_1\}$, $\{x_2;\ y_2\}$ и $\{x_2-x_1;\ y_2-y_1\}$, поэтому

$$|\vec{a}|^2=x_1^2+y_1^2,\quad |\vec{b}|^2=x_2^2+y_2^2,\quad |\vec{b}-\vec{a}|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$$

Подставив эти выражения в правую часть равенства (4), после несложных преобразований получим формулу (2). Теорема доказана.

Следствие 1. *Ненулевые векторы $\vec{a}\{x_1;\ y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;\ y_2\}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $x_1x_2+y_1y_2=0$.*

Следствие 2. *Косинус угла α между ненулевыми векторами $\vec{a}\{x_1;\ y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;\ y_2\}$* выражается формулой

$$\cos\alpha=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}. \qquad (5)$$

В самом деле, так как $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\alpha$, то $\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.

Подставив сюда выражения для $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ через координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, получим формулу (5).

104. Свойства скалярного произведения векторов. Скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами:

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа k справедливы соотношения:

1^0. $\vec{a}^2\geqslant 0$, *причем* $\vec{a}^2>0$ *при* $\vec{a}\neq\vec{0}$.

2^0. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ *(переместительный закон).*

3^0. $(\vec{a}+\vec{b})\,\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ *(распределительный закон).*

4^0. $(k\vec{a})\,\vec{b}=k\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$ *(сочетательный закон).*

Свойство 1^0 непосредственно следует из формулы $\vec{a}\vec{a}=|\vec{a}|^2$, а свойство 2^0 — из определения скалярного произведения. Докажем свойства 3^0 и 4^0.

Введем прямоугольную систему координат и обозначим координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ так: $\vec{a}\,\{x_1;\ y_1\}$, $\vec{b}\,\{x_2;\ y_2\}$, $\vec{c}\,\{x_3;\ y_3\}$. Используя формулу (2), получаем $(\vec{a}+\vec{b})\,\vec{c}=(x_1+x_2)\,x_3+(y_1+y_2)\,y_3=$ $=(x_1x_3+y_1y_3)+(x_2x_3+y_2y_3)=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$. Свойство 3^0 доказано.

Докажем теперь свойство 4^0. Вектор $k\vec{a}$ имеет координаты $\{kx_1;\ ky_1\}$, поэтому $(k\vec{a})\,\vec{b}=(kx_1)\,x_2+(ky_1)\,y_2=k\,(x_1x_2+y_1y_2)=k\,(\vec{a}\vec{b})$.

З а м е ч а н и е. Ясно, что распределительный закон имеет место для любого числа слагаемых. Например,

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\,\vec{d}=\vec{a}\vec{d}+\vec{b}\vec{d}+\vec{c}\vec{d}.$$

Задачи

1039. Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите угол между векторами: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DA}$; в) $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$; г) $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{OB}$; д) $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}$; е) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$; ж) $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{DB}$; з) $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{OC}$.

1040. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O, и диагональ BD равна стороне ромба. Найдите угол между векторами: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DA}$; в) $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AD}$; г) $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$; д) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$; е) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

1041. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, а угол между ними равен: а) $45°$; б) $90°$; в) $135°$.

1042. В равностороннем треугольнике ABC со стороной a проведена высота BD. Вычислите скалярное произведение векторов: а) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$; г) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}$.

1043. К одной и той же точке приложены две силы $\vec{P}$ и $\vec{Q}$, действующие под углом $120°$ друг к другу, причем $|\vec{P}|=8$, $|\vec{Q}|=15$. Найдите величину равнодействующей силы $\vec{R}$.

1044. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если: а) $\vec{a}\left\{\frac{1}{4};\ -1\right\}$, $\vec{b}\,\{2;\ 3\}$; б) $\vec{a}\,\{-5;\ 6\}$, $\vec{b}\,\{6;\ 5\}$; в) $\vec{a}\,\{1{,}5;\ 2\}$, $\vec{b}\,\{4;\ -0{,}5\}$.

1045. Докажите, что ненулевые векторы $\vec{a}\,\{x;\ y\}$ и $\vec{b}\,\{-y;\ x\}$ перпендикулярны.

1046. Докажите, что векторы $\vec{i}+\vec{j}$ и $\vec{i}-\vec{j}$ перпендикулярны, если $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — координатные векторы.

1047. При каком значении x векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, если: а) $\vec{a}\{4;\ 5\}$, $\vec{b}\{x;\ -6\}$; б) $\vec{a}\{x;\ -1\}$, $\vec{b}\{3;\ 2\}$; в) $\vec{a}\{0;\ -3\}$, $\vec{b}\{5;\ x\}$?

1048. Найдите косинусы углов треугольника с вершинами $A\,(2;\ 8)$, $B\,(-1;\ 5)$, $C\,(3;\ 1)$.

1049. Найдите углы треугольника с вершинами $A\,(-1;\ \sqrt{3})$, $B\,(1;\ -\sqrt{3})$ и $C\left(\frac{1}{2};\ \sqrt{3}\right)$.

1050. Вычислите $|\vec{a}+\vec{b}|$ и $|\vec{a}-\vec{b}|$, если $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=8$, $\widehat{\vec{a}\ \vec{b}}=60°$.

1051. Известно, что $\widehat{\vec{a}\ \vec{c}}=\widehat{\vec{b}\ \vec{c}}=60°$, $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=|\vec{c}|=2$. Вычислите $(\vec{a}+\vec{b})\,\vec{c}$.

1052. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{p}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$ и $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, если $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=4$ и $\vec{a}\perp\vec{b}$.

1053. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=3\vec{p}-2\vec{q}$ и $\vec{b}=\vec{p}+4\vec{q}$, где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы.

Применение скалярного произведения векторов к решению задач

1054. Докажите, что если AM — медиана треугольника ABC, то $4AM^2=AB^2+AC^2+2AB\cdot AC\cdot\cos A$. Пользуясь этой формулой, докажите, что медианы равнобедренного треугольника, проведенные к боковым сторонам, равны.

Решение. Точка M — середина отрезка BC, поэтому $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Отсюда получаем

$$(2\overrightarrow{AM})(2\overrightarrow{AM})=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=$$
$$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=$$
$$=AB^2+2AB\cdot AC\cdot\cos A+AC^2,$$

или $4AM^2=AB^2+AC^2+2AB\cdot AC\cdot\cos A$.

Второе утверждение задачи докажите самостоятельно.

1055. Найдите угол, лежащий против основания равнобедренного треугольника, если медианы, проведенные к боковым сторонам, взаимно перпендикулярны.

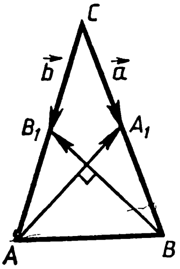


Рис. 305

Решение. Пусть ABC — равнобедренный треугольник с основанием AB и AA_1, BB_1 — его медианы, проведенные к боковым сторонам (рис. 305). Введем обозначения: $\overrightarrow{CA_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB_1}=\vec{b}$, $CA_1=CB_1=a$. Тогда $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{CA_1}-\overrightarrow{CA}=\vec{a}-2\vec{b}$, $\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{CB_1}-\overrightarrow{CB}=\vec{b}-2\vec{a}$, поэтому

$$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BB_1}=(\vec{a}-2\vec{b})(\vec{b}-2\vec{a})=$$
$$=5\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{b}\cdot\vec{b}. \qquad (1)$$

По условию задачи $AA_1 \perp BB_1$, и, следовательно, $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BB_1} = 0$. Далее, $\vec{a} \cdot \vec{b} = a^2 \cos C$, $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$, $\vec{b} \cdot \vec{b} = a^2$, поэтому равенство (1) принимает вид $0 = 5a^2 \cos C - 4a^2$. Отсюда получаем $\cos C = \frac{4}{5}$, $\angle C \approx 36°52'$.

1056. Докажите, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ XI

1. Начертите оси координат и постройте единичную полуокружность.
2. Объясните, что такое синус и косинус угла α из промежутка $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.
3. Что называется тангенсом угла α? Для какого значения α тангенс не определен и почему?
4. Докажите основное тригонометрическое тождество.
5. Напишите формулы приведения.
6. Выведите формулы, выражающие координаты точки A с неотрицательной ординатой через длину отрезка OA и угол между лучом OA и положительной полуосью Ox.
7. Сформулируйте и докажите теорему о площади треугольника (вычисление площади треугольника по двум сторонам и углу между ними).
8. Сформулируйте и докажите теорему синусов.
9. Сформулируйте и докажите теорему косинусов.
10. Что означают слова «решение треугольника»? Сформулируйте три основные задачи на решение треугольника и объясните, как они решаются.
11. Объясните, как определить высоту предмета, основание которого недоступно.
12. Объясните, как измерить расстояние до недоступной точки.
13. Объясните, что означают слова «угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен α». В каком случае угол между векторами считается равным 0°?
14. Какие два вектора называются перпендикулярными?
15. Что такое скалярное произведение двух векторов?
16. В каком случае скалярное произведение ненулевых векторов: а) равно нулю; б) больше нуля; в) меньше нуля?
17. Выведите формулу, выражающую скалярное произведение векторов через их координаты.
18. Запишите условие перпендикулярности двух ненулевых векторов с координатами $\{x_1; y_1\}$ и $\{x_2; y_2\}$.
19. Выведите формулу, выражающую косинус угла между ненулевыми векторами через их координаты.
20. Сформулируйте и докажите свойства скалярного произведения векторов.
21. Приведите пример использования скалярного произведения векторов при решении геометрических задач.

Дополнительные задачи

1057. В равнобедренном треугольнике ABC $AB=AC=b$, $\angle A=30°$. Найдите высоты BE и AD, а также отрезки AE, EC, BC.

1058. Найдите площадь треугольника ABC, если: а) $BC=4{,}125$ м, $\angle B=44°$, $\angle C=72°$; б) $BC=4100$ м, $\angle A=32°$, $\angle C=120°$.

1059. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

1060. Используя теорему синусов, решите треугольник ABC, если: а) $AB=8$ см, $\angle A=30°$, $\angle B=45°$; б) $AB=5$ см, $\angle B=45°$, $\angle C=60°$; в) $AB=3$ см, $BC=3{,}3$ см, $\angle A=48°30'$; г) $AC=10{,}4$ см, $BC=5{,}2$ см, $\angle B=62°48'$.

1061. Используя теорему косинусов, решите треугольник ABC, если: а) $AB=5$ см, $AC=7{,}5$ см, $\angle A=135°$; б) $AB=2\sqrt{2}$ дм, $BC=3$ дм, $\angle B=45°$; в) $AC=0{,}6$ м, $BC=\frac{\sqrt{3}}{4}$ дм, $\angle C=150°$.

1062. В треугольнике DEF $DE=4{,}5$ дм, $EF=9{,}9$ дм, $DF=70$ см. Найдите углы треугольника.

1063. Найдите биссектрису AD треугольника ABC, если $\angle A=\alpha$, $AB=c$, $AC=b$.

1064. Чтобы определить расстояние между точками A и B, которое нельзя измерить, выбирают третью точку C, из которой видны точки A и B. Измерив угол ACB и расстояния AC и CB, находят расстояние AB. Найдите AB, если $AC=b$, $CB=a$, $\angle ACB=\alpha$.

1065. Докажите, что треугольник с вершинами $A\,(3;\ 0)$, $B\,(1;\ 5)$ и $C\,(2;\ 1)$ тупоугольный. Найдите косинус тупого угла.

1066. Найдите длину вектора $\vec{a}=3\vec{i}-4\vec{j}$, где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — координатные векторы.

1067. Найдите диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=5\vec{p}+2\vec{q}$ и $\vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$, если $|\vec{p}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{q}|=3$ и $\widehat{\vec{p}\,\vec{q}}=45°$.

1068. При каком значении x векторы $\vec{p}=x\vec{a}+17\vec{b}$ и $\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$ перпендикулярны, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$ и $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}=120°$?

1069. В прямоугольном равнобедренном треугольнике проведены медианы из вершин острых углов. Найдите острый угол между этими медианами.

Задачи для решения с помощью программируемых микрокалькуляторов МК-54 — МК-57

1070. Составьте программу для решения треугольника по двум сторонам a и b и углу C между ними и выполните вычисления по этой программе при: а) $a=2$, $b=3$, $\angle C=70°$; б) $a=5$, $b=6$, $\angle C=100°$.

Решение. Поместим значения a, b, $\angle C$ соответственно в RGa, RGb, RGl. Сторону c вычислим по формуле

$$c=\sqrt{-2ab\cos C+a^2+b^2}$$

(адреса 00—15 программы) и результат поместим в RGc (адрес 16). Угол A вычислим с помощью формулы

$$\cos A=\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}$$

(адреса 17—30) и результат поместим в RG2 (адрес 31). Угол B вычислим по формуле

$$\angle B=-\angle A+180°-\angle C$$

(адреса 32—38) и прекратим вычисления (адрес 39).

При вводе программы в микрокалькулятор и вычислениях по ней переключатель Р/ГРД/Г должен находиться в правом положении (градус). Включим микрокалькулятор, перейдем в режим «Программирование»: $\boxed{F}$ $\boxed{\text{ПРГ}}$, введем программу и перейдем в автоматический режим: $\boxed{F}$ $\boxed{\text{АВТ}}$. Выполним вычисления при заданных в условиях задачи значениях.

а) Поместим значения $a=2$, $b=3$, $\angle C=70°$ соответственно в RGa, RGb, RGl и пустим программу:

2 $\boxed{x\to\text{П}}$ $\boxed{\text{a}}$ 3 $\boxed{x\to\text{П}}$ $\boxed{\text{b}}$ 70 $\boxed{x\to\text{П}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\text{В/О}}$ $\boxed{\text{С/П}}$

На индикаторе высвечивается значение угла B в градусах: 70,94091. Округляя до тысячных, получаем $\angle B\approx\approx 70{,}941°$. При этом значения c и $\angle A$ находятся соответственно в RGc и RG2:

$\boxed{\text{П}\to x}$ $\boxed{\text{c}}$ 2,9825757; $\boxed{\text{П}\to x}$ $\boxed{2}$ 39,059093, т. е. $c\approx 2{,}98$, $\angle A\approx 39{,}059°$.

б) 5 $\boxed{x\to\text{П}}$ $\boxed{\text{a}}$ 6 $\boxed{x\to\text{П}}$ $\boxed{\text{b}}$ 100 $\boxed{x\to\text{П}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\text{В/О}}$

$\boxed{\text{С/П}}$ 44,36218;

$\boxed{\text{П}\to x}$ $\boxed{\text{c}}$ 8,4509697; $\boxed{\text{П}\to x}$ $\boxed{2}$ 35,637825, т. е. $\angle B\approx\approx 44{,}362°$, $c\approx 8{,}45$, $\angle A\approx 35{,}638°$.

Программа

Продолжение

Адрес	Клавиши	Код
00	П→x a	6—
01	П→x b	6L
02	×	12
03	П→x 1	61
04	F cos	1Г
05	×	12
06	2	02
07	×	12
08	/-/	0L
09	П→x a	6—
10	F x^2	22
11	+	10
12	П→x b	6L
13	F x^2	22
14	+	10
15	F √	21
16	x→П c	4C
17	F x^2	22
18	П→x b	6L
19	F x^2	22

Адрес	Клавиши	Код
20	+	10
21	П→x a	6—
22	F x^2	22
23	—	11
24	2	02
25	÷	13
26	П→x b	6L
27	÷	13
28	П→x c	6C
29	÷	13
30	F $\cos^{-1}$	1—
31	x→П 2	42
32	/-/	0L
33	1	01
34	8	08
35	0	00
36	+	10
37	П→x 1	61
38	—	11
39	С/П	50

1071. Составьте программу для решения треугольника по стороне a и прилежащим к ней углам B и C и выполните вычисления по этой программе при: а) $a=5$, $\angle B=13°$, $\angle C=68°$; б) $a=2{,}75$, $\angle B=43{,}25°$, $\angle C=71{,}36°$.

1072. Составьте программу для решения треугольника по трем сторонам a, b, c и выполните вычисления по этой программе при: а) $a=6$, $b=7$, $c=8$; б) $a=2{,}37$, $b=5{,}46$, $c=4{,}89$.

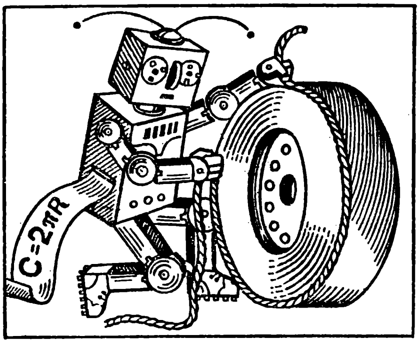
1073. Составьте программу для решения прямоугольного треугольника по двум катетам a и b и выполните вычисления по этой программе при: а) $a=3$, $b=4$; б) $a=125{,}3$, $b=57{,}5$.

1074. Составьте программу для решения прямоугольного треугольника по катету a и гипотенузе c и выполните вычисления по этой программе при: а) $a=61{,}3$, $c=85{,}6$; б) $a=3{,}72$, $c=11{,}25$.

1075. Составьте программу для решения прямоугольного треугольника по катету a и прилежащему острому углу B и выполните вычисления по этой программе при: а) $a=6$, $\angle B=70°$; б) $a=16{,}35$, $\angle B=40{,}27°$.

1076. Составьте программу для решения прямоугольного треугольника по катету a и противолежащему углу A и выполните вычисления по этой программе при: а) $a=6$, $\angle A=20°$; б) $a=25{,}62$, $\angle A=37{,}14°$.

1077. Составьте программу для решения прямоугольного треугольника по гипотенузе c и острому углу A и выполните вычисления по этой программе при: а) $c=20$, $\angle A=50°$; б) $c=15{,}63$, $\angle A=27{,}39°$.



Глава XII

ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА

§ 1. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

105. Правильный многоугольник. *Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны.*

Примерами правильных многоугольников являются равносторонний треугольник и квадрат. На рисунке 306 изображены правильные пятиугольник, семиугольник и восьмиугольник.

Выведем формулу для вычисления угла α_n правильного n-угольника. Сумма всех углов такого n-угольника равна $(n-2)\cdot 180°$, причем все его углы равны, поэтому

$$\alpha_n=\frac{n-2}{n}\cdot 180°.$$

106. Окружность, описанная около правильного многоугольника. Напомним, что окружность называется описанной около многоугольника, если все вершины многоугольника лежат на этой окружности. Докажем теорему об окружности, описанной около правильного многоугольника.

Теорема. ***Около любого правильного многоугольника можно описать окружность, и притом только одну.***

Доказательство. Пусть $A_1A_2A_3...A_n$ — правильный многоугольник, O — точка пересечения биссектрис углов A_1 и A_2 (рис. 307).

Соединим точку O отрезками с остальными вершинами многоугольника и докажем, что $OA_1=OA_2=...=OA_n$. Так как $\angle A_1=\angle A_2$, то $\angle 1=\angle 3$, поэтому треугольник A_1A_2O равно-

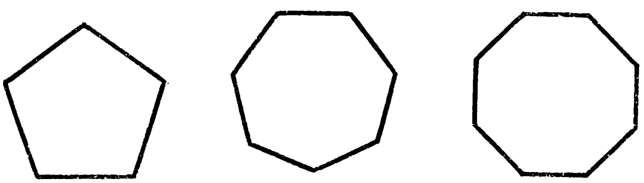


Рис. 306

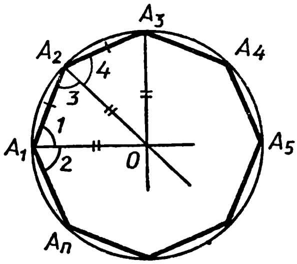


Рис. 307

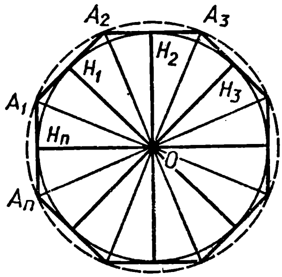


Рис. 308

бедренный, и, следовательно, $OA_1=OA_2$. Треугольники A_1A_2O и A_3A_2O равны по двум сторонам и углу между ними ($A_1A_2=A_3A_2$, A_2O — общая сторона и $\angle 3=\angle 4$), следовательно, $OA_3=OA_1$. Точно так же можно доказать, что $OA_4=OA_2$, $OA_5=OA_3$ и т. д.

Итак, $OA_1=OA_2=...=OA_n$, т. е. точка O равноудалена от всех вершин многоугольника. Поэтому окружность с центром O и радиусом OA_1 является описанной около многоугольника.

Докажем теперь, что описанная окружность только одна. Рассмотрим какие-нибудь три вершины многоугольника, например A_1, A_2, A_3. Так как через эти точки проходит только одна окружность, то около многоугольника $A_1A_2...A_n$ можно описать только одну окружность. Теорема доказана.

107. Окружность, вписанная в правильный многоугольник. Напомним, что окружность называется вписанной в многоугольник, если все стороны многоугольника касаются этой окружности. Докажем теорему об окружности, вписанной в правильный многоугольник.

Теорема. ***В любой правильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну.***

Доказательство. Пусть $A_1A_2...A_n$ — правильный многоугольник, O — центр описанной окружности (рис. 308). В ходе доказательства предыдущей теоремы мы установили, что $\triangle OA_1A_2=\triangle OA_2A_3=...=\triangle OA_nA_1$, поэтому высоты этих треугольников, проведенные из вершины O, также равны: $OH_1=OH_2=...=OH_n$. Отсюда следует, что окружность с центром O и радиусом OH_1 проходит через точки H_1, H_2, ..., H_n и касается сторон многоугольника в этих точках, т. е. эта окружность вписанная в данный правильный многоугольник.

Докажем теперь, что вписанная окружность только одна.

Предположим, что наряду с окружностью с центром O и радиусом OH_1 есть и другая окружность, вписанная в многоугольник $A_1A_2...A_n$. Тогда ее центр O_1 равноудален от сторон многоугольника, т. е. точка O_1 лежит на каждой из биссектрис углов многоугольника и, следовательно, совпадает с точкой O

пересечения этих биссектрис. Радиус этой окружности равен расстоянию от точки O до сторон многоугольника, т. е. равен OH_1. Таким образом, вторая окружность совпадает с первой. Теорема доказана.

Следствие 1. *Окружность, вписанная в правильный многоугольник, касается сторон многоугольника в их серединах.*

Следствие 2. *Центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же многоугольник.*

Эта точка называется *центром правильного многоугольника.*

108. Формулы для вычисления площади правильного многоугольника, его стороны и радиуса вписанной окружности. Пусть S — площадь правильного n-угольника, a_n — его сторона, P — периметр, а r и R — радиусы соответственно вписанной и описанной окружностей. Докажем сначала, что

$$S=\frac{1}{2}Pr. \tag{1}$$

В самом деле, соединим центр данного многоугольника с его вершинами (см. рис. 308). Тогда многоугольник разобьется на n равных треугольников, площадь каждого из которых равна $\frac{1}{2}a_nr$. Следовательно,

$$S=n\frac{1}{2}a_nr=\frac{1}{2}(na_n)\,r=\frac{1}{2}\,Pr.$$

Выведем далее следующие формулы:

$$a_n=2R\sin\frac{180^\circ}{n}, \tag{2}$$

$$r=R\cos\frac{180^\circ}{n}. \tag{3}$$

Для вывода этих формул воспользуемся рисунком 308. В прямоугольном треугольнике A_1H_1O $\angle A_1=\frac{\alpha_n}{2}=\frac{n-2}{2n}\cdot180^\circ=$ $=90^\circ-\frac{180^\circ}{n}$. Следовательно, $a_n=2A_1H_1=2R\cos\left(90^\circ-\frac{180^\circ}{n}\right)=$ $=2R\sin\frac{180^\circ}{n}$, а $r=OH_1=R\sin\left(90^\circ-\frac{180^\circ}{n}\right)=R\cos\frac{180^\circ}{n}$.

Полагая в формуле (2) $n=3$, 4 и 6, получим выражения для сторон правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника:

$$a_3=2R\sin\frac{180^\circ}{3}=2R\sin60^\circ=2R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=R\sqrt{3}; \tag{4}$$

$$a_4=2R\sin\frac{180^\circ}{4}=2R\sin45^\circ=2R\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=R\sqrt{2}; \tag{5}$$

$$a_6=2R\sin\frac{180^\circ}{6}=2R\sin30^\circ=2R\cdot\frac{1}{2}=R. \tag{6}$$

109. Построение правильных многоугольников. Рассмотрим способы построения некоторых правильных многоугольников с помощью циркуля и линейки. Построения правильного треугольника и правильного четырехугольника, т. е. квадрата, рассматривались ранее. Для построения правильных n-угольников при $n>4$ обычно используется окружность, описанная около многоугольника.

Задача 1. *Построить правильный шестиугольник, сторона которого равна данному отрезку.*

Решение. Для решения задачи воспользуемся формулой (6). Пусть PQ — данный отрезок. Построим окружность радиуса PQ и отметим на ней произвольную точку A_1 (рис. 309). Затем, не меняя раствора циркуля, построим на этой окружности точки A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 так, чтобы выполнялись равенства $A_1A_2=A_2A_3=$ $=A_3A_4=A_4A_5=A_5A_6$. Соединяя последовательно построенные точки отрезками, получим искомый правильный шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

Для построения правильных многоугольников часто используется следующая задача:

Задача 2. *Дан правильный n-угольник. Построить правильный $2n$-угольник.*

Решение. Пусть $A_1A_2...A_n$ — данный правильный n-угольник. Опишем около него окружность. Для этого построим биссектрисы углов A_1 и A_2 и обозначим буквой O точку их пересечения. Затем проведем окружность с центром O радиуса OA_1 (см. рис. 307).

Для решения задачи достаточно разделить дуги A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1 пополам и каждую из точек деления B_1, B_2, ..., B_n соединить отрезками с концами соответствующей дуги (рис. 310, на этом рисунке $n=6$). Для построения точек B_1, B_2, ..., B_n можно воспользоваться серединными перпендикулярами к сторонам данного n-угольника.

На рисунке 310 таким способом построен правильный двенадцатиугольник $A_1B_1A_2B_2...A_6B_6$.

Применяя указанный способ, можно с помощью циркуля и ли-

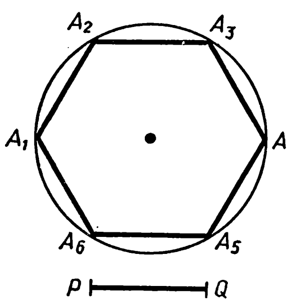


Рис. 309

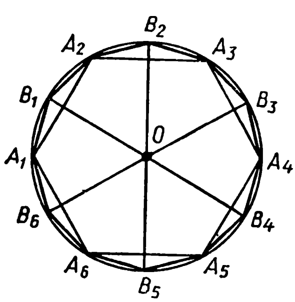


Рис. 310

нейки построить целый ряд правильных многоугольников, если построен один из них. Например, построив правильный четырехугольник, т. е. квадрат, и пользуясь задачей 2, можно построить правильный восьмиугольник, затем правильный шестнадцатиугольник и вообще правильный 2^k-угольник, где k — любое целое число, большее двух.

З а м е ч а н и е. Рассмотренные примеры показывают, что многие правильные многоугольники могут быть построены с помощью циркуля и линейки. Оказывается, однако, что не все правильные многоугольники допускают такое построение. Доказано, например, что правильный семиугольник не может быть построен при помощи циркуля и линейки. Любопытно, что с помощью этих инструментов можно построить правильный семнадцатиугольник.

Вопросы и задачи

1078. Верно ли утверждение: а) любой правильный многоугольник является выпуклым; б) любой выпуклый многоугольник является правильным? Ответ обоснуйте.

1079. Какие из следующих утверждений верны: а) многоугольник является правильным, если он выпуклый и все его стороны равны; б) треугольник является правильным, если все его углы равны; в) любой равносторонний треугольник является правильным; г) любой четырехугольник с равными сторонами является правильным? Ответ обоснуйте.

1080. Докажите, что любой правильный четырехугольник является квадратом.

1081. Найдите углы правильного n-угольника, если: а) $n=3$; б) $n=5$; в) $n=6$; г) $n=10$; д) $n=18$.

1082. Чему равна сумма внешних углов правильного n-угольника, если при каждой вершине взято по одному внешнему углу?

1083. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если каждый его угол равен: а) 60°; б) 90°; в) 135°; г) 150°?

1084. Сколько сторон имеет правильный вписанный многоугольник, если дуга описанной окружности, которую стягивает его сторона, равна: а) 60°; б) 30°; в) 90°; г) 36°; д) 18°; е) 72°?

1085. Докажите, что серединные перпендикуляры к любым двум сторонам правильного многоугольника либо пересекаются, либо совпадают.

1086. Докажите, что прямые, содержащие биссектрисы любых двух углов правильного многоугольника, либо пересекаются, либо совпадают.

1087. На рисунке 311, *а* изображен квадрат, вписанный в окружность радиуса R. Перечертите таблицу в тетрадь и заполните пустые клетки (a_4 — сторона квадрата, P — периметр квадрата, S — его площадь, r — радиус вписанной окружности).

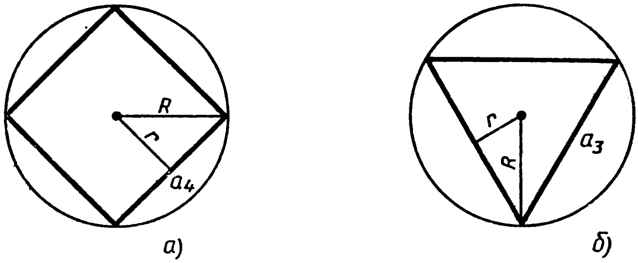


Рис. 311

N	R	r	a_4	P	S
1			6		
2		2			
3	4				
4				28	
5					16

1088. На рисунке 311, *б* изображен правильный треугольник, вписанный в окружность радиуса R. Перечертите таблицу в тетрадь и заполните пустые клетки (a_3 — сторона треугольника, P — периметр треугольника, S — его площадь, r — радиус вписанной окружности).

N	R	r	a_3	P	S
1	3				
2					10
3		2			
4			5		
5				6	

1089. Периметр правильного треугольника, вписанного в окружность, равен 18 см. Найдите сторону квадрата, вписанного в ту же окружность.

1090. Сечение головки газового вентиля имеет форму правильного треугольника, сторона которого равна 3 см. Каким должен быть минимальный диаметр круглого железного стержня, из которого изготовляют вентиль?

1091. Поперечное сечение деревянного бруска является квадратом со стороной 6 см. Найдите наибольший диаметр круглого стержня, который можно выточить из этого бруска.

1092. Около окружности описаны квадрат и правильный шестиугольник. Найдите периметр квадрата, если периметр шестиугольника равен 48 см.

1093. Около правильного треугольника описана окружность радиуса R. Докажите, что $R=2r$, где r — радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

1094. Найдите площадь S правильного n-угольника, если: а) $n=4$, $R=3\sqrt{2}$ см; б) $n=3$, $P=24$ см; в) $n=6$, $r=9$ см; г) $n=8$, $r=5\sqrt{3}$ см.

1095. Расстояние между параллельными гранями шестигранной головки болта, верхнее основание которого имеет форму правильного шестиугольника, равно 1,5 см. Найдите площадь верхнего основания.

1096. Стороны правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника равны друг другу. Найдите отношения площадей этих многоугольников.

1097. Найдите отношение площадей двух правильных шестиугольников — вписанного в окружность и описанного около нее.

1098. Выразите сторону, периметр и площадь правильного треугольника: а) через радиус вписанной окружности; б) через радиус описанной окружности.

1099. Правильный восьмиугольник $A_1A_2...A_8$ вписан в окружность радиуса R. Докажите, что четырехугольник $A_3A_4A_7A_8$ является прямоугольником, и выразите его площадь через R.

1100. С помощью циркуля и линейки в данную окружность впишите: а) правильный шестиугольник; б) правильный треугольник; в) квадрат; г) правильный восьмиугольник.

§ 2. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА

110. Длина окружности. Чтобы получить наглядное представление о длине окружности, представим себе, что окружность сделана из тонкой нерастяжимой нити. Если мы разрежем нить в какой-нибудь точке A и распрямим ее, то получим отрезок AA_1, длина которого и есть длина окружности (рис. 312).

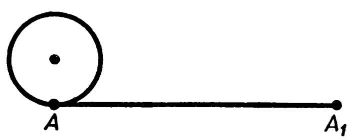


Рис. 312

Периметр любого правильного вписанного в окружность многоугольника является приближенным значением длины окружности. Чем

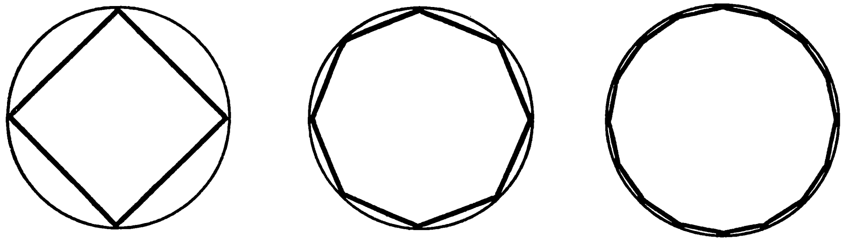


Рис. 313

больше число сторон такого многоугольника, тем точнее это приближенное значение, так как многоугольник при увеличении числа сторон все ближе и ближе «прилегает» к окружности (рис. 313). Точное значение длины окружности — это предел, к которому стремится периметр правильного вписанного в окружность многоугольника при неограниченном увеличении числа его сторон.

Выведем формулу, выражающую длину окружности через ее радиус. Пусть C и C' — длины окружностей радиусов R и R'. Впишем в каждую из них правильный n-угольник и обозначим через P_n и P'_n их периметры, а через a_n и a'_n их стороны. Используя формулу (2) из § 1, получаем:

$$P_n = n \cdot a_n = n \cdot 2R \sin \frac{180^\circ}{n}, \quad P'_n = n \cdot a'_n = n 2R' \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

Следовательно,

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{2R}{2R'}. \qquad (1)$$

Это равенство справедливо при любом значении n. Будем теперь неограниченно увеличивать число n. Так как $P_n \to C$, $P'_n \to C'$ при $n \to \infty$, то предел отношения $\frac{P_n}{P'_n}$ равен $\frac{C}{C'}$. С другой стороны, в силу равенства (1) этот предел равен $\frac{2R}{2R'}$. Таким образом, $\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'}$. Из этого равенства следует, что $\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}$, т. е. *отношение длины окружности к ее диаметру есть одно и то же число для всех окружностей.* Это число принято обозначать греческой буквой π (читается «пи»).

Из равенства $\frac{C}{2R} = \pi$ получаем формулу для вычисления длины окружности радиуса R:

$$C = 2\pi R.$$

Доказано, что π является бесконечной непериодической десятичной дробью, т. е. иррациональным числом. Рациональное число $\frac{22}{7}$ является приближенным значением числа π с точностью до 0,002. Это приближенное значение было найдено еще в III в. до н. э. великим греческим ученым Архимедом. При решении задач обычно пользуются приближенным значением π с точностью до 0,01: $\pi=3,14$.

Выведем теперь формулу для вычисления длины l дуги окружности с градусной мерой α. Так как длина всей окружности равна $2\pi R$, то длина дуги в 1° равна $\frac{2\pi R}{360}=\frac{\pi R}{180}$. Поэтому длина l выражается формулой

$$l=\frac{\pi R}{180}\cdot\alpha.$$

111. Площадь круга. Напомним, что *кругом* называется часть плоскости, ограниченная окружностью. Круг радиуса R с центром O содержит точку O и все точки плоскости, находящиеся от точки O на расстоянии, не большем R.

Выведем формулу для вычисления площади круга радиуса R. Для этого рассмотрим правильный n-угольник $A_1A_2...A_n$, вписанный в окружность, ограничивающую круг (рис. 314). Очевидно, площадь S данного круга больше площади S_n многоугольника $A_1A_2...A_n$, так как этот многоугольник целиком содержится в данном круге. С другой стороны, площадь S'_n круга, вписанного в многоугольник, меньше S_n, так как этот круг целиком содержится в многоугольнике. Итак,

$$S'_n<S_n<S. \qquad (2)$$

Будем теперь неограниченно увеличивать число сторон многоугольника. По формуле (3) § 1 имеем $r_n=R\cos\frac{180°}{n}$, где r_n — радиус вписанной в многоугольник окружности. При $n\to\infty$ $\cos\frac{180°}{n}\to 1$, поэтому $r_n\to R$. Иными словами, при неограниченном

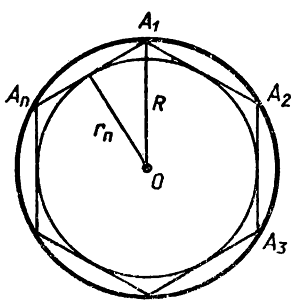


Рис. 314

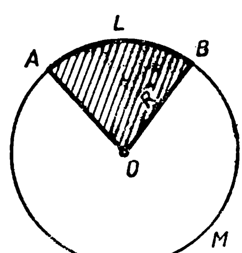


Рис. 315

увеличении числа сторон многоугольника вписанная в него окружность «стремится» к описанной окружности, поэтому $S'_n \to S$ при $n \to \infty$. Отсюда и из неравенств (2) следует, что $S_n \to S$ при $n \to \infty$.

По формуле (1) § 1 $S_n = \frac{1}{2} P_n r_n$, где P_n — периметр многоугольника $A_1A_2...A_n$. Учитывая, что $r_n \to R$, $P_n \to 2\pi R$, $S_n \to S$ при $n \to \infty$, получаем $S = \frac{1}{2} 2\pi R \cdot R = \pi R^2$. Итак, для вычисления площади S круга радиуса R мы получили формулу

$$S = \pi R^2.$$

Замечание. В течение веков усилия многих математиков были направлены на решение задачи, получившей название *задача о квадратуре круга:* построить при помощи циркуля и линейки квадрат, площадь которого равна площади данного круга. Только в конце прошлого века было доказано, что такое построение невозможно.

112. Площадь кругового сектора. *Круговым сектором* или просто *сектором* называется часть круга, ограниченная дугой и двумя радиусами, соединяющими концы дуги с центром круга. Дуга, которая ограничивает сектор, называется *дугой сектора.* На рисунке 315 изображены два сектора с дугами ALB и AMB. Первый из этих секторов заштрихован.

Выведем формулу для вычисления площади S кругового сектора радиуса R, ограниченного дугой с градусной мерой α. Так как площадь всего круга равна πR^2, то площадь кругового сектора, ограниченного дугой в 1°, равна $\frac{\pi R^2}{360}$. Поэтому площадь S выражается формулой

$$S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha.$$

Вопросы и задачи

1101. Перечертите таблицу и, используя формулу длины C окружности радиуса R, заполните пустые клетки таблицы. Воспользуйтесь значением $\pi = 3{,}14$.

C			82	18π		6,28			$2\sqrt{2}$
R	4	3			0,7		101,5	$2\frac{1}{3}$	

1102. Как изменится длина окружности, если радиус окружности: а) увеличить в три раза; б) уменьшить в два раза; в) увеличить в k раз; г) уменьшить в k раз?

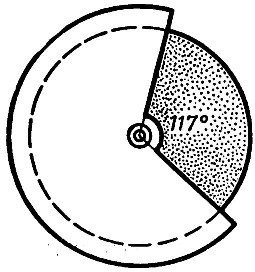


Рис. 316

1103. Как изменится радиус окружности, если длину окружности: а) увеличить в k раз; б) уменьшить в k раз?

1104. Найдите длину окружности, описанной около: а) правильного треугольника со стороной a; б) прямоугольного треугольника с катетами a и b; в) равнобедренного треугольника с основанием a и боковой стороной b; г) прямоугольника со стороной a и острым углом α между диагоналями; д) правильного шестиугольника, площадь которого равна $24\sqrt{3}$ см^2.

1105. Найдите длину окружности, вписанной: а) в квадрат со стороной a; б) в равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой c; в) в прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α; г) в равнобедренный треугольник с углом при основании α и высотой h, проведенной к основанию.

1106. Тепловоз прошел 1413 м. Найдите диаметр колеса тепловоза, если известно, что оно сделало 300 оборотов.

1107. Метр составляет приближенно $\frac{1}{40\,000\,000}$ часть земного экватора. Найдите диаметр Земли в километрах, считая, что Земля имеет форму шара.

1108. Вычислите длину круговой орбиты искусственного спутника Земли, если спутник вращается на расстоянии 320 км от Земли, а радиус Земли равен 6370 км.

1109. Найдите длину дуги окружности радиуса 6 см, если ее градусная мера равна: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°.

1110. Расстояние между серединами зубьев зубчатого колеса, измеренное по дуге окружности, равно 47,1 мм. Диаметр колеса равен 450 мм. Сколько зубьев имеет колесо?

1111. Шлифовальный камень, имеющий форму диска, находится в защитном кожухе (рис. 316). Диаметр камня равен 58 см, дуга незащищенной его части равна 117°. Найдите длину дуги незащищенной части камня.

1112. Найдите длину маятника стенных часов, если угол его колебания составляет 38°, а длина дуги, которую описывает конец маятника, равна 24 см.

1113. Радиус закругления пути железнодорожного полотна равен 5 км, а длина дуги закругления — 400 м. Какова градусная мера дуги закругления?

1114. Перечертите таблицу и, используя формулу для площади S круга радиуса R, заполните пустые клетки. Воспользуйтесь значением $\pi = 3{,}14$.

S			9		49π			6,25
R	2	5		$\frac{2}{7}$		54,3	$\sqrt{3}$	

1115. Как изменится площадь круга, если его радиус: а) увеличить в k раз; б) уменьшить в k раз?

1116. Найдите площадь круга, описанного около: а) прямоугольника со сторонами a и b; б) прямоугольного треугольника с катетом a и противолежащим углом α; в) равнобедренного треугольника с основанием a и высотой h, проведенной к основанию.

1117. Найдите площадь круга, вписанного: а) в равносторонний треугольник со стороной a; б) в прямоугольный треугольник с катетом a и прилежащим к нему острым углом α; в) в равнобедренный треугольник с боковой стороной a и углом α, противолежащим основанию; г) в равнобедренную трапецию с бо́льшим основанием a и острым углом α.

1118. Диаметр основания царь-колокола, находящегося в Московском Кремле, равен 6,6 м. Найдите площадь основания колокола.

1119. Длина окружности цирковой арены равна 41 м. Найдите диаметр и площадь арены.

1120. Найдите площадь кольца, ограниченного двумя окружностями с общим центром и радиусами R_1 и R_2, $R_1 < R_2$. Вычислите площадь кольца, если $R_1 = 1{,}5$ см, $R_2 = 2{,}5$ см.

1121. Какой толщины слой нужно снять с круглой медной проволоки, имеющей площадь сечения 314 мм^2, чтобы она проходила сквозь отверстие диаметром 18,5 мм?

1122. Вокруг круглой клумбы, радиус которой равен 3 м, проложена дорожка шириной 1 м. Сколько нужно песка, чтобы посыпать дорожку, если на 1 м^2 дорожки требуется 0,8 дм^3 песка?

1123. Из круга радиуса r вырезан квадрат, вписанный в окружность, которая ограничивает круг. Найдите площадь оставшейся части круга.

1124. На мишени имеются четыре окружности с общим центром, радиусы которых равны 1, 2, 3 и 4. Найдите площадь наименьшего круга, а также площадь каждого из трех колец мишени.

1125. На сторонах прямоугольного треугольника как на диаметрах построены три полукруга. Докажите, что площадь полукруга, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей полукругов, построенных на катетах.

1126. Из круга, радиус которого 10 см, вырезан сектор с дугой в 60°. Найдите площадь оставшейся части круга.

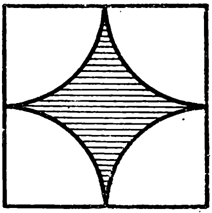


Рис. 317

1127. Площадь сектора с центральным углом 72° равна S. Найдите радиус сектора.

1128. Сторона квадрата на рисунке 317 равна a. Вычислите площадь заштрихованной фигуры.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ XII

1. Какой многоугольник называется правильным? Приведите примеры правильных многоугольников.
2. Выведите формулу для вычисления угла правильного n-угольника.
3. Сформулируйте и докажите теорему об окружности, описанной около правильного многоугольника.
4. Сформулируйте и докажите теорему об окружности, вписанной в правильный многоугольник.
5. Выведите формулу для вычисления площади правильного многоугольника через его периметр и радиус вписанной окружности.
6. Выведите формулы для вычисления стороны правильного n-угольника и радиуса вписанной в него окружности через радиус описанной окружности.
7. Как выражаются стороны правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника через радиус описанной окружности?
8. Выведите формулу для вычисления длины окружности.
9. Объясните, какое число обозначается буквой π и чему равно его приближенное значение.
10. Выведите формулу для вычисления длины дуги окружности.
11. Выведите формулу для вычисления площади круга.
12. Выведите формулу для вычисления площади кругового сектора.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1129. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, один из внешних углов которого равен: а) 18°; б) 40°; в) 72°; г) 60°?

1130. На стороне правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса 3 дм, построен квадрат. Найдите радиус окружности, описанной около квадрата.

1131. Найдите периметр правильного шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, если $A_1A_4 = 2{,}24$ см.

1132. Найдите отношение периметров правильного треугольника и квадрата: а) вписанных в одну и ту же окружность; б) описанных около одной и той же окружности.

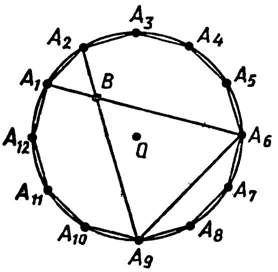


Рис. 318

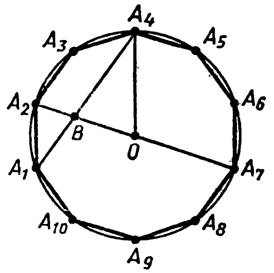


Рис. 319

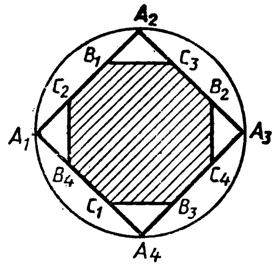


Рис. 320

1133. Диагонали A_1A_6 и A_2A_9 правильного двенадцатиугольника пересекаются в точке B (рис. 318). Докажите, что: а) треугольники A_1A_2B и A_6A_9B равносторонние; б) $A_1A_6=2r$, где r — радиус вписанной в двенадцатиугольник окружности.

1134. Диагонали A_1A_4 и A_2A_7 правильного десятиугольника $A_1A_2...A_{10}$, вписанного в окружность радиуса R, пересекаются в точке B (рис. 319). Докажите, что: а) $A_2A_7=2R$; б) A_1A_2B и BA_4O — подобные равнобедренные треугольники; в) $A_1A_4-A_1A_2=R$.

1135. В круг, площадь которого равна 36π см^2, вписан правильный шестиугольник. Найдите сторону этого шестиугольника и его площадь.

1136. Квадрат $A_1A_2A_3A_4$ вписан в окружность радиуса R (рис. 320). На его сторонах отмечены восемь точек так, что $A_1B_1=A_2B_2=A_3B_3=A_4B_4=A_1C_1=A_2C_2=A_3C_3=A_4C_4=$ $=R$. Докажите, что восьмиугольник $B_1C_3B_2C_4B_3C_1B_4C_2$ правильный, и выразите площадь этого восьмиугольника через радиус R.

1137. За два оборота по круговой орбите вокруг Земли космический корабль проделал путь в 84 152 км. На какой высоте над поверхностью Земли находится корабль, если радиус Земли равен 6370 км?

1138. Найдите длину окружности, вписанной в ромб, если: а) диагонали ромба равны 6 см и 8 см; б) сторона ромба равна a и острый угол равен α.

1139. Лесной участок имеет форму круга. Чтобы обойти этот участок по опушке, идя со скоростью 4 км/ч, нужно затратить на 45 мин больше, чем для того, чтобы пересечь его по диаметру. Найдите длину опушки данного участка.

1140. В правильный многоугольник вписана окружность. Докажите, что отношение площади круга, ограниченного этой окружностью, к площади многоугольника равно отношению длины окружности к периметру многоугольника.

1141*. Постройте правильный восьмиугольник, сторона которого равна данному отрезку.

1142*. Даны два круга. Постройте круг, площадь которого равна сумме площадей данных кругов.

1143. Около данной окружности опишите: а) правильный треугольник; б) правильный шестиугольник.

1144. Около данной окружности опишите: а) правильный четырехугольник; б) правильный восьмиугольник.

Задачи для решения с помощью программируемых микрокалькуляторов МК-54 — МК-57

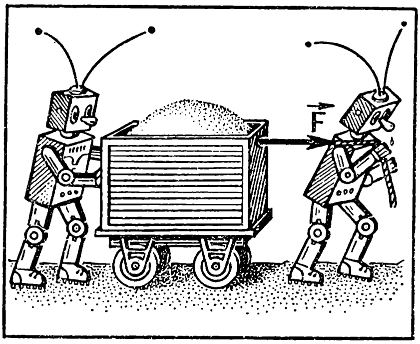
1145. Вычислите полупериметр правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса 1, для n, равного 3, 4, 6, 10, 20, 30, 40, 60, 80, 120, 180, 240. К какому числу стремится полупериметр при $n \to \infty$?

1146. Составьте программу для вычисления периметра правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса R.

1147. Вычислите площадь правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса 1, для n, равного 3, 4, 6, 10, 24, 45, 90, 180, 360, 500, 700. К какому числу стремится площадь при $n \to \infty$?

Глава XIII

ДВИЖЕНИЯ



§ 1. ПОНЯТИЕ ДВИЖЕНИЯ

113. Отображение плоскости на себя. Представим себе, что каждой точке плоскости сопоставляется (ставится в соответствие) какая-то точка этой же плоскости, причем любая точка плоскости оказывается сопоставленной некоторой точке. Тогда говорят, что дано *отображение плоскости на себя.*

Фактически мы уже встречались с отображениями плоскости на себя — вспомним осевую симметрию (см. п. 47). Она дает нам пример такого отображения. В самом деле, путь a — ось симметрии (рис. 321). Возьмем произвольную точку M, не лежащую на прямой a, и построим симметричную ей точку M_1 относительно прямой a. Для этого нужно провести перпендикуляр MP к прямой a и отложить на прямой MP отрезок PM_1, равный отрезку MP, так, как показано на рисунке 321. Точка M_1 и будет искомой. Если же точка M лежит на прямой a, то симметричная ей точка M_1 совпадает с точкой M. Мы видим, что с помощью осевой симметрии каждой точке M плоскости сопоставляется точка M_1 этой же плоскости. При этом любая точка M_1 оказывается сопоставленной некоторой точке M. Это ясно из рисунка 321.

Итак, *осевая симметрия представляет собой отображение плоскости на себя.*

Рассмотрим теперь центральную симметрию плоскости (см. п. 47). Пусть O — центр симметрии. Каждой точке M плоскости сопоставляется точка M_1, симметричная точке M относительно точки O (рис. 322). Попытайтесь самостоятельно убедиться в том, что центральная симметрия плоскости также представляет собой отображение плоскости на себя.

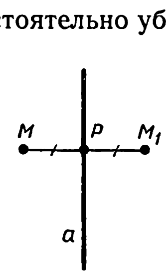


Рис. 321

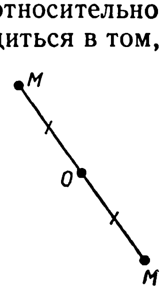


Рис. 322

114. Понятие движения. Осевая симметрия обладает следующим важным свойством — это *отображение плоскости на себя, которое сохраняет расстояния между точками.* Поясним, что это значит. Пусть M и N — какие-либо точки, а M_1

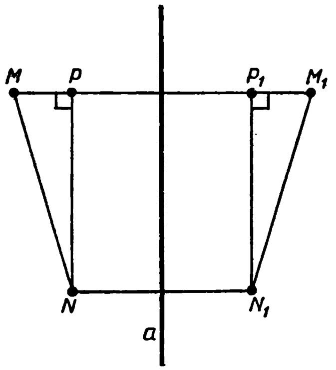


Рис. 323

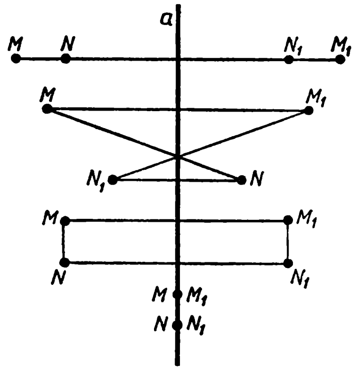


Рис. 324

и N_1 — симметричные им точки относительно прямой a (рис. 323). Из точек N и N_1 проведем перпендикуляры NP и N_1P_1 к прямой MM_1. Прямоугольные треугольники MNP и $M_1N_1P_1$ равны по двум катетам: $MP=M_1P_1$ и $NP=N_1P_1$ (объясните, почему эти катеты равны). Поэтому гипотенузы MN и M_1N_1 также равны. Следовательно, ***расстояние между точками M и N равно расстоянию между симметричными им точками M_1 и N_1***. (Другие случаи расположения точек M, N и M_1, N_1, представленные на рисунке 324, рассмотрите самостоятельно и убедитесь в том, что и в этих случаях $MN=M_1N_1$.) Таким образом, осевая симметрия является отображением, которое сохраняет расстояния между точками. Любое отображение, обладающее этим свойством, называется движением (или перемещением). Итак, *движение плоскости — это отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояния.*

Почему отображение, сохраняющее расстояния, называют движением (или перемещением), можно пояснить на примере осевой

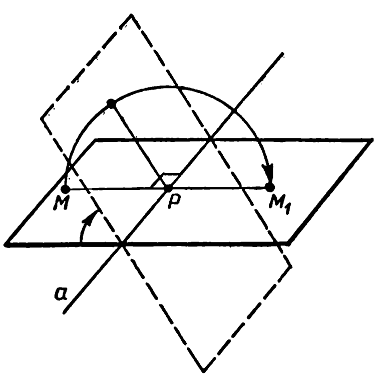


Рис. 325

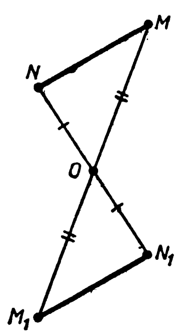


Рис. 326

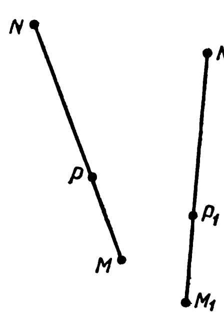


Рис. 327

симметрии. Ее можно представить как поворот плоскости в пространстве на 180° вокруг оси a. На рисунке 325 показано, каким образом происходит такой поворот.

Отметим, что *центральная симметрия плоскости также является движением* (пользуясь рисунком 326, убедитесь в этом самостоятельно).

Докажем следующую теорему:

Теорема. ***При движении отрезок отображается на отрезок.***

Доказательство. Пусть при заданном движении плоскости концы M и N отрезка MN отображаются в точки M_1 и N_1 (рис. 327). Докажем, что весь отрезок MN отображается на отрезок M_1N_1. Пусть P — произвольная точка отрезка MN, P_1 — точка, в которую отображается точка P. Тогда $MP+PN=$ $=MN$. Так как при движении расстояния сохраняются, то

$$M_1N_1=MN,\ M_1P_1=MP \text{ и } N_1P_1=NP. \qquad (1)$$

Из равенств (1) получаем, что $M_1P_1+P_1N_1=M_1N_1$, и, следовательно, точка P_1 лежит на отрезке M_1N_1 (если предположить, что это не так, то будет выполняться неравенство M_1P_1+ $+P_1N_1>M_1N_1$). Итак, точки отрезка MN отображаются в точки отрезка M_1N_1.

Нужно еще доказать, что в каждую точку P_1 отрезка M_1N_1 отображается какая-нибудь точка P отрезка MN. Докажем это. Пусть P_1 — произвольная точка отрезка M_1N_1 и точка P при заданном движении отображается в точку P_1. Из соотношений (1) и равенства $M_1N_1=M_1P_1+P_1N_1$ следует, что $MP+PN=MN$, и, значит, точка P лежит на отрезке MN. Теорема доказана.

Следствие. *При движении треугольник отображается на равный ему треугольник.*

В самом деле, в силу доказанной теоремы при движении каждая сторона треугольника отображается на равный ей отрезок, поэтому и треугольник отображается на треугольник с соответственно равными сторонами, т. е. на равный треугольник.

Пользуясь доказанной теоремой, нетрудно убедиться в том, что при движении прямая отображается на прямую, луч — на луч, а угол — на равный ему угол.

115*. Наложения и движения. Напомним, что в нашем курсе геометрии равенство фигур определяется с помощью наложений. Мы говорим, что фигура Ф равна фигуре $Ф_1$, если фигуру Ф можно совместить наложением с фигурой $Ф_1$. Понятие наложения в нашем курсе относится к основным понятиям геометрии, поэтому определение наложения не дается. Под наложением фигуры Ф на фигуру $Ф_1$ мы понимаем некоторое отображение фигуры Ф на фигуру $Ф_1$. Более того, мы считаем, что при этом не только точки фигуры Ф, но и любая точка плоскости отображается в определенную точку плоскости, т. е. *наложение — это отображение плоскости на себя.*

Однако не всякое отображение плоскости на себя мы называем наложением. Наложения — это такие отображения плоскости на себя, которые обладают свойствами, выраженными в аксиомах (см. приложение 1, аксиомы 7—13). Эти аксиомы позволяют доказать все те свойства наложений, которые мы себе представляем наглядно и которыми пользуемся при доказательстве теорем и решении задач.

Докажем, например, что *при наложении различные точки отображаются в различные точки.*

В самом деле, предположим, что это не так, т. е. при некотором наложении какие-то две точки A и B отображаются в одну и ту же точку C. Тогда фигура Φ_1, состоящая из точек A и B, равна фигуре Φ_2, состоящей из одной точки C. Отсюда следует, что $\Phi_2 = \Phi_1$ (аксиома 12), т. е. при некотором наложении фигура Φ_2 отображается в фигуру Φ_1. Но это невозможно, так как наложение — это отображение, а при любом отображении точке C ставится в соответствие только одна точка плоскости.

Из доказанного утверждения следует, что при наложении отрезок отображается на равный ему отрезок. Действительно, пусть при наложении концы A и B отрезка AB отображаются в точки A_1 и B_1. Тогда отрезок AB отображается на отрезок A_1B_1 (аксиома 7), и, следовательно, отрезок AB равен отрезку A_1B_1. Так как равные отрезки имеют равные длины, то наложение является отображением плоскости на себя, сохраняющим расстояния, т. е. *любое наложение является движением плоскости.*

Докажем, что верно и обратное утверждение.

Теорема. ***Любое движение является наложением.***

Доказательство. Рассмотрим произвольное движение (обозначим его буквой g) и докажем, что оно является наложением. Возьмем какой-нибудь треугольник ABC. При движении g он отображается на равный ему треугольник $A_1B_1C_1$. По определению равных треугольников существует наложение f, при котором точки A, B и C отображаются соответственно в точки A_1, B_1 и C_1.

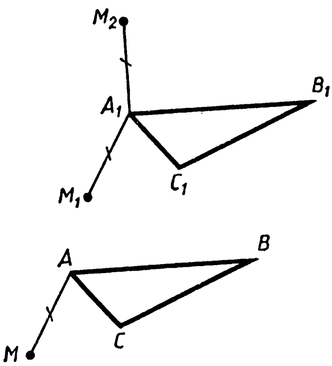


Рис. 328

Докажем, что движение g совпадает с наложением f. Предположим, что это не так. Тогда на плоскости найдется хотя бы одна такая точка M, которая при движении g отображается в точку M_1, а при наложении f — в другую точку M_2. Так как при отображениях f и g сохраняются расстояния, то $AM = A_1M_1$, $AM = A_1M_2$, поэтому $A_1M_1 =$

$=A_1M_2$, т. е. точка A_1 равноудалена от точек M_1 и M_2 (рис. 328). Аналогично доказывается, что точки B_1 и C_1 равноудалены от точек M_1 и M_2. Отсюда следует, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на серединном перпендикуляре к отрезку M_1M_2. Но это невозможно, так как вершины треугольника $A_1B_1C_1$ не лежат на одной прямой. Таким образом, отображения f и g совпадают, т. е. движение g является наложением. Теорема доказана.

Следствие. *При движении любая фигура отображается на равную ей фигуру.*

Задачи

1148. Докажите, что при осевой симметрии плоскости: а) прямая, параллельная оси, отображается на прямую, параллельную оси; б) прямая, перпендикулярная к оси, отображается на себя.

1149. Докажите, что при центральной симметрии плоскости: а) прямая, не проходящая через центр симметрии, отображается на параллельную ей прямую; б) прямая, проходящая через центр симметрии, отображается на себя.

1150. Докажите, что при движении угол отображается на равный ему угол.

Решение. Пусть при данном движении угол AOB отображается на угол $A_1O_1B_1$, причем точки A, O, B отображаются соответственно в точки A_1, O_1, B_1. Так как при движении сохраняются расстояния, то $OA=O_1A_1$, $OB=O_1B_1$, $AB=A_1B_1$.

Если угол AOB неразвернутый, то треугольники AOB и $A_1O_1B_1$ равны по трем сторонам, и, следовательно, $\angle AOB=\angle A_1O_1B_1$. Если угол AOB развернутый, то и угол $A_1O_1B_1$ развернутый (объясните почему), поэтому они равны.

1151. Докажите, что при движении параллельные прямые отображаются на параллельные прямые.

1152. Докажите, что при движении: а) параллелограмм отображается на параллелограмм; б) трапеция отображается на трапецию; в) ромб отображается на ромб; г) прямоугольник отображается на прямоугольник, а квадрат — на квадрат.

1153. Докажите, что при движении окружность отображается на окружность того же радиуса.

1154. Докажите, что отображение плоскости, при котором каждая точка отображается на себя, является наложением.

1155. Даны произвольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что существует не более одного движения, при котором точки A, B и C отображаются в точки A_1, B_1, C_1.

1156. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$. Докажите, что существует движение, при котором точки A, B и C отображаются в точки A_1, B_1 и C_1, притом только одно.

Решение. По условию задачи треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трем сторонам. Следовательно, существует наложение, т. е. движение, при котором точки A, B и C отображаются соответственно в точки A_1, B_1 и C_1. Это движение является единственным движением, при котором точки A, B и C отображаются соответственно в точки A_1, B_1 и C_1 (задача 1155).

1157. Докажите, что два параллелограмма равны, если смежные стороны и угол между ними одного параллелограмма соответственно равны смежным сторонам и углу между ними другого параллелограмма.

1158. Даны две прямые a и b. Постройте прямую, на которую отображается прямая b при осевой симметрии с осью a.

1159. Даны прямая a и четырехугольник $ABCD$. Постройте фигуру F, на которую отображается данный четырехугольник при осевой симметрии с осью a. Что представляет собой фигура F?

1160. Даны точка O и прямая b. Постройте прямую, на которую отображается прямая b при центральной симметрии с центром O.

1161. Даны точка O и треугольник ABC. Постройте фигуру F, на которую отображается треугольник ABC при центральной симметрии с центром O. Что представляет собой фигура F?

§ 2. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС И ПОВОРОТ

116. Параллельный перенос. Пусть $\vec{a}$ — данный вектор. *Параллельным переносом* на вектор $\vec{a}$ называется отображение плоскости на себя, при котором каждая точка M отображается в такую точку M_1, что вектор $\overrightarrow{MM_1}$ равен вектору $\vec{a}$ (рис. 329).

Параллельный перенос является движением, т. е. отображением плоскости на себя, сохраняющим расстояния. Докажем это. Пусть при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ точки M и N отображаются в точки M_1 и N_1 (см. рис. 329). Так как $\overrightarrow{MM_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{NN_1}=\vec{a}$, то $\overrightarrow{MM_1}=\overrightarrow{NN_1}$. Отсюда следует, что $MM_1 \parallel NN_1$ и $MM_1=NN_1$, поэтому четырехугольник MM_1N_1N — параллелограмм. Следовательно, $MN=M_1N_1$, т. е. расстояние между точками M и N равно расстоянию между точками M_1 и N_1 (случай, когда точки M и N расположены на прямой, параллельной вектору $\vec{a}$, рассмотрите самостоятельно). Таким образом, параллельный перенос сохраняет расстояния между точками и поэтому представляет собой движе-

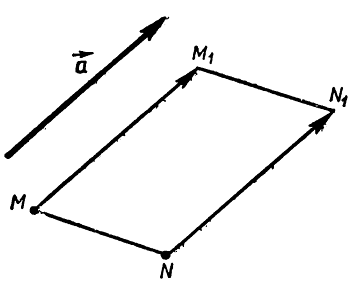


Рис. 329

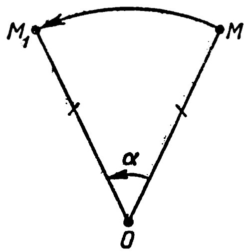


Рис. 330

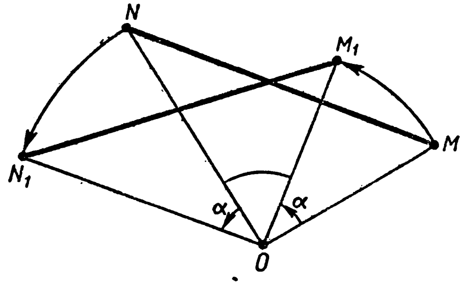


Рис. 331

ние. Наглядно это движение можно представить себе как сдвиг всей плоскости в направлении данного вектора $\vec{a}$ на его длину.

117. Поворот. Отметим на плоскости точку O (центр поворота) и зададим угол α (угол поворота). *Поворотом плоскости* вокруг точки O на угол α называется отображение плоскости на себя, при котором каждая точка M отображается в такую точку M_1, что $OM = OM_1$ и угол MOM_1 равен α (рис. 330). При этом точка O остается на месте, т. е. отображается сама в себя, а все остальные точки поворачиваются вокруг точки O в одном и том же направлении — по часовой стрелке или против часовой стрелки. На рисунке 330 изображен поворот против часовой стрелки.

Поворот является движением, т. е. отображением плоскости на себя, сохраняющим расстояния.

Докажем это. Пусть O — центр поворота, α — угол поворота против часовой стрелки (случай поворота по часовой стрелке рассматривается аналогично). Допустим, что при этом повороте точки M и N отображаются в точки M_1 и N_1 (рис. 331). Треугольники OMN и OM_1N_1 равны по двум сторонам и углу между ними: $OM = OM_1$, $ON = ON_1$ и $\angle MON = \angle M_1ON_1$ (для случая, изображенного на рисунке 331, каждый из этих углов равен сумме угла α и угла M_1ON). Из равенства этих треугольников следует, что $MN = M_1N_1$, т. е. расстояние между точками M и N равно расстоянию между точками M_1 и N_1 (случай, когда точки O, M и N расположены на одной прямой, рассмотрите самостоятельно). Итак, поворот сохраняет расстояния между точками и поэтому представляет собой движение. Это движение можно представить себе как поворот всей плоскости вокруг данной точки O на данный угол α.

Задачи

1162. Начертите отрезок AB и вектор $\overrightarrow{MM_1}$. Постройте отрезок A_1B_1, который получится из отрезка AB параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{MM_1}$.

1163. Начертите треугольник ABC, вектор $\overrightarrow{MM_1}$, который не параллелен ни одной из сторон треугольника, и вектор $\vec{a}$, параллельный стороне AC. Постройте треугольник $A_1B_1C_1$, который получится из треугольника ABC параллельным переносом: а) на вектор $\overrightarrow{MM_1}$; б) на вектор $\vec{a}$.

1164. Даны равнобедренный треугольник ABC с основанием AC и точка D на прямой AC, такая, что точка C лежит на отрезке AD. а) Постройте отрезок B_1D, который получается из отрезка BC параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{CD}$. б) Докажите, что четырехугольник ABB_1D — равнобедренная трапеция.

1165. Даны треугольник, трапеция, окружность и вектор $\vec{a}$. Постройте фигуры, которые получаются из этих фигур параллельным переносом на вектор $\vec{a}$.

1166. Постройте отрезок A_1B_1, который получается из данного отрезка AB поворотом вокруг данного центра O: а) на 120° по часовой стрелке; б) на 75° против часовой стрелки; в) на 180°.

1167. Постройте треугольник, который получается из данного треугольника ABC поворотом вокруг точки A на угол 160° против часовой стрелки.

1168. Точка D является точкой пересечения биссектрис равностороннего треугольника ABC. Докажите, что при повороте вокруг точки D на угол 120° треугольник ABC отображается на себя.

1169. Докажите, что при повороте квадрата вокруг точки пересечения его диагоналей на угол 90° квадрат отображается на себя.

1170. Постройте окружность, которая получается из данной окружности с центром C поворотом вокруг точки O на угол 60° против часовой стрелки, если: а) точки O и C не совпадают; б) точки O и C совпадают.

1171. Постройте прямую a_1, которая получается из данной прямой a поворотом вокруг точки O на угол 60° по часовой стрелке, если прямая a: а) не проходит через точку O; б) проходит через точку O.

Решение. а) Построим окружность с центром O, которая касается прямой a (объясните, как это сделать). Пусть M — точка касания. При повороте вокруг точки O эта окружность отображается на себя, а касательная a отображается на некоторую касательную a_1 (объясните почему). Для построения прямой a_1 построим сначала точку M_1, в которую отображается точка M при повороте вокруг точки O на угол 60° по часовой стрелке, а затем проведем касательную a_1 к окружности в точке M_1.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К ГЛАВЕ XIII

1. Объясните, что такое отображение плоскости на себя.
2. Какое отображение плоскости называется: а) осевой симметрией; б) центральной симметрией?
3. Докажите, что осевая симметрия является отображением плоскости на себя.
4. Что такое движение (или перемещение) плоскости?
5. Докажите, что осевая симметрия является движением.
6. Является ли центральная симметрия движением?
7. Докажите, что при движении отрезок отображается на отрезок.
8. Докажите, что при движении треугольник отображается на равный ему треугольник.
9. Объясните, что такое наложение.
10. Докажите, что при наложении различные точки отображаются в различные точки.
11. Докажите, что наложение является движением плоскости.
12. Докажите, что любое движение является наложением.
13. Верно ли утверждение, что при движении любая фигура отображается на равную ей фигуру?
14. Какое отображение плоскости называется параллельным переносом на данный вектор?
15. Докажите, что параллельный перенос является движением.
16. Какое отображение плоскости называется поворотом?
17. Докажите, что поворот является движением.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1172. При данном движении каждая из двух точек A и B отображается на себя. Докажите, что любая точка прямой AB отображается на себя.

1173. При данном движении каждая из вершин треугольника ABC отображается на себя. Докажите, что любая точка плоскости отображается на себя.

1174. Докажите, что два прямоугольника равны, если: а) смежные стороны одного прямоугольника соответственно равны смежным сторонам другого; б) сторона и диагональ одного прямоугольника соответственно равны стороне и диагонали другого.

1175. Даны прямая a и точки M и N, лежащие по одну сторону от нее. Докажите, что на прямой a существует единственная точка X такая, что сумма расстояний $MX+XN$ имеет наименьшее значение.

1176. Даны острый угол ABC и точка D внутри него. Используя осевую симметрию, найдите на сторонах данного угла такие точки E и F, чтобы треугольник DEF имел наименьший периметр.

1177. В треугольнике ABC медианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке M. Точки A_2, B_2 и C_2 являются соответственно серединами отрезков AM, BM и CM. Докажите, что $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2$.

Решение. Так как M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $AM = 2MA_1$. Отсюда, учитывая, что точка A_2 — середина отрезка AM, получаем $MA_1 = MA_2$, т. е. точки A_1 и A_2 симметричны относительно точки M. Аналогично точки B_1 и B_2, а также точки C_1 и C_2 симметричны относительно точки M.

Рассмотрим центральную симметрию относительно точки M. При этой симметрии точки A_1, B_1, C_1 отображаются в точки A_2, B_2, C_2, поэтому треугольник $A_1B_1C_1$ отображается на треугольник $A_2B_2C_2$, и, следовательно, $\triangle A_2B_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$.

1178. На сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ построены квадраты так, как показано на рисунке 332. Используя параллельный перенос, докажите, что отрезок, соединяющий центры этих квадратов, равен и параллелен стороне AD.

1179*. На стороне AB прямоугольника $ABCD$ построен треугольник ABS, $CC_1 \perp AS$, $DD_1 \perp BS$ (рис. 333). Используя параллельный перенос, докажите, что прямые SK и AB взаимно перпендикулярны.

1180. В окружность с центром O вписаны два равносторонних треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, причем вершины обозначены так, что направление обхода по дуге ABC от точки A к точке C совпадает с направлением обхода по дуге $A_1B_1C_1$ от точки A_1 к точке C_1. Используя поворот вокруг точки O, докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 либо проходят через точку O, либо, пересекаясь, образуют равносторонний треугольник.

1181. Даны две пересекающиеся прямые и точка O, не лежащая на них. Используя центральную симметрию, постройте прямую, проходящую через точку O, так, чтобы отрезок этой

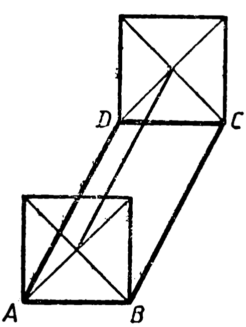


Рис. 332

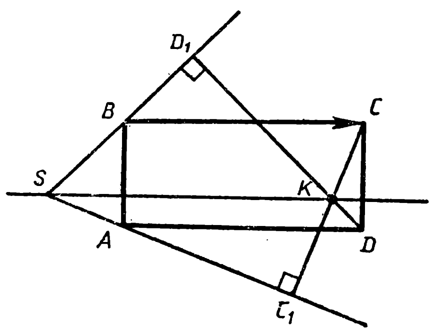


Рис. 333

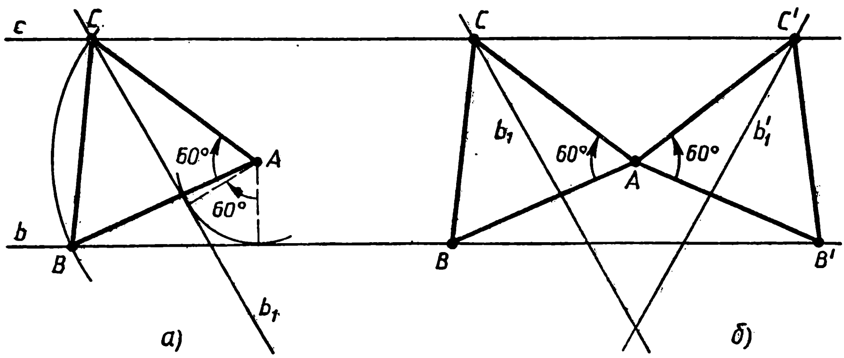


Рис. 334

прямой, отсекаемый данными прямыми, делился точкой O пополам.

1182. Используя параллельный перенос, постройте трапецию по ее основаниям и диагоналям.

1183. Даны две параллельные прямые b и c и точка A, не лежащая на них. Постройте равносторонний треугольник ABC так, чтобы вершины B и C лежали соответственно на прямых b и c. Сколько решений имеет задача?

Решение. Допустим, что задача решена и искомый треугольник ABC построен (рис. 334, *а*). При повороте плоскости вокруг точки A на 60° по часовой стрелке вершина B отображается в вершину C, поэтому прямая b отображается на прямую b_1, проходящую через точку C. Прямую b_1 легко построить, не пользуясь точками B и C (см. задачу 1171). Построив прямую b_1, находим точку C, в которой прямая b_1 пересекается с прямой c. Затем, построив окружность с центром A радиуса AC, находим точку B. На рисунке 334, *а* выполнено построение.

Задача имеет два решения, одно из которых получается при повороте плоскости вокруг точки A на 60° по часовой стрелке ($\triangle ABC$ на рисунке 334, *а*), а другое — при повороте плоскости на угол 60° против часовой стрелки ($\triangle AB'C'$ на рисунке 334, *б*).

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

Задачи к главе X

1184. Вершины четырехугольника $ABCD$ имеют координаты $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ и $D(x_4; y_4)$. Докажите, что этот четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда $x_1+x_3=x_2+x_4$ и $y_1+y_3=y_2+y_4$.

1185. Даны две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Докажите, что координаты $(x; y)$ точки C, делящей отрезок AB в отношении λ (т. е. $\frac{AC}{CB}=\lambda$), выражаются формулами

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

1186. Из физики известно, что центр тяжести однородной треугольной пластинки находится в точке пересечения медиан. Найдите координаты центра тяжести такой пластинки, если координаты ее вершин: $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$, $A_3(x_3; y_3)$.

1187. Вершины треугольника ABC имеют координаты $A(-3; 0)$, $B(0; 4)$, $C(3; 0)$. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D. Найдите координаты точки D.

1188. В треугольнике ABC $AC=9$ см, $BC=12$ см. Медианы AM и BN взаимно перпендикулярны. Найдите AB.

1189. Найдите координаты центра тяжести системы трех масс m_1, m_2 и m_3, сосредоточенных соответственно в точках $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$, $A_3(x_3; y_3)$.

1190. В каждом из следующих случаев на оси абсцисс найдите точку M, для которой сумма ее расстояний от точек A и B имеет наименьшее значение: а) $A(2; 3)$, $B(4; -5)$; б) $A(-2; 4)$, $B(3; 1)$.

1191. Докажите, что: а) уравнение $Ax+By+C=0$, где A и B одновременно не равны нулю, является уравнением прямой; б) уравнение $x^2-xy-2=0$ не является уравнением окружности.

1192. Найдите точки пересечения двух окружностей, заданных уравнениями $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ и $x^2+y^2=1$, и вычислите длину их общей хорды.

1193. Даны три точки A, B, C и три числа α, β, γ. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых сумма $\alpha AM^2+\beta BM^2+\gamma CM^2$ имеет постоянное значение, если: а) $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$; б) $\alpha+\beta+\gamma=0$.

1194. Даны прямая a и точка A, не лежащая на ней. Для каждой точки M_1 прямой a на луче AM_1 взята точка M, такая, что $AM_1\cdot AM=k$, где k — данное положительное число. Найдите множество всех точек M.

1195. Точка O не лежит на данной окружности. Для каждой точки M_1 окружности на луче OM_1 взята точка M, такая, что $OM=k\cdot OM_1$, где k — данное положительное число. Найдите множество всех точек M.

1196. Пусть A и B — данные точки, k — данное положительное число, не равное 1. а) Докажите, что множество всех точек M, удовлетворяющих условию $AM=k\cdot BM$, есть окружность (окружность Аполлония). б) Докажите, что эта окружность пересекается с любой окружностью, проходящей через точки A и B, так, что их радиусы, проведенные в точку пересечения, взаимно перпендикулярны.

Задачи к главе XI

1197. На сторонах квадрата $MNPQ$ взяты точки A и B так, что $NA=\frac{1}{2}MN$, $QB=\frac{1}{3}MN$ (рис. 335). Докажите, что $\angle AMB=45°$.

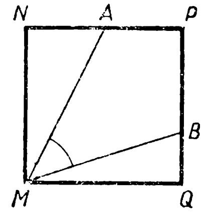


Рис. 335

1198. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Площадь треугольника ODC есть среднее пропорциональное между площадями треугольников OBC и OAD. Докажите, что $ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC или параллелограмм.

1199. Докажите, что площадь S произвольного четырехугольника со сторонами a, b, c, d (последовательно) удовлетворяет неравенству $S\leqslant\frac{1}{2}(ac+bd)$.

1200. Докажите, что в треугольнике ABC биссектриса AA_1 вычисляется по формуле $AA_1=\dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$, где $b=AC$, $c=AB$.

1201. Выразите диагонали вписанного в окружность четырехугольника через его стороны.

1202. Докажите, что площадь четырехугольника, вписанного в окружность, может быть вычислена по формуле

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где p — полупериметр, а a, b, c, d — стороны четырехугольника.

1203. Докажите, что стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда прямая, проходящая через центры вписанной и описанной окружностей, перпендикулярна к одной из биссектрис треугольника.

1204. В прямоугольной трапеции $ABCD$ меньшее основание AD равно 3, а боковая сторона CD, не перпендикулярная к основаниям, равна 6. Точка E — середина отрезка CD, угол CBE равен α. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

1205. В остроугольном треугольнике ABC сторона AB больше стороны BC, отрезки AM и CN — высоты треугольника, точка O — центр описанной окружности. Угол ABC равен β, а площадь четырехугольника $NOMB$ равна S. Найдите сторону AC.

1206. В треугольнике ABC проведены высота AH длиной h, медиана AM длиной l, биссектриса AN. Точка N — середина отрезка MH. Найдите расстояние от вершины A до точки пересечения высот треугольника ABC.

Задачи к главе XII

1207. На рисунке 336 изображен правильный десятиугольник, вписанный в окружность радиуса R, AC — биссектриса угла OAB. Докажите, что: а) $\triangle ABC \sim \triangle OAB$; б) $AB = AC = OC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}R$.

1208. Докажите, что отрезок AK, изображенный на рисунке 337, равен стороне правильного десятиугольника, вписанного в окружность с центром O.

1209. Около правильного пятиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$ описана окружность с центром O. Вершинами треугольника ABC являются середины сторон A_1A_2, A_2A_3 и A_3A_4 пятиугольника. Докажите, что центр O данной окружности и центр O_1 окружности, вписанной в треугольник ABC, симметричны относительно прямой AC.

1210*. В данную окружность впишите правильный десятиугольник.

1211*. В данную окружность впишите правильный пятиугольник.

1212. В данную окружность впишите пятиконечную звезду.

1213. Пусть M — произвольная точка, лежащая внутри правильного n-угольника. Докажите, что сумма перпендикуляров, проведенных из точки M к прямым, содержащим стороны n-угольника, равна nr, где r — радиус вписанной окружности.

1214. Углы треугольника образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2. Докажите, что середины сторон и основания высот этого треугольника являются шестью вершинами правильного семиугольника.

1215. Пусть $ABCD$ — квадрат, а $A_1B_1C_1$ — правильный треугольник, вписанные в окружность радиуса R. Докажите, что сумма $AB + A_1B_1$ равна длине полуокружности с точностью до $0{,}01R$.

1216. По данным рисунка 338 докажите, что длина отрезка AC равна длине окружности с центром O радиуса R с точностью до $0{,}001R$.

1217. На рисунке 339 изображены четыре полуокружности: AEB,

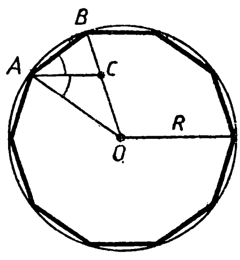


Рис. 336

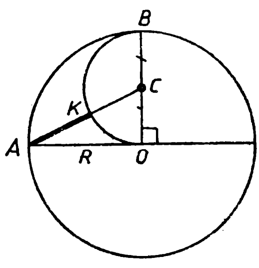


Рис. 337

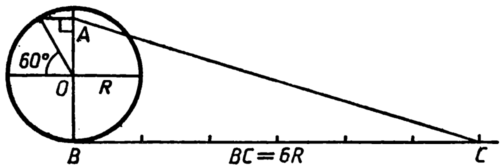


Рис. 338

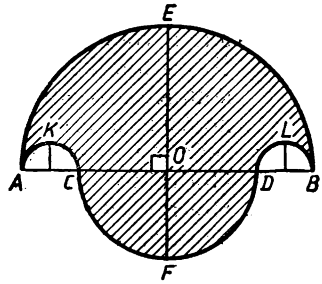


Рис. 339

AKC, CFD, DLB, причем $AC=DB$. Докажите, что площадь заштрихованной фигуры равна площади круга, построенного на отрезке EF как на диаметре.

1218. Построить границу круга, площадь которого равна: а) площади кольца между двумя данными концентрическими окружностями; б) площади данного полукруга; в) площади данного кругового сектора, ограниченного дугой в 60°.

Задачи к главе XIII

1219. При данном движении g точка A отображается в точку B, а точка B — в точку A. Докажите, что g — центральная симметрия или осевая симметрия.

1220. Даны два равных отрезка AB и A_1B_1. Докажите, что существуют два и только два движения, при которых точки A и B отображаются соответственно в точки A_1 и B_1.

1221. Докажите, что два параллелограмма равны, если диагонали и угол между ними одного параллелограмма соответственно равны диагоналям и углу между ними другого.

1222. Докажите, что две трапеции равны, если основания и боковые стороны одной трапеции соответственно равны основаниям и боковым сторонам другой.

1223. Докажите, что два треугольника равны, если две неравные стороны и разность противолежащих им углов одного треугольника соответственно равны двум сторонам и разности противолежащих им углов другого.

1224. Вершины одного параллелограмма лежат соответственно на сторонах другого параллелограмма. Докажите, что точки пересечения диагоналей этих параллелограммов совпадают.

1225. Даны две окружности и прямая. Постройте правильный треугольник так, чтобы две вершины лежали соответственно на данных окружностях, а высота, проведенная из третьей вершины, лежала на данной прямой.

1226. На стороне угла AOB, вершина которого недоступна, дана точка M. Постройте отрезок, равный отрезку OM.

1227. Даны две пересекающиеся окружности. Постройте отрезок, концы которого лежат соответственно на данных окружностях, а его середина совпадает с одной из точек пересечения данных окружностей.

1228. Постройте треугольник по трем медианам.

1229. Постройте трапецию, стороны которой соответственно равны данным отрезкам.

1230. Даны две точки A и B и две пересекающиеся прямые c и d. Постройте параллелограмм $ABCD$ так, чтобы вершины C и D лежали соответственно на прямых c и d.

1231. Даны прямая, окружность и точка A, не лежащая на них. Постройте квадрат $ABCD$ так, чтобы вершина B лежала на данной прямой, а вершина D — на данной окружности.

Приложение 1

ОБ АКСИОМАХ ПЛАНИМЕТРИИ

При изучении геометрии мы опирались на ряд аксиом. Напомним, что аксиомами называются те основные положения геометрии, которые принимаются в качестве исходных. Вместе с так называемыми основными понятиями они образуют фундамент для построения геометрии. Первыми основными понятиями, с которыми мы познакомились, были понятия точки и прямой. Определения основных понятий не даются, а их свойства выражаются в аксиомах. Используя основные понятия и аксиомы, мы даем определения новых понятий, формулируем и доказываем теоремы и таким образом изучаем свойства геометрических фигур.

Отметим, что не все аксиомы, необходимые для построения планиметрии, были приведены в нашем курсе — для упрощения изложения некоторые из них мы не формулировали, хотя ими и пользовались. Здесь мы приведем все аксиомы планиметрии.

Первые три аксиомы характеризуют взаимное расположение точек и прямых.

1. *Каждой прямой принадлежат по крайней мере две точки*[1].

2. *Имеются по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.*

3. *Через любые две точки проходит прямая, и притом только одна.*

Для точек, лежащих на одной прямой, мы использовали понятие «лежать между», которое относим к основным понятиям геометрии. Свойство этого понятия выражено в следующей аксиоме:

4. *Из трех точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими.*

Подчеркнем, что, говоря «точка B лежит между точками A и C», мы имеем в виду, что A, B, C — различные точки прямой и точка B лежит также между C и A. Иногда вместо этих слов мы говорим, что точки A и B лежат по одну сторону от

[1] Такие понятия, как «принадлежать», «множество», «число» и т. д., относятся не только к геометрии, но и к другим разделам математики. Поэтому мы считаем их известными и не относим к числу основных понятий планиметрии.

точки C (аналогично точки B и C лежат по одну сторону от точки A) или точки A и C лежат по разные стороны от точки B.

5. *Каждая точка O прямой разделяет ее на две части (два луча) так, что любые две точки одного и того же луча лежат по одну сторону от точки O, а любые две точки разных лучей лежат по разные стороны от точки O.*

При этом точка O не принадлежит ни одному из указанных лучей.

Напомним, что отрезком AB называется геометрическая фигура, состоящая из точек A и B и всех точек прямой AB, лежащих между A и B. Коротко можно сказать так: отрезок — это часть прямой, ограниченная двумя точками. Если отрезок AB не имеет общих точек с прямой a, то говорят, что точки A и B лежат по одну сторону от прямой a; если же отрезок AB пересекается с прямой a (в некоторой точке C, лежащей между A и B), то говорят, что точки A и B лежат по разные стороны от прямой a.

6. *Каждая прямая a разделяет плоскость на две части (две полуплоскости) так, что любые две точки одной и той же полуплоскости лежат по одну сторону от прямой a, а любые две точки разных полуплоскостей лежат по разные стороны от прямой a.*

Прямая a называется *границей* каждой из указанных полуплоскостей: ее точки не принадлежат ни одной из этих полуплоскостей.

Следующие аксиомы связаны с понятиями наложения и равенства фигур. Понятие наложения относится в нашем курсе к основным понятиям геометрии. В главе I мы определили равенство геометрических фигур, используя понятие наложения. При этом мы опирались на наглядные представления о наложении фигур и допускали, что всякая геометрическая фигура может перемещаться как единое целое, наподобие того как перемещаются материальные тела. Но геометрические фигуры не материальные тела, а воображаемые объекты, поэтому наложение геометрических фигур следует понимать в особом смысле.

Чтобы выяснить этот смысл, заметим, что при наложении фигуры Φ на равную ей фигуру Φ_1, как мы представляем его наглядно, каждая точка фигуры Φ накладывается на некоторую точку фигуры Φ_1. Иначе говоря, каждая точка фигуры Φ сопоставляется некоторой точке фигуры Φ_1. Но мы можем сопоставить каждую точку фигуры Φ некоторой точке фигуры Φ_1 и без непосредственного наложения Φ на Φ_1 (рис. 340). Такое сопоставление называется отображением фигуры Φ на фигуру Φ_1 (при этом подразумевается, что каждая точка фигуры Φ_1 оказывается сопоставленной некоторой точке

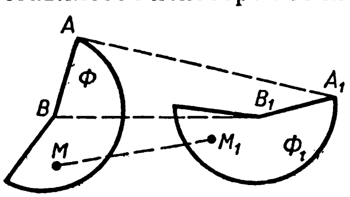


Рис. 340

фигуры Ф). Под наложением фигуры Ф на фигуру $Ф_1$ мы понимаем отображение Ф на $Ф_1$. Более того, мы считаем, что при этом не только точки фигуры Ф, но и любая точка плоскости отображается на определенную точку плоскости, т. е. *наложение — это отображение плоскости на себя.*

Однако не всякое отображение плоскости на себя мы называем наложением. Наложения — это такие отображения плоскости на себя, которые обладают свойствами, выраженными в аксиомах (см. ниже аксиомы 7—13). Чтобы сформулировать эти аксиомы, введем понятие равенства фигур. Пусть Ф и $Ф_1$ — две фигуры. *Если существует наложение, при котором фигура Ф отображается на фигуру $Ф_1$, то мы говорим, что фигуру Ф можно совместить наложением с фигурой $Ф_1$, или что фигура Ф равна фигуре $Ф_1$.* Сформулируем теперь аксиомы о свойствах наложений.

7. *Если при наложении совмещаются концы двух отрезков, то совмещаются и сами отрезки.*

8. *На любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.*

Это означает, что если даны какой-то отрезок AB и какой-то луч h с началом в точке O, то на луче h существует, и притом только одна, точка C, такая, что отрезок AB равен отрезку OC.

9. *От любого луча в данную полуплоскость можно отложить угол, равный данному неразвернутому углу, и притом только один.*

Это означает, что если даны какой-то луч OA и какой-то неразвернутый угол CDE, то в каждой из двух полуплоскостей с границей OA существует, и притом только один, луч OB, такой, что угол CDE равен углу AOB.

10. *Любой угол hk можно совместить наложением с равным ему углом h_1k_1 двумя способами:* 1) *так, что луч h совместится с лучом h_1, а луч k — с лучом k_1;* 2) *так, что луч h совместится с лучом k_1, а луч k — с лучом h_1.*

11. *Любая фигура равна самой себе.*

12. *Если фигура Ф равна фигуре $Ф_1$, то фигура $Ф_1$ равна фигуре Ф.*

13. *Если фигура $Ф_1$ равна фигуре $Ф_2$, а фигура $Ф_2$ равна фигуре $Ф_3$, то фигура $Ф_1$ равна фигуре $Ф_3$.*

Как видно, все приведенные аксиомы соответствуют нашим наглядным представлениям о наложении и равенстве фигур и поэтому не вызывают сомнений.

Следующие две аксиомы связаны с измерением отрезков. Прежде чем их сформулировать, напомним, как измеряются отрезки. Пусть AB — измеряемый отрезок, PQ — выбранная единица измерения отрезков. На луче AB отложим отрезок $AA_1=PQ$, на луче A_1B — отрезок $A_1A_2=PQ$ и т. д. до тех пор, пока точка A_n не совпадет с точкой B либо точка B не окажется лежащей между A_n и A_{n+1}. В первом случае говорят, что длина отрезка AB при единице измерения PQ выражается числом n (или что отрезок PQ укладывается в отрезке AB n раз). Во втором случае можно сказать, что длина отрезка AB при единице измерения PQ приближенно выражается числом n. Для более точного измерения отрезок PQ делят на равные части, обычно на 10 равных частей, и с помощью одной из этих частей измеряют описанным способом остаток A_nB. Если при этом десятая часть отрезка PQ не укладывается целое число раз в измеряемом остатке, то ее также делят на 10 равных частей и продолжают процесс измерения. Мы предполагаем, что таким способом можно измерить любой отрезок, т. е. выразить его длину при данной единице измерения конечной или бесконечной десятичной дробью. Это утверждение кратко сформулируем так:

14. *При выбранной единице измерения отрезков длина каждого отрезка выражается положительным числом.*

Кроме того, мы принимаем аксиому существования отрезка данной длины.

15. *При выбранной единице измерения отрезков для любого положительного числа существует отрезок, длина которого выражается этим числом.*

Систему аксиом планиметрии завершает аксиома параллельных прямых.

16. *Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.*

Отметим, что для построения геометрии можно использовать различные системы аксиом. Например, вместо аксиомы параллельных прямых можно принять в качестве аксиомы утверждение о том, что сумма углов треугольника равна 180°. Тогда утверждение «Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной» можно доказать как теорему (попробуйте провести такое доказательство самостоятельно). От различных систем аксиом требуется лишь, чтобы они были эквивалентны, т. е. приводили бы к одним и тем же выводам.

Иногда стремятся к тому, чтобы аксиомы были независимы, т. е. ни одну из них нельзя было вывести из остальных. Мы не ставили перед собой такой цели. Например, утверждение аксиомы 5 может быть доказано на основе остальных аксиом, т. е. фактически это утверждение является теоремой, а не аксиомой. Однако для упрощения изложения мы приняли его в качестве аксиомы.

В заключение рассмотрим одну из самых первых теорем нашего курса — теорему, выражающую первый признак равенства треугольников (п. 15). Ее доказательство опиралось на наглядные представления о наложении и равенстве фигур, понятие аксиомы тогда еще не было введено. Напомним это доказательство и рассмотрим его с точки зрения принятых нами аксиом.

Нужно было доказать, что если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. С этой целью мы рассматривали такое наложение, при котором вершина A совмещается с вершиной A_1, а стороны AB и AC треугольника ABC накладываются соответственно на лучи A_1C_1 и A_1B_1. При этом мы опирались на наглядно очевидный факт, что такое наложение существует, поскольку углы A и A_1 равны. Теперь можно сказать, что существование такого наложения следует из аксиомы 10. Далее мы рассуждали так: поскольку $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, то сторона AB совместится со стороной A_1B_1, а сторона AC — со стороной A_1C_1, в частности совместятся точки B и B_1, C и C_1. Как обосновать этот факт, опираясь на аксиомы? Очень просто. По аксиоме 8 на луче A_1B_1 от точки A_1 можно отложить только один отрезок, равный отрезку AB. Но по условию теоремы $AB=A_1B_1$, поэтому при нашем наложении точка B совместится с точкой B_1. Аналогично точка C совместится с точкой C_1. Остается сослаться на аксиому 7, чтобы обосновать тот факт, что сторона BC совместится со стороной B_1C_1. Теперь можно сделать вывод, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместились и, значит, они равны.

Как видим, само доказательство теоремы о первом признаке равенства треугольников, по существу, не изменилось, только теперь мы опирались уже не на наглядно очевидные факты, а на аксиомы, в которых эти факты выражены.

Приложение 2

ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТАБЛИЦ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

С помощью четырехзначных математических таблиц Брадиса можно находить приближенные значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ для углов α в промежутке $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ с шагом в одну минуту, т. е. для $0°$, $0°1'$, $0°2'$ и т. д. Эти таблицы позволяют находить значения функций с точностью до 10^{-4} (т. е. найденное по таблице приближенное значение отличается от истинного значения не более чем на 10^{-4}). Эти же таблицы позволяют по известным значениям $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ находить угол α.

П р и м е р 1. Найти $\sin 61°30'$.

Искомое значение находим по таблице на пересечении строки с отметкой $61°$ слева и столбца с отметкой $30'$ сверху: $\sin 61°30' = 0{,}8788$.

З а м е ч а н и е. Число 0,8788 является приближенным значением $\sin 61°30'$. Несмотря на это, вместо записи $\sin 61°30' \approx 0{,}8788$ обычно пишут так: $\sin 61°30' = 0{,}8788$.

A	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	60′		1′	2′	3′
60°	0,8660	8669	8678	8686	8695	8704	8712	8721	8729	8738	8746	29°	1	3	4
61°	8746	8755	8763	8771	8780	8788	8796	8805	8813	8821	8829	28°	1	3	4
62°	8829	8838	8846	8854	8862	8870	8878	8886	8894	8902	8910	27°	1	3	4
63°	8910	8918	8926	8934	8942	8949	8957	8965	8973	8980	8988	26°	1	3	4
64°	8988	8996	9003	9011	9018	9026	9033	9041	9048	9056	9063	25°	1	3	4
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	60′	54′	48′	42′	36′	30′	24′	18′	12′	6′	0′	*A*	1′	2′	3′

П р и м е р 2. Найти $\sin 116°46'$.

По формуле приведения $\sin 116°46' = \sin(180° - 63°14') = \sin 63°14'$, поэтому задача сводится к нахождению $\sin 63°14'$.

По таблице находим синус угла, ближайшего к данному: $\sin 63°12' = 0{,}8926$. Затем в столбцах поправок в правой стороне таблицы на той же строке находим поправку на $14'-12'=2'$. Она равна 0,0003. Учитывая, что $\sin 63°12' < \sin 63°14'$, найденную поправку прибавляем к 0,8926: $\sin 63°14' = 0{,}8926 + 0{,}0003 = 0{,}8929$.

Пример 3. Найти $\cos 152°$.

По формуле приведения $\cos 152° = \cos(180° - 28°) = -\cos 28°$, поэтому задача сводится к нахождению $\cos 28°$. Искомое значение находим на пересечении строки с отметкой 28° справа и столбца с отметкой 0′ снизу: $\cos 28° = 0{,}8829$, $\cos 152° = -0{,}8829$.

Пример 4. Найти $\cos 26°35'$.

По таблице находим косинус угла, ближайшего к данному: $\cos 26°36' = 0{,}8942$. Затем в таблице поправок в правой стороне находим поправку на $36'-35'=1'$. Она равна 0,0001. Так как $\cos 26°35' > \cos 26°36'$, то найденную поправку прибавляем к 0,8942: $\cos 26°35' = 0{,}8942 + 0{,}0001 = 0{,}8943$.

При вычислениях на электронно-вычислительных машинах значения $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ не берутся из каких-либо таблиц (эти таблицы сильно загружали бы память машины), а непосредственно вычисляются самой машиной для любых α с нужной точностью. Для этой цели используются так называемые стандартные программы вычисления тригонометрических функций. Эти программы заранее заложены в ЭВМ, и при необходимости вычислить значение той или иной тригонометрической функции для данного угла α машина сама обращается к соответствующей стандартной программе и вычисляет это значение. Такого же типа стандартные программы заложены в микрокалькуляторы.

Приложение 3

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О РАЗВИТИИ ГЕОМЕТРИИ

Первое сочинение, содержащее простейшие геометрические сведения, дошло до нас из Древнего Египта. Оно относится к XVII в. до н. э. В нем содержатся правила вычисления площадей и объемов некоторых фигур и тел. Эти правила были получены практическим путем, без какого-либо логического доказательства их справедливости.

Становление геометрии как математической науки произошло позднее и связано с именами греческих ученых Фалеса (ок. 625—547 гг. до н. э.), Пифагора (ок. 580—500 гг. до н. э.), Демокрита (ок. 460—370 гг. до н. э.), Евклида (III в. до н. э.) и др. В знаменитом сочинении Евклида «Начала» были систематизированы основные известные в то время геометрические сведения. Главное же — в «Началах» был развит аксиоматический подход к построению геометрии, который состоит в том, что сначала формулируются основные положения (аксиомы), а затем на их основе посредством рассуждений доказываются другие утверждения (теоремы)[1]. Полученные результаты используются как на практике, так и в дальнейших научных исследованиях. Некоторые из аксиом, предложенных Евклидом, и сейчас используются в курсах геометрии. Часть из них в современной формулировке имеется в нашем курсе. Например: «Через любые две точки проходит прямая, и притом только одна».

Большой вклад в дальнейшее исследование различных вопросов геометрии внесли Архимед (ок. 287—212 гг. до н. э.), Аполлоний (III в. до н. э.) и другие дневнегреческие ученые.

Качественно новый этап в развитии геометрии начался лишь много веков спустя — в XVII в. н. э.— и был связан с накопленными к этому времени достижениями алгебры. Выдающийся французский математик и философ Р. Декарт (1596—1650) предложил новый подход к решению геометрических задач. В своей «Геометрии» (1637) он ввел метод координат, связав геометрию и алгебру, что позволило решать многие геометрические задачи алгебраическими методами.

---

[1] На возможность такого подхода впервые указал греческий ученый Аристотель (ок. 384—322 гг. до н. э.).

В развитии геометрии важную роль сыграла аксиома, которая в «Началах» Евклида называлась пятым постулатом. Формулировка пятого постулата у Евклида весьма сложна[1]. Поэтому обычно его заменяют эквивалентной ему аксиомой параллельных прямых: через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

Много веков усилия большого числа ученых были направлены на доказательство пятого постулата. Это объяснялось тем, что число аксиом стремились свести к минимуму. Ученые думали, что пятый постулат можно доказать как теорему, опираясь на остальные аксиомы.

В конце XVIII в. у некоторых геометров возникла мысль о невозможности доказать пятый постулат. Решение этого вопроса было найдено великим русским математиком Николаем Ивановичем Лобачевским (1792—1856).

Вся творческая жизнь нашего выдающегося соотечественника была связана с Казанским университетом, где он учился, затем был профессором, а с 1827 г.— ректором университета. Его очень рано заинтересовала геометрия, и он, как и многие его предшественники, пытался доказать пятый постулат Евклида. Лобачевский предпринял попытку доказать пятый постулат от противного: он предположил, что через данную точку, не лежащую на данной прямой, можно провести несколько прямых, не пересекающих данную. Исходя из этого, он попытался получить утверждение, которое противоречило бы аксиомам или полученным из них теоремам. Если бы такое утверждение удалось получить, то это означало бы, что предположение неверно, а верно противоположное утверждение: через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, не пересекающую данную. Тем самым пятый постулат Евклида был бы доказан.

Но Лобачевский не получил противоречивых утверждений. На основании этого им был сделан замечательный вывод: можно построить другую геометрию, отличную от геометрии Евклида. Такая геометрия им была построена. Ее называют теперь геометрией Лобачевского. Сообщение об открытии новой геометрии было сделано Лобачевским в 1826 г.

К аналогичным выводам пришел венгерский математик Я. Бойяи (1802—1860), но он свои результаты опубликовал несколько позже, в 1832 г. В рукописях великого немецкого математика К. Ф. Гаусса (1777—1855) высказывались идеи, близкие к идеям Лобачевского и Бойяи. Однако он, опасаясь критики, не решился их обнародовать.

[1] Пятый постулат: «И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньше двух прямых, то продолженные эти прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых».

Открытие нашим великим соотечественником новой геометрии оказало огромное влияние на развитие науки. Геометрия Лобачевского широко используется в естествознании. Неизмеримо влияние новой геометрии на развитие самой геометрии. Наиболее ярко оно выразилось в дальнейшем углублении наших представлений о пространстве: ведь до Лобачевского казалось, что геометрией окружающего нас пространства может быть только евклидова геометрия. Но так как возможна другая геометрия, то истинность той или иной геометрии может быть проверена лишь опытным путем. Современной наукой установлено, что евклидова геометрия лишь приближенно, хотя и с весьма большой точностью, описывает окружающее нас пространство, а в космических масштабах она имеет заметное отличие от геометрии реального пространства.

Бурное развитие математики в XIX в. привело к ряду замечательных открытий в геометрии. Так, выдающимся немецким математиком Б. Риманом (1826—1866) была создана новая геометрия, обобщающая и геометрию Евклида, и геометрию Лобачевского.

Читатель вправе спросить: а являются ли геометрия Евклида и геометрия Лобачевского непротиворечивыми? Не может ли так случиться, что при дальнейшем развитии как той, так и другой геометрии получатся противоречивые выводы? Этот вопрос тесно связан с важными проблемами непротиворечивости, полноты и независимости систем аксиом, определяющих ту или иную геометрию. Перечисленные проблемы относятся к предмету, называемому «Основания геометрии». Крупнейший вклад в решение этих проблем внес великий немецкий математик Д. Гильберт (1862—1943).

Мы затронули очень кратко лишь некоторые моменты из истории развития геометрии. Более подробно с этими вопросами можно познакомиться по дополнительной литературе[1].

Отметим, что в настоящее время геометрия широко используется в самых разнообразных разделах естествознания: в физике, химии, биологии и т. д. Неоценимо ее значение в прикладных науках: в машиностроении, геодезии, картографии. Методы геометрии широко применяются практически во всех разделах науки и техники и, конечно же, в самой математике.

---

[1] См.: Геометрия//БСЭ.— 3-е изд.— М.: Советская энциклопедия, 1971.— Т. 6.— С. 307—313.

Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики.— М.: Наука, 1984.

Приложение 4

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ПЛАНИМЕТРИИ

В курсе геометрии были рассмотрены важные и интересные свойства геометрических фигур на плоскости. Но многие удивительные соотношения и изящные геометрические факты не вошли в основной курс. Некоторые из них включены в задачи повышенной трудности. Здесь мы рассмотрим еще несколько замечательных теорем планиметрии.

Теорема Чевы. Мы знаем, что: медианы треугольника пересекаются в одной точке; биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке; высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

Поставим теперь более общий вопрос. Рассмотрим треугольник ABC и отметим на его сторонах BC, CA и AB (или их продолжениях) точки A_1, B_1 и C_1 (рис. 341). При каком расположении этих точек прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке? Ответ на этот вопрос дает теорема Чевы.

Прежде чем сформулировать эту теорему, условимся об одном обозначении. Пусть $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ — ненулевые коллинеарные векторы. Обозначим через $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ отношение длин этих векторов, взятое со знаком «+», если векторы сонаправлены, и со знаком «−», если

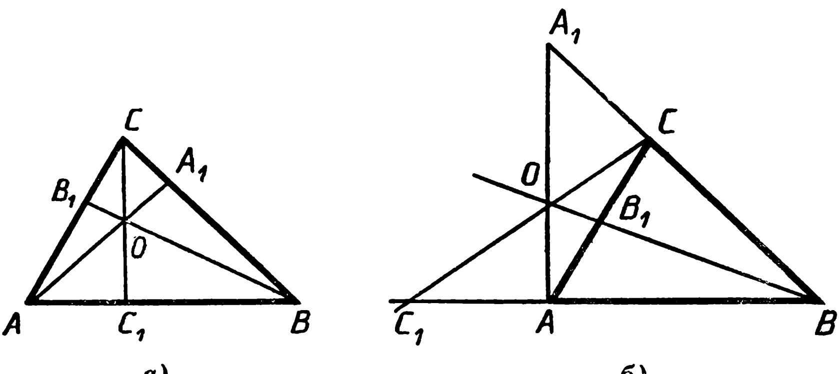


Рис. 341

они противоположно направлены. Сформулируем теперь теорему Чевы.

Теорема. ***Пусть в треугольнике ABC на сторонах BC, CA и AB или их продолжениях взяты соответственно точки A_1, B_1 и C_1, не совпадающие с вершинами треугольника. Тогда если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке или попарно параллельны, то***

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}\cdot\frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}}\cdot\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}}=1. \tag{1}$$

Обратно: если выполнено равенство (1), то прямые AA_1, BB_1 и CC_1 либо пересекаются в одной точке, либо попарно параллельны.

Доказательство. 1^0. Допустим сначала, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O (рис. 341, *а, б*). Для удобства условимся обозначать через $\overline{S}_{PQR}$ площадь треугольника PQR, взятую со знаком «+», если обход вершин P, Q и R совершается против часовой стрелки, и со знаком «—», если по часовой стрелке.

Имеем $\dfrac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}=\dfrac{\overline{S}_{ABA_1}}{\overline{S}_{AA_1C}}$, откуда $\overline{S}_{ABA_1}=\dfrac{\overline{BA}}{\overline{A_1C}}\cdot\overline{S}_{AA_1C}$.

Аналогично $\dfrac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}=\dfrac{\overline{S}_{OBA_1}}{\overline{S}_{OA_1C}}$, откуда $\overline{S}_{OBA_1}=\dfrac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}\cdot\overline{S}_{OA_1C}$.

Следовательно,

$$\frac{\overline{S}_{ABO}}{\overline{S}_{AOC}}=\frac{\overline{S}_{ABA_1}-\overline{S}_{OBA_1}}{\overline{S}_{AA_1C}-\overline{S}_{OA_1C}}=\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}\cdot\frac{\overline{S}_{AA_1C}-\overline{S}_{OA_1C}}{\overline{S}_{AA_1C}-\overline{S}_{OA_1C}}=\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}.$$

Итак, $\dfrac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}=\dfrac{\overline{S}_{ABO}}{\overline{S}_{AOC}}$. Аналогично

$$\frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}}=\frac{\overline{S}_{BCO}}{\overline{S}_{BOA}} \text{ и } \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}}=\frac{\overline{S}_{CAO}}{\overline{S}_{COB}}.$$

Перемножая эти равенства и замечая, что

$$\overline{S}_{ABO}=\overline{S}_{BOA},\ \overline{S}_{AOC}=\overline{S}_{CAO} \text{ и } \overline{S}_{BCO}=\overline{S}_{COB},$$

получаем:

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}\cdot\frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}}\cdot\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}}=\frac{\overline{S}_{BOA}}{\overline{S}_{CAO}}\cdot\frac{\overline{S}_{COB}}{\overline{S}_{BOA}}\cdot\frac{\overline{S}_{CAO}}{\overline{S}_{COB}}=1,$$

т. е. справедливо равенство (1).

Случай, когда прямые AA_1, BB_1 и CC_1 параллельны, рассмотрите самостоятельно.

2^0. Допустим теперь, что выполнено равенство (1). Рассмотрим прямые AA_1 и BB_1 и предположим, что они пересекаются в некоторой точке O. Проведем прямую CO и обозначим через C_2 точку пересечения этой прямой с прямой AB. Согласно 1°

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{AC_2}}{\overline{C_2B}} = 1.$$

Из этого равенства и равенства (1) следует, что $\frac{\overline{AC_2}}{\overline{C_2B}} = \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}}$.

Обозначив эти отношения буквой λ, получаем $\overrightarrow{AC_2} = \lambda \overrightarrow{C_2B}$ и $\overrightarrow{AC_1} = \lambda \overrightarrow{C_1B}$. Вычтем одно равенство из другого:

$$\overrightarrow{AC_2} - \overrightarrow{AC_1} = \lambda (\overrightarrow{C_2B} - \overrightarrow{C_1B}), \text{ или } \overrightarrow{C_1C_2} = \lambda\, \overrightarrow{C_2C_1} = -\lambda (\overrightarrow{C_1C_2}).$$

Заметим теперь, что $\lambda \neq -1$ (иначе получилось бы, что $\overrightarrow{AC_1} = -\overrightarrow{C_1B}$, т. е. $\overrightarrow{C_1B} = \overrightarrow{C_1A}$, а этого не может быть, так как точки A и B не совпадают). Следовательно, $\overrightarrow{C_1C_2} = \vec{0}$, т. е. точки C_1 и C_2 совпадают. Но это и означает, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке (точке O).

Аналогично доказывается, что если $AA_1 \parallel BB_1$, то и $CC_1 \parallel BB_1$. Теорема доказана.

Используя теорему Чевы, докажите следующие утверждения:

1. Медианы треугольника пересекаются в одной точке.
2. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.
3. Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.
4. Отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками, в которых вписанная окружность касается противоположных сторон, пересекаются в одной точке.
5. Прямые, проходящие через вершины треугольника и делящие его периметр пополам, пересекаются в одной точке.
6. Отрезки, соединяющие противоположные вершины описанного шестиугольника, пересекаются в одной точке (теорема Брианшона).

Используя теорему Брианшона, докажите утверждение:

7. Диагональ BD описанного около окружности четырехугольника $ABCD$ проходит через точку пересечения прямых, соединяющих вершины A и C соответственно с точками касания окружности со сторонами CD и AD.

Теорема Менелая. Вновь рассмотрим треугольник ABC, на сторонах BC, CA и AB (или их продолжениях) которого взяты соответственно точки A_1, B_1 и C_1. Мы знаем, при каком условии прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке либо попарно параллельны (теорема Чевы). А при каком условии точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой? Ответ на этот вопрос дает теорема Менелая.

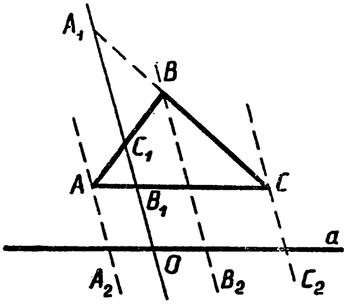


Рис. 342

Теорема. ***Пусть в треугольнике ABC на сторонах BC, CA и AB (или их продолжениях) взяты соответственно точки A_1, B_1 и C_1, не совпадающие с вершинами треугольника. Тогда если точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой, то***

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}\cdot\frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}}\cdot\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}}=-1.$$

Обратно: если выполнено равенство (2), то точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

Доказательство. Допустим, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой (рис. 342). Через какую-нибудь точку O этой прямой проведем произвольную прямую a, а через вершины треугольника — прямые, параллельные прямой A_1C_1 и пересекающие прямую a в точках A_2, B_2 и C_2. Согласно задаче 558

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}=\frac{\overline{B_2O}}{\overline{OC_2}},\quad \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}}=\frac{\overline{C_2O}}{\overline{OA_2}},\quad \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}}=\frac{\overline{A_2O}}{\overline{OB_2}},$$

или

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}=-\frac{\overline{OB_2}}{\overline{OC_2}},\quad \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}}=-\frac{\overline{OC_2}}{\overline{OA_2}},\quad \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}}=-\frac{\overline{OA_2}}{\overline{OB_2}}.$$

Перемножая эти равенства, получаем:

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}\cdot\frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}}\cdot\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}}=-\frac{\overline{OB_2}}{\overline{OC_2}}\cdot\frac{\overline{OC_2}}{\overline{OA_2}}\cdot\frac{\overline{OA_2}}{\overline{OB_2}}=-1.$$

Первая часть теоремы доказана. Вторая часть доказательства аналогична части 2^0 доказательства теоремы Чевы. Проведите соответствующее рассуждение самостоятельно.

Используя теорему Менелая, докажите следующие утверждения:

1. Основания перпендикуляров, проведенных к прямым, содержащим стороны треугольника, из произвольной точки описанной около него окружности, лежат на одной прямой (прямая Симпсона).
2. Середина отрезка, соединяющего точки пересечения продолжений противоположных сторон четырехугольника, лежит на прямой, проходящей через середины диагоналей (теорема Гаусса).
3. Точки A, B и C на рисунке 343 лежат на одной прямой.
4. Если противоположные стороны вписанного шестиугольника не параллельны, то точки пересечения продолжений этих сторон лежат на одной прямой (теорема Паскаля).

Используя теорему Паскаля, докажите следующие утверждения:

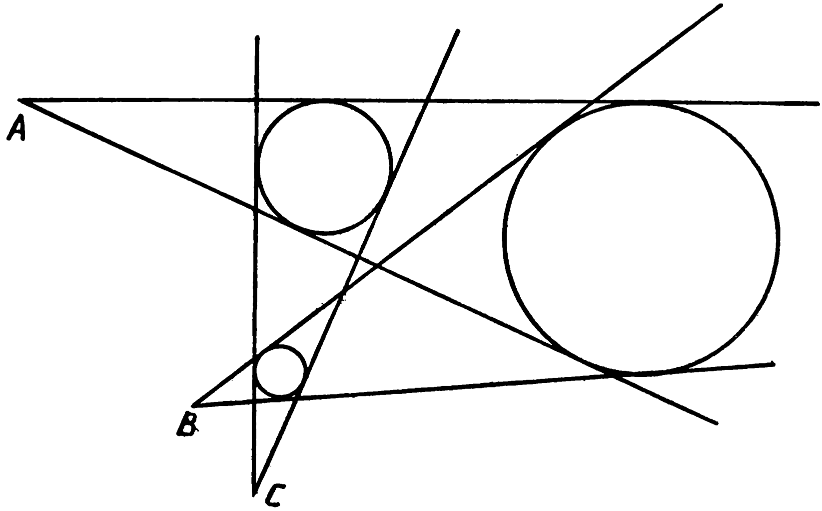


Рис. 343

5. Точки пересечения продолжений сторон треугольника с касательными к описанной около него окружности в противоположных вершинах треугольника лежат на одной прямой.
6. Точка пересечения продолжений сторон AB и CD вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ лежит на одной прямой с точками пересечения прямой BC с касательной к окружности в точке D и прямой AD с касательной к окружности в точке C.
7. Точка пересечения касательных к окружности в вершинах B и D вписанного в эту окружность четырехугольника $ABCD$ лежит на одной прямой с точками пересечения прямых AB и CD, AD и BC.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

7 класс

Глава I

3. Три точки или одна точка. **4.** Четыре прямые. **6.** Три отрезка. **15.** Четыре. **17.** h и l. **18.** $OB < OA$; $OC > OA$; $OB < OC$. **19.** а) Да; б) нет. **21.** $\angle AOC < \angle AOB$. **22.** а) Да; б) нет. **29.** Две точки. **30.** 10,3 см. **31.** а) 3,5 см; б) 36 мм. **32.** 25,5 см или 1,5 см. **33.** 9 см или 23 см. **34.** $BD = 47$ см, $DA = 17$ см. **35.** 480 км. **37.** а) $AC = 1$ см, $CB = 1$ см, $AO = 0{,}5$ см, $OB = 1{,}5$ см; б) $AB = 6{,}4$ м, $AC = 3{,}2$ м, $AO = 1{,}6$ м, $OB = 4{,}8$ м. **38.** а) 10,5 см; б) 1,5 см. **39.** $\frac{a}{2}$. **40.** 4 см. **44.** Нет. Построение выполнимо, когда угол AOB острый. **45.** Да. **47.** а) 121°; б) 121° 2′. **48.** 48°. **49.** 85°. **50.** 81°. **51.** 60°. **52.** 160°. **53.** Нет. **58.** а) 69°; б) 90°; в) 165°. **59.** Прямой. **60.** Да. **61.** а) 70° и 110°; б) 150° и 30°; в) 113°39′ и 66°21′; г) 135° и 45°; д) 100° и 80°. **62.** 106°. **63.** Да. **64.** а) $\angle 1 = \angle 3 = 63°$, $\angle 4 = 117°$; б) $\angle 1 = 43° 27'$, $\angle 2 = \angle 4 = 136° 33'$. **65.** а) 57°, 57°, 123°, 123°; б) 40°, 40°, 140°, 140°. **66.** а) $\angle 2 = \angle 4 = 110°$, $\angle 1 = \angle 3 = 70°$; б) $\angle 1 = \angle 3 = 45°$, $\angle 2 = \angle 4 = 135°$; в) $\angle 1 = \angle 3 = 75°$, $\angle 2 = \angle 4 = 105°$. **67.** 180°. **68.** $\angle AOC = 120°$, $\angle BOD = 130°$, $\angle COE = 110°$, $\angle COD = 60°$. **69.** Нет. **71.** Шесть прямых. **72.** Шесть точек. **73.** Двенадцать углов. **74.** а) 8 см; б) 16 см. **75.** 16 см или 4 см. **76.** а) $\frac{7}{8}a$; б) $\frac{5}{8}a$. **77.** а) $\frac{2}{3}m$; б) $\frac{4}{5}m$. **78.** 12 см. **79.** Указание. Рассмотреть два возможных случая: точки B и C лежат по разные стороны или по одну сторону от точки A. **80.** 85° или 15°. **81.** 30° или 90°. **82.** а) 67° 30′ и 112° 30′; б) 72° 30′ и 107° 30′. **83.** 90°. **85.** Указание. Доказать, что угол ABD — развернутый. **86.** Указание. Предположить, что прямые m и n совпадают, и воспользоваться утверждением п. 12.

Глава II

90. 75 см. **91.** 12,7 см и 17,3 см. **92.** Нет. **93.** б) 42°, 47°. **94.** б) $BD = 5$ см, $AB = 15$ см. **95.** б) $AB = 14$ см, $BC = 17$ см. **96.** б) 110°. **105.** б) 46°. **106.** б) 96°. **107.** 10 см, 20 см и 20 см. **108.** $AB = 12{,}5$ см и $BC = 15$ см. **109.** 8 см. **112.** 50°. **113.** б) 37° 30′. **115.** $\angle A = \angle B + \angle C$. **119.** $KF = 8$ см, $\angle DEK = 86°$, $\angle EFD = 90°$. **121.** б) $BC = 15$ см, $CO = 13$ см. **122.** б) $AB = 11$ см, $BC = 19$ см. **126.** 13 см. **136.** 25°. **142.** Указание. Рассмотреть два случая: точка B лежит: а) на луче AO; б) на продолжении луча AO. **145.** 90°. **146.** 29 см. **149.** Нет. **150.** Нет. **152.** Указание. Сначала построить биссектрису угла AOB. **155.** Указание. Сначала построить прямой угол. **156.** $AB = 4$ см, $AC = 5$ см, $BC = 6$ см.

157. 7 см, 5 см и 5 см. **158.** 10 см или 6 см. **160.** Указание. б) Пусть M — точка, равноудаленная от точек A и B и не лежащая на прямой AB. Воспользоваться утверждением: медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является высотой. **165.** Указание. б) Сначала доказать, что $\angle AOK = \angle BOK_1$. **166.** Указание. Воспользоваться задачей 165. **167.** Указание. Сначала доказать равенство треугольников DBF, FCE и EAD. **168.** 40°. **169.** Указание. Доказать, что $\triangle ABO = \triangle FEO$. **170.** Указание. Сначала доказать равенство треугольников ABD и $A_1B_1D_1$. **171.** Указание. Сначала доказать равенство треугольников ABC и ADC. **172.** Указание. Сначала доказать равенство треугольников ABC и ABD. **173.** Указание. Пусть угол BAD — смежный с углом A треугольника ABC. Для доказательства неравенства $\angle BAD > \angle B$ отметить середину O стороны AB и на продолжении отрезка CO отложить отрезок OE, равный CO. Затем доказать, что угол BAE равен углу B треугольника ABC и воспользоваться неравенством $\angle BAD > \angle BAE$. **174.** Указание. Наложить треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы сторона BC совместилась со стороной B_1C_1, а сторона BA наложилась на луч BA_1. Для доказательства того, что точка A совместится с точкой A_1, воспользоваться задачей 173. **175.** Указание. Сначала доказать, что $\triangle AOD = \triangle BOC$, а затем, что $\triangle EBD = \triangle EAC$. **176.** Указание. Рассмотреть треугольники ABD и $A_1B_1D_1$, где точки D и D_1 такие, что M и M_1 — середины отрезков AD и A_1D_1. **178.** Указание. Пусть точка B лежит на отрезке AC. Предположить, что $AD = BD = CD$. Используя свойство углов при основании равнобедренного треугольника, сначала доказать, что $\angle ABD = \angle CBD = 90°$. **179.** Указание. Сначала доказать, что $BP = CQ$. **184.** Указание. Воспользоваться задачей 160.

Глава III

196. Одну прямую. **197.** Три или четыре. **198.** Да. **201.** 105°, 105°. **202.** $a \parallel c$. **203.** б) четыре угла по 55°, четыре других угла по 125°. **205.** 92°. **206.** а) Да; б) да. **207.** а) Нет; б) да. **208.** 115° и 65°. **209.** $\angle 1 = 135°$, $\angle 2 = 45°$, $\angle 3 = 135°$. **210.** Указание. Рассмотреть продолжение луча CP_3. **215.** 59°. Указание. Сначала доказать, что $a \parallel b$. **216.** 48°, 66°, 66°. **218.** Да. **219.** Указание. Доказать методом от противного. **220.** Указание. Доказать методом от противного. **221.** Указание. Сначала доказать, что $AM \parallel BC$ и $AN \parallel BC$.

Глава IV

223. а) 58°; б) 26°; в) $180° - 3\alpha$; г) 60°. **224.** $\angle A = 40°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 80°$. **227.** а) 36°, 72° и 72°; б) 45°, 45° и 90°. **228.** а) 40°, 40° и 100° или 40°, 70° и 70°; б) 60°, 60° и 60°; в) 100°, 40° и 40°. **229.** 105°. **230.** 103°. **231.** Указание. Воспользоваться свойством углов при основании равнобедренного треугольника. **232.** Да. **233.** Указание. Учесть, что внешний угол при вершине равнобедренного треугольника, противолежащей основанию, в два раза больше угла при основании. **234.** 57° 30′, 57° 30′, 65° или 65°, 65°, 50°. **235.** 73° 20′, 73° 20′ и 33° 20′. **248.** а) Нет; б) нет. **249.** Сторона, равная 10 см. **250.** а) 5 см или 3 см; б) 8 см; в) 10 см. **252.** 29 см и 29 см. **253.** 7 см, 7 см и 11 см. **254.** 45°, 45° и 90°. **255.** 27°. **256.** 17,6 см. **257.** $AC = 6$ см, $AB = 12$ см. **258.** 9 см. **259.** 18 см. **260.** 30°, 30° и

120°. **261.** Указание. Воспользоваться первой теоремой п. 35. **262.** Указание. Воспользоваться признаками равенства прямоугольных треугольников. **263.** 70°, 70° и 40°. **264.** 122°. **265.** 90°, 39° и 51°. **267.** Указание. Сначала доказать, что углы, прилежащие к равным сторонам данных треугольников, равны. **269.** Указание. Воспользоваться задачей 268. **270.** Указание. Сначала провести биссектрису угла и воспользоваться задачей 133. **271.** 8 см. **272.** 12 см. **273.** 14 см. **275.** Указание. Сначала доказать, что CM — медиана треугольника ABC. **277.** 2 см или 8 см. **278.** 3 см. **279.** Указание. Через одну из точек, удовлетворяющих условиям задачи, провести прямую d, параллельную данной, и воспользоваться теоремой п. 37. Затем доказать, что любая точка плоскости, не лежащая на прямой d, не удовлетворяет условиям задачи. **280.** Луч с началом на стороне BA, параллельный стороне BC. Указание. Воспользоваться задачей 279. **281.** Прямая, параллельная данным прямым и находящаяся на равных расстояниях от них. **282.** Указание. Воспользоваться задачей 281. **283.** Две прямые, параллельные данной прямой и расположенные на данном расстоянии по разные стороны от нее. **285.** Указание. Воспользоваться задачей 284. **299.** 20°. **300.** Указание. Доказательство провести методом от противного. **302.** Указание. а) Допустить, что $HM_1 \neq HM_2$, и воспользоваться задачей 301; б) допустить, что $HM_1 > HM_2$ или $HM_1 = HM_2$, и воспользоваться задачей 301. **303.** В точке пересечения дороги с отрезком A_1B, где A_1 — такая точка, что дорога проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к нему. **304.** Указание. Пусть N — точка пересечения прямой BM и отрезка AC. Применить теорему о неравенстве треугольника к треугольникам ABN и MNC. **305.** Указание. Воспользоваться предыдущей задачей. **306.** Указание. Доказать методом от противного. **308.** 18,5 см. **311.** Две прямые, содержащие биссектрисы углов, образованных при пересечении данных прямых. **312.** Указание. Пусть в треугольнике ABC $AC > AB$, а AM — данный отрезок. Учесть, что в треугольнике ACM $\angle C < \angle M$. **313.** Указание. Пусть $\triangle ABC$ — искомый, BM — его данная медиана. Сначала построить $\triangle BB_1C$, в котором точка M — середина стороны BB_1. **314.** Указание. б) Построить угол, равный данному, а затем воспользоваться задачей 284. **315.** а) Указание. Воспользоваться свойством 3 п. 34 и задачей 314, в. **316.** Указание. Воспользоваться задачей 282. **317.** Указание. Воспользоваться задачей 245. **318.** Указание. На сторонах BC и AB построить точки A_1 и C_1 так, чтобы $BA_1 = AC_1 = CB_1$. **319.** Указание. Сначала построить прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна данной биссектрисе, а катет — данной высоте. **320.** Указание. Сначала построить прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна данной медиане, а катет — данной высоте. **321.** Указание. Сначала построить биссектрису угла C.

Задачи повышенной трудности

322. $ab = 1$. **323.** $\frac{n}{m}$. **324.** Указание. Воспользоваться свойством смежных углов: $\angle hk + \angle hl = 180°$. **325.** 180°. **326.** Указание. Пусть три из данных прямых проходят через точку A. Используя метод от противного, доказать, что каждая из оставшихся трех прямых проходит через эту точку. **327.** Указание. Пусть три из данных точек лежат на прямой d. Используя метод от противного, доказать, что каждая из оставшихся четырех точек лежит на прямой d. **328.** Указ а н и е. Сначала доказать, что $\triangle AOC_1 = \triangle BOC_2$, где O — середина отрезка AB. **329.** У к а з а н и е. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AC = A_1C_1$ и $AB + BC = A_1B_1 + B_1C_1$. Продолжить стороны AB и A_1B_1 на отрезки $BD = BC$ и $B_1D_1 = B_1C_1$ и рассмотреть треугольники ADC и $A_1D_1C_1$. **330.** Могут. Например, равнобедренный треугольник ABC с основанием AB и треугольник ABD, где D — точка на стороне BC такая, что $AB = AD$. **331.** Могут. Рассмотрим, например, равнобедренный треугольник ABC с основанием AB и отметим какую-нибудь точку D на продолжении стороны AB. Тогда треугольники ADC и DBC обладают указанным свойством, но не являются равными. **332.** У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 174. **333.** $90° - \frac{\alpha}{2}$. **335.** а) остроугольный; б) остроугольный. **336.** У к а з а н и е. Воспользоваться соотношениями между сторонами и углами треугольника и теоремой о сумме углов треугольника. **337.** 70°. У к а з а н и е. Пусть O — точка пересечения биссектрисы угла A и прямой BM. Сначала доказать равенство треугольников AOC и MOC. **338.** У к а з а н и е. Соединить один из концов отрезка с вершиной треугольника и воспользоваться задачей 312. **339.** У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 173, а также соотношениями между сторонами и углами треугольника. **340.** У к а з а н и е. Продолжить отрезок AD до пересечения с BC и воспользоваться задачей 312. **341.** У к а з а н и е. Отметить на стороне AB точку C_1 такую, что $AC_1 = AC$, и рассмотреть треугольник BC_1D. **342.** У к а з а н и е. Доказать методом от противного. **343.** У к а з а н и е. Пусть ABC — данный треугольник, $AB > BC$, BM — медиана. Отметить точку E такую, что M является серединой отрезка BE, и рассмотреть треугольник ABE. **344.** У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 173. **345.** У к а з а н и е. Продолжить отрезок BA на отрезок $AD = AC$ и, рассмотрев $\triangle DHB$, воспользоваться неравенством треугольника. **346.** У к а з а н и е. Воспользоваться задачами 300 и 341. **347.** У к а з а н и е. Воспользоваться задачами 341 и 346. **349.** У к а з а н и е. Пусть в треугольнике ABC медиана AM и высота AH делят угол A на три равных угла BAH, HAM и MAC. Провести перпендикуляр MD к стороне AC и доказать сначала, что $MD = \frac{1}{2} MC$. **350.** У к а з а н и е. Учесть, что в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета. **352.** Нет. У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 160. **353.** Два, одно или ни одного. У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 160. **354.** Задача имеет одно решение, если данные точки не лежат на одной прямой, и не имеет решения, если эти точки лежат на одной прямой. У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 160. **355.** У к а з а н и е. Сначала построить точку A_1 такую, что прямая a проходит через середину отрезка AA_1 перпендикулярно к нему, а затем провести отрезок A_1B. **357.** Четыре, три, два, одно или ни одного. У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 311. **358.** Четыре. У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 311. **359.** У к а з а н и е. Сначала построить треугольник OAD, в котором $AD = R$ и $OD = 2R$, где R — радиус данной окружности. **360.** У к а з а н и е. Пусть даны угол A, высота BH искомого треугольника ABC и отрезок PQ, равный его периметру. Построить сначала $\triangle ABH$, а затем точку D на луче AH такую, что $AD + AB = PQ$. **361.** У к а з а н и е. Построить сначала треугольник, у которого сторона равна данному периметру, а углы, прилежащие к ней, равны половинам данных углов. **362.** У к а з а н и е. Пусть BC, $AC + AB$, $\angle B - \angle C$ — данные элементы искомого треугольника ABC. На продолжении стороны CA за точку A отложить отрезок AA_1, равный отрезку AB. Построить сначала $\triangle CBA_1$.

8 класс

Глава V

364. а) 540°; б) 720°; в) 1440°. **365.** а) четыре; б) три; в) шесть; г) пять. **366.** 23 мм, 20 мм, 19 мм, 18 мм. **367.** 15 см, 7 см, 23 см, 21 см. **368.** 90°. **369.** 75°. **370.** 30°, 60°, 120°, 150°. **372.** а) 10,5 см, 13,5 см; б) 8,5 см, 15,5 см; в) 8 см, 16 см. **373.** 13 см, 12 см, 13 см, 12 см. **374.** 78 см. **375.** 56 см или 70 см. **376.** а) $\angle B=\angle D=96°$, $\angle C=84°$; б) $\angle A=\angle C=117°30'$, $\angle B=\angle D=62°30'$; в) $\angle A=\angle C=71°$, $\angle B=\angle D=109°$; г) $\angle A=\angle C=120°$, $\angle B=\angle D=60°$; д) $\angle A=\angle C=53°$, $\angle B=\angle D=127°$. **377.** $MN=PQ=6$ см, $NP=QM=8$ см, $\angle M=\angle P=60°$, $\angle N=\angle Q=120°$. **379.** Указание. Сначала доказать, что $BK=DM$. **380.** Указание. Воспользоваться признаком 2^0, п. 43. **382.** Указание. Воспользоваться признаком 3^0, п. 43. **383.** Указание. Воспользоваться признаком 2^0, п. 43. **386.** Указание. Через середину боковой стороны провести прямую, параллельную основаниям, и воспользоваться задачей 385. **387.** $\angle B=144°$, $\angle D=63°$. **388.** Указание. а) Через один из концов меньшего основания провести прямую, параллельную боковой стороне. **389.** Указание. а) Воспользоваться указанием к задаче 388, а; б) Через один из концов меньшего основания провести прямую, параллельную диагонали. **390.** 68°, 112°, 112°. Указание. Воспользоваться задачей 388, а. **391.** Указание. Приложить плитки друг к другу так, чтобы боковые стороны совпали, меньшее основание одной плитки лежало на одной прямой с большим основанием другой плитки. **392** а) 6 см; б) 5 см. **394.** Три. **395.** Указание. Воспользоваться задачей 284. **401.** а) 198,1 см или 122,6 см; б) 23,4 дм или 19,8 дм. **403.** 18 см. **404.** Указание. Пусть BM — медиана прямоугольного треугольника ABC, проведенная к гипотенузе AC. Рассмотреть четырехугольник $ABCD$, где D — точка, симметричная точке B относительно точки M. **405.** а) 60° и 120°; б) 30° и 60°. **406.** 42 см. **407.** 22°30′ и 67°30′. **410.** а) Нет; б) нет; в) да. **412.** 24 см. **417.** а) Две; б) бесконечное множество: любая прямая, перпендикулярная к данной, а также сама прямая; в) одну. **418.** A, E, O. **422.** а) Да; б) нет; в) да; г) да. **423.** O и X. **425.** Пересекает сторону CD; 9 см и 5 см. **426.** 3 см, 4 см, 3 см. **428.** Указание. Воспользоваться задачей 400. **430.** Указание. Воспользоваться теоремой о сумме углов выпуклого четырехугольника и задачей 429. **431.** Указание. Через точку M провести прямую, параллельную BK, и воспользоваться задачей 385. **432.** Указание. Воспользоваться задачей 385. **433.** Указание. Сначала доказать, что $\triangle BKD=\triangle BMD$. **435.** Указание. Воспользоваться задачей 384. **436.** 36,8 см. Указание. Использовать диагональ BD. **437.** Указание. Сначала доказать, что $\triangle ABH=\triangle AMH$. **438.** 8 см. Указание. Воспользоваться задачей 389, а. **439.** Указание. Через середину меньшего основания провести прямые, параллельные боковым сторонам, и воспользоваться задачей 404. **440.** Указание. Пусть EF — отрезок, соединяющий концы сторон квадратов, выходящих из вершины A треугольника ABC. Рассмотреть точку D, симметричную точке A относительно середины стороны BC, и доказать, что $\triangle ABD=\triangle EAF$. **441.** Указание. Воспользоваться задачей 420. **443.** Бесконечное множество. **444.** Указание. Пусть a и b — взаимно перпендикулярные оси симметрии фигуры и O — точка их пересечения. Сначала доказать, что если точки M и M_1 симметричны относительно прямой a, а M_1 и M_2 симметричны относительно прямой b, то M и M_2 симметричны относительно точки O.

Глава VI

447. Указание. Пусть O — точка пересечения отрезков AM и BC. Сначала доказать равенство треугольников ABO и MCO. **448.** Указание. Провести перпендикуляр EF к прямой BC и сначала доказать равенство треугольников ABM и EFM, DCN и EFN. **449.** а) 1,44 $см^2$; б) $\frac{9}{16}$ $дм^2$; в) 18 $м^2$. **450.** а) 4 см; б) 1,5 дм; в) $2\sqrt{3}$ м. **451.** а) 2400 $мм^2$; б) 0,24 $дм^2$. **452.** а) 27,2 $см^2$; б) $6\sqrt{2}$ $см^2$; в) 21,4 см; г) 2,7 см. **453.** а) Увеличится в два раза; б) увеличится в четыре раза; в) не изменится. **454.** а) 25 см и 10 см; б) каждая сторона равна 3 м. **455.** 2200. **456.** 360. **457.** 12 м. **458.** Площадь участка квадратной формы больше на 900 $м^2$. **459.** а) 180 $см^2$; б) 4 см; в) 18 см; г) 9. **460.** 156 $см^2$. **461.** 84 $см^2$. **462.** 18 $см^2$. **463.** 56,7 $см^2$. **464.** а) 10 см; б) 4 см; в) 12 см и 9 см. **465.** 12 $см^2$. **466.** 115,52 $см^2$. **467.** Площадь квадрата больше. **468.** а) 38,5 $см^2$; б) $5\sqrt{3}$ $см^2$; в) 5,4 см; г) $4\sqrt{2}$ см. **469.** 8 см. **470.** 5,625 см. **471.** а) 22 $см^2$; б) 1,8 $дм^2$. **472.** 14 см и 24 см. **473.** Указание. Воспользоваться теоремой п. 37. **474.** Площади треугольников равны. **475.** Указание. Сначала разделить сторону BC на три равные части. **476.** а) 224 $см^2$; б) 4,6 $дм^2$. Указание. Учесть, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны. **477.** 6 см и 9 см. **479.** а) 2 $см^2$; б) 2,4 см. Указание. Воспользоваться второй теоремой п. 52. **480.** а) 133 $см^2$; б) 24 $см^2$; в) 72 $см^2$. **481.** 54 $см^2$. **482.** 4,76 $см^2$. **483.** а) 10; б) $\sqrt{61}$; в) $\frac{5}{7}$; г) 16. **484.** а) 5; б) $4\sqrt{2}$; в) $4\sqrt{3}$; г) 2; д) 2. **485.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **486.** а) 12; б) 2; в) 8. **487.** 15 см. **488.** а) $3\sqrt{3}$ см; б) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ см. **489.** а) $\frac{25\sqrt{3}}{4}$ $см^2$; б) $0{,}36\sqrt{3}$ $см^2$; в) $2\sqrt{3}$ $дм^2$. **490.** а) 10 см и 48 $см^2$; б) $6\sqrt{3}$ см и $27\sqrt{3}$ $см^2$; в) $7\sqrt{2}$ см и 49 $см^2$. **491.** а) $4\frac{8}{13}$; б) 9,6. **492.** 8 см, 9,6 см, 9,6 см. **493.** 13 см и 120 $см^2$. **494.** 96 $см^2$ и 16 см. **495.** а) 180 $см^2$; б) $48\sqrt{3}$ $см^2$; в) 135 $см^2$. **496.** $\sqrt{7}$. **497.** 5 см. **498.** а) Да; б) нет; в) да; г) да; д) нет; е) нет; ж) да. **499.** а) 6,72 см; б) $7\frac{1}{17}$ см. **501.** а) 270 000 $м^2$; б) 0,27 $км^2$. **502.** $46\frac{2}{3}$ $см^2$. **503.** 20 см. **504.** 900 $см^2$. **505.** Указание. Воспользоваться тем, что перпендикуляр меньше наклонной. **506.** На сторонах BC и DC квадрата $ABCD$ нужно взять точки M и N так, чтобы $BM = \frac{2}{3}BC$, $DN = \frac{2}{3}DC$, и провести прямые AM и AN. **507.** Нет. Указание. Сравнить, например, площади треугольников со сторонами 13, 13, 24 и 12, 12, 12. **508.** Указание. Соединить точку на основании с вершиной, противолежащей основанию, и воспользоваться тем, что сумма площадей двух получившихся треугольников равна площади данного треугольника. **509.** Указание. Задача решается аналогично задаче 508. **510.** Указание. Доказать, что площадь каждого треугольника равна половине площади параллелограмма $AEDF$. **511.** а) и б) Площади треугольников равны. в) Указание. Воспользоваться задачей б) и второй теоремой п. 52. **512.** $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. **513.** 60 м, 14,4 м. **514.** $10\frac{10}{17}$ см.

515. а) $100\sqrt{3}$ см^2; б) 18 см^2. **516.** 320 см^2. **517.** 84 см^2. Указание. Сначала доказать, что треугольники ABC и ACD прямоугольные. **518.** а) 243 см^2; б) 529 см^2. **519.** h^2. **520.** a^2. **522.** 48 см^2. **523.** $(\sqrt{2}-1)a^2$. **524.** а) 96,814 м^2; б) 96,81 м^2; в) 96,8 м^2. **525.** 2,61. **526.** 5,53 дм^2. **527.** а) 3,34 см; б) 3,3 см. **528.** 3,40 м. **529.** а) Да, $S=(4\pm 1)$ см^2; б) да, $S=(8\pm 1)$ см^2; в) нет, так как 39,05 см$^2 \leqslant S \leqslant$ 41,61 см^2. **530.** 8,13 см. **531.** а) 106 см; б) 105,6 см. **532.** а) Нет, так как 5,80 см $\leqslant c \leqslant$ 6,08 см; б) да, $c=(5,9\pm 0,2)$ см.

Глава VII

533. $\frac{3}{4}$; нет. **534.** а) Да; б) да; в) нет. **536.** а) 15 см; б) $10\frac{2}{3}$. **537.** $BD=$ $=8$ см, $DC=12$ см. **538.** $AB=18$ см, $AC=6$ см. **539.** $NE=3,5$ см, $EK=2,5$ см. **540.** $CD=14$ см, $DE=21$ см. **541.** Да. **542.** 8,4 см, 10,5 см, 14,7 см. **544.** 4,5 см. **545.** 175 см^2 и 252 см^2. **546.** 87,5 км^2. **548.** 2,5. **549.** 6 см, 8 см, 12 см. **550.** $x=9$, $y=21$. **551.** а) $EF=5$ см, $FC=3,5$ см; б) $DE=5\frac{5}{7}$ см, $EC=2\frac{2}{7}$ см. **552.** а) 10 см; б) $\frac{AO}{OC}=\frac{BO}{OD}=\frac{a}{b}$; в) 12 см. **553.** а) Не всегда; б) да; в) да. **554.** 6 см и 6,5 см.

555. а) 5 см, 5 см, 7,5 см, 7,5 см; б) все четыре стороны равны $\frac{ab}{a+b}$. **557.** а) 17,5 см; б) $BD=5$ см, $DE=6$ см; в) 8 см. **558.** Указание. Если прямые a и b не параллельны, то через точку A провести прямую, параллельную прямой b. **559.** Да. **560.** а) Да; б) да. **562.** $\frac{ah}{a+h}$. Указание. Воспользоваться задачей 543. **563.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{4}$. Указание. Через точку D провести прямую, параллельную BK. **564.** 10 см. **565.** 5 см. **566.** 42 см. **567.** Указание. Провести диагональ данного четырехугольника. **568.** Указание. Воспользоваться задачей 567. **569.** Указание. Сначала доказать, что середина боковой стороны трапеции лежит на прямой, проходящей через середины диагоналей. **570.** 6 см и 12 см. **571.** $3S$. **572.** а) $h=20$, $a=4\sqrt{41}$, $b=5\sqrt{41}$; б) $h=48$, $a=80$, $b=60$; в) $a=12\sqrt{3}$, $c=24$, $a_c=18$; г) $b=8\sqrt{3}$, $c=16$, $b_c=12$; д) $h=2\sqrt{5}$, $b=3\sqrt{5}$, $a_c=4$, $b_c=5$. **573.** $a_c=$ $=\frac{a^2}{c}$, $b_c=\frac{b^2}{c}$. **574.** Указание. а) Воспользоваться формулой для вычисления площади треугольника. б) Воспользоваться задачей 573. **575.** 32 мм, 18 мм. **576.** 61 см. **577.** $1\frac{12}{13}$ см, $11\frac{1}{13}$ см. **579.** 3,15 м. **580.** 6,936 м. **581.** 6,12 м. **582.** 48 м. **583.** 72,25 м. **586.** Указание. Сначала построить треугольник, подобный искомому. **587.** Указание. См. указание к задаче 586. **588.** Указание. См. указание к задаче 586. **589.** Указание. См. указание к задаче 586. **590.** Указание. См. указание к задаче 586. **593.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\sqrt{3}$; б) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ и $\frac{\sqrt{5}}{2}$; в) $\frac{1}{2}$ и $\sqrt{3}$; г) $\frac{\sqrt{15}}{4}$ и $\frac{\sqrt{15}}{15}$. **594.** а) $\frac{b}{\operatorname{tg}\beta}$, $90°-\beta$, $\frac{b}{\sin\beta}$; б) $\approx 8,39$ см, 40°, $\approx 13,05$ см. **595.** а) $b\cdot\operatorname{tg}\alpha$, $90°-\alpha$, $\frac{b}{\cos\alpha}$; б) ≈ 11 см, 48°, ≈ 16 см. **596.** $90°-\alpha$, $c\sin\alpha$,

$c \cos \alpha$; 55°, ≈ 14 см, ≈ 20 см. **597.** $\sqrt{a^2+b^2}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$; ≈ 19 см, $\approx 38°39'$, $\approx 51°21'$. **598.** а) $b^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$; б) $\frac{1}{4} a^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha$. **599.** $8 \operatorname{tg} \alpha$ см^2. **600.** ≈ 74 м. **601.** 60°, 120°, 60° и 120°. **602.** 60° и 30°. **603.** ≈ 72 см^2. **604.** $A_1B_1 = 4{,}5$ см, $B_1C_1 = 6{,}75$ см. **606.** $\frac{7}{8}$. **607.** 18 см, 12 см. **608.** Указание. Воспользоваться задачей 535. **609.** Указание. Воспользоваться задачей 535. **610.** 16,8 см, 14 см, $7\frac{7}{9}$ см. **612.** $x = \frac{ab}{a+b}$. **613.** Указание. Сначала доказать, что: а) $\triangle ABM \backsim \triangle A_1B_1M_1$; б) $\triangle ABH \backsim \triangle A_1B_1H_1$. **614.** $DC = 2\frac{2}{3}$ см, $DB = 2\sqrt{13}$ см, $CB = \frac{2}{3}\sqrt{61}$ см. Указание. Сначала доказать, что $\triangle ADC \backsim \triangle BAD$. **615.** $\frac{2ab}{a+b}$. **619.** Указание. Пусть точка B лежит между C и D. К треугольникам ABD и ACD дважды применить следствие 2 из первой теоремы п. 52. **620.** Указание. Воспользоваться задачей 535. **621.** $\frac{ab}{2} \sin \alpha$. **625.** Указание. Воспользоваться задачей 1, п. 62. **626.** а) $h = 6{,}20$ см, $a = 8{,}11$ см, $b = 9{,}62$ см; б) $h = 1{,}67$ см, $a = 2{,}05$ см, $b = 2{,}86$ см; в) $h = 11{,}53$ см, $a = 13{,}70$ см, $b = 21{,}32$ см. **627.** а) $b = 2{,}76$ м, $c = 4{,}28$ м; б) $b = 11{,}06$ м, $c = 14{,}09$ м; в) $b = 1{,}37$ м, $c = 3{,}37$ м. **628.** 1,32. **629.** $a = 25{,}1$ см, $b = 10{,}9$ см, $c = 27{,}3$ см. **630.** $\frac{a}{b} = 1{,}08$; $\frac{a}{c} = 0{,}74$.

Глава VIII

633. OA и AC. **635.** 30°. **636.** 120°. **637.** Указание. Сначала доказать, что $\angle ADC = 30°$. **638.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$ см. **639.** $12\sqrt{3}$ см. **640.** 60°. **641.** 60°. **642.** $3\sqrt{3}$ см, $3\sqrt{3}$ см; 30°, 30°. **643.** 5 см. **647.** а) Да; б) нет; в) да. **648.** а) Указание. Сначала построить прямую, проходящую через центр окружности и перпендикулярную к данной прямой. **650.** а) 16; б) $16\sqrt{2}$; в) 32. **651.** 112° и 248°. **652.** $15\sqrt{3}$ см. **654.** а) 64°; б) 175°; в) 34°; г) 105°. **655.** 60° и 30° или 140° и 110°. **656.** $\approx 101°$ или $\approx 36°$. **657.** 50°. **658.** 20°20′, 34°50′. **660.** 36°. **661.** 44°. **662.** 62°. **664.** Указание. Воспользоваться задачей 663. **666.** а) 4; б) 12; в) 0,25. **667.** $8\sqrt{2}$ см. **670.** Указание. Сначала доказать, что $\triangle ABP \backsim \triangle AQB$. **671.** а) 6 см; б) 7,5 см. **672.** Указание. Воспользоваться задачей 670. **674.** Указание. Сначала доказать, что треугольник AOB равнобедренный. **676.** а) 10 см; б) $7\sqrt{2}$ дм. **678.** а) 46° и 46°; б) 21° и 21°. **679.** а) $AD = 3{,}5$ см, $CD = 5$ см; б) $AC = 14{,}6$ см. **681.** 9 см. **683.** Указание. Воспользоваться методом доказательства от противного. **687.** Указание. Воспользоваться второй теоремой п. 72. **688.** Указание. Учесть, что искомая точка лежит на биссектрисе данного угла. **689.** $3\frac{1}{3}$ см. **690.** 50 см. **691.** 20 см. **692.** $AP = 1{,}5$ см, $PB = 8{,}5$ см, $BQ = 8{,}5$ см, $QC = 3{,}5$ см, $CR = 3{,}5$ см, $RA = 1{,}5$ см. **693.** а) 60 см; б) 40 см. **694.** $m - c$. **695.** 30 см. **698.** 60 см^2. **699.** 1,2 см. **702.** а) $\angle A = 67°$, $\angle B = 23°$, $\angle C = 90°$; б) $\angle A = 55°$, $\angle B = 35°$, $\angle C = 90°$. **703.** $\angle A = 51°$, $\angle B = \angle C = 64°30'$. **704.** б) d, $d \sin \alpha$, $d \cos \alpha$. **705.** а) 5 см; б) 18 см. Указание.

Воспользоваться задачей 704. **706.** $10\sqrt{3}$ см. **707.** 16 см. **709.** Указание. Воспользоваться свойством углов вписанного четырехугольника. **710.** Указание. Воспользоваться задачей 389, а. **712.** Указание. Воспользоваться задачей 664. **713.** Указание. Учесть, что $BM=MX$ и $CN=NX$. **714.** Указание. Пусть K — точка пересечения общей касательной, проходящей через точку M, и прямой AB. Сначала доказать, что $KA=KM=KB$. **720.** Нет. **722.** $\frac{2S}{5r}, \frac{S}{3r}, \frac{3S}{5r}, \frac{2S}{3r}$.

725. $\frac{ab}{a+b}$. **726.** Указание. Использовать серединный перпендикуляр к той стороне, к которой проведена медиана. **728.** Указание. Воспользоваться свойством углов вписанного четырехугольника. **730.** Указание. Воспользоваться задачей 729. **731.** Указание. Воспользоваться задачей 729. **732.** Указание. Сначала доказать, что около четырехугольника $MHBC$ можно описать окружность.

733. 5 см. **734.** Указание. Воспользоваться задачами 709 и 721. **735.** $\frac{\sqrt{ab}}{2}$.

736. Указание. Использовать серединный перпендикуляр к отрезку AB. **737.** Указание. Воспользоваться задачей 281.

Глава IX

742. В случае б). **744.** Скорость, сила. **745.** $|\overrightarrow{AB}|=3$ см, $|\overrightarrow{BC}|=4$ см, $|\overrightarrow{DC}|=3$ см, $|\overrightarrow{MC}|=\sqrt{18{,}25}$ см, $|\overrightarrow{MA}|=1{,}5$ см, $|\overrightarrow{CB}|=4$ см, $|\overrightarrow{AC}|=5$ см. **746.** $|\overrightarrow{BD}|=13$ см, $|\overrightarrow{CD}|=5\sqrt{2}$ см, $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{74}$ см. **748.** а) Да; б) нет; в) да; г) нет. **749.** а) Нет; б) да; в) нет; г) нет; д) да. **751.** а) Ромб; б) трапеция. **752.** а) Да; б) да; в) нет; г) нет; д) да. **753.** Да. **760.** Указание. Воспользоваться неравенством треугольника. **762.** а) a; б) $a\sqrt{3}$; в) $a\sqrt{3}$; г) a; д) a. **763.** а) -2 и 10; б) 14 и 10; в) 14 и 10; г) -2 и 10. **764.** а) $\overrightarrow{AK}$; б) $\overrightarrow{AM}$. **766.** $\overrightarrow{XY}=-\vec{a}+(-\vec{b})+\vec{c}+\vec{d}$. **767.** в) $-\vec{b}$. **768.** $\overrightarrow{BM}=-\vec{a}$, $\overrightarrow{NC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{MN}=\vec{b}-\vec{a}$, $\overrightarrow{BN}=(\vec{b}-\vec{a})-\vec{a}$. **769.** $\overrightarrow{B_1C}=\vec{x}$, $\overrightarrow{BB_1}=\vec{x}-\vec{y}$, $\overrightarrow{BA}=-\vec{y}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{x}-\vec{y}+\vec{x}$. **770.** а) $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$; б) $\overrightarrow{AC}=-\vec{a}-\vec{b}$; в) $\overrightarrow{AC}=\vec{a}-\vec{b}$. **771.** $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{OC}=-\vec{a}$, $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DA}=-\vec{a}+\vec{b}$. **773.** Равенство $|\vec{x}-\vec{y}|=|\vec{x}|+|\vec{y}|$ справедливо, если $\vec{x}\uparrow\downarrow\vec{y}$ или хотя бы один из векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ нулевой. **774.** 60°. **781.** а) $4\vec{n}$; б) $\frac{5}{2}\vec{m}+\frac{3}{2}\vec{n}$; в) $-\frac{4}{3}\vec{m}-\frac{2}{3}\vec{n}$.

782. $\overrightarrow{EC}=\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{AG}=\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$. **783.** $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{MD}=\frac{1}{4}\vec{a}-\vec{b}$. **784.** а) $\overrightarrow{AC}=\vec{x}+\vec{y}$, $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\vec{x}+\vec{y})$, $\overrightarrow{CO}=-\frac{1}{2}(\vec{x}+\vec{y})$, $\overrightarrow{DO}=\frac{1}{2}(\vec{y}-\vec{x})$, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\vec{x}$, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CO}=\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{y})$, $\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA}=-\vec{x}-\vec{y}$; б) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\vec{x}$, $\overrightarrow{MC}=\frac{2}{3}\vec{x}+\vec{y}$, $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\vec{x}-\vec{y}$, $\overrightarrow{OM}=-\frac{1}{6}\vec{x}-\frac{1}{2}\vec{y}$. **786.** $\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$, $\overrightarrow{BB_1}=\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{CC_1}=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$.

787. $-\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$. **790.** Указание. Воспользоваться задачей 785. **793.** 10 см. **794.** 6,8 см и 10,2 см. **795.** 30 см. **796.** 16 см. **798.** 60°, 60°, 120°, 120°. **799.** 7 см.

801. Указание. Если векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ не коллинеарны, то воспользоваться правилом треугольника сложения векторов, и если они коллинеарны — задачей 800. 802. $-\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$. 803. $\overrightarrow{XY}=-\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$, $\overrightarrow{MP}=-\vec{a}+\vec{b}$. 804. $\overrightarrow{CK}=\vec{a}$, $\overrightarrow{KD}=\vec{b}-\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$. 809. $\frac{3}{4}a$. 810. Указание. Воспользоваться первой теоремой п. 72.

Задачи повышенной трудности

811. Указание. Продолжив через одну сторону данного шестиугольника, получить равносторонний треугольник. 812. Указание. Сначала доказать, что $a_1+a_2+a_3=a_3+a_4+a_5=a_5+a_6+a_1$. Затем построить равносторонний треугольник, сторона которого равна $a_1+a_2+a_3$, и воспользоваться задачей 811. 814. Указание. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник. Учесть, что вершина C лежит внутри угла BAD, поэтому луч AC проходит внутри этого угла, и, следовательно, пересекает отрезок BD. Аналогично рассмотреть луч BD и угол ABC. 815. Указание. Если данный четырехугольник $ABCD$ выпуклый, то воспользоваться задачей 814. Если $ABCD$ — невыпуклый четырехугольник и, например, прямая AB пересекает сторону CD в точке M, то рассмотреть два случая: A — точка отрезка MB и B — точка отрезка AM. 816. $\frac{a}{4}$. Указание. Пусть P — точка пересечения прямых DE и AB, $DO \parallel AC$ и $O \in AB$. Сначала доказать, что APE, AOD и POD — равнобедренные треугольники. 817. Указание. Сначала доказать неравенства $m_a<\frac{b+c}{2}$ и $m_a>\frac{b+c-a}{2}$, где a, b, c — стороны треугольника, m_a — медиана, проведенная к стороне a. 818. Указание. Сначала доказать, что диагонали данного четырехугольника точкой пересечения делятся пополам. 819. Прямая, параллельная данной прямой. 820. Указание. Воспользоваться задачами 388,а и 389,а. 821. Указание. Воспользоваться задачей 428. 822. Указание. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 — точки пересечения диагоналей квадратов, построенных на сторонах AB, BC, CD и DA данного параллелограмма $ABCD$. Сначала доказать равенство треугольников AO_1O_4, BO_1O_2, CO_2O_3, DO_3O_4. 823. Указание. На луче AB отложить отрезок AN, равный отрезку AM, провести отрезок MN и провести высоту NS треугольника AMN. Затем доказать, что $\triangle ANS=\triangle MAD$ и $\triangle AKB=\triangle NMS$. 824. 90°. Указание. Пусть D_1 — точка, симметричная точке D относительно точки E. Сначала доказать, что $\triangle ACD_1$ — равнобедренный прямоугольный треугольник. 825. 30°. Указание. На луче AM отложить отрезок $AK=AB$ и, рассмотрев $\triangle BKC$, доказать, что точка K совпадает с точкой M. 826. Указание. Сначала доказать, что $\triangle BKP=\triangle ABC=\triangle CQT$. 827. Указание. Сначала построить равнобедренный треугольник, основание которого равно сумме оснований трапеций, а боковая сторона равна диагонали трапеции. 828. а) Указание. Сначала доказать, что ось симметрии пересекает одну из сторон треугольника. 829. Указание. Воспользоваться равенством треугольников ABC и ADC, APM и ATM, MQC и MRC. Для доказательства обратного утверждения предположить, что точка M не лежит на AC, и доказать, что тогда площади параллелограммов не равны. 830. $\frac{S_1S_3\cdot(S_1+S_2)\cdot(S_2+S_3)}{S_2(S_2^2-S_1\cdot S_3)}$. Указание. Вос-

пользоваться следствием 2, п. 52. **831.** $(\sqrt[3]{S_1}+\sqrt[3]{S_2})^3$. Указание. Воспользоваться второй теоремой п. 52. **832.** $\frac{1}{5}$. **833.** Указание. Пусть AB — боковая сторона, а M — середина другой боковой стороны трапеции $ABCD$. Сначала доказать, что $S_{ABM}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$. **834.** $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$. Указание. Сначала доказать, что $S_{AOB}=S_{COD}=\sqrt{S_1 \cdot S_2}$. **835.** Указание. Сначала доказать, что площадь параллелограмма, стороной которого является меньшее основание трапеции, равна сумме площадей двух треугольников, прилежащих к этому основанию и к боковым сторонам трапеции. **836.** Указание. Сначала доказать, что $S_{AKM}=S_{CMK}$ и $S_{BKM}=S_{DMK}$. **837.** Указание. Сначала доказать, что $S_{ABD}=S_{EDC}$ и $S_{BDK}=S_{CDK}$. **838.** Указание. В каждом из трех получившихся четырехугольников провести диагонали так, чтобы никакие две диагонали не имели общего конца, и доказать, что площадь каждого из двух средних треугольников равна полусумме площадей соответствующих крайних треугольников. **839.** Указание. Сначала доказать, что $S_{AMB}=S_{ADK}+S_{KCB}$. **840.** $2\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$. Указание. Пусть AB и AD — перпендикуляры, проведенные к прямым, содержащим стороны данного угла O, а C — точка пересечения прямых AB и OD. Рассмотреть прямоугольные треугольники ADC и OBC. **841.** $2\sqrt{S_1S_2}$. Указание. Учесть, что треугольники BKC и MCD имеют по равному углу, и воспользоваться второй теоремой п. 52. **842.** Указание. Сначала доказать, что площади треугольников BTC и ETC равны. **843.** $\frac{\alpha}{2}$. Указание. Сначала доказать, что площади треугольников DCK и DCM равны, а затем доказать, что $KM \parallel DC$. **844.** $\sqrt{a^2+c^2-b^2}$. Указание. Через точку M провести прямые, параллельные сторонам прямоугольника, и рассмотреть образовавшиеся прямоугольные треугольники. **845.** Указание. Пусть $AB=c$, $BC=a$, $BD=h$. Используя теорему Пифагора, доказать, что $MB=\sqrt{a^2+c^2-h^2}$ и $KB=\sqrt{a^2+c^2-h^2}$. **846.** Указание. Провести перпендикуляры OM и ON к сторонам AC и CB и доказать, что $OM=\frac{1}{3}CB$, $ON=\frac{1}{3}AC$. Далее воспользоваться теоремой Пифагора для треугольников AOM, BON и COM. **847.** б) Указание. Сначала доказать, что $DF=DE$ и $AF=FE$. Затем воспользоваться подобием треугольников AED и AFE. **848.** Указание. Пусть AK — биссектриса треугольника ABC и, например, $AC>AB$. Пользуясь задачей 535, сначала доказать, что точка M лежит между точками K и C. Затем воспользоваться задачей 556. **849.** Указание. Воспользоваться утверждением: отрезок, соединяющий основания двух высот остроугольного треугольника, отсекает от него треугольник, подобный этому треугольнику. **850.** Указание. Сначала доказать, что $\triangle MBC \sim \triangle MFK$ и $\triangle MAC \sim \triangle MEK$, где M — точка пересечения прямых CK и AB. **851.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Указание. Пусть ABC — данный треугольник, а D — точка пересечения диагоналей квадрата, построенного на гипотенузе BC. На продолжении луча CA отметить точку E так, чтобы $\angle CDE=\angle ADB$. Сначала доказать, что $\triangle ABC \sim \triangle ECD$. **852.** Указание. Пусть BD и CE — биссектрисы треугольника ABC. Сначала доказать, что $\angle C=2\angle B$, $\angle B=2\angle A$, а затем доказать, что $\triangle ABC \sim \triangle BDC$ и $\triangle ABC \sim \triangle ACE$. **853.** Указание. Пусть E и F — точки пересечения MP и MQ с OB и OA. Воспользоваться подобием треугольников OPR и OFQ, OQS и OEP для доказательства того, что треугольники OEF и ORS подобны. **854.** Указание. Воспользоваться тем, что AH — медиана треугольника, подобного треугольнику BDH. **855.** Указание. а) Рассматривая подобные треугольники, сначала доказать, что $AD^2=AC\cdot AE$, $DB^2=BC\cdot BF$ и $CD^2=AD\cdot DB$. б) Применить теорему Пифагора к треугольникам AED и DFB. в) Воспользоваться подобием треугольников AED и ACB. **856.** а) $\angle A=75°$, $\angle B=135°$, $\angle C=60°$, $\angle D=90°$. б) Указание. Учесть, что треугольники ABP и DAB подобны. **857.** Указание. Воспользоваться задачей 567. **858.** Указание. Пусть MN — отрезок, соединяющий середины сторон AD и BC данного четырехугольника $ABCD$. Отметить точку D_1, симметричную точке D относительно точки N, и рассмотреть $\triangle ABD_1$. **859.** Указание. Воспользоваться задачей 858. **860.** Указание. Воспользоваться задачей 858. **861.** Указание. Воспользоваться теоремой о средней линии треугольника и задачами 404 и 820. **862.** Указание. Продолжить перпендикуляры AM и AK до пересечения с прямой BC в точках D и E и сначала доказать, что MK — средняя линия треугольника DAE. **863.** Указание. Воспользоваться задачей 435. **864.** Указание. Воспользоваться задачей 863. **865.** Указание. Пусть точка N — середина AC. Доказать сначала, что треугольники MBC и MNC равны и BN — средняя линия треугольника AKC. Далее воспользоваться следствием 2, п. 52. **866.** Указание. Через концы одной из медиан треугольника ABC провести прямые, параллельные двум другим медианам, и воспользоваться тем, что образовавшийся при этом треугольник равен треугольнику EFG. **867.** $\frac{1}{5}$. **868.** Указание. Воспользоваться подобием треугольников MND и MAB, MAD и MPB. **869.** Указание. Пусть $ABCD$ — равнобедренная трапеция, X — искомая точка большего основания AD, а AB — данная боковая сторона. Сначала доказать, что $\frac{AX}{XD}=n$, и воспользоваться задачей 584. **870.** Решение. На произвольном луче с началом в точке A откладываем отрезок AC_1, равный отрезку AC, и на луче C_1A от точки C_1 — отрезок C_1B_1, равный отрезку CB (сделайте рисунок). Убедитесь в том, что прямая, проходящая через точку C_1 и параллельная прямой BB_1, пересекает прямую AB в искомой точке D. Задача не имеет решения, если C — середина отрезка AB. **871.** Указание. Сначала построить какой-нибудь равнобедренный треугольник по данному углу. **872.** Указание. Пусть ABC — искомый треугольник, у которого даны стороны AB, AC и биссектриса AD. На прямой AD отметить точку E так, чтобы $BE \parallel AC$. Воспользовавшись подобием треугольников ADC и EDB и задачей 535, построить сначала отрезок DE, а затем треугольник ABE по трем сторонам. **873.** Указание. Сначала построить какой-нибудь треугольник, подобный искомому треугольнику ABC. **874.** Указание. Пусть h_a, h_b и h_c — данные высоты. Воспользоваться тем, что стороны a, b и c искомого треугольника пропорциональны отрезкам h_b, h_a, и $\frac{h_a\cdot h_b}{h_c}$. **875.** Указание. Пусть $ABCD$ — искомая трапеция, у которой известны $\angle A$, боковая сторона AB и большее основание AD. Сначала построить $\triangle ABD$, а затем $\triangle BCD$ по углу B, стороне BD и отношению двух других сторон. **876.** Указание. Сначала выразить диагонали искомого ромба через сторону данного квадрата и данные отрезки.

877. У к а з а н и е. Использовать общую касательную к данным окружностям. **878.** У к а з а н и е. Сначала доказать, что $\triangle ABC \sim \triangle BAD$. **879.** У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 718. **880.** У к а з а н и е. Рассмотреть два случая: точка пересечения прямых лежит внутри круга и вне круга. В первом случае воспользоваться теоремой о произведении отрезков пересекающихся хорд. **881.** У к а з а н и е. Доказать, что эта величина равна диаметру данной окружности. **882.** У к а з а н и е. Из точек O_1 и O_2 провести перпендикуляры O_1H_1 и O_2H_2 к прямой BC и сравнить расстояние между параллельными прямыми O_1H_1 и O_2H_2 с длиной отрезка O_1O_2. **883.** Пусть CD является диаметром, перпендикулярным к диаметру AB данной окружности. Искомое множество точек состоит из двух окружностей, построенных на отрезках OC и OD как на диаметрах. **884.** 146° и 107°. У к а з а н и е. Сначала доказать, что точка M лежит на окружности с центром A радиуса AB. **885.** У к а з а н и е. Сначала доказать, что проведенные прямые, которые образуют новый треугольник, являются биссектрисами внешних углов треугольника, и воспользоваться теоремой о биссектрисе угла (п. 72). **886.** У к а з а н и е. Для того чтобы доказать, что A' лежит на описанной окружности, сначала надо установить равенство $\angle A'CB = \angle BAA'$. **887.** У к а з а н и е. Пусть E — точка пересечения луча BD с окружностью, описанной около треугольника ABC. Воспользоваться подобием треугольников ABE и BCD. **888.** У к а з а н и е. Сначала доказать, что OE — серединный перпендикуляр к отрезку AB. **889.** У к а з а н и е. Пусть $XC > XA$ и $XC > XB$. Отложить на отрезке XC отрезок XD, равный отрезку XA, учесть, что $\angle AXC = 60°$, и доказать равенство треугольников AXB и ADC. **890.** У к а з а н и е. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник. Провести диаметр BB_1 и сначала доказать, что $AB_1 = CD$. **891.** У к а з а н и е. Через точку пересечения указанных биссектрис провести прямую, параллельную AB, до пересечения с прямыми AD и BC в точках E и F и доказать, что $EF = DC$. **892.** У к а з а н и е. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, описанная около окружности радиуса r, а $AD = a$, $BC = b$ — ее основания. Сначала доказать, что $r = \frac{ab}{a+b}$. **893.** У к а з а н и е. В четырехугольнике $ABCD$ на диагонали AC взять точку K, такую, что $\angle ABK = \angle CBD$, и далее использовать подобие треугольников ABK и DBC, BCK и ABD. **894.** У к а з а н и е. Через центр M вписанной окружности провести диаметр PQ описанной окружности и сначала доказать, что $PM \times MQ = 2Rr$. **895.** У к а з а н и е. Доказать, что точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 лежат на окружности с центром в середине отрезка OH радиуса $\frac{R}{2}$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC. **896.** У к а з а н и е. Пусть ABC — данный треугольник, а H, K и M — основания перпендикуляров, проведенных из точки D описанной окружности к прямым AB, AC и BC. Допустим, что луч DK лежит внутри угла HDM. Сначала доказать, что $\angle AKH = \angle ADH = \angle MDC = \angle MKC$. **897.** У к а з а н и е. Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей, а r_1 и r_2 — их радиусы, причем $r_1 > r_2$. Построить две окружности с центрами O_1 и O_2 радиусов соответственно $r_1 - r_2$, $r_1 + r_2$ и воспользоваться решением задачи 673. **898.** У к а з а н и е. Сначала построить две окружности радиуса P_2Q_2 с центром M и радиуса OA с центром O, где A — середина какой-нибудь хорды данной окружности, равной отрезку P_1Q_1. Затем воспользоваться задачей 897. **899.** У к а з а н и е. Сначала доказать, что наименьшей будет хорда, перпендикулярная к диаметру, проходящему через данную точку. **900.** а) У к а з а-н и е. Сначала построить какой-нибудь треугольник по данной стороне и противолежащему углу, затем описать около него окружность и воспользоваться следствием 1, п. 71. б) Указание. Пусть ABC — искомый треугольник, $\angle B$ — данный угол. На продолжении луча AC отложим отрезок $AA_1=AB$, а на продолжении луча CA — отрезок $CB_1=BC$. Пользуясь задачей 900, а, сначала построить $\triangle A_1BB_1$. **901.** Указание. Пусть PQR — искомый треугольник, P — вершина, из которой проведены высота, биссектриса и медиана треугольника, а O — центр описанной около треугольника окружности. Учесть, что $BO \perp QR$. **902.** Четыре решения. Указание. Воспользоваться задачей 885. **904.** Параллелограмм. **905.** Параллелограмм. Указание. Воспользоваться задачей 1, п. 84. **906.** Указание. Учесть, что длины векторов $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ и $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ равны. **907.** Указание. Пусть точки A, B и C лежат на одной прямой. Сначала доказать, что в этом случае $\overrightarrow{AB}=n\overrightarrow{AC}$, где n — некоторое число. В качестве k, l, m можно взять, например, числа $k=n-1$, $l=1$, $m=-n$. При доказательстве обратного утверждения взять точку O совпадающую с точкой A. **908.** Указание. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ точки E и F — середины диагоналей AC и BD, а G — точка пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон. Используя задачу 791, для произвольной точки O выразить векторы $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$ и $\overrightarrow{OG}$ через $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ и воспользоваться задачей 907. **909.** Указание. Воспользоваться задачами 619 и 907. **910.** Указание. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC. Пользуясь тем, что $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{GA_1}$, $\overrightarrow{GB}=-2\overrightarrow{GB_1}$ и $\overrightarrow{GC}=-2\overrightarrow{GC_1}$, доказать, что $\overrightarrow{GH}=-2\overrightarrow{GO}$.

9 класс

Глава X

911. а) -4; б) 20; в) -1; г) 5. **912.** а) 2; б) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) 1; д) -1; е) $-\frac{1}{4}$; ж) 3; з) $-\frac{4}{3}$; и), к) число k не существует. **913.** а) Да; б) да. **914.** Указание. Доказательство провести методом от противного и воспользоваться леммой о коллинеарных векторах. **915.** $\overrightarrow{AM}=\frac{4}{5}\vec{a}+\frac{4}{5}\vec{b}$. **916.** а) $x=-1$, $y=3$; б) $x=4$, $y=-5$; в) $x=0, y=3$; г) $x=-1, y=\frac{1}{3}$. **918.** а) $\vec{a}\{2;\ 3\}$; б) $\vec{b}\{-2;\ 3\}$, $\vec{c}\{2;\ 0\}$; в) $\vec{d}\{-3;\ -4\}$, $\vec{e}\{2;\ -2\}$, $\vec{f}\{-4;\ -5\}$. **919.** а) $\vec{a}\{2;\ 3\}$, $\vec{b}\left\{-\frac{1}{2};\ -2\right\}$, $\vec{c}\{8;\ 0\}$, $\vec{d}\{1;\ -1\}$, $\vec{e}\{0;\ -2\}$, $\vec{f}\{-1;\ 0\}$. **920.** а) $\vec{x}=-3\vec{i}+\frac{1}{5}\vec{j}$; б) $\vec{y}=-2\vec{i}-3\vec{j}$; в) $\vec{z}=-\vec{i}$; г) $\vec{u}=3\vec{j}$; д) $\vec{v}=\vec{j}$. **921.** а) $x=5$, $y=-2$; б) $x=-3$, $y=7$; в) $x=-4$, $y=0$; г) $x=0$, $y=0$. **922.** а) $\{5;\ 7\}$; б) $\{4;\ 1\}$; в) $\{1;\ 1\}$; г) $\{-1;\ 0\}$. **923.** а) $\{3;\ 2\}$; б) $\{6;\ 0\}$; в) $\{-1;\ 9\}$; г) $\{-7;\ -2\}$. **924.** $2\vec{a}\{6;\ 4\}$, $3\vec{a}\{9;\ 6\}$, $-\vec{a}\{-3;\ -2\}$, $-3\vec{a}\{-9;\ -6\}$. **925.** $\{-2;\ -4\}$, $\{2;\ 0\}$, $\{0;\ 0\}$, $\{2;\ 3\}$, $\{-2;\ 3\}$, $\{0;\ -5\}$. **926.** а) $\{21;\ -21\}$; б) $\{13;\ 24\}$; в) $\{-21;\ -14\}$; г) $\{8;\ -10\}$. **927.** Указание. Воспользоваться леммой о коллинеарных векторах. **928.** $\vec{a}$ и $\vec{c}$, $\vec{b}$ и $\vec{d}$. **929.** а) $A(5;\ 0)$, $B(0;\ 3)$, $O(0;\ 0)$; б) $A(a;\ 0)$, $B(0;\ b)$, $O(0;\ 0)$. **930.** а) $O(0;\ 0)$, $A(6{,}5;\ 0)$, $C(6{,}5;\ 3)$, $B(0;\ 3)$; б) $O(0;\ 0)$, $A(a;\ 0)$, $C(a;\ b)$, $B(0;\ b)$. **931.** $M(3;\ -3)$, $N(3;\ 3)$, $Q(-3;\ -3)$ или $M(3;\ -3)$, $N(-3;\ -3)$, $Q(3;\ 3)$.

932. $A(-a;\ 0)$, $B(a;\ 0)$, $C(0;\ h)$. **933.** $(7;\ -3)$. **934.** а) $\{-4;\ 0\}$; б) $\{0;\ 26\}$; в) $\{3;\ 4\}$; г) $\{-4;\ -3\}$. **935.** 1) $\overrightarrow{AB}\{1;\ 1\}$; 2) $x=-3$, $y=-4$; 3) $A(6;\ 1{,}5)$; 4) $B(a+c;\ b+d)$; 5) $B(1;2)$. **936.** 1) $M\left(-\frac{1}{2};\ -1\right)$; 2) $A(-10;\ -11)$; 3) $B(6;\ -11)$; 4) $M(-1{,}5;\ 3{,}5)$; 5) $B(2a-c;\ 2b-d)$; 6) $M(3;\ 6{,}5)$; 7) $M(2t+6;\ 0)$; 8) $B(-1;\ -3)$. **937.** $C(10;\ -7)$, $D(7{,}5;\ -5)$. **938.** а) $\sqrt{106}$; б) 5; в) $10\sqrt{2}$; г) $\sqrt{389}$; д) $11\sqrt{2}$; е) 10. **939.** а) 2; б) 3; в) $\sqrt{13}$. **940.** а) 4; б) 8; в) 5; г) 5. **941.** $\sqrt{82}+2\sqrt{17}+7\sqrt{2}$. **942.** $\sqrt{13}$. **943.** $AC=\sqrt{a^2+h^2}$, $BC=\sqrt{b^2+h^2}$. **944.** а) $C(a+b;\ c)$; б) $AC=\sqrt{b^2+c^2}$, $CO=\sqrt{(a+b)^2+c^2}$. **945.** $AC=\sqrt{(b+d-a)^2+c^2}$, $OC=\sqrt{(b+d)^2+c^2}$. **946.** а) 2; б) 3 или $-2{,}6$. **947.** а) 13; б) 6. **948.** а) $(0;\ -9)$; б) $(0;\ 5)$. **949.** а) $(-2{,}5;\ 0)$; б) $(8;\ 0)$. **950.** а) $MP=3\sqrt{5}$, $NQ=5$; б) $MP=4\sqrt{2}$, $NQ=2\sqrt{2}$. **951.** Указание. Доказать, что отрезки AC и BD равны и их середины совпадают. а) 8; б) 17. **954.** 100 см, 100 см. Указание. Систему координат выбрать так, как показано на рисунке 281. **955.** 13 см. Указание. Систему координат выбрать так, чтобы основание треугольника лежало на оси Ox, а высота — на оси Oy. **956.** Указание. Систему координат выбрать так, чтобы одно из оснований трапеции лежало на оси Ox, а его концы были симметричны относительно начала координат. **957.** Указание. Систему координат выбрать так, как показано на рисунке 283, и доказать, что $b=0$. **958.** Указание. Систему координат выбрать так, чтобы лучи AB и AD были положительными полуосями. **960.** а) A и C; б) B; в) B и D. **961.** а) C; б) B; в) A и D. **963.** а) $(-4;\ -3)$, $(-4;\ 3)$; б) $(4;\ 3)$, $(-4;\ 3)$. **964.** а) $(3;\ 0)$, $(3;\ 10)$; б) $(-2;\ 5)$, $(8;\ 5)$. **965.** 1) $x^2+y^2=9$; 2) $x^2+y^2=2$; 3) $x^2+y^2=\frac{25}{4}$. **966.** а) $x^2+(y-5)^2=9$; б) $(x+1)^2+(y-2)^2=4$; в) $(x+3)^2+(y+7)^2=\frac{1}{4}$; г) $(x-4)^2+(y+3)^2=100$. **967.** $x^2+y^2=10$. **968.** $x^2+(y-6)^2=25$. **969.** а) $(x-2)^2+(y-1)^2=41$; б) $(x-3)^2+(y-1)^2=5$. **970.** $(x-5)^2+y^2=25$, $(x+3)^2+y^2=25$; две окружности. **971.** $x^2+(y-4)^2=25$. **972.** б) $x+y-7=0$; в) $3x-2y+2=0$. **973.** $7x-y+3=0$. **974.** а) $x-y=0$, $y-1=0$; б) $3x-5y+5=0$. **975.** $(-4;\ 0)$ и $(0;\ 3)$. **976.** $(3;\ -2)$. **977.** $x=2$ и $y=5$. **979.** 7. **980.** $5x+2y-10=0$, $5x-2y-10=0$, $5x+2y+10=0$, $5x-2y+10=0$ или $2x+5y-10=0$, $2x-5y-10=0$, $2x+5y+10=0$, $2x-5y+10=0$. **982.** а) Окружность радиуса 4 с центром B; б) окружность радиуса $\frac{1}{3}$ с центром D, лежащим на отрезке BC, причем $BD=\frac{1}{3}$. **983.** Окружность с центром в точке O радиуса $\sqrt{\frac{k^2-2a^2}{2}}$, если $k^2>2a^2$, и точка O, если $k^2=2a^2$, где O — середина отрезка AB и $a=\frac{AB}{2}$. Если $k^2<2a^2$, то точек, удовлетворяющих условию задачи, не существует. **985.** Серединный перпендикуляр к отрезку AB', где B' и B — точки, симметричные относительно точки A. **986.** Прямая BC. Указание. Выбрать прямоугольную систему координат так, чтобы точки A и D лежали на оси Ox и были симметричны относительно оси Oy. **987.** Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей ромба и перпендикулярная к стороне ромба. **988.** а) $x=-\frac{1}{2}$; б) не существует; в) $x=-2$; г) $x=2$. **989.** а) $\{-8;\ -1\}$, $\sqrt{65}$; б) $\{14;\ 4\}$, $2\sqrt{53}$; в) $\{-21;\ 5\}$, $\sqrt{466}$; г) $\{6;\ -18\}$, $6\sqrt{10}$. **990.** а) $\{9;\ -4\}$, $\{7;\ -3\}$, $\{1;\ 21\}$, $\{-4;\ 7\}$; б) 5, 10, $\sqrt{97}$, $\sqrt{58}$. **991.** Указание. Ввести вектор $\overrightarrow{M_1M_2}\{x_2-x_1;\ 0\}$, отложить от начала координат вектор $\overrightarrow{OA}$, равный $\overrightarrow{M_1M_2}$, и воспользоваться тем, что абсцисса точки A равна x_2-x_1. **993.** Указание. Сначала доказать, что $AB=BC$. **995.** (5; 9). **996.** а) $(-1; 9)$, $(0; 2)$, $(-4; 6)$; б) $5\sqrt{2}$; в) $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$. **998.** 40. **999.** (0; 8), или $(-2; 2)$, или $(-8; 0)$; три решения. **1000.** Окружности: а), б), г), д). **1001.** $(x-3)^2+(y-5)^2=25$. **1002.** а) $\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{125}{2}$; б) $(x-3)^2+(y+2)^2=25$. **1003.** а) $5x-3y+16=0$, $x+2y-6=0$, $6x-y+10=0$; б) $3x+5y-4=0$, $2x-y-7=0$, $x+6y-23=0$; в) $3x+5y-17=0$, $2x-y+6=0$, $x+6y-10=0$. **1006.** 19,5 см, $\sqrt{261}$ см, $\frac{\sqrt{2529}}{2}$ см или 12,5 см, $\sqrt{709}$ см, $\frac{\sqrt{4321}}{2}$ см. **1008.** Указание. Систему координат выбрать так, как показано на рисунке 283. **1009.** Указание. На продолжении отрезка AA_1 отложить отрезок A_1A_2, равный AA_1. Далее воспользоваться задачей 953. **1010.** а) Окружность радиуса $2AB$ с центром в точке B', симметричной точке B относительно точки A; б) окружность радиуса $\frac{4}{3}AB$ с центром в точке C, лежащей на отрезке AB, причем $AC=\frac{2}{3}AB$.

Глава XI

1013. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; в) 0. **1014.** а) $\pm\frac{1}{2}$; б) $\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$; в) ±1. **1015.** а) 0; б) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) 1; г) $-\frac{3}{4}$. **1016.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-\sqrt{3}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, -1; $\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **1018.** а) $x=y=\frac{3\sqrt{2}}{2}$; б) $x=0$, $y=1{,}5$; в) $x=-\frac{5\sqrt{3}}{2}$, $y=2{,}5$; г) $x=-1$, $y=0$; д) $x=\sqrt{3}$, $y=1$. **1019.** а) 45°; б) 90°; в) 150°; г) 135°. **1020.** а) $12\sqrt{6}$ см²; б) 27 см²; в) ≈36 см². **1022.** 16 см. **1023.** 25 см². **1024.** а) $\frac{h_b\cdot h_c}{2\sin\alpha}$; б) $\frac{h^2\cdot\sin\beta}{2\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)}$. **1025.** а) $\angle C=80°$, $a\approx12{,}3$, $b\approx9{,}1$; б) $\angle B=75°$, $c\approx4{,}5$, $a\approx2{,}3$; в) $\angle B\approx37{,}989°\approx37°59'$, $\angle C\approx62°01'$, $c\approx14$; г) $\angle A=65°$, $b\approx19{,}2$, $c\approx25{,}5$; д) $\angle B\approx37{,}317°\approx37°19'$, $\angle C\approx82°41'$, $c\approx11$; е) $c\approx5{,}7$, $\angle A=\angle B=63°$; ж) $a\approx53{,}84$, $\angle B\approx36{,}296°\approx36°18'$, $\angle C\approx56°42'$; з) $\angle A\approx42{,}833°\approx42°50'$, $\angle B\approx60{,}941°\approx60°57'$, $\angle C\approx76°13'$; и) $\angle A\approx54{,}883°\approx54°52'$, $\angle B\approx84{,}270°\approx84°16'$, $\angle C\approx40°52'$. **1026.** $AB\approx15$ см, $S_{ABC}\approx87$ см². **1027.** $AC=6$ м, $AB\approx3$ м, $BC\approx4$ м. **1028.** $\angle BDC\approx39{,}628°\approx39°30'$, $\angle DBC\approx117°52'$. **1029.** $\frac{a\cdot\sin\alpha}{\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)}$, $\frac{a\cdot\sin\beta}{\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)}$, $\frac{a\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos\gamma}$, где $\gamma=\frac{\alpha-\beta}{2}$, если $\alpha\geqslant\beta$, и $\gamma=\frac{\beta-\alpha}{2}$, если $\beta>\alpha$.

1030. $\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$, $\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}$, $\cos\gamma=\frac{a^2-b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)^2-4a^2b^2\cos^2\alpha}}$, где γ — угол между диагоналями параллелограмма. **1031.** а) Остроугольный; б) прямоугольный; в) тупоугольный. **1032.** $\approx74{,}2$ кг. **1034.** ≈28 см. **1035.** 60° или $\approx47{,}112°\approx47°07'$. **1036.** ≈59 м. **1037.** $\approx14{,}5$ м. **1038.** 50 м. **1039.** а) 45°; б) 90°; в) 90°; г) 90°; д) 180°; е) 90°; ж) 135°; з) 0°. **1040.** а) 60°; б) 120°; в) 120°; г) 90°;

д) 0°; е) 180°. **1041.** а) $3\sqrt{2}$; б) $3\sqrt{3}$; в) 0°; г) $-3\sqrt{2}$. **1042.** а) $\frac{1}{2}a^2$; б) $-\frac{1}{2}a^2$; в) 0; г) a^2. **1043.** 13. **1044.** а) $-2{,}5$; б) 0; в) 5. **1047.** а) $x=7{,}5$; б) $x=\frac{2}{3}$; в) $x=0$.

1048. $\cos A=\frac{3}{5}$, $\cos B=0$, $\cos C=\frac{4}{5}$. **1049.** $\angle A=60°$, $\angle B\approx 21°47'$, $\angle C\approx 98°13'$. **1050.** $\sqrt{129}$ и 7. **1051.** 3. **1052.** 13. **1053.** -5. **1057.** $BE=\frac{b}{2}$, $AD=\frac{b}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $AE=$ $=\frac{b}{2}\sqrt{3}$, $EC=\frac{b}{2}(2-\sqrt{3})$, $BC=b\sqrt{2-\sqrt{3}}$. **1058.** а) $\approx 6{,}254$ м^2; б) $\approx 6\,449\,073$ м^2.

1060. а) $\angle C=105°$, $AC\approx 6$ см, $BC\approx 4$ см; б) $\angle A=75°$, $BC\approx 6$ см, $AC\approx 4$ см; в) $\angle C\approx 42°55'$, $\angle B\approx 88°35'$, $AC\approx 4$ см; г) $\angle A\approx 26°22'$, $\angle C\approx 90°50'$, $AB\approx$ $\approx 11{,}7$ см. **1061.** а) $BC\approx 12$ см, $\angle C\approx 17°45'$, $\angle B\approx 27°15'$; б) $AC=\sqrt{5}$ дм, $\angle A\approx 71°34'$, $\angle C\approx 63°26'$; в) $AB\approx 6{,}4$ дм, $\angle A\approx 2°$, $\angle B\approx 28°$. **1062.** $\angle D\approx$ $\approx 117°10'$, $\angle E\approx 38°59'$, $\angle F\approx 23°51'$. **1063.** $\dfrac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}$. У к а з а н и е. Воспользоваться формулой площади треугольника (п. 96). **1064.** $\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$.

1065. $-\frac{5\sqrt{34}}{34}$. **1066.** 5. **1067.** 15 и $\approx 10{,}6$. **1068.** $x=40$. **1069.** $36°51'$.

Глава XII

1078. а) Да; б) нет. **1079.** б), в). **1081.** а) 60°; б) 108°; в) 120°; г) 144°; д) 160°. **1082.** 360°. **1083.** а) 3; б) 4; в) 8; г) 12. **1084.** а) 6; б) 12; в) 4; г) 10; д) 20; е) 5. **1085.** У к а з а н и е. Воспользоваться тем, что серединный перпендикуляр к любой стороне правильного многоугольника проходит через центр описанной окружности. **1086.** У к а з а н и е. Воспользоваться тем, что биссектриса любого угла правильного многоугольника проходит через центр вписанной окружности. **1087.** 1) $R=3\sqrt{2}$, $r=3$, $P=24$, $S=36$; 2) $R=2\sqrt{2}$, $a_4=4$, $P=16$, $S=16$; 3) $r=2\sqrt{2}$, $a_4=4\sqrt{2}$, $P=16\sqrt{2}$, $S=32$; 4) $R=3{,}5\sqrt{2}$, $r=3{,}5$, $a_4=7$, $S=49$; 5) $R=2\sqrt{2}$, $r=2$, $a_4=4$, $P=16$. **1088.** 1) $r=1{,}5$, $a_3=3\sqrt{3}$, $P=9\sqrt{3}$, $S=\frac{27\sqrt{3}}{4}$; 2) $R=\frac{2}{3}\sqrt{10\sqrt{3}}$, $r=\frac{1}{3}\sqrt{10\sqrt{3}}$, $a_3=2\sqrt{\frac{10\sqrt{3}}{3}}$, $P=6\sqrt{\frac{10\sqrt{3}}{3}}$; 3) $R=4$, $a_3=4\sqrt{3}$, $P=12\sqrt{3}$, $S=12\sqrt{3}$; 4) $R=\frac{5\sqrt{3}}{3}$, $r=\frac{5\sqrt{3}}{6}$, $P=15$, $S=\frac{25\sqrt{3}}{4}$; 5) $R=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $a_3=$ $=2$, $S=\sqrt{3}$. **1089.** $2\sqrt{6}$ см. **1090.** $2\sqrt{3}$ см. **1091.** 6 см. **1092.** $32\sqrt{3}$ см. **1094.** а) 36 см^2; б) $16\sqrt{3}$ см^2; в) $162\sqrt{3}$ см^2; г) $\approx 248{,}52$ см^2. **1095.** $\frac{9\sqrt{3}}{8}$ см^2 **1096.** $S_3:S_4:S_6=$ $=\sqrt{3}:4:6\sqrt{3}$. **1097.** 3:4. **1098.** а) $2\sqrt{3}\,r$, $6\sqrt{3}\,r$, $3\sqrt{3}\,r^2$; б) $\sqrt{3}R$, $3\sqrt{3}R$, $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.

1099. $\sqrt{2}R^2$. **1100.** в), г) У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 2, п. 109. **1101.** 1) 25,12; 2) 18,84; 3) 13,06; 4) 9; 5) 4,40; 6) 1; 7) 637,42; 8) 14,65; 9) 0,45. **1102.** а) Увеличится в три раза; б) уменьшится в два раза; в) увеличится в k раз; г) уменьшится в k раз. **1103.** а) Увеличится в k раз; б) уменьшится в k раз.

1104. а) $\frac{2\pi a\sqrt{3}}{3}$; б) $\pi\sqrt{a^2+b^2}$; в) $\frac{2\pi b^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}$; г) $\dfrac{\pi a}{\sin\frac{\alpha}{2}}$; д) 8π. **1105.** а) πa;

б) $\pi c(\sqrt{2}-1)$; в) $\pi c(\sin\alpha+\cos\alpha-1)$; г) $\dfrac{2\pi h\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\alpha}$. **1106.** 1,5 м. **1107.** $\approx$12 739 км. **1108.** $\approx$42 013 км. **1109.** а) π см; б) $\frac{3}{2}\pi$ см; в) 2π см; г) 3π см. **1110.** 30. **1111.** $\approx$59,2 см. **1112.** $\approx$36,2 см. **1113.** $\approx 4°35'$. **1114.** 1) 12,56; 2) 78,5; 3) 1,69; 4) 0,26; 5) 7; 6) 9258,26; 7) 9,42; 8) 1,41. **1115.** а) Увеличится в k^2 раз; б) уменьшится в k^2 раз. **1116.** а) $\frac{\pi(a^2+b^2)}{4}$; б) $\frac{\pi a^2}{4\sin^2\alpha}$; в) $\frac{\pi(a^2+4h^2)^2}{64h^2}$. **1117.** а) $\frac{\pi a^2}{12}$; б) $\frac{\pi a^2\sin^2\alpha}{(\cos\alpha+\sin\alpha+1)^2}$; в) $\frac{\pi a^2\sin^2\alpha}{4\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}$; г) $\frac{\pi a^2}{4}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$. **1118.** $\approx$34,2 м^2. **1119.** $D\approx$13,06 м, $S\approx$133,84 м^2. **1120.** 4π см^2. **1121.** 0,75 мм. **1122.** $5{,}6\pi$ дм$^3\approx$17,6 дм^3. **1123.** $r^2(\pi-2)$. **1124.** Площадь наименьшего круга равна π, а площади колец равны 3π, 5π, 7π. **1126.** $\approx$262 см^2. **1127.** $\sqrt{\frac{5S}{\pi}}$. **1128.** $\frac{4-\pi}{4}a^2$. **1129.** а) 20; б) 9; в) 5; г) 6. **1130.** $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ дм. **1131.** 6,72 см. **1132.** а) $\frac{3\sqrt{6}}{8}$; б) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **1135.** 6 см; $54\sqrt{3}$ см^2. **1137.** 330 км. **1138.** а) $\approx$15,1 см; б) $\pi a\sin\alpha$. **1139.** $\approx$4,4 км. **1141.** Указание. Пусть $ABCDEFGH$ — искомый восьмиугольник, а O — центр описанной окружности. Сначала построить равнобедренный треугольник ABO. **1142.** Указание. Использовать теорему Пифагора. **1143.** Указание. Сначала вписать в окружность правильные треугольник и шестиугольник.

Глава XIII

1151. Указание. Доказать методом от противного. **1154.** Указание. Воспользоваться теоремой п. 115. **1155.** Указание. Доказательство провести методом от противного (см. доказательство теоремы п. 115). **1157.** Указание. Воспользоваться задачами 1156 и 1051. **1158.** Указание. Сначала построить образы каких-нибудь двух точек прямой b. **1159.** F — четырехугольник. **1160.** Указание. Задача решается аналогично задаче 1158. **1161.** F — треугольник. **1172.** Указание. Пусть M — произвольная точка прямой AB, а M' — ее образ. Используя равенства $AM=AM'$, $BM=BM'$, доказать, что точки M и M' совпадают. **1173.** Указание. Воспользоваться задачей 1155. **1174.** а) Указание. Воспользоваться задачей 1157. **1175.** Указание. Использовать симметрию относительно прямой a. **1176.** Указание. Использовать точки D_1 и D_2, симметричные точке D относительно прямых AB и BC. **1178.** Указание. Использовать параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{AD}$. **1179.** Указание. Учесть, что высоты треугольника, на который отображается треугольник ABS при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{BC}$, пересекаются в одной точке. **1180.** Указание. Использовать поворот вокруг точки O на угол в 120°. **1181.** Указание. Сначала построить прямую, симметричную одной из данных прямых относительно точки O. **1182.** Указание. Пусть $ABCD$ — искомая трапеция с основаниями AD и BC. Сначала построить треугольник ACD_1, где D_1 — точка, в которую отображается точка D при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{BC}$.

Задачи повышенной трудности

1184. Указание. Использовать координаты середин диагоналей AC и BD. **1185.** Указание. Воспользоваться тем, что отношение соответствующих координат векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ равно λ. **1186.** $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$. Указание. Воспользоваться задачей 1185. **1187.** $D\left(\frac{15}{11}; \frac{24}{11}\right)$. Указание. Воспользоваться задачами 535 и 1185. **1188.** $3\sqrt{5}$ см. Указание. Принять за оси координат прямые AM и BN. **1189.** $\left(\frac{x_1m_1+x_2m_2+x_3m_3}{m_1+m_2+m_3}; \frac{y_1m_1+y_2m_2+y_3m_3}{m_1+m_2+m_3}\right)$. **1190.** а) $M\left(2\frac{3}{4}; 0\right)$; б) $M(2; 0)$ Указание. Воспользоваться тем, что если две точки лежат по разные стороны от оси абсцисс, то искомая точка является точкой пересечения отрезка с концами в этих точках и оси абсцисс. **1191.** Указание. а) Пусть L — линия, заданная данным уравнением, а $M_0(x_0; y_0)$ — некоторая ее точка. Написать уравнение серединного перпендикуляра к отрезку M_1M_2, где $M_1(x_0-A; y_0-B)$, $M_2(x_0+A; y_0+B)$, и убедиться в том, что оно совпадает с данным уравнением. б) Учесть, что уравнение любой окружности не содержит членов вида kxy, где k — число, $k \neq 0$. **1192.** $(1; 0)$, $(-0,6; 0,8)$, $\frac{4\sqrt{5}}{5}$. **1193.** а) Окружность, точка или пустое множество. б) Прямая, вся плоскость или пустое множество. Указание. Вывести уравнение искомого множества точек. **1194.** Окружность без одной точки. Указание. Вывести уравнение искомого множества точек, задав систему координат так, чтобы прямая a совпала с одной из осей координат, а точка A лежала на другой оси. **1195.** Окружность радиуса kR, где R — радиус данной окружности. Указание. Ввести систему координат с началом в точке O и вывести уравнение искомого множества. **1196.** б) Указание. Воспользоваться теоремой, обратной теореме Пифагора. **1197.** Указание. Положив $MN=a$, сначала найти площадь треугольника AMB и стороны AM и BM. **1198.** Указание. Доказать, что в любом выпуклом четырехугольнике $ABCD$ имеет место равенство $S_{ODC} \cdot S_{OAB} = S_{OBC} \cdot S_{OAD}$ (O — точка пересечения диагоналей). **1199.** Указание. Доказать утверждение сначала для выпуклого четырехугольника. Для этого провести диагональ, соединяющую общий конец сторон a и d с общим концом сторон b и c, и найти площади получившихся треугольников. **1200.** Указание. Воспользоваться тем, что $S_{ABC}=S_{AA_1B}+S_{AA_1C}$.

1201. $\sqrt{\frac{a^2bc+d^2bc+b^2ad+c^2ad}{ad+bc}}$, $\sqrt{\frac{c^2ab+d^2ab+a^2dc+b^2dc}{ab+dc}}$, где a, b, c, d — стороны вписанного четырехугольника. **1202.** Указание. Пользуясь теоремой косинусов, доказать, что синус угла, заключенного между сторонами a и b, равен $\frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ab+cd}$, где p — полупериметр. **1203.** Указание. Доказать сначала, что прямая, проходящая через центры вписанной и описанной окружностей, перпендикулярна одной из биссектрис тогда и только тогда, когда вписанная окружность касается одной из сторон треугольника в точке, равноудаленной от середины этой стороны и основания высоты, проведенной к этой стороне.

1204. $72 \sin \alpha \cos^3 \alpha$. **1205.** $2\sqrt{S \operatorname{tg} \beta}$. **1206.** $\frac{l^2-h^2}{2h}$. **1207.** Указание. Сначала найти и сравнить углы BAC и AOB. **1208.** Указание. Воспользоваться задачей 1207. **1209.** Указание. Пусть M — середина отрезка A_1A_4. Доказать, что треугольник ACM равнобедренный, и, пользуясь этим, установить, что центр описанной около пятиугольника окружности совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ACM. **1210.** Указание. Воспользоваться задачей 1208. **1211.** Указание. Воспользоваться задачей 1210. **1212.** Указание. Воспользоваться задачей 1211. **1213.** Указание. Соединить точку M отрезками с вершинами многоугольника и представить площадь многоугольника в виде суммы площадей полученных треугольников. **1214.** Указание. Воспользоваться задачей 895. **1219.** Указание. Воспользоваться задачей 1156. **1220.** Указание. Построить равные равнобедренные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ с прямыми углами A и A_1 и воспользоваться задачей 1156. **1222.** Указание. Пусть $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — данные трапеции с бо́льшими основаниями AB и A_1B_1. На лучах AB и A_1B_1 отложить отрезки $AE=DC$ и $A_1E_1=D_1C_1$ и к треугольникам BCE и $B_1C_1E_1$ применить утверждение задачи 1156. **1223.** Указание. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — данные треугольники, $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle B-\angle C=\angle B_1-\angle C_1$. Рассмотреть две осевые симметрии относительно прямых, содержащих высоты AH и A_1H_1 данных треугольников. **1224.** Указание. Использовать центральную симметрию относительно точки пересечения диагоналей одного из параллелограммов. **1225.** Указание. Использовать осевую симметрию относительно данной прямой. **1226.** Указание. Если точка M лежит на стороне OB, то сначала построить прямую, симметричную прямой AO относительно точки M. **1228.** Указание. Пусть O — точка пересечения медиан искомого треугольника ABC, а O_1 — точка, симметричная точке O относительно середины стороны AC. Сначала построить $\triangle AOO_1$. **1229.** Указание. Пусть $ABCD$ — искомая трапеция с основаниями AB и CD. Использовать параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{AB}$. **1230.** Указание. Использовать параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{AB}$. **1231.** Указание. Использовать поворот вокруг точки A на угол 90°.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава II. **Треугольники**

Глава III. **Параллельные прямые**

Глава IV. **Соотношения между сторонами и углами треугольника**

8 класс

Глава V. Четырехугольники

Глава VI. Площадь

Глава VII. **Подобные треугольники**

Глава VIII. **Окружность**

Глава IX. **Векторы**

9 класс

Глава X. **Метод координат**

Учебное издание

Атанасян Левон Сергеевич
Бутузов Валентин Федорович
Кадомцев Сергей Борисович
Позняк Эдуард Генрихович
Юдина Ирина Игоревна

ГЕОМЕТРИЯ
Учебник для 7—9 классов средней школы

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. В. Туркестанская*
Младший редактор *Е. А. Буюклян*
Художники *Б. С. Вехтер, Е. П. Титков*
Художественный редактор *Ю. В. Пахомов*
Технический редактор *С. С. Якушкина*
Корректор *И. В. Белоусова*

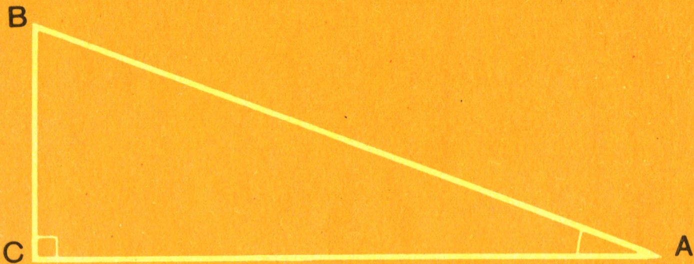
ИБ № 13908

Подписано к печати с диапозитивов 05.03.91. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бум. тип. № 1. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 21,0 + 0,25 форз. Усл. кр.-отт. 22,19. Уч.-изд. л. 18,57 + 0,42 форз. Тираж 1 935 000 экз. Заказ 37. Цена 2 р. 10 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Министерства печати и массовой информации РСФСР. 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Министерства печати и массовой информации РСФСР. 410004, Саратов, ул. Чернышевского, 59.

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

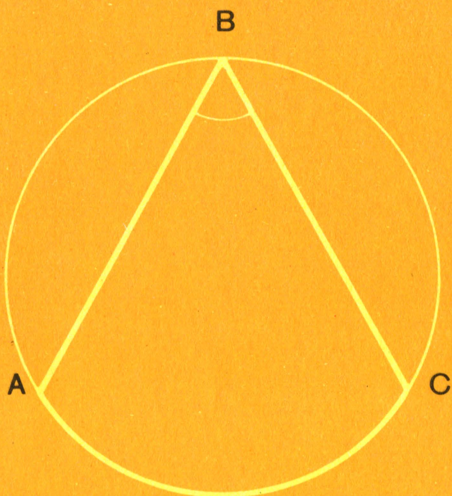


$$\sin A = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB}$$

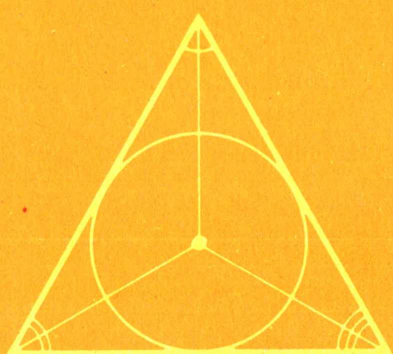
$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$$

ТЕОРЕМА О ВПИСАННОМ УГЛЕ

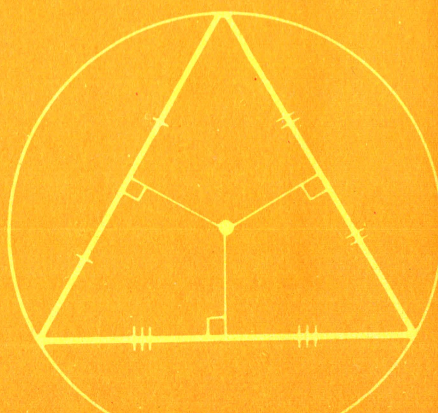


$$\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC$$

ВПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТЬ

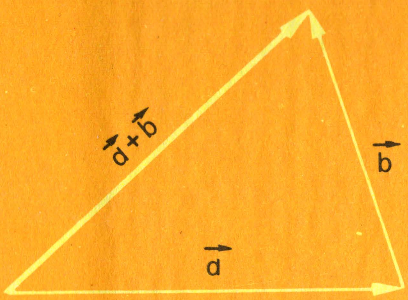


ОПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТЬ

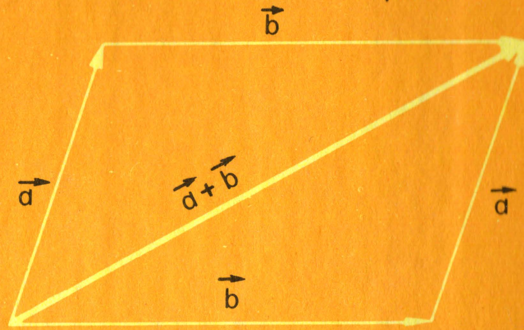


СЛОЖЕНИЕ ДВУХ ВЕКТОРОВ

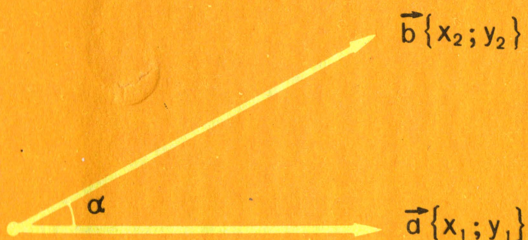
правило треугольника



правило параллелограмма

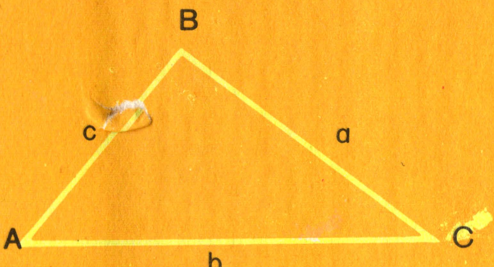


СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ



$$\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha=$$
$$=x_1x_2+y_1y_2$$

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

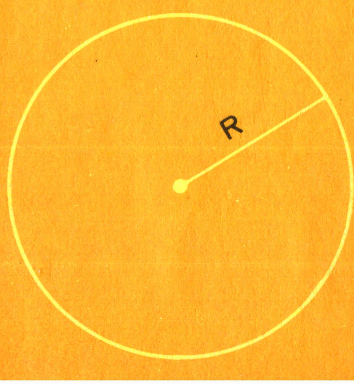
теорема синусов

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

теорема косинусов

ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ

$$C=2\pi R$$



ПЛОЩАДЬ КРУГА

$$S=\pi R^2$$

2 р. 10 к.