В. Я. АРСЕНИН

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА ИНЖЕНЕРА

В. Я. АРСЕНИН

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1966

517.2
А 85
УДК 517.944

$\frac{\mathbf{2\text{-}2\text{-}3}}{\mathbf{64—66}}$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ II

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга состоит из двух частей. В части I излагаются основные методы решения типичных задач математической физики и начальные сведения по интегральным уравнениям. В части II описывается приложение этих методов к задачам, требующим применения так называемых специальных функций, рассматриваются основные свойства последних.

В изложении широко используется δ-функция Дирака. Даются начальные сведения по обобщенным функциям и их применениям. В конце каждой главы приводится список задач, достаточный для приобретения прочных навыков пользования методами, изложенными в книге (всего более 150 задач с ответами). Большая часть задач заимствована из известных задачников Б. М. Будака, А. А. Самарского, А. Н. Тихонова и Н. Н. Лебедева, И. П. Скальской, С. Я. Уфлянда.

Книга предназначена для студентов инженерно-физических специальностей, но может быть полезна и инженерам тех же специальностей. Содержание ее почти полностью совпадает с курсом уравнений математической физики, читанным мною в течение ряда лет на факультете теоретической и экспериментальной физики Московского инженерно-физического института.

Этот курс складывался под непосредственным влиянием А. Н. Тихонова, определившего основное содержание программы курса. С А. Н. Тихоновым и А. А. Самарским я неоднократно обсуждал многие вопросы и пользовался их ценными советами. В. С. Владимиров и Т. Ф. Волков прочитали рукопись и высказали ряд важных замечаний и советов, которыми я воспользовался. Многочисленные полезные замечания, позволившие улучшить изложение, были высказаны редактором С. А. Широковой. Всем этим товарищам выражаю глубокую благодарность.

Автор

ЧАСТЬ I

ГЛАВА I

КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ И ПРИВЕДЕНИЕ ИХ К КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Большое число физических задач приводит к дифференциальным уравнениям с частными производными второго порядка относительно искомой функции. Такие уравнения можно написать в виде соотношения между независимыми переменными $x_1, \ldots, x_n$, искомой функцией u и ее частными производными первого и второго порядков $u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}$; $u_{x_1x_2}, \ldots, u_{x_1x_n}, \ldots, u_{x_ix_j}, \ldots, u_{x_nx_n}$:

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n; u, u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_n}; u_{x_1x_1}, \ldots, u_{x_ix_j}, \ldots, u_{x_nx_n}) = 0.$$

Очень часто эти уравнения являются линейными относительно старших производных — производных второго порядка, т. е. имеют вид

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j} + F(x_1, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}) = 0,$$

где коэффициенты при старших производных a_{ij} являются функциями только независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Если функция $F(x_1, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$ линейна относительно аргументов $u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}$, то уравнение называется *линейным* (без указания, относительно чего). Линейные уравнения имеют вид

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1} b_i u_{x_i} + cu = f(x_1, \ldots, x_n), \qquad (*)$$

где коэффициенты a_{ij}, b_i, c являются функциями только независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Если $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$, уравнение (*) называется линейным *однородным*, в противном случае — *неоднородным*.

Если коэффициенты a_{ij}, b_i, c постоянны, уравнение (*) называется *линейным уравнением с постоянными коэффициентами*.

Все многообразие линейных относительно старших производных (или просто линейных) уравнений может быть разделено на три класса (типа). В каждом классе есть простейшие уравнения, которые называют *каноническими*. Решения уравнений одного и того же типа (класса) имеют много общих свойств. Для изучения этих свойств достаточно рассмотреть канонические уравнения. Свойствами решений канонических уравнений и методами построения их решений мы и будем заниматься в последующих главах.

Принадлежность уравнения к тому или иному классу (типу) — классификация уравнений — определяется коэффициентами при старших производных. Мы произведем классификацию прежде всего для уравнений, в которых искомая функция u зависит лишь от двух переменных: $u = u(x, y)$. В этом случае уравнения, линейные относительно старших производных, можно записать в виде

$$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \qquad (1)$$

а линейные — в виде

$$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + b_1 u_x + b_2 u_y + cu = f(x, y), \qquad (2)$$

где a_{ij}, b_i, c — функции только независимых переменных x, y. Любое такое уравнение ((1) или (2)) с помощью замены независимых переменных может быть приведено к более простому — каноническому виду. Поэтому при изучении уравнений с двумя независимыми переменными можно ограничиться в дальнейшем лишь каноническими уравнениями.

Произведем в уравнении (1) замену независимых переменных по формулам

$$\xi = \varphi(x, y), \qquad \eta = \psi(x, y), \tag{3}$$

устанавливающим взаимно однозначное соответствие между точками (ξ, η) и (x, y) соответствующих областей. Мы будем требовать, чтобы функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ были непрерывными вместе с их частными производными первого и второго порядков. Тогда

$$\begin{aligned}
&u_x = \varphi_x u_\xi + \psi_x u_\eta, \quad u_y = \varphi_y u_\xi + \psi_y u_\eta,\\
&u_{xx} = \varphi_x^2 u_{\xi\xi} + 2\varphi_x\psi_x u_{\xi\eta} + \psi_x^2 u_{\eta\eta} + \varphi_{xx} u_\xi + \psi_{xx} u_\eta,\\
&u_{yy} = \varphi_y^2 u_{\xi\xi} + 2\varphi_y\psi_y u_{\xi\eta} + \psi_y^2 u_{\eta\eta} + \varphi_{yy} u_\xi + \psi_{yy} u_\eta,\\
&u_{xy} = \varphi_x\varphi_y u_{\xi\xi} + (\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) u_{\xi\eta} + \psi_x\psi_y u_{\eta\eta} + \varphi_{xy} u_\xi + \psi_{xy} u_\eta.
\end{aligned}$$

Подставляя эти значения производных в уравнение (1) и объединяя члены с одинаковыми производными, получим преобразованное уравнение

$$\alpha_{11} u_{\xi\xi} + 2\alpha_{12} u_{\xi\eta} + \alpha_{22} u_{\eta\eta} + F_1(u_\xi, u_\eta, u, \xi, \eta) = 0, \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11} = a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2,\\
&\alpha_{12} = a_{11}\varphi_x\psi_x + a_{12}(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + a_{22}\varphi_y\psi_y,\\
&\alpha_{22} = a_{11}\psi_x^2 + 2a_{12}\psi_x\psi_y + a_{22}\psi_y^2.
\end{aligned} \tag{5}$$

Непосредственной проверкой устанавливаем справедливость тождества (используя при этом формулы (5)):

$$\alpha_{12}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22} \equiv (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})\left[\frac{D(\varphi;\ \psi)}{D(x;\ y)}\right]^2. \tag{6}$$

Теперь мы можем принять следующую классификацию уравнений вида (1).

Если в некоторой области D дискриминант $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ положителен, $\Delta > 0$, то уравнение (1) называется *гиперболическим* в D (гиперболического типа в D).

Если $\Delta < 0$ в области D, то уравнение (1) называется *эллиптическим* в D (эллиптического типа в D).

Если $\Delta \equiv 0$ во всех точках области (множества) D, то уравнение (1) называется *параболическим* в D (параболического типа в D).

Из тождества (6) следует, что при замене независимых переменных по формулам (3) тип уравнения (1) не изменяется[1]).

Мы воспользуемся заменой независимых переменных для упрощения уравнения (1), для приведения его к *канонической* форме. Для каждого типа уравнений существует своя каноническая форма.

1. Если уравнение (1) гиперболично в области D, то в D существуют такие функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, что заменой переменных (3) уравнение (1) приводится к простейшей форме

$$u_{\xi\eta} + F_1(u_\xi, u_\eta, u, \xi, \eta) = 0, \tag{7}$$

называемой *канонической*.

Спишем процедуру отыскания функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, не вдаваясь в обсуждение условий их существования.

1) Если $a_{11} = a_{22} = 0$ в D, то $a_{12} \neq 0$. Разделив обе части уравнения (1) на $2a_{12}$, мы получим каноническую форму (7).

2) Пусть $a_{11}^2 + a_{22}^2 \neq 0$ в D. Мы ограничимся здесь рассмотрением случая, когда хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{22} не равен тождественно нулю ни в какой области D_1, принадлежащей D. Пусть это будет a_{11}.

Возьмем в качестве $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ в формулах (3) такие функции, которые обращают в нуль коэффициенты α_{11} и α_{22} преобразованного уравнения (4), т. е. являются решениями уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0, \\ a_{11}\psi_x^2 + 2a_{12}\psi_x\psi_y + a_{22}\psi_y^2 = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Разрешая эти уравнения относительно $\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$ и $\frac{\psi_x}{\psi_y}$, получим

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}}, \qquad \frac{\psi_x}{\psi_y} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}}.$$

Следовательно, каждое из уравнений (8) распадается на следующие два уравнения:

$$\varphi_x + \lambda_1(x, y)\varphi_y = 0, \qquad \psi_x + \lambda_2(x, y)\psi_y = 0, \tag{9}$$

[1]) При взаимно однозначном преобразовании (3) якобиан $\frac{D(\varphi; \psi)}{D(x; y)}$ не обращается в нуль. См. Фихтенгольц Г. М., Основы математического анализа, М., Физматгиз, 1961, т. II, стр. 275.

где

$$\lambda_1(x, y) = \frac{a_{12} - \sqrt{\Delta}}{a_{11}}, \qquad \lambda_2(x, y) = \frac{a_{12} + \sqrt{\Delta}}{a_{11}}. \tag{10}$$

Уравнения (9) эквивалентны соответственно уравнениям

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_1(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = \lambda_2(x, y)\,^{1)}. \tag{11}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае мы найдем функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, обращающие в нуль коэффициенты α_{11} и α_{22}. При этом $\alpha_{12} \neq 0$, что немедленно следует из тождества (6). Разделив преобразованное уравнение на $2\alpha_{12}$, мы и получим искомую каноническую форму.

Общие интегралы уравнений (11)

$$\varphi(x, y) = c_1 \text{ и } \psi(x, y) = c_2$$

образуют два семейства кривых, называемых *характеристиками* уравнения (1). Уравнения (11) называются *дифференциальными уравнениями характеристик.* Заметим, что никакие две характеристики из разных семейств не касаются друг друга, поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Поэтому упомянутые семейства характеристик образуют криволинейные координатные сетки. В связи с этим рассмотренное упрощение уравнения (1) посредством преобразования независимых переменных иногда называют *преобразованием уравнения* (1) *к характеристикам.*

2. Если уравнение (1) эллиптично в области D, то в D существуют такие функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, что заменой переменных (3) уравнение (1) приводится к канонической форме

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + F_1(u_\xi, u_\eta, u, \xi, \eta) = 0. \tag{12}$$

Снова ограничимся описанием процедуры отыскания функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$.

Сначала формально, как в предыдущем случае, приводим уравнение к виду

$$u_{\xi\eta} + F_1(u_\xi, u_\eta, u, \xi, \eta) = 0. \tag{13}$$

---

[1]) См. Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, гл. VIII, М., Физматгиз, 1959.

При этом новые переменные ξ и η будут комплексно сопряженными[1]):

$$\xi = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \qquad \eta = \varphi(x, y) - i\psi(x, y),$$

поскольку дифференциальные уравнения характеристик в рассматриваемом случае имеют вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}} - i\frac{\sqrt{-\Delta}}{a_{11}}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}} + i\frac{\sqrt{-\Delta}}{a_{11}}.$$

Следовательно, уравнение эллиптического типа имеет лишь мнимые характеристики.

Произведем новую замену независимых переменных по формулам

$$\rho = \frac{\xi + \eta}{2} = \varphi(x, y), \qquad \sigma = \frac{\xi - \eta}{2i} = \psi(x, y),$$

в результате которой уравнение (13), а следовательно и уравнение (1), приводится к искомой канонической форме (с точностью до изменения обозначений)

$$u_{\rho\rho} + u_{\sigma\sigma} + F_2(u_\rho, u_\sigma, u, \rho, \sigma) = 0.$$

3. Если уравнение (1) параболично в области D, то в D существуют такие функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, что заменой переменных (3) уравнение (1) приводится к канонической форме

$$u_{\eta\eta} + F_1(u_\xi, u_\eta, u, \xi, \eta) = 0. \tag{14}$$

Процедура отыскания функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ состоит в следующем.

Сначала находим такую функцию $\varphi(x, y)$, которая обращает в нуль коэффициент α_{11} преобразованного уравнения, т. е. является решением уравнения

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0. \tag{15}$$

Как и в случае гиперболического уравнения, мы предполагаем, что a_{11} не равно нулю тождественно ни в какой области D_1, содержащейся в D. Затем разрешаем уравнение (15)

---

[1]) Это утверждение справедливо лишь при некоторых условиях, которым должны удовлетворять коэффициенты a_{11}, a_{12} и a_{22} уравнения (1). См. Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, М., Изд-во «Наука», 1965.

относительно $\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$. В отличие от гиперболического случая (см. (9)) получаем лишь одно уравнение

$$\varphi_x + \lambda(x, y)\,\varphi_y = 0, \tag{16}$$

где

$$\lambda(x, y) = \frac{a_{12}}{a_{11}}.$$

Любое решение уравнения (16), не равное тождественно постоянной, можно взять в качестве функции $\varphi(x, y)$. Тогда коэффициент α_{12} преобразованного уравнения также обратится в нуль, как это следует из условия параболичности уравнения (1) и из тождества (6). В качестве функции $\psi(x, y)$ можно взять любую дважды непрерывно дифференцируемую функцию, не обращающую в нуль коэффициент α_{22}. Разделив преобразованное таким образом уравнение на α_{22}, мы и получим искомую каноническую форму. Уравнение параболического типа имеет лишь одно семейство характеристик

$$\frac{dy}{dx} = \lambda(x, y).$$

Если исходное уравнение (1) линейное, то и преобразованное уравнение, очевидно, будет линейным.

Итак, канонические формы линейных уравнений имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u_{\xi\eta} + \beta_1 u_\xi + \beta_2 u_\eta + \gamma u &= f(\xi, \eta) \quad \text{(гиперболическое)},\\ u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \beta_1 u_\xi + \beta_2 u_\eta + \gamma u &= f(\xi, \eta) \quad \text{(эллиптическое)},\\ u_{\eta\eta} + \beta_1 u_\xi + \beta_2 u_\eta + \gamma u &= f(\xi, \eta) \quad \text{(параболическое)}. \end{aligned} \tag{17}$$

4. Если исходное уравнение было линейным и с постоянными коэффициентами, то и в соответствующем каноническом уравнении коэффициенты β_1, β_2, γ будут постоянными[1]. В этом случае уравнения (17) допускают дальнейшее упрощение при помощи замены неизвестной функции по формуле

$$u = ve^{\mu\xi + \nu\eta}, \tag{18}$$

где μ, ν — числа, подлежащие определению.

[1]) Характеристиками гиперболического уравнения в этом случае будут прямые.

Вычисляя производные функции u и подставляя их, например, в первое из уравнений (17), получим

$$v_{\xi\eta} + (\nu + \beta_1) v_\xi + (\mu + \beta_2) v_\eta + (\mu\nu + \mu\beta_1 + \nu\beta_2 + \gamma) v = f(\xi, \eta) e^{-\mu\xi - \nu\eta}.$$

Если мы положим

$$\mu = -\beta_2, \quad \nu = -\beta_1,$$

то преобразованное уравнение примет вид

$$v_{\xi\eta} + \gamma_1 v = f_1(\xi, \eta), \tag{19}$$

где

$$\gamma_1 = \gamma - \beta_1\beta_2, \quad f_1(\xi, \eta) = f(\xi, \eta) e^{\beta_2\xi + \beta_1\eta}.$$

Аналогичным образом уравнение эллиптического типа приводится к виду

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \gamma_1 v = f_1(\xi, \eta), \tag{20}$$

где

$$\gamma_1 = \gamma - 0{,}25(\beta_1^2 + \beta_2^2), \ \mu = -0{,}5\beta_1, \ \nu = -0{,}5\beta_2, \ f_1 = fe^{-\mu\xi - \nu\xi}.$$

В уравнении параболического типа выбором μ и ν нельзя обратить в нуль коэффициенты при v_ξ и v_η, поскольку преобразованное уравнение имеет вид

$$v_{\eta\eta} + \beta_1 v_\xi + (2\nu + \beta_2) v_\eta + (\nu^2 + \nu\beta_2 + \mu\beta_1 + \gamma) v = f_1(\xi, \eta).$$

Полагая $\nu = -0{,}5\beta_2$, $\mu = \frac{1}{\beta_1}(0{,}25\beta_2^2 - \gamma)$ получим

$$v_{\eta\eta} + \beta_1 v_\xi = f_1(\xi, \eta). \tag{21}$$

Имея в виду описанные возможности упрощения уравнения (1), достаточно рассмотреть лишь методы решения задач, сформулированных для канонических уравнений, а в случае линейных уравнений с постоянными коэффициентами — для уравнений вида (19), (20), (21).

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. $u_{xx} - yu_{yy} = 0$.

Здесь $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = -y$, $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = y$.

Следовательно, в области $y > 0$ уравнение гиперболично, в области $y < 0$ — эллиптично.

а) Рассмотрим сначала область гиперболичности. Дифференциальные уравнения характеристик имеют вид

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{y}, \qquad \frac{dy}{dx} = \sqrt{y},$$

а $x - 2\sqrt{y} = c_1$, $x + 2\sqrt{y} = c_2$ — их общие интегралы. Производя замену независимых переменных

$$\xi = x - 2\sqrt{y},$$
$$\eta = x + 2\sqrt{y},$$

получим каноническую форму преобразованного уравнения

$$u_{\xi\eta} + 0{,}5\frac{1}{\xi - \eta}(u_\xi - u_\eta) = 0.$$

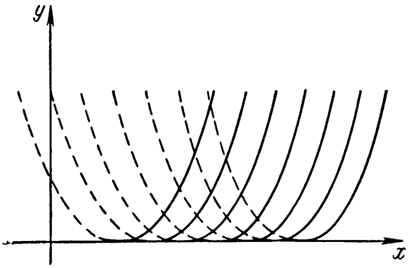

Рис. 1.

Характеристиками являются правые и левые ветви семейства парабол $(x - c)^2 = 4y$ (рис. 1, сплошные и пунктирные кривые). Вершины парабол, лежащие на оси x, не принадлежат характеристикам, так как в этих точках уравнение не является гиперболическим ($\Delta = 0$).

б) В области эллиптичности ($y < 0$) производим замену переменных

$$\rho = \frac{\xi + \eta}{2} = x, \qquad \sigma = \frac{\eta - \xi}{2i} = 2\sqrt{-y}.$$

Канонический вид уравнения:

$$u_{\rho\rho} + u_{\sigma\sigma} - \frac{1}{\sigma}u_\sigma = 0.$$

Пример 2. $xu_{xx} - 2\sqrt{xy}\,u_{xy} + yu_{yy} + 0{,}5u_y = 0$.

Здесь $a_{11} = x$, $a_{12} = -\sqrt{xy}$, $a_{22} = y$, $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} \equiv 0$. Следовательно, это уравнение всюду параболического типа. Оно имеет одно семейство характеристик, описываемых дифференциальным уравнением

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{y}{x}} \qquad \left(\text{или } \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{-dx}{\sqrt{x}}\right).$$

Общий интеграл этого уравнения

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=c.$$

Поэтому полагаем

$$\xi=\sqrt{x}+\sqrt{y},$$

η можно положить равной любой функции $\psi(x, y)$, не обращающей в нуль коэффициент α_{22} преобразованного уравнения. Полагаем

$$\eta=\sqrt{x}.$$

Канонический вид уравнения:

$$u_{\eta\eta}-\frac{1}{\eta}(u_\xi+u_\eta)=0.$$

5. Принадлежность к тому или другому типу линейного уравнения, не содержащего смешанной производной от искомой функции, т. е. уравнения вида

$$a_{11}u_{xx}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f(x, y), \tag{22}$$

очевидно, определяется знаками коэффициентов a_{11} и a_{22}. Точнее, если $a_{11}(x, y)$ и $a_{22}(x, y)$ всюду в области D имеют разные знаки (и в D не обращаются в нуль), то уравнение (22) гиперболично в D; если $a_{11}(x, y)$ и $a_{22}(x, y)$ всюду в области D имеют одинаковые знаки (и в D не обращаются в нуль), то уравнение (22) эллиптично в D. Если же всюду в D один из коэффициентов a_{11}, a_{22} равен нулю, то уравнение (22) параболично в D.

Аналогичный признак может быть положен в основу классификации линейных уравнений вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}u_{x_i x_i}+\sum_{k=1}^{n} b_k u_{x_k}+cu=f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{23}$$

со многими независимыми переменными $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где a_{ii}, b_k, c суть функции переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Уравнение (23) называется:

эллиптическим в точке $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, если все коэффициенты $a_{ii}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ в этой точке, во-первых, не равны нулю, во-вторых, имеют один и тот же знак;

гиперболическим в точке $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, если коэффициенты $a_{ii}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ в этой точке, во-первых, все не равны нулю, во-вторых, все, кроме одного (например $a_{i_0 i_0}$), имеют один и тот же знак, а $a_{i_0 i_0}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ имеет противоположный знак;

параболическим в точке $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, если коэффициенты $a_{ii}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ в этой точке все, кроме одного (например $a_{i_0 i_0}$), не равны нулю и имеют один и тот же знак,

$$a_{i_0 i_0}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = 0 \quad \text{и} \quad b_{i_0}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \neq 0\text{[1]}.$$

Если уравнение (23) эллиптично (соответственно гиперболично, параболично) в каждой точке области D, то оно называется *эллиптическим* (соответственно *гиперболическим, параболическим*) в D. Например:

$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y, z)$ всюду эллиптично $(u = u(x, y, z))$,

$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - k^2 u_{tt} = f(x, y, z, t)$ всюду гиперболично $(u = u(x, y, z, t))$,

$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - k^2 u_t = f(x, y, z, t)$ всюду параболично $(u = u(x, y, z, t))$.

Здесь k — вещественное число.

Задачи

1. Привести к каноническому виду уравнения:

   а) $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$,

   б) $y^2 u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0$,

   в) $x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$,

   г) $u_{xx} + y u_{yy} + 0{,}5\, u_y = 0$.

2. Привести к простейшему каноническому виду уравнения:

   а) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x - 5u_y + 4u = 0$,

   б) $u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} + 5u_x + u_y + 4u = 0$,

   в) $2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 4u_x + 4u_y + u = 0$.

---

[1]) Возможны и другие распределения знаков коэффициентов a_{ii}. См. Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, М., Изд-во «Наука», 1965.

ГЛАВА II

ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К УРАВНЕНИЯМ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ. ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Мы рассмотрим ряд физических задач, приводящих к уравнениям указанных в главе I типов. При выводе уравнений, описывающих соответствующие процессы, мы будем пользоваться основными законами сохранения.

§ 1. Уравнение малых поперечных колебаний струны

Струной мы будем называть упругую нить, не сопротивляющуюся изгибу, но оказывающую сопротивление растяжению[1]). Отсутствие сопротивления изгибу математически выражается в том, что напряжения, возникающие в струне, всегда направлены по касательной к ее мгновенному профилю (рис. 2).

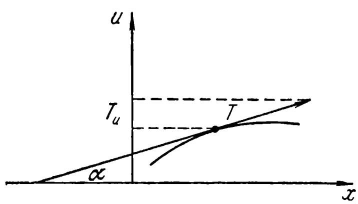

Рис. 2.

Колебания каждой точки струны с абсциссой x описываются тремя компонентами *вектора смещения* $\{u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t)\}$. Мы будем рассматривать только такие колебания, в которых смещения струны лежат в одной плоскости (x, u), а вектор смещения перпендикулярен в любой момент времени к оси x (поперечные колебания). Мы ограничимся рассмотрением лишь малых колебаний, т. е. таких, в которых можно пренебречь квадратом u_x.

Из предположения о малости колебаний следует, что величина натяжения T, возникающего в струне, не зависит от

---

[1]) Например, нитью иногда можно считать стержень, два измерения которого малы в сравнении с третьим — длиной.

времени t. В самом деле, рассмотрим участок (x_1, x_2) невозмущенной струны. Его длина в начальный момент равна $x_2 - x_1$, а в момент t:

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+u_x^2}\, dx \approx \int_{x_1}^{x_2} 1 \cdot dx = x_2 - x_1.$$

Таким образом, с точностью до членов второго порядка малости по u_x длина фиксированного участка струны не меняется со временем, т. е. этот участок не растягивается. Отсюда в силу закона Гука следует, что величина натяжения T не меняется со временем (с точностью до членов второго порядка малости относительно u_x). Следовательно, T может быть функцией только x:

$$T = T(x).$$

Поскольку мы рассматриваем поперечные колебания, нас будет интересовать лишь проекция вектора натяжения на ось u. Обозначим ее через T_u. Очевидно

$$T_u = T \sin\alpha = T \operatorname{tg}\alpha \cos\alpha = T \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}} \approx T u_x,$$

где α — угол касательной к кривой $u = u(x, t)$ с осью x при фиксированном t (рис. 2). Количество движения участка (x_1, x_2) в момент времени t равно

$$\int_{x_1}^{x_2} u_t(\xi, t)\, \rho(\xi)\, d\xi,$$

где ρ — линейная плотность струны.

По второму закону Ньютона изменение количества движения участка (x_1, x_2) за время $\Delta t = t_2 - t_1$ равно импульсу действующих сил, которые в рассматриваемом случае складываются из сил натяжения Tu_x, приложенных к концам участка, и внешних сил $\int_{x_1}^{x_2} f(\xi, t)\, d\xi$, плотность которых равна $f(x, t)$:

$$\int_{x_1}^{x_2} [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)]\, \rho(\xi)\, d\xi = \int_{t_1}^{t_2} [T(x_2)\, u_x(x_2, \tau) - T(x_1)\, u_x(x_1, \tau)]\, d\tau + \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau. \quad (1)$$

Это и есть *уравнение малых поперечных колебаний участка струны* в интегральной форме.

Если $u(x, t)$ имеет непрерывные производные второго порядка, а $T(x)$ — непрерывную производную первого порядка, то, применяя теорему Лагранжа о приращении функции и теорему о среднем для интегралов в уравнении (1), получим

$$u_{tt}(\xi_1, \tau_1)\,\rho(\xi_1)\,\Delta t\,\Delta x = \frac{\partial}{\partial x}[T(x)u_x]_{\substack{x=\xi_2\\ t=\tau_2}}\Delta t\,\Delta x + f(\xi_3, \tau_3)\,\Delta t\,\Delta x, \quad (2)$$

где $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in [x_1, x_2]$, $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in [t_1, t_2]$. Разделив обе части равенства (2) на $\Delta t\,\Delta x$ и перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$ и $\Delta x \to 0$, получим дифференциальное уравнение малых поперечных колебаний струны

$$\frac{\partial}{\partial x}[Tu_x] + f(x, t) = \rho(x)\,u_{tt}. \quad (3)$$

В случае, когда $T = \text{const}$ и $\rho = \text{const}$, уравнение обычно пишут в виде

$$a^2 u_{xx} + F(x, t) = u_{tt}, \quad (4)$$

где $a^2 = \frac{T}{\rho}$; $F(x, t) = \frac{1}{\rho} f(x, t)$. Уравнение (4) называется *одномерным волновым уравнением*.

§ 2. Уравнение малых продольных колебаний упругого стержня

Мы будем рассматривать стержень, расположенный вдоль оси x. Введем следующие обозначения: $S(x)$ — площадь сечения стержня плоскостью, перпендикулярной оси x, проведенной через точку x; $k(x)$ и $\rho(x)$ — модуль Юнга и плотность в сечении с абсциссой x; $u(x, t)$ — величина отклонения (вдоль стержня) сечения с абсциссой x в момент времени t; при этом мы предполагаем, что величина отклонения всех точек фиксированного сечения одинакова. Очевидно, продольные колебания полностью описываются функцией $u(x, t)$. *Малыми* мы будем называть такие продольные колебания, в которых натяжения, возникающие в процессе колебаний, подчиняются закону Гука. Подсчитаем фигурирующее в формулировке закона Гука относительное удлинение участка

$(x,\ x+\Delta x)$ в момент времени t. Координаты концов этого участка равны

$$x+u(x,\ t),\quad x+\Delta x+u(x+\Delta x,\ t).$$

Следовательно, относительное удлинение участка равно

$$\frac{\{[x+\Delta x+u(x+\Delta x,\ t)]-[x+u(x,\ t)]\}-\Delta x}{\Delta x}=u_x(x+\theta\Delta x,\ t)$$
$$(0<\theta<1).$$

Таким образом, относительное удлинение в точке x в момент времени t равно $u_x(x,\ t)$, а величина натяжения T по закону Гука равна

$$T=k(x)\,S(x)\,u_x(x,\ t).$$

Применяя второй закон Ньютона к участку стержня $(x_1,\ x_2)$ за время $\Delta t=t_2-t_1$, получаем

$$\int_{x_1}^{x_2}\{u_t(\xi,\ t_2)-u_t(\xi,\ t_1)\}\,\rho(\xi)\,S(\xi)\,d\xi=$$
$$=\int_{t_1}^{t_2}\{S(x_2)\,k(x_2)\,u_x(x_2,\ \tau)-S(x_1)\,k(x_1)\,u_x(x_1,\ \tau)\}\,d\tau+$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}f(\xi,\ \tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где $f(x,\ t)$ — плотность равнодействующей внешних сил, действующих на сечение с абсциссой x вдоль оси x. Это и есть *уравнение малых продольных колебаний участка стержня* в интегральной форме. Предполагая существование непрерывных производных второго порядка у функции $u(x,\ t)$ и непрерывной первой производной у функций $k(x)$ и $S(x)$, легко находим дифференциальное уравнение малых продольных колебаний стержня:

$$\frac{\partial}{\partial x}[S(x)\,k(x)\,u_x(x,\ t)]+f(x,\ t)=\rho(x)\,S(x)\,u_{tt}(x,\ t).\qquad(5)$$

Если $S(x)$, $k(x)$ и $\rho(x)$ постоянны, то уравнение (5) приводится к виду

$$a^2u_{xx}+F(x,\ t)=u_{tt},$$

где

$$a^2=\frac{k}{\rho},\qquad F(x,\ t)=\frac{1}{\rho S}f(x,\ t).$$

Уравнения (3) и (5) по существу одинаковы и различаются лишь обозначениями (Sk — вместо T, а ρS — вместо ρ). Оба они всюду гиперболического типа, поскольку по самому смыслу $T(x)$, $S(x)$ и $k(x)$ положительны.

§ 3. Уравнение малых поперечных колебаний мембраны

Мембраной называется натянутая плоская пленка, не сопротивляющаяся изгибу и сдвигу, но оказывающая сопротивление растяжению [1]).

Мы будем рассматривать малые поперечные колебания мембраны, в которых смещение перпендикулярно плоскости мембраны (x, y) и в которых квадратами величин u_x и u_y можно пренебречь. Здесь $u = u(x, y, t)$ — величина смещения точки (x, y) в момент времени t.

Пусть ds — элемент дуги некоторого контура, лежащего на поверхности мембраны, M — точка этого элемента. На этот элемент действуют силы натяжения $\boldsymbol{T}ds$. Отсутствие сопротивления мембраны изгибу и сдвигу математически выражается в том, что вектор натяжения $\boldsymbol{T}$ лежит в плоскости, касательной к поверхности мембраны в точке M, и перпендикулярен элементу ds, а величина натяжения T в этой точке не зависит от направления элемента ds, содержащего точку M. Из предположения о малости колебаний следует:

1) *Проекция $T_{\text{пр}}$ вектора натяжения T на плоскость (x, y) равна T.*

Действительно, $T_{\text{пр}} = T\cos\alpha$, где α — угол между вектором $\boldsymbol{T}$ и плоскостью (x, y). Но α не больше угла γ между касательной плоскостью к поверхности мембраны, в которой лежит вектор $\boldsymbol{T}$, и плоскостью (x, y): $\alpha \leqslant \gamma$. Поэтому

$$\cos\alpha \geqslant \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \approx 1.$$

Следовательно, $\cos\alpha \approx 1$ и, значит, $T_{\text{пр}} \approx T$.

2) *Натяжение T не зависит от времени t.*

---

[1]) Например, мембраной иногда можно считать плоскую пластину, толщина которой мала в сравнении с двумя другими измерениями.

В самом деле, рассмотрим участок S невозмущенной мембраны. Его площадь равна $\iint\limits_S dxdy$. Площадь этого участка в момент времени t равна

$$\iint\limits_S \frac{dxdy}{\cos\gamma} \approx \iint\limits_S dxdy.$$

Таким образом, площадь фиксированного участка мембраны не меняется со временем, т. е. этот участок не растягивается. Поэтому в силу закона Гука и T не меняется со временем. Из того, что $\boldsymbol{T}$ направлен по перпендикуляру к элементу дуги ds следует, что T не зависит также от x и y. Действительно, рассмотрим участок невозмущенной мембраны $A_1B_1B_2A_2$, ограниченный отрезками, параллельными координатным осям (рис. 3).

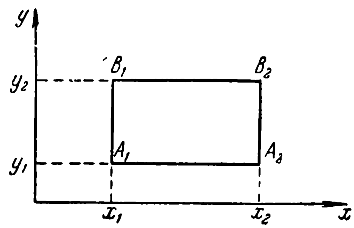

Рис. 3.

На этот участок действует сила натяжения, равная

$$\int\limits_{A_1A_2} \boldsymbol{T}ds + \int\limits_{A_2B_2} \boldsymbol{T}ds + \int\limits_{B_2B_1} \boldsymbol{T}ds + \int\limits_{B_1A_1} \boldsymbol{T}ds.$$

В силу отсутствия перемещения точек мембраны вдоль осей x, y проекции этой силы на оси x и y равны нулю. С другой стороны, ее проекция на ось x равна

$$\int\limits_{A_2B_2} Tds + \int\limits_{B_1A_1} Tds = \int\limits_{y_1}^{y_2} T(x_2, y)dy - \int\limits_{y_1}^{y_2} T(x_1, y)\,dy = \int\limits_{y_1}^{y_2} [T(x_2, y) - T(x_1, y)]\,dy = 0, \qquad (6)$$

а на ось y:

$$\int\limits_{A_1A_2} Tds + \int\limits_{B_2B_1} Tds = \int\limits_{x_1}^{x_2} [T(x, y_1) - T(x, y_2)]\,dx = 0. \qquad (7)$$

Ввиду произвольности промежутков (x_1, x_2) и (y_1, y_2) из (6) и (7) следует, что $T(x_1, y) = T(x_2, y)$ и $T(x, y_1) = T(x, y_2)$, ч. т. д.

Пусть S — участок мембраны в момент времени t, ограниченный контуром C. Обозначим через S_1 и C_1 проекции S и C на плоскость (x, y) (рис. 4).

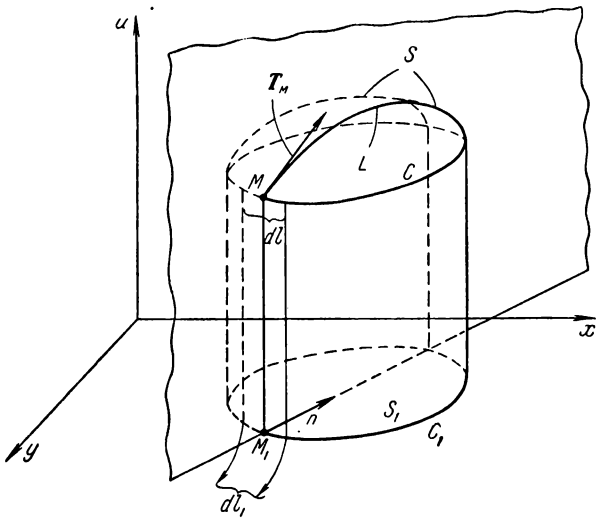

Рис. 4.

Сосчитаем величину вертикальной составляющей P_u силы натяжения, действующей на C. Для этого рассмотрим элемент dl на C и точку M на нем. Пусть $\boldsymbol{T}_M$ — вектор натяжения в точке M, перпендикулярный dl. Через $\boldsymbol{T}_M$ проведем плоскость, перпендикулярную плоскости (x, y). Эта плоскость пересечет плоскость (x, y) по нормали n к C_1 в точке M_1 (рис. 4). На рис. 5 изображен профиль L сечения поверхности S. Очевидно,

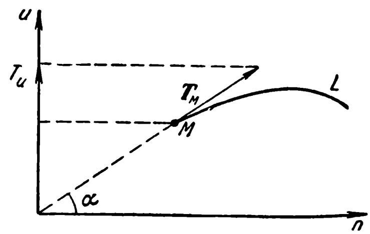

Рис. 5.

$$T_u = T \sin\alpha = T\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = T\frac{\dfrac{\partial u}{\partial n}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)^2}} \approx T\frac{\partial u}{\partial n}.$$

Следовательно,

$$P_u = \int_C T_u dl = \int_C T \frac{\partial u}{\partial n} dl = \int_{C_1} T \frac{\partial u}{\partial n} \frac{dl_1}{\cos \beta},$$

где β — угол между элементами dl и dl_1. Поскольку $\beta \leqslant \gamma$ (см. стр. 22), то $\cos \beta \geqslant \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \approx 1$. Поэтому

$$P_u = T \int_{C_1} \frac{\partial u}{\partial n} dl_1.$$

Применяя к этому интегралу формулу Остроградского, получаем

$$P_u = \iint_{S_1} (u_{xx} + u_{yy})\, dx\, dy = T \iint_{S_1} \Delta u\, dx\, dy.$$

Теперь нетрудно получить уравнение малых поперечных колебаний мембраны.

Обозначим через $f(x, y, t)$ плотность равнодействующей внешних сил, действующих на мембрану в точке $M(x, y)$ в момент времени t вдоль оси u, а через $\rho(x, y)$ — поверхностную плотность мембраны.

Применяя второй закон Ньютона к участку S_1 мембраны за время $\Delta t = t_2 - t_1$, получаем искомое уравнение в интегральной форме

$$\iint_{S_1} [u_t(x, y, t_2) - u_t(x, y, t_1)]\, \rho(x, y)\, dx dy =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \iint_{S_1} T \Delta u\, dx\, dy\, d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \iint_{S_1} f(x, y, \tau)\, dx\, dy\, d\tau.$$

Предполагая существование и непрерывность соответствующих производных, легко получить дифференциальное *уравнение малых поперечных колебаний мембраны*:

$$T \Delta u + f(x, y, t) = \rho u_{tt}.$$

Это уравнение, очевидно, гиперболического типа.

Если $\rho = \text{const}$, то его можно написать в виде

$$a^2 \Delta u + F(x, y, t) = u_{tt}, \tag{8}$$

где $a^2 = \frac{T}{\rho}$, $F(x, y, t) = \frac{1}{\rho} f(x, y, t)$. Уравнение (8) называется *двумерным волновым уравнением*.

§ 4. Уравнения гидродинамики и акустики

Движение сплошной среды характеризуется вектором скорости $\boldsymbol{v}(x, y, z, t)$, давлением $p(x, y, z, t)$ и плотностью $\rho(x, y, z, t)$. В качестве такой среды мы будем рассматривать идеальную жидкость (газ).

Рассмотрим некоторый объем жидкости D, ограниченный поверхностью S. Давление, действующее на этот объем, равно

$$\iint_S p\boldsymbol{n}\,ds,$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внутренней нормали к S.

По формуле Остроградского получим

$$\iint_S p\boldsymbol{n}\,ds = -\iiint_D \nabla p\,d\tau,$$

где ∇p — градиент p.

При отсутствии внешних сил уравнение движения объема D можно написать в виде

$$\iiint_D \rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}d\tau = -\iiint_D \nabla p\,d\tau,$$

из которого в силу произвольности D получаем уравнение движения в форме Эйлера:

$$\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \nabla p = 0. \qquad (9)$$

Здесь $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ — ускорение частицы, равное

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + v_1\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} + v_2\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y} + v_3\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}.$$

Если внутри D нет источников (стоков), то изменение в единицу времени количества жидкости, заключенной внутри D, равно потоку жидкости через границу S, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_D \rho\,d\tau = -\iint_S \rho(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\,ds.$$

Применяя к правой части формулу Остроградского, получаем

$$\iiint_D \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})\right]d\tau = 0,$$

откуда следует *уравнение неразрывности* среды

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})=0. \tag{10}$$

Рассмотрим адиабатические движения газа, для которых справедливо соотношение

$$p=p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma, \tag{11}$$

где $\gamma=\frac{c_p}{c_v}$, c_p, c_v — удельные теплоемкости соответственно при постоянном давлении и постоянном объеме; p_0, ρ_0 — начальные значения давления и плотности. Нелинейные уравнения (9) — (11) образуют полную систему уравнений, описывающих адиабатические движения идеального газа. Они называются *уравнениями газодинамики.*

Введем в рассмотрение *уплотнение* газа σ:

$$\sigma=\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0},\qquad \rho=\rho_0(1+\sigma). \tag{12}$$

Если ограничиться рассмотрением малых колебаний, в которых можно пренебречь вторыми (и более высокими) степенями уплотнения, скорости и градиентов скоростей и давлений, то уравнения (9) и (11) допускают существенные упрощения (линеаризацию).

Действительно, при указанных допущениях имеем

$$\begin{gathered}
\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\rho_0}\cdot\frac{1}{1+\sigma}=\frac{1}{\rho_0}(1-\sigma+\sigma^2-\ldots)\approx\frac{1}{\rho_0}(1-\sigma),\\
p=p_0(1+\sigma)^\gamma\approx p_0(1+\gamma\sigma),\\
\frac{1}{\rho}\nabla p\approx\frac{1}{\rho_0}(1-\sigma)\nabla p\approx\frac{\gamma p_0}{\rho_0}\nabla\sigma \qquad (\text{если } p_0=\text{const}),\\
\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})\approx\rho_0\operatorname{div}[(1+\sigma)\boldsymbol{v}]\approx\rho_0\operatorname{div}(\boldsymbol{v}) \qquad (\text{если } \rho_0=\text{const}).
\end{gathered} \tag{13}$$

Поэтому, отбрасывая в уравнениях (9) и (10) члены более высокого порядка малости, получаем

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{v}_t+a^2\nabla\sigma=0 \qquad \left(a^2=\frac{\gamma p_0}{\rho_0}\right),\\
&\sigma_t+\operatorname{div}(\boldsymbol{v})=0.
\end{aligned}\right. \tag{14}$$

Применим к первому уравнению (14) оператор div, а ко второму $\frac{\partial}{\partial t}$. Результаты вычтем один из другого — получим

$$a^2\Delta\sigma = \sigma_{tt}. \tag{15}$$

Из соотношений (12), (13) и (14) находим аналогичные уравнения для ρ и p:

$$\begin{aligned} a^2\Delta\rho &= \rho_{tt}, \\ a^2\Delta p &= p_{tt}. \end{aligned} \tag{16}$$

Уравнения (15) и (16) называются *уравнениями акустики*. Они, очевидно, гиперболического типа. Такие уравнения называют также *трехмерными волновыми уравнениями*.

Далее, из первого уравнения (14) находим

$$\boldsymbol{v}(x, y, z, t) = \boldsymbol{v}(x, y, z, 0) - a^2\int_0^t \nabla\sigma\,d\tau = \\ = \boldsymbol{v}(x, y, z, 0) - \nabla\left(\int_0^t a^2\sigma\,d\tau\right).$$

Предположим, что в начальный момент $(t=0)$ поле скоростей имеет потенциал $f(x, y, z)$, т. е.

$$\boldsymbol{v}|_{t=0} = -\nabla f(x, y, z).$$

Тогда $\boldsymbol{v}(x, y, z, t) = -\nabla\left\{f(x, y, z) + a^2\int_0^t \sigma\,d\tau\right\} = -\nabla u$; следовательно, поле скоростей имеет потенциал u, и для $t>0$

$$u = f(x, y, z) + a^2\int_0^t \sigma\,d\tau.$$

Дифференцируя это соотношение по t, находим

$$\begin{aligned} u_t &= a^2\sigma, \\ u_{tt} &= a^2\sigma_t. \end{aligned}$$

Заменяя во втором уравнении (14) σ_t и $\boldsymbol{v}$ их выражениями через u, получаем

$$a^2\Delta u = u_{tt}. \tag{17}$$

Таким образом, и потенциал поля скоростей удовлетворяет волновому уравнению.

§ 5. Уравнение для напряженности электрического поля в вакууме

Напишем уравнения Максвелла в вакууме:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= \frac{-1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{H} &= 0, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}, \end{aligned} \tag{18}$$

где $\boldsymbol{H}$ — напряженность магнитного поля, $\boldsymbol{E}$ — напряженность электрического поля.

Применяя операцию rot к первому уравнению, получим

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = \frac{-1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \boldsymbol{H}. \tag{19}$$

По известной формуле векторного анализа

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = \nabla (\operatorname{div} \boldsymbol{E}) - \Delta \boldsymbol{E}.$$

В нашем случае $\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\Delta \boldsymbol{E}$, поскольку $\operatorname{div} \boldsymbol{E} \equiv 0$. Подставляя это значение в формулу (19) и используя последнее уравнение в (18), получаем волновое уравнение для $\boldsymbol{E}$

$$c^2 \Delta \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{tt}. \tag{20}$$

§ 6. Уравнения теплопроводности и диффузии

Выведем уравнение, описывающее распределение температуры в теле.

Пусть $u(M, t)$ — температура тела в точке M в момент времени t. При выводе уравнения будем пользоваться законом Фурье для плотности потока тепла w в направлении $\boldsymbol{n}$ в единицу времени:

$$w = -k \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Здесь k — коэффициент теплопроводности. Он может быть функцией температуры, точки и времени:

$$k = k(u, M, t).$$

Рассмотрим часть тела D, ограниченную поверхностью S. Обозначим через $f(M, t)$ плотность источников тепла. Подсчитаем баланс тепла для D за малое время Δt:

$Q_1 = \iiint\limits_D f(M, t)\, d\tau \Delta t$ — приход за счет источников;

$Q_2 = -\iint\limits_S k \frac{\partial u}{\partial n}\, d\tau\, \Delta t$ — расход за счет выходящего из D потока.

Здесь производная $\frac{\partial u}{\partial n}$ берется по направлению внешней нормали к S;

$Q_3 = \iiint\limits_D c\rho u_t\, d\tau\, \Delta t$ — расход на изменение температуры, где c — коэффициент теплоемкости, ρ — плотность вещества.

Закон сохранения энергии требует, чтобы

$$Q_1 = Q_2 + Q_3,$$

или

$$\iint\limits_S k \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma + \iiint\limits_D f(M, t)\, d\tau = \iiint\limits_D c\rho u_t\, d\tau.$$

Применяя к первому интегралу формулу Остроградского, получаем

$$\iiint\limits_D [\operatorname{div}(k\nabla u) + f(M, t)]\, d\tau = \iiint\limits_D c\rho u_t\, d\tau,$$

откуда, ввиду произвольности области D, следует искомое *уравнение теплопроводности*

$$\operatorname{div}(k\nabla u) + f(M, t) = c\rho u_t. \tag{21}$$

Совершенно аналогично выводится уравнение диффузии. При этом надо пользоваться законом Нернста для потока вещества w в направлении n:

$$w = -D \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Здесь $u = u(M, t)$ — концентрация диффундирующего вещества (газа, жидкости), D — коэффициент диффузии. В формуле для Q_3 вместо $c\rho$ надо написать коэффициент пористости c среды, в которой происходит диффузия. *Уравнение диффузии* имеет вид

$$\operatorname{div}(D\nabla u) + f(M, t) = cu_t. \tag{22}$$

По физическому смыслу k и D положительны. Поэтому уравнения (21) и (22) параболического типа.

Задачи об отыскании установившейся температуры или концентрации приводят, очевидно, к уравнению эллиптического типа

$$\operatorname{div}(k\nabla u) = -f(M), \tag{23}$$

если k, c, ρ и f (соответственно D и c) не зависят от t.

§ 7. Типы краевых условий. Постановка краевых задач

При решении задач физики или других областей науки математическими методами необходимо прежде всего дать математическую постановку задачи, а именно:

а) написать уравнение (или систему уравнений), которому удовлетворяет искомая функция (или система функций), описывающая исследуемое явление;

б) написать дополнительные условия, которым должна удовлетворять искомая функция на границах области ее определения.

Характер дополнительных условий мы покажем на примерах задач, рассмотренных в предыдущих параграфах.

Например, в случае колебаний струны или стержня (уравнения (3) и (5)) надо задать начальный профиль

$$u(x, 0) = \varphi(x)$$

и начальную скорость

$$u_t(x, 0) = \psi(x)$$

точек струны (стержня).

Это *начальные условия.* Аналогичный вид они имеют для любого волнового уравнения.

Кроме того, надо записать режим на концах (краях) струны (стержня).

Так, если задан закон движения концов ($x=0$ и $x=l$)

$$u(0, t) = \mu_1(t), \qquad u(l, t) = \mu_2(t),$$

то мы будем называть такие дополнительные условия *краевыми (граничными) условиями типа I.*

Если задан закон изменения силы, приложенной к концу струны (стержня) и действующей в направлении колебаний, то режим на концах можно записать следующим образом:

$$Eu_x|_{x=0}=f_1(t), \qquad Eu_x|_{x=l}=f_2(t)$$

или

$$u_x(0, t)=\nu_1(t), \qquad u_x(l, t)=\nu_2(t).$$

Это *краевые условия типа II.*

Пусть к концу стержня ($x=l$) прикреплена пружина, действующая вдоль оси x. Тогда сила натяжения Eu_x на конце будет уравновешиваться силой действия пружины, равной αu. Краевой режим на этом конце можно записать следующим образом:

$$Eu_x(l, t)=-\alpha u(l, t),$$

где α — коэффициент жесткости пружины, или

$$u_x(l, t)+hu(l, t)=0.$$

Если пружина в свою очередь движется по закону $x=\beta(t)$, то краевой режим запишется в виде

$$u_x(l, t)+h[u(l, t)-\beta(t)]=0.$$

Это *краевое условие типа III.* На левом конце ($x=0$) оно запишется в виде

$$u_x(0, t)-h[u(0, t)-\beta(t)]=0.$$

Для двух- и трехмерного случаев рассмотренные типы краевых условий имеют следующий вид:

$$u|_S=\mu(M, t) \qquad \text{(тип I)}, \tag{24}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=\nu(M, t) \qquad \text{(тип II)}, \tag{25}$$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n}+hu\right)\right|_S=\beta(M, t) \qquad \text{(тип III)}. \tag{26}$$

Здесь $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная по внешней нормали к поверхности S.

Такие же краевые условия встречаются и в задачах, приводящих к уравнениям параболического типа. Так, если задается температура на поверхности тела, то имеем краевое условие типа I. Если задается поток тепла $-k\frac{\partial u}{\partial n}$ через поверхность тела S, то имеем краевое условие типа II. Если же на поверхности тела происходит теплообмен со средой, имеющей температуру $\beta(M, t)$, по закону Ньютона

$$-k\frac{\partial u}{\partial n} = h[u - \beta]\Big|_S,$$

то имеем краевое условие типа III.

Встречаются и другие типы краевых условий. Некоторые из них мы рассмотрим позднее. Рассмотренные типы краевых условий являются линейными, поскольку искомая функция или ее производные входят линейно. Они называются *однородными*, если правые части (μ, ν, β) тождественно равны нулю, и *неоднородными* в противном случае.

Очевидно, такие же краевые условия встречаются и в задачах, приводящих к уравнению эллиптического типа. Физическое истолкование каждого из них не представляет никаких трудностей.

Теперь мы приведем постановку соответствующих трех типов краевых задач для уравнений вида

$$\operatorname{div}(k\nabla u) - qu + f(M, t) = \rho u_{tt}, \tag{27}$$

и

$$\operatorname{div}(k\nabla u) - qu + f(M, t) = \rho u_t, \tag{28}$$

где k, q, ρ — функции точки M.

Все рассмотренные нами выше уравнения принадлежали к этому виду с $q \equiv 0$.

П е р в а я к р а е в а я з а д а ч а. Найти функцию $u(M, t)$, удовлетворяющую в области ($M \in D$, $t > 0$) уравнению (27) (соответственно (28)) и дополнительным условиям:

а) начальным

$$u(M, 0) = \varphi(M), \qquad u_t(M, 0) = \psi(M) \qquad \text{для } M \in D$$

(соответственно $u(M, 0) = \varphi(M)$),

б) краевым

$$u(M, t)|_S = \mu(M, t) \qquad \text{для } t > 0.$$

Вторая (третья) краевая задача ставится аналогично с заменой краевого условия типа I условием типа II (III).

Замечание. Все рассмотренные типы краевых условий можно записать одним соотношением

$$\left\{\gamma_1(M)\frac{\partial u}{\partial n}+\gamma_2(M)u\right\}_S=\beta(M, t).$$

При $\gamma_1\equiv 0$ получим краевое условие типа I, при $\gamma_2\equiv 0$ — краевое условие типа II, а при $\gamma_1\neq 0$ и $\gamma_2\neq 0$ — условие типа III.

Легко представить себе задачи, в которых нас будут интересовать значения искомой функции $u(M, t)$ в точках M, настолько удаленных от границы области S, что влиянием граничного режима на эти точки можно пренебречь. Это оправдывает постановку следующей задачи.

Задача Коши. Найти функцию $u(M, t)$, удовлетворяющую при $t>0$ уравнению (27) (соответственно (28)) в любой точке M пространства, а также начальным условиям

$$u(M, 0)=\varphi(M), \qquad u_t(M, 0)=\psi(M)$$

(соответственно $u(M, 0)=\varphi(M)$).

Если нас интересуют значения искомой функции $u(M, t)$ при больших t, то влиянием начальных условий часто можно пренебречь. Это приводит к постановке следующей задачи.

Задача определения установившегося режима. Найти функцию $u(M, t)$, удовлетворяющую в D уравнению (27) (соответственно (28)) и краевому условию

$$\left(\gamma_1\frac{\partial u}{\partial n}+\gamma_2 u\right)_S=\beta(M, t)$$

(без начальных условий).

Для уравнения эллиптического типа краевые задачи ставятся следующим образом: найти функцию $u(M)$, удовлетворяющую в области D уравнению

$$\operatorname{div}[k(M)\nabla u]-q(M)u=-f(M),$$

а на границе S краевому условию

$$\left\{\gamma_1(M)\frac{\partial u}{\partial n}+\gamma_2(M)u\right\}_S=\beta(M).$$

Если $\gamma_1\equiv 0$, то имеем первую краевую задачу, если $\gamma_2\equiv 0$ — вторую, а при $\gamma_1\neq 0$ и $\gamma_2\neq 0$ — третью.

В последующих главах мы будем рассматривать главным образом методы решения указанных классов задач.

Задачи

1. Верхний конец упругого однородного вертикально подвешенного тяжелого стержня длины l жестко прикреплен к потолку свободно падающего лифта, который, достигнув скорости v_0, мгновенно останавливается. Поставить краевую задачу о продольных колебаниях этого стержня.

2. Поставить краевую задачу о малых поперечных колебаниях струны в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости, предполагая, что концы струны закреплены жестко.

3. Поставить краевую задачу о продольных колебаниях, вызванных начальным возмущением, для упругого стержня $(0 \leqslant x \leqslant l)$ переменного сечения $S(x)$, концы которого упруго закреплены (с помощью пружины). Плотность массы равна $\rho(x)$, модуль упругости равен $E(x)$. Деформациями поперечных сечений пренебречь.

4. Поставить краевую задачу о поперечных колебаниях тяжелой струны относительно вертикального положения равновесия, если ее верхний конец $(x=0)$ жестко закреплен, а нижний свободен.

5. Рассмотреть задачу **4** в предположении, что струна вращается с угловой скоростью $\omega = \text{const}$ относительно вертикального положения равновесия.

6. Невесомая струна при вращении вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω находится в горизонтальной плоскости, причем один конец струны $(x=0)$ прикреплен к некоторой точке оси, а другой свободен. В начальный момент времени $t=0$ точкам струны сообщают малые отклонения и скорости по нормалям к этой плоскости. Поставить краевую задачу для определения отклонений точек струны от плоскости равновесного движения.

7. Упругий однородный цилиндр выводится из состояния покоя тем, что в момент времени $t=0$ его поперечные сечения получают малые повороты θ в своих плоскостях относительно оси цилиндра. Поставить краевую задачу о малых крутильных колебаниях этого цилиндра, если концы его жестко закреплены (или свободны).

8. По струне $0 \leqslant x \leqslant l$ с неподвижно закрепленными концами и пренебрежимо малым сопротивлением, находящейся в постоянном магнитном поле H, с момента $t=0$ пропускается ток силы $I(t)$. Поставить краевую задачу о поперечных колебаниях этой струны под действием пондеромоторных сил.

9. Два полубесконечных однородных упругих стержня с одинаковыми поперечными сечениями соединены торцами и составляют один бесконечный стержень. Пусть ρ_1, E_1 — плотность массы и модуль упругости одного из них, а ρ_2, E_2 — другого. Поставить задачу о малых продольных колебаниях этого стержня под действием начального возмущения.

10. Поставить краевую задачу о поперечных колебаниях струны с закрепленными концами, нагруженной в точке x_0 сосредоточенной массой m.

11. Поставить задачу о поперечных колебаниях бесконечной струны под действием силы $F(t)$, приложенной, начиная с момента $t=0$, в точке $x=x_0$, перемещающейся вдоль струны со скоростью v_0.

12. Вывести уравнения для определения силы и напряжения переменного тока (систему *телеграфных уравнений*), идущего вдоль тонкого провода с непрерывно распределенными по длине: омическим сопротивлением R, емкостью C, самоиндукцией L и утечкой G, рассчитанными на единицу длины. Указание: воспользоваться законом Ома и законом сохранения количества электричества.

13. Поставить краевую задачу об электрических колебаниях в проводе с пренебрежимо малыми сопротивлением и утечкой, если концы провода заземлены: один — через сосредоточенное сопротивление R_0, а другой — через сосредоточенную емкость C_0.

14. Рассмотреть задачу **13**, предполагая, что один конец провода ($x=0$) заземлен через сосредоточенную самоиндукцию $L_0^{(1)}$, а к другому приложена э. д. с. $E(t)$ через сосредоточенную самоиндукцию $L_0^{(2)}$.

15. Поставить задачу об электрических колебаниях в бесконечном проводе без утечки, полученном соединением двух полубесконечных проводов через сосредоточенную емкость C_0.

16. На боковой поверхности тонкого стержня происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой $u_{\text{ср}}=\varphi(t)$. Поставить краевую задачу об определении температуры стержня, если на одном конце его поддерживается температура $f_1(t)$, а на другой подается тепловой поток $q(t)$.

17. Поставить краевую задачу об определении температуры в стержне, по которому пропускают постоянный электрический ток силы I, если на поверхности стержня происходит конвективный теплообмен со средой нулевой температуры, а концы его зажаты в массивные клеммы с заданной теплоемкостью и очень большой теплопроводностью.

18. Вывести уравнение диффузии в среде, движущейся со скоростью $v(x)$ в направлении оси x, если поверхностями равной концентрации в каждый момент времени являются плоскости, перпендикулярные оси x.

19. Вывести уравнение диффузии в неподвижной среде для вещества, частицы которого: а) распадаются (например, неустойчивый газ) со скоростью, пропорциональной концентрации; б) размножаются (например, нейтроны) со скоростью, пропорциональной их концентрации.

20. Поставить задачу об определении температуры бесконечного стержня, полученного соединением двух полубесконечных стержней, сделанных из разных материалов, если эти стержни соединены: а) непосредственно, б) с помощью массивной муфты с теплоемкостью C_0 и очень большой теплопроводностью.

21. Поставить краевую задачу о нагревании полубесконечного стержня, конец которого горит, причем фронт горения распространяется со скоростью v и имеет температуру $\varphi(t)$.

22. Поставить задачу о нагревании бесконечного тонкого стержня, по которому скользит со скоростью v_0 плотно прилегающая электропечь мощности Q, если внешняя поверхность печи, не прилегающая к стержню, теплоизолирована, а теплоемкость печи пренебрежимо мала.

23. Поставить краевую задачу об остывании тонкого круглого кольца, на поверхности которого происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, имеющей температуру u_0. Неравномерностью распределения температуры по толщине пренебречь.

24. Вывести уравнение для процесса распространения плоского электромагнитного поля в проводящей среде (т. е. в среде, в которой токами смещения можно пренебречь по сравнению с токами проводимости).

25. Исходя из уравнений Максвелла,

а) вывести уравнение для потенциала электростатического поля;

б) вывести уравнение для потенциала электрического поля постоянного электрического тока.

ГЛАВА III

МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК

В этой главе мы будем заниматься главным образом простейшим волновым уравнением

$$a^2 u_{xx} + f(x, t) = u_{tt}. \tag{1}$$

Метод характеристик позволяет строить решения ряда задач, относящихся к уравнению (1). Сущность этого метода лучше всего может быть понята на примере решения задачи Коши (см. § 7 гл. II) для однородного волнового уравнения.

§ 1. Решение задачи о колебаниях бесконечной струны. Формула Даламбера

1. Пусть требуется найти функцию $u(x, t)$, непрерывную в замкнутой области $(-\infty < x < \infty,\ t \geqslant 0)$, удовлетворяющую уравнению

$$a^2 u_{xx} = u_{tt} \quad (-\infty < x < \infty;\ t > 0) \tag{2}$$

и начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \qquad (-\infty < x < +\infty). \tag{3}$$

Для решения этой задачи заменой независимых переменных приведем уравнение (2) к характеристикам. В нашем случае

$$a_{11} = a^2, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = -1, \quad \Delta = a^2.$$

Следовательно, дифференциальные уравнения характеристик:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{a}, \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{-1}{a};$$

$x - at = c_1$ и $x + at = c_2$ — их общие интегралы.

Введем новые независимые переменные.

$$\xi = x - at, \qquad \eta = x + at.$$

Преобразованное уравнение будет иметь следующий вид:

$$u_{\xi\eta} = 0. \tag{4}$$

Если предположить, что искомое решение существует, то, подставив его в уравнение (2), мы получим тождество. Следовательно, и преобразованное уравнение (4) будет тождеством. Интегрируя это тождество по η, получим

$$u_\xi = \Phi_1(\xi), \tag{5}$$

где $\Phi_1(\xi)$ — произвольная функция. Интегрируя тождество (5) по ξ, получим

$$u = \int \Phi_1(\xi)\, d\xi + F(\eta) = \Phi(\xi) + F(\eta),$$

или

$$u(x, t) = \Phi(x - at) + F(x + at), \tag{6}$$

где $\Phi(\xi)$ и $F(\eta)$ — произвольные функции.

Таким образом, предположив существование решения задачи Коши, мы пришли к заключению, что оно должно иметь вид (6). Для того чтобы функции $u(x, t)$, определяемые формулой (6), являлись решениями уравнения (2), необходимо, чтобы функции $\Phi(z)$ и $F(z)$ обладали производными первого и второго порядков. При этих условиях непосредственной проверкой убеждаемся, что каждая из функций $\Phi(x - at)$ и $F(x + at)$ является решением уравнения (2).

Среди решений вида (6) найдем такое, которое удовлетворяет заданным начальным условиям (3):

$$u(x, 0) = \varphi(x) \equiv \Phi(x) + F(x),$$
$$u_t(x, 0) = \psi(x) \equiv -a\Phi'(x) + aF'(x).$$

Интегрируя последнее тождество, получим два уравнения для определения функций $\Phi(z)$ и $F(z)$:

$$\begin{cases} \Phi(y) + F(y) \equiv \varphi(y), \\ -\Phi(y) + F(y) \equiv \dfrac{1}{a} \displaystyle\int_{x_0}^{y} \psi(z)\, dz + C, \end{cases} \tag{7}$$

из которых находим

$$F(y)=\frac{\varphi(y)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{y}\psi(z)\,dz+\frac{C}{2},$$

$$\Phi(y)=\frac{\varphi(y)}{2}-\frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{y}\psi(z)\,dz-\frac{C}{2}.$$

Подставляя эти функции в формулу (6), получим *формулу Даламбера*:

$$u(x,\ t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz. \qquad (8)$$

Таким образом, предположив существование решения задачи Коши, мы пришли к заключению, что оно должно представляться формулой (8). Следовательно, оно единственно. Если функция $\varphi(x)$ обладает производными первого и второго порядков, а функция $\psi(x)$ — производной первого порядка, то формула (8) дает искомое решение задачи Коши (2) — (3). В этом можно убедиться непосредственной подстановкой правой части формулы (8) в уравнение (2) и в соотношения (3). Построив решение задачи Коши, мы тем самым доказали его существование.

2. Обратимся к физической интерпретации решения $u=\Phi(x-at)$. Функцию $u(x, t)$ будем называть *отклонением* в точке x в момент времени t. Рассмотрим точку x_0. Вообразим, далее, что из этой точки в положительном направлении оси x в момент времени $t=0$ начинает двигаться наблюдатель со скоростью a. В момент времени t_1 он окажется в точке $x_1=x_0+at_1$. Величина отклонения, которую наблюдатель будет видеть в точке x_1 в момент времени t_1, будет равна $u=\Phi(x_1-at_1)=\Phi(x_0)$. Таким образом, наблюдатель в любой момент времени будет видеть в точке, где он находится, одну и ту же величину отклонения, равную $\Phi(x_0)$. Следовательно, начальный профиль $u(x,\ 0)=\Phi(x)$ будет двигаться со скоростью a в положительном направлении оси x, как жесткая система, не изменяя формы (рис. 6).

Ввиду этого решение $u=\Phi(x-at)$ называют *прямой бегущей волной*. Аналогичное истолкование можно дать и решению $u=F(x+at)$. Оно называется *обратной бегущей* *волной.* При этом профиль движется как жесткая система в отрицательном направлении оси x со скоростью a.

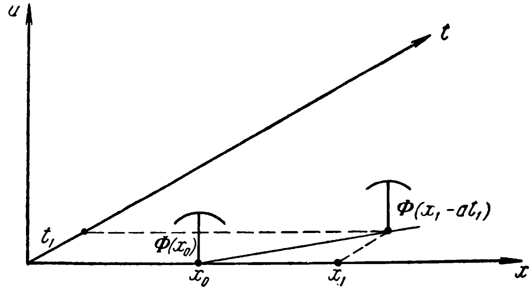

Рис. 6.

Таким образом, любое решение уравнения (2) представляется в виде суперпозиции (наложения) прямой и обратной бегущих волн.

Описанный выше метод построения решения задачи Коши называется *методом характеристик*, или *методом бегущих волн.*

§ 2. Непрерывная зависимость решения задачи Коши от начальных данных. Обобщенное решение

1. Формула Даламбера (8) дает решение задачи Коши (2) — (3) в предположении, что начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ имеют производные $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\psi'(x)$. Однако нетрудно указать задачи, в которых начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ этими свойствами не обладают; достаточно, например, задать начальное отклонение струны в виде ломаной, изображенной на рис. 7.

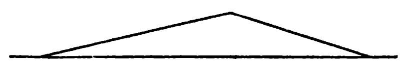

Рис. 7.

Для того чтобы понять, как строить решение задачи Коши в этих случаях, докажем следующую теорему:

Теорема о непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных значений. *Пусть $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ суть решения задачи Коши* (2) — (3)

с начальными условиями:

$$u_1(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u_{1t}(x, 0) = \psi_1(x)$$

и

$$u_2(x, 0) = \varphi_2(x), \quad u_{2t}(x, 0) = \psi_2(x).$$

Тогда, каковы бы ни были $\varepsilon > 0$ *и* $t_1 > 0$, *существует такое* $\delta > 0$, *зависящее от* ε *и* t_1, $\delta = \delta(\varepsilon, t_1)$, *что из неравенств*[1])

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta, \quad |\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta$$
$$\text{для} \quad -\infty < x < \infty$$

следует неравенство

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| < \varepsilon \quad \textit{для} \quad -\infty < x < \infty, \quad t \leqslant t_1.$$

Доказательство. Используя формулу Даламбера для $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, получим

$$u_1(x, t) - u_2(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi_1(x - at) - \varphi_2(x - at)] + \\ + \frac{1}{2}[\varphi_1(x + at) - \varphi_2(x + at)] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}[\psi_1(z) - \psi_2(z)]\,dz.$$

Следовательно,

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leqslant \frac{1}{2}|\varphi_1(x - at) - \varphi_2(x - at)| + \\ + \frac{1}{2}|\varphi_1(x + at) - \varphi_2(x + at)| + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}|\psi_1(z) - \psi_2(z)|\,dz < \\ < \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\delta\,dz = \delta + \delta t \leqslant \delta(1 + t_1).$$

Если взять $\delta = \frac{\varepsilon}{1 + t_1}$, то неравенство

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| < \varepsilon$$

будет выполнено для всех $-\infty < x < \infty$, $t \leqslant t_1$. Ч. т. д. Содержание этой теоремы можно кратко выразить словами:

[1]) Во избежание недоразумений в этом и следующем пункте мы будем считать, что x, t — безразмерные переменные.

малым изменениям начальных значений соответствуют малые изменения решения задачи Коши.

В практических задачах начальные значения получаются в результате измерений и, следовательно, не являются точными. Доказанная теорема создает уверенность, что небольшие погрешности, допущенные в определении начальных значений, приводят к небольшим изменениям в решении задачи Коши. Эта теорема указывает также на один из возможных путей построения решения задачи Коши в случаях, когда начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не обладают соответствующими производными (см. рис. 7).

2. Обратимся снова к задаче Коши (2) — (3). Мы будем полагать, что начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не равны нулю лишь на конечных отрезках, непрерывны всюду, а функция $\varphi(x)$ имеет производную первого порядка. Эти функции можно равномерно аппроксимировать дифференцируемыми функциями $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x)$ так, что

$$\varphi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x) \qquad (n \to \infty), \qquad \psi_n(x) \rightrightarrows \psi(x) \qquad (n \to \infty),$$

причем $\varphi_n(x)$ имеют первую и вторую производные, а $\psi_n(x)$ — первую производную.

Если в качестве начальных функций в задаче Коши взять функции $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x)$, то они определяют единственное решение задачи $u_n(x, t)$.

Оценим разность решений $u_{n+k}(x, t) - u_n(x, t)$. В силу равномерной сходимости последовательностей $\{\varphi_n(x)\}$ и $\{\psi_n(x)\}$, для любых $\varepsilon > 0$ и $t_1 > 0$ найдется такое N, что для любых $n > N$ и любых целых положительных k будут выполняться неравенства

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n+k}(x)| < \frac{\varepsilon}{1+t_1} \quad \text{и} \quad |\psi_{n+k}(x) - \psi_n(x)| < \frac{\varepsilon}{1+t_1}$$

для всех $-\infty < x < \infty$. Тогда по доказанной теореме для всех $t \leqslant t_1$ и $-\infty < x < \infty$ будут также выполняться неравенства

$$|u_{n+k}(x, t) - u_n(x, t)| < \varepsilon$$

для любых $n > N$ и любых целых положительных k. Но это означает, что последовательность решений $\{u_n(x, t)\}$ равномерно сходится в указанной области изменения переменных x, t к некоторой функции $u(x, t)$. Эта функция называется *обобщенным решением* задачи Коши (2) — (3). При этом

$$u(x, t) = \lim_{n \to \infty} u_n(x, t) = \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} [\varphi_n(x - at) + \varphi_n(x + at)] + \\ + \frac{1}{2a} \lim_{n \to \infty} \int_{x - at}^{x + at} \psi_n(z)\, dz,$$

или

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x - at}^{x + at} \psi(z)\, dz.$$

Эта функция $u(x, t)$ и ее производная $u_t(x, t)$ принимают заданные значения $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Таким образом, в рассмотренном случае формула Даламбера также дает решение (обобщенное!) задачи Коши. Рассмотренную задачу можно решить и иначе, если воспользоваться обобщенными функциями и их свертками (см. Дополнение, п. 1).

Определение. *Фундаментальным решением* $G(x, t)$ волнового уравнения $a^2 u_{xx} = u_{tt}$ назовем решение задачи Коши

$$a^2 G_{xx} = G_{tt}, \quad G(x, 0) = 0, \quad G_t(x, 0) = \delta(x).$$

Нетрудно установить непосредственной проверкой, что

$$G(x, t) = \frac{1}{2a} [\eta(x + at) - \eta(x - at)],$$

где $\eta(z) = \begin{cases} 1, & z > 0, \\ 0, & z < 0 \end{cases}$ — единичная функция. В самом деле (см. Дополнение, п. 1),

$$G_x(x, t) = \frac{1}{2a} [\delta(x + at) - \delta(x - at)],$$

$$G_{xx}(x, t) = \frac{1}{2a} [\delta'(x + at) - \delta'(x - at)],$$

$$G_t(x, t) = \frac{1}{2} [\delta(x + at) + \delta(x - at)],$$

$$G_{tt}(x, t) = \frac{a}{2} [\delta'(x + at) - \delta'(x - at)].$$

Следовательно,

$$a^2 G_{xx}(x, t) \equiv G_{tt}(x, t),$$

$$G(x, 0) = \frac{1}{2a}[\eta(x) - \eta(x)] = 0,$$

$$G_t(x, 0) = \frac{1}{2}[\delta(x) + \delta(x)] = \delta(x).$$

Решение задачи Коши

$$a^2 v_{xx} = v_{tt}, \quad v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = \psi(x)$$

будет представляться в виде свертки

$$v(x, t) = G(x, t) * \psi(x). \tag{9}$$

Действительно, вычисляя производные свертки (см. Дополнение, п. 1), получим

$$v_{xx} = G_{xx} * \psi, \quad v_{tt} = G_{tt} * \psi.$$

Следовательно,

$$a^2 v_{xx} - v_{tt} \equiv (a^2 G_{xx} - G_{tt}) * \psi \equiv 0 * \psi \equiv 0,$$

$$v(x, 0) = G(x, 0) * \psi(x) = 0 * \psi(x) = 0,$$

$$v_t(x, 0) = G_t(x, 0) * \psi(x) = \delta(x) * \psi(x) = \psi(x).$$

Свертку $G * \psi$ можно также записать в виде

$$v(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi, t)\,\psi(x - \xi)\,d\xi = \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at} \psi(x - \xi)\,d\xi.$$

Произведя в последнем интеграле замену переменной интегрирования по формуле $x - \xi = z$, получим

$$v(x, t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(z)\,dz. \tag{10}$$

Заметим, что в формуле (9), а следовательно и в формуле (10), функция $\psi(x)$ может быть любой интегрируемой (и даже любой обобщенной!) функцией.

Если $R(x, t)$ есть решение задачи Коши

$$a^2 R_{xx} = R_{tt}, \quad R(x, 0) = 0, \quad R_t(x, 0) = \varphi(x),$$

то функция $w(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} R(x, t)$ есть решение задачи Коши

$$a^2 w_{xx} = w_{tt}, \quad w(x, 0) = \varphi(x), \quad w_t(x, 0) = 0.$$

Действительно, дифференцируя тождество

$$a^2 R_{xx} \equiv R_{tt}$$

по t, получим $a^2 (R_t)_{xx} \equiv (R_t)_{tt}$, т. е.

$$a^2 w_{xx} \equiv w_{tt}.$$

Далее,

$$w(x, 0) = R_t(x, 0) = \varphi(x),$$
$$w_t(x, 0) = R_{tt}(x, 0) = G_{tt}(x, 0) * \varphi(x) = 0 * \varphi(x) = 0.$$

Если функция $\varphi(z)$ непрерывна, то $w(x, t)$ можно записать в виде

$$w(x, t) = R_t(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \varphi(z)\,dz\right\} = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2},$$

т. е.

$$w(x, t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2}.$$

Решением произвольной задачи Коши

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \qquad u(x, 0) = \varphi(x), \qquad u_t(x, 0) = \psi(x),$$

где $\varphi(x)$ — непрерывная функция, а $\psi(x)$ — интегрируема (в частности, кусочно-непрерывная), будет сумма

$$u = v + w = G(x, t) * \psi(x) + G_t(x, t) * \varphi(x),$$

или

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(z)\,dz.$$

Таким образом, решение в этом случае также записывается по формуле Даламбера. При этом производные от него трактуются как производные обобщенных функций, совпадающие с обычными производными там, где эти последние существуют.

Заметим, что формула (8) дает решение задачи Коши и для произвольных обобщенных начальных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

§ 3. Решение задачи о колебаниях бесконечной струны с нагрузкой

1. Научившись строить решение задачи Коши для однородного волнового уравнения (2), легко построить решение этой задачи для неоднородного волнового уравнения (1).

Метод построения одинаков для всех линейных уравнений гиперболического типа, поэтому мы будем рассматривать более общее уравнение

$$\operatorname{div}(k\nabla u) - qu + f(M,\ t) = \rho u_{tt}, \tag{11}$$

где k, q и ρ — известные функции точки M.

Итак, пусть требуется решить задачу Коши для уравнения (11) с начальными условиями

$$u(M,\ 0) = \varphi(M), \quad u_t(M,\ 0) = \psi(M). \tag{12}$$

Эту задачу разбиваем на две задачи:

1) задача Коши для однородного уравнения

$$\operatorname{div}(k\nabla v) - qv = \rho v_{tt} \tag{13}$$

с заданными начальными условиями

$$v(M,\ 0) = \varphi(M), \qquad v_t(M,\ 0) = \psi(M); \tag{14}$$

2) задача Коши для исходного уравнения

$$\operatorname{div}(k\nabla w) - qw + f(M,\ t) = \rho w_{tt} \tag{11'}$$

с нулевыми начальными условиями

$$w(M,\ 0) = 0, \qquad w_t(M,\ 0) = 0. \tag{15}$$

Очевидно, $u = v + w$.

Предположим, что мы умеем решать задачу Коши (13)—(14). Тогда решение задачи Коши (11′) — (15) строится следующим образом.

Построим такую функцию $Щ(M,\ t,\ \tau)$, которая удовлетворяет однородному уравнению (13) и начальным условиям

$$Щ_{t-\tau} = 0, \qquad Щ_t\,|_{t-\tau} = \frac{f(M,\ \tau)}{\rho(M)}. \tag{16}$$

По предположению мы умеем решать эту задачу. Тогда искомое решение задачи Коши 2) будет иметь вид

$$w(M,\ t) = \int_0^t Щ(M,\ t,\ \tau)\,d\tau. \tag{17}$$

Действительно, по правилу дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом по параметру находим

$$w_t(M, t) = Щ|_{t-\tau} + \int_0^t Щ_t(M, t, \tau)\,d\tau.$$

Воспользовавшись первым из условий (16), получим

$$w_t(M, t) = \int_0^t Щ_t(M, t, \tau)\,d\tau. \qquad (18)$$

Из формул (17) и (18) непосредственно следует, что $w(M, t)$ удовлетворяет начальным условиям (15). Дифференцируя соотношение (18) по t еще раз и используя второе из условий (16), получаем

$$w_{tt} = Щ_t|_{\tau-t} + \int_0^t Щ_{tt}(M, t, \tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{f(M, t)}{\rho(M)} + \int_0^t Щ_{tt}(M, t, \tau)\,d\tau.$$

Следовательно,

$$\rho w_{tt} = f(M, t) + \int_0^t \rho Щ_{tt}\,d\tau. \qquad (19)$$

Вычислим $\operatorname{div}(k\nabla w) - qw$. При этом, очевидно, операцию $\operatorname{div}(k\nabla)$ можно выполнить под знаком интеграла. Получим

$$\operatorname{div}(k\nabla w) - qw = \int_0^t \{\operatorname{div}(k\nabla Щ) - qЩ\}\,d\tau. \qquad (20)$$

Поскольку функция $Щ(M, t, \tau)$ является решением уравнения (13), то из формул (19) и (20) следует, что функция $w(M, t)$, определяемая формулой (17), является решением уравнения (11′), а следовательно, и решением задачи Коши 2).

2. Применим описанный метод к уравнению (1): требуется решить задачу Коши

$$a^2 u_{xx} + f(x, t) = u_{tt},$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x).$$

Разбиваем ее на две задачи:

1) Задача Коши для однородного уравнения с заданными начальными условиями

$$a^2 v_{xx} = v_{tt},$$
$$v(x, 0) = \varphi(x), \quad v_t(x, 0) = \psi(x).$$

2) Задача Коши для заданного уравнения с нулевыми начальными условиями

$$a^2 w_{xx} + f(x, t) = w_{tt},$$
$$w(x, 0) = 0, \quad w_t(x, 0) = 0.$$

Тогда $u = v + w$.

Функцию $v(x, t)$ можно записать по формуле Даламбера

$$v(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x - at}^{x + at} \psi(z)\, dz.$$

Согласно предыдущему

$$w(x, t) = \int\limits_0^t Щ(x, t, \tau)\, d\tau,$$

где $Щ(x, t, \tau)$ является решением задачи Коши:

$$a^2 Щ_{xx} = Щ_{tt},$$
$$Щ|_{t=\tau} = 0, \quad Щ_t|_{t=\tau} = f(x, \tau)$$

и, следовательно, может быть записана по формуле Даламбера

$$Щ(x, t, \tau) = \frac{1}{2a} \int\limits_{x - a(t-\tau)}^{x + a(t-\tau)} f(z, \tau)\, dz.$$

Поэтому

$$w(x, t) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x - a(t-\tau)}^{x + a(t-\tau)} f(z, \tau)\, dz\, d\tau.$$

§ 4. Решение краевых задач на полупрямой

1. Обратимся к рассмотрению краевых задач на полупрямой. Предварительно докажем две леммы.

Лемма 1. *Если в задаче Коши* (2) — (3) *начальные функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *нечетны относительно* $x = 0$, *то решение этой задачи* $u(x, t)$ *равно нулю при* $x = 0$:

$$u(0, t) \equiv 0.$$

Доказательство. Полагая в формуле Даламбера, дающей решение задачи Коши (2) — (3), $x=0$, получаем

$$u(0, t)=\frac{\varphi(-at)+\varphi(at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\psi(z)\,dz.$$

Поскольку $\varphi(x)$ — нечетная функция, то $\varphi(-at)\equiv-\varphi(at)$. Поэтому $\varphi(-at)+\varphi(at)\equiv 0$. В силу нечетности функции $\psi(x)$ интеграл

$$\int_{-at}^{at}\psi(z)\,dz$$

также равен нулю. Поэтому $u(0, t)\equiv 0$.

Лемма 2. *Если в задаче Коши* (2) — (3) *начальные функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *четны относительно* $x=0$, *то производная* $u_x(x, t)$ *решения этой задачи равна нулю при* $x=0$:

$$u_x(0, t)\equiv 0.$$

Доказательство этой леммы проводится аналогично[1]).

2. Рассмотрим однородную краевую задачу:

$$\begin{gathered} a^2u_{xx}=u_{tt},\\ u(x, 0)=\varphi(x),\quad u_t(x, 0)=\psi(x)\quad \text{для}\quad 0\leqslant x<\infty,\\ u(0, t)=0. \end{gathered}\tag{21}$$

Полагаем $\varphi(0)=\psi(0)=0$.

Для ее решения нельзя непосредственно воспользоваться формулой Даламбера, так как входящая в эту формулу разность $x-at$ может быть и отрицательной, а для отрицательных значений аргумента начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, согласно (21), не определены.

Мы будем действовать следующим образом. Продолжим функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ нечетным образом на отрицательную часть оси x и обозначим через $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ продолженные таким способом функции:

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\geqslant 0,\\ -\varphi(-x), & x<0,\end{cases}\qquad \psi_1(x)=\begin{cases}\psi(x), & x\geqslant 0,\\ -\psi(-x), & x<0.\end{cases}$$

---

[1]) Использовать нечетность производной $\varphi'(x)$.

Тогда функция

$$u(x, t) = \frac{\varphi_1(x - at) + \varphi_1(x + at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi_1(z)\,dz$$

и будет решением краевой задачи.

Действительно, она удовлетворяет однородному волновому уравнению, поскольку является суперпозицией прямых и обратных волн. Краевому условию она удовлетворяет в силу леммы 1. Проверим начальные условия:

$$u(x, 0) = \frac{\varphi_1(x) + \varphi_1(x)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x}^{x} \psi_1(z)\,dz =$$
$$= \varphi_1(x) = \varphi(x) \quad \text{для} \quad x \geqslant 0,$$

$$u_t(x, 0) = \frac{-a\varphi_1'(x) + a\varphi_1'(x)}{2} + \frac{1}{2a}[a\psi_1(x) + a\psi_1(x)] =$$
$$= \psi_1(x) = \psi(x) \quad \text{для} \quad x \geqslant 0.$$

Таким образом, начальные условия также удовлетворяются.

Краевая задача

$$\begin{gathered} a^2 u_{xx} = u_{tt}, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad \text{для} \quad 0 < x < \infty, \\ u_x(0, t) = 0 \end{gathered} \tag{22}$$

решается аналогично, но при этом начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ продолжаются четным образом на отрицательную часть прямой.

§ 5. Отражение волн на закрепленных и на свободных концах

Решение краевых задач (21) и (22) можно написать в форме (6):

$$u(x, t) = \Phi(x - at) + F(x + at).$$

Будем интерпретировать u как отклонение. Вдоль характеристики $x - at = c_1$ отклонение, обусловленное прямой волной, постоянно: $\Phi(x - at) = \Phi(c_1)$. Вдоль характеристики $x + at = c_2$ отклонение, обусловленное обратной волной, постоянно: $F(x+at) = F(c_2)$. Таким образом, возмущения распространяются по характеристикам.

Через точку (x_0, t_0) плоскости (x, t) проведем две характеристики $x - at = x_0 - at_0$ и $x + at = x_0 + at_0$, пересекающие ось x соответственно в точках $-x_1$ и x_2 (рис. 8). Отклонение $u(x_0, t_0)$ в точке x_0 в момент времени t_0 складывается из отклонения, обусловленного обратной волной, пришедшей из точки x_2, и отклонения, обусловленного прямой волной, пришедшей из точки $-x_1$. Но в точке $-x_1$ в начальный момент $t = 0$ никакого возбуждения не могло быть, поскольку начальные условия в задачах (21) и (22) заданы лишь на полупрямой, где $x > 0$. Однако из краевого условия задачи (21) следует, что

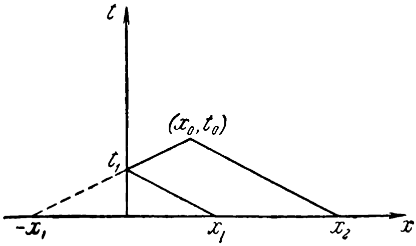

Рис. 8.

$$\Phi(-z) \equiv -F(z).$$

Следовательно, $\Phi(-x_1) = -F(x_1)$. Поэтому вместо прямой волны, идущей из точки $-x_1$, можно рассматривать обратную волну, вышедшую в момент $t = 0$ из симметричной точки x_1. Эта обратная волна за время t_1 дойдет до точки $x = 0$. С момента $t = t_1$ ее надо заменить прямой волной, вышедшей из точки $x = 0$ в момент $t = t_1$ и несущей величину отклонения, равную $-\Phi(-x_1)$. Таким образом, при соблюдении краевого условия $u(0, t) = 0$ на конце $x = 0$ происходит явление отражения с сохранением величины отклонения, но с изменением его знака на противоположный.

Аналогичным образом устанавливается, что при соблюдении краевого условия $u_x(0, t) = 0$ на конце $x = 0$ происходит явление отражения с сохранением величины и знака отклонения.

Методом характеристик можно также построить решения однородных краевых задач на конечном отрезке с краевыми условиями типа I и II. Для определенности рассмотрим 1-ю краевую задачу:

$$a^2 u_{xx} = u_{tt},$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{23}$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geqslant 0.$$

Для построения решения продолжим начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на всю прямую нечетным образом относительно точек $x=0$ и $x=l$. Обозначим через $\varphi_2(x)$ и $\psi_2(x)$ продолженные таким способом функции[1]). Тогда функция

$$u(x, t)=\frac{\varphi_2(x-at)+\varphi_2(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi_2(z)\,dz$$

и будет решением краевой задачи. Краевым условиям эта функция удовлетворяет в силу леммы 1. Начальные условия проверяются непосредственно, как в задаче на полупрямой.

§ 6. Решение задачи о распространении краевого режима на полупрямой

Рассмотрим неоднородную краевую задачу на полупрямой

$$\begin{gathered} a^2u_{xx}=u_{tt}, \\ u(x, 0)=\varphi(x), \qquad u_t(x, 0)=\psi(x), \qquad x>0, \\ u(0, t)=\mu(t), \qquad t>0. \end{gathered}$$

Ее можно разбить на две задачи:

1) однородная краевая задача

$$\begin{gathered} a^2v_{xx}=v_{tt}, \\ v(x, 0)=\varphi(x), \qquad v_t(x, 0)=\psi(x), \qquad x>0, \\ v(0, t)=0; \end{gathered}$$

2) задача о распространении краевого режима

$$\begin{gathered} a^2w_{xx}=w_{tt}, \\ w(x, 0)=0, \qquad w_t(x, 0)=0, \\ w(0, t)=\mu(t), \qquad t>0. \end{gathered}$$

Тогда $u=v+w$.

---

[1]) Если функция $\varphi(x)$ нечетна (четна) относительно двух точек: $x=0$ и $x=l$, то она периодична с периодом $2l$. Действительно, по свойству нечетности функции $\varphi(x)$ относительно $x=l$ имеем тождество: $\varphi(l-z)\equiv-\varphi(l+z)$. Полагая здесь $z=x+l$, получим: $\varphi(-x)\equiv-\varphi(x+2l)$. Так как $\varphi(-x)\equiv-\varphi(x)$, то $\varphi(x+2l)\equiv\varphi(x)$. Поэтому начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ следует продолжить нечетным образом на отрезок $(-l, 0)$, а затем периодически, с периодом $2l$, на всю прямую.

Задачу для $v(x, t)$ мы уже умеем решать. Займемся задачей о распространении краевого режима.

Поскольку единственной причиной возникновения возмущений является краевой режим, будем искать решение в виде прямой волны

$$w(x, t) = \Phi(x - at).$$

Из начальных условий находим

$$w(x, 0) = \Phi(x) \equiv 0 \text{ для } x > 0.$$

Очевидно, условие $w_t(x, 0) = -a\Phi'(x) \equiv 0$ для $x > 0$ также будет выполнено. Из краевого условия находим

$$\Phi(-at) = \mu(t), \qquad t > 0.$$

Таким образом,

$$\Phi(z) = \begin{cases} 0, & z > 0, \\ \mu\left(\frac{-z}{a}\right), & z < 0, \end{cases}$$

или $\Phi(z) = \eta\left(\frac{-z}{a}\right)\mu\left(\frac{-z}{a}\right)$, где $\eta(\xi)$ — единичная функция, равная единице для $\xi > 0$ и нулю для $\xi < 0$. Следовательно,

$$w(x, t) = \eta\left(t - \frac{x}{a}\right)\mu\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

Аналогично решается задача о распространении краевого режима типа II: $u_x(0, t) = \nu(t)$.

Используя явление отражения, рассмотренное выше, легко решить задачу о распространении краевого режима типа I или II на конечном отрезке[1]).

Методом характеристик можно было бы решить еще ряд задач, относящихся к одномерному неоднородному волновому уравнению. Однако рассмотренные задачи уже дают ясное представление о возможностях метода характеристик, поэтому мы ограничимся этими задачами.

---

[1]) Читателю предлагается самостоятельно решить эту задачу.

§ 7. Решение задачи о колебаниях бесконечного объема. Формула Пуассона

Ряд задач, относящихся к двух- и трехмерному волновому уравнению, сводится к задачам, уже разобранным в предыдущих параграфах. Мы рассмотрим некоторые из них.

1. Задача Коши для однородного волнового уравнения в трехмерном пространстве:

$$a^2\Delta u = u_{tt}, \tag{24}$$

$$u(M, 0) = \varphi(M), \qquad u_t(M, 0) = \psi(M). \tag{25}$$

Для ее решения введем в рассмотрение вспомогательную функцию $\bar{u}(r, t)$ — усреднение искомого решения по сфере S_M^r с центром в точке M радиуса r:

$$\bar{u}(r, t) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint\limits_{S_M^r} u(P, t)\, d\sigma_P, \tag{26}$$

где P — переменная точка интегрирования.

Если обозначить через $d\omega$ элемент телесного угла, под которым виден из точки M элемент площади $d\sigma$, то $d\sigma = r^2 d\omega$. Поэтому $\bar{u}$ можно также записать в виде

$$\bar{u}(r, t) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S_M^r} u(P, t)\, d\omega. \tag{27}$$

Применяя к интегралу в формуле (26) теорему о среднем значении и устремляя затем r к нулю, получим

$$\bar{u}(0, t) = u(M, t). \tag{28}$$

Таким образом, для нахождения функции $u(M, t)$ достаточно найти функцию $\bar{u}(r, t)$. Чтобы поставить задачу для функции $\bar{u}(r, t)$, нам потребуется

Лемма

$$\overline{\Delta u} = \Delta_r(\bar{u}).$$

[Здесь в левой части лапласиан Δu берется по координатам точки M, а в правой части, т. е. $\Delta_r(\bar{u})$ — по переменному r. В дальнейшем мы будем опускать значок r у оператора Δ.]

Доказательство. Пусть D_M^r — область, ограниченная сферической поверхностью S_M^r. По формуле Остроградского имеем

$$\iiint\limits_{D_M^r} \Delta u \, d\tau = \iint\limits_{S_M^r} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \iint\limits_{S_M^r} \frac{\partial u}{\partial r} d\sigma = r^2 \iint\limits_{S_M^r} \frac{\partial u}{\partial r} d\omega =$$

$$= r^2 \frac{\partial}{\partial r} \iint\limits_{S_M^r} u \, d\omega.$$

Применяя к последнему интегралу формулу (27), получаем

$$\iiint\limits_{D_M^r} \Delta u \, d\tau = 4\pi r^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}.$$

С другой стороны,

$$\iiint\limits_{D_M^r} \Delta u \, d\tau = \int\limits_0^r \left(\iint\limits_{S_M^\rho} \Delta u \, d\sigma \right) d\rho = \int\limits_0^r (4\pi\rho^2 \overline{\Delta u}) \, d\rho.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^r \rho^2 \overline{\Delta u} \, d\rho = r^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}.$$

Дифференцируя это соотношение по r, получим

$$\overline{\Delta u} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \bar{u}_r) = \Delta (\bar{u}).$$

Лемма доказана.

Предположим теперь, что решение задачи (24) — (25) существует. Тогда, применяя операцию усреднения по сфере S_M^r к тождеству

$$a^2 \Delta u \equiv u_{tt}$$

и используя лемму, получаем

$$a^2 \Delta \bar{u} \equiv \bar{u}_{tt},$$

или

$$a^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \bar{u}_r) \equiv \bar{u}_{tt},$$

или

$$a^2(r\bar{u}_{rr} + 2\bar{u}_r) \equiv r\bar{u}_{tt}.$$

Если ввести новую функцию $v = r\bar{u}$, то последнее соотношение можно записать в виде

$$a^2 v_{rr} \equiv v_{tt}.$$

Таким образом, функция $v(r, t)$ удовлетворяет одномерному волновому уравнению.

Применяя операцию усреднения к соотношениям (25), получим

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}(r, 0) &= \bar{\varphi}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint\limits_{S_M^r} \varphi(P)\, d\sigma, \\ \bar{u}_t(r, 0) &= \bar{\psi}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint\limits_{S_M^r} \psi(P)\, d\sigma. \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Пусть

$$\varphi_1(r) = r\bar{\varphi}(r) \quad \text{и} \quad \psi_1(r) = r\bar{\psi}(r).$$

Очевидно, что

$$v(r, 0) = \varphi_1(r), \qquad v_t(r, 0) = \psi_1(r), \qquad v(0, t) = 0.$$

Таким образом, для $v(r, t)$ мы имеем следующую задачу на полубесконечной прямой:

$$\begin{aligned} &a^2 v_{rr} = v_{tt}, \\ &v(r, 0) = \varphi_1(r), \qquad v_t(r, 0) = \psi_1(r), \\ &v(0, t) = 0. \end{aligned}$$

Для ее решения начальные функции $\varphi_1(r)$ и $\psi_1(r)$ надо, согласно § 4, продолжить нечетным образом на полупрямую $(-\infty, 0)$ и для продолженных функций $\varphi_2(r)$ и $\psi_2(r)$ написать формулу Даламбера. При этом функции $\bar{\varphi}(r)$ и $\bar{\psi}(r)$ будут продолжены четным образом (мы сохраним для продолженных функций прежние обозначения — $\bar{\varphi}(r)$ и $\bar{\psi}(r)$). Решение задачи для $v(r, t)$ будет иметь вид

$$v(r, t) = \frac{\varphi_2(r + at) + \varphi_2(r - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{r-at}^{r+at} \psi_2(z)\, dz.$$

Следовательно,

$$\bar{u}(r, t) = \frac{v}{r} = \frac{\varphi_2(r+at) + \varphi_2(r-at)}{2r} + \frac{1}{2ar}\int\limits_{r-at}^{r+at} \psi_2(z)\,dz.$$

Если в этой формуле положить $r=0$, то получим $\bar{u}(0, t) = \frac{0}{0}$.

Для вычисления $\bar{u}(0, t)$ применим правило Лопиталя (учитывая также определение φ_2 и ψ_2):

$$\bar{u}(0, t) = \frac{1}{2}\left\{\bar{\varphi}(at) + \bar{\varphi}(-at) + at\bar{\varphi}'(at) - at\bar{\varphi}'(-at)\right\} + \\ + \frac{1}{2a}\left\{at\bar{\psi}(at) + at\bar{\psi}(-at)\right\}.$$

Поскольку функции $\bar{\varphi}(z)$ и $\bar{\psi}(z)$ — четные, а функция $\bar{\varphi}'(z)$ — нечетная, то

$$\bar{u}(0, t) = \bar{\varphi}(at) + at\bar{\varphi}'(at) + t\bar{\psi}(at) = \\ = \frac{d}{dt}\left\{t\bar{\varphi}(at)\right\} + t\bar{\psi}(at). \qquad (30)$$

Если мы воспользуемся формулами (28) и (29), то из соотношения (30) получим *формулу Пуассона* для искомого решения задачи Коши (24) — (25):

$$u(M, t) = \frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_M^{at}} \frac{\varphi(P)\,d\sigma}{at} + \frac{1}{4\pi a}\iint\limits_{S_M^{at}} \frac{\psi(P)}{at}\,d\sigma. \qquad (31)$$

Таким образом, из предположения о существовании решения задачи Коши для трехмерного пространства следует, что оно должно представляться формулой (31). Следовательно, оно единственно.

2. Теперь мы можем решить задачу Коши в трехмерном пространстве для неоднородного волнового уравнения:

$$a^2\Delta u + f(M, t) = u_{tt},$$
$$u(M, 0) = \varphi(M), \qquad u_t(M, 0) = \psi(M).$$

Разбиваем ее на две задачи:

а) $$a^2\Delta v = v_{tt},$$
$$v(M, 0) = \varphi(M), \qquad v_t(M, 0) = \psi(M).$$

Решение этой задачи представляется формулой Пуассона.

б)
$$a^2 \Delta w + f(M, t) = w_{tt},$$
$$w(M, 0) = 0, \quad w_t(M, 0) = 0.$$

Очевидно, $u = v + w$.

Задачу б) будем решать методом, описанным на стр. 47. А именно, сначала решаем вспомогательную задачу:

$$a^2 \Delta Щ = Щ_{tt},$$
$$Щ|_{t=\tau} = 0, \qquad Щ_t|_{t=\tau} = f(M, \tau).$$

По формуле Пуассона

$$Щ(M, t, \tau) = \frac{1}{4\pi a} \iint\limits_{S_M^{a(t-\tau)}} \frac{f(P, \tau)}{a(t-\tau)} d\sigma.$$

Тогда, как было показано на стр. 48,

$$w(M, t) = \int_0^t Щ(M, t, \tau)\, d\tau,$$

или

$$w(M, t) = \frac{1}{4\pi a} \int_0^t \left(\iint\limits_{S_M^{a(t-\tau)}} \frac{f(P, \tau)}{a(t-\tau)} d\sigma \right) d\tau.$$

Во внешнем интеграле произведем замену переменной интегрирования $a(t-\tau) = r$, получим

$$w(M, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{at} \left(\iint\limits_{S_M^r} \frac{f\left(P, t - \frac{r}{a}\right)}{r} d\sigma \right) dr,$$

где r — расстояние от точки M до переменной точки интегрирования P, $r = r_{MP}$. Этот интеграл можно, очевидно, записать как интеграл по области D_M^{at}, ограниченной сферой S_M^{at}:

$$w(M, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \iiint\limits_{D_M^{at}} \frac{f\left(P, t - \frac{r}{a}\right)}{r} d\nu. \tag{32}$$

Если внешний возбуждающий фактор $f(M, t)$ отличен от нуля лишь в одной точке M_0, в которой он равен $f(t)$, то в этом случае волновое уравнение можно написать в виде

$$a^2 \Delta u + f(t)\,\delta(M, M_0) = u_{tt},$$

где $\delta(M, M_0)$ — δ-функция с особенностью в точке M_0 (см. Дополнение).

Решение этого уравнения, удовлетворяющее нулевым начальным условиям (следовательно, обусловленное лишь действием точечного фактора $f(t)$), можно написать согласно формуле (32) в виде

$$u(M, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \iiint\limits_{D_M^{at}} \frac{f\left(t - \frac{r}{a}\right)\delta(P, M_0)}{r}\, d\nu.$$

Используя основное свойство δ-функции [1]), получаем

$$u(M, t) = \begin{cases} 0, & \text{если } at < r_{MM_0}, \\ \dfrac{1}{4\pi a^2}\dfrac{1}{r_{MM_0}} f\left(t - \dfrac{r_{MM_0}}{a}\right), & \text{если } at > r_{MM_0}. \end{cases} \tag{33}$$

3. Из формулы Пуассона можно также получить решение задачи Коши для однородного волнового уравнения в двумерном пространстве:

$$a^2 \Delta u = u_{tt},$$
$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \qquad u_t(x, y, 0) = \psi(x, y). \tag{34}$$

В самом деле, если в формуле (31) функции $\varphi(P)$ и $\psi(P)$ не зависят от переменной z, то интегралы по поверхности сферы S_M^{at} можно свести к интегралам по большому кругу этой сферы Σ_M^{at}, лежащему в плоскости (x, y) (рис. 9). Интеграл по верхней половине сферы S_M^{at} равен

$$\iint\limits_{\text{верх } S_M^{at}} \frac{\varphi(P)}{at}\, d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_M^{at}} \frac{\varphi(P_1)}{at} \frac{d\sigma}{\cos\gamma},$$

---

[1]) Для любой непрерывной функции $\varphi(M)$

$$\iiint\limits_D \varphi(P)\,\delta(P, M_0)\, d\nu = \begin{cases} 0, & \text{если } M_0 \notin D, \\ \varphi(M_0), & \text{если } M_0 \in D. \end{cases}$$

где γ — угол между нормалями к плоскости (x, y) и к сфере S_M^{at} в точке P. Очевидно,

$$\cos\gamma = \frac{|PP_1|}{|MP|} = \frac{\sqrt{(at)^2 - |P_1M|^2}}{at} = \\ = \frac{\sqrt{(at)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}{at}\ ^{1)}.$$

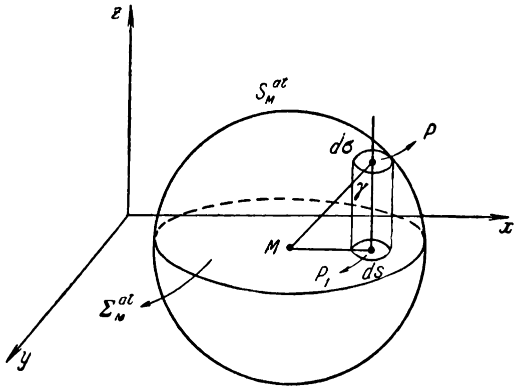

Рис. 9.

Поэтому

$$\iint\limits_{\text{верх } S_M^{at}} \frac{\varphi(p)}{at}\, d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_M^{at}} \frac{\varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}.$$

Аналогично находим

$$\iint\limits_{\text{нижн } S_M^{at}} \frac{\varphi(P)}{at}\, d\tau = \iint\limits_{\Sigma_M^{at}} \frac{\varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{a^2t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}.$$

[1]) Здесь ξ, η — координаты точки P_1, являющейся проекцией точки P на плоскость (x, y), (x, y) — координаты точки наблюдения M.

Применяя аналогичное преобразование для второго интеграла в формуле Пуассона, получим решение задачи Коши (34) в виде [1])

$$u(x, y, t)=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{\Sigma_M^{at}}\frac{\varphi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}+$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\iint_{\Sigma_M^{at}}\frac{\psi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}. \qquad (35)$$

Теперь нетрудно решить задачу Коши в двумерном пространстве и для неоднородного уравнения. Она сводится к только что рассмотренной задаче и к задаче Коши для неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями. Эта последняя решается методом, описанным на стр. 47. Мы не будем повторять всех выкладок [2]), напишем лишь результат

$$w(x, y, t)=$$

$$=\frac{1}{2\pi a}\int_0^t\left(\iint_{\Sigma_M^{a(t-\tau)}}\frac{f(\xi, \eta, \tau)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}\right)d\tau. \qquad (36)$$

Из этой формулы читатель легко может получить решение, обусловленное действием точечного фактора $f(t)$.

§ 8. Физическая интерпретация формулы Пуассона

Обратимся снова к формуле Пуассона. Пусть начальные функции $\varphi(M)$ и $\psi(M)$ не равны нулю лишь в области D, ограниченной поверхностью S (рис. 10). Будем наблюдать за состоянием среды в фиксированной точке M. Для достаточно малых значений t поверхность сферы S_M^{at} с центром в точке M не пересекает область D. Поэтому интегралы в правой части формулы Пуассона будут равны нулю; следовательно, для таких значений t имеем $u(M, t)=0$ (возмущения не дошли до точки M). Обозначим через d_1 расстояние от

[1]) Описанный метод получения формулы (35) называется *методом спуска*. Аналогичным путем из формулы (35) можно получить формулу Даламбера.

[2]) Читателю рекомендуется провести все выкладки самостоятельно.

точки M до ближайшей точки поверхности S, а через d_2 — расстояние от M до наиболее удаленной от нее точки поверхности S. Для значений $t \in (t_1, t_2)$ $\left(t_1 = \frac{d_1}{a},\ t_2 = \frac{d_2}{a}\right)$ поверхность сферы S_M^{at} будет пересекать область D. Поэтому интегралы в формуле Пуассона будут отличными от нуля и, следовательно, для таких значений t имеем $u(M, t) \neq 0$. Для $t > t_2$ сфера S_M^{at} не будет пересекать область D, и следовательно, $u(M, t)$ снова станет равной нулю. Если мы представим себе теперь, что из каждой точки области D по

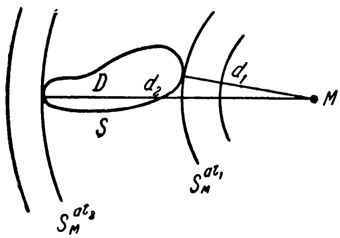

Рис. 10.

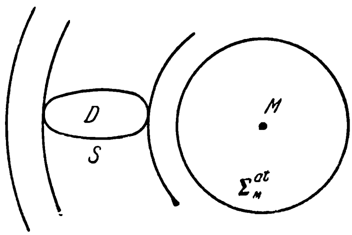

Рис. 11.

всем направлениям распространяются возмущения со скоростью a (принцип Гюйгенса), то описанные выше изменения функции $u(M, t)$ со временем физически можно интерпретировать следующим образом.

Для $t < t_1$ возмущения не дошли еще до точки M; в момент $t = t_1$ передний фронт волны возмущений достигает точки M; в течение промежутка времени $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ через точку M проходит волна (зона) возмущений; в момент $t = t_2$ через точку M проходит задний фронт волны возмущений, и с этого момента среда в точке M остается в покое.

Пусть в двумерном случае начальные функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ не равны нулю лишь в области D, ограниченной кривой S (рис. 11). Для $t < t_1$ круг Σ_M^{at} не содержит точек области D, поэтому интегралы в формуле (35) равны нулю, следовательно, и $u(x, y, t) = 0$. Для любых $t > t_1$ круг Σ_M^{at} содержит область D или ее часть и поэтому $u(x, y, t) \neq 0$ для таких значений t [1]). Таким образом, в двумерном случае

[1]) t_1 и t_2 имеют прежний смысл.

есть передний фронт волны (он достигает точки M в момент времени $t=t_1$), но нет заднего фронта. Принцип Гюйгенса в этом случае не выполняется. Это легко понять, если иметь в виду, что рассмотренная двумерная задача фактически представляет собою трехмерную задачу, в которой область ненулевых значений начальных функций $\varphi(M)$ и $\psi(M)$ является бесконечным цилиндром, образующие которого параллельны оси z. Очевидно, сферическая поверхность S_M^{at} при любых значениях $t>t_1$ будет пересекать этот цилиндр, и поэтому интегралы в формуле Пуассона не будут равными нулю для всех значений $t>t_1$.

Задачи

1. Бесконечная струна возбуждена начальным отклонением, отличным от нуля лишь на интервале $(c, 2c)$, имеющим форму ломаной с вершинами в точках c, $\frac{3}{2}c$, $2c$. Построить (начертить) профиль струны для моментов времени $t_k=\frac{c}{2a}k$ $(k=1, 2, 3)$.

2. Решить задачу 1, если начальное отклонение отлично от нуля лишь на интервалах $(-2c, -c)$ и $(c, 2c)$ и имеет форму ломаной с вершинами в точках $-2c$, $-1{,}5c$, $-c$, c, $1{,}5c$, $2c$.

3. Бесконечной струне сообщена только на отрезке $-c\leqslant x\leqslant c$ поперечная начальная скорость $v_0=\text{const}$. Решить задачу о колебании этой струны. Построить профиль струны для моментов времени $t_k=\frac{c}{2a}k$ $(k=1, 2, 3)$.

4. Полубесконечная струна с жестко закрепленным концом возбуждена начальным отклонением, отличным от нуля лишь на отрезке $(c, 3c)$, имеющим форму ломаной с вершинами в точках c, $2c$, $3c$. Начертить профиль струны для моментов времени $t_k=\frac{c}{2a}k$ $(k=2, 4, 6)$.

5. В начальный момент времени $t=0$ полубесконечная струна с жестко закрепленным концом получает в точке $x=x_0$ поперечный удар, сообщающий струне импульс P. Решить задачу о колебании струны под действием этого импульса.

6. Бесконечный упругий стержень получен соединением в точке $x=0$ двух полубесконечных однородных стержней с плотностями массы и модулями упругости ρ_1, E_1; ρ_2, E_2. Пусть из области $x<0$ по стержню бежит волна $u_1(x, t)=f\left(t-\frac{x}{a_1}\right)$. Найти отраженную и преломленную волны. Всегда ли они существуют? Исследовать решение при $E_2\to 0$ и при $E_2\to\infty$.

7. К концу $x=0$ полубесконечного провода линии без искажений ($GL=CR$) была приложена постоянная э. д. с. E_0 в течение достаточно длительного промежутка времени, так что в проводе установилось стационарное распределение напряжения и силы тока. В момент времени $t=0$ конец провода был заземлен через сосредоточенное сопротивление R_0. Найти напряжение и ток в проводе при $t>0$.

8. Концы струны $x=0$ и $x=l$ закреплены жестко. Начальное отклонение $u(x, 0)=A\sin\frac{\pi}{l}x$ $(0\leqslant x\leqslant l)$, а начальная скорость равна нулю. Построить профиль струны для моментов времени $t_k=\frac{l}{2a}k$ $(k=1, 2, 4)$.

9. Решить задачу о колебании бесконечной струны под действием сосредоточенной поперечной силы $F(t)$ (для $t>0$), если точка приложения силы скользит вдоль струны с постоянной скоростью v_0 из положения $x=0$, причем $v_0<a$.

10. Конец $x=0$ полубесконечного провода с пренебрежимо малыми сопротивлением и утечкой на единицу длины в момент времени $t=0$ присоединяется к источнику э. д. с. $E=f(t)$. Найти напряжение $u(x, t)$ в этом проводе.

11. Конденсатор емкости C_0, заряженный до потенциала V, разряжается в момент времени $t=0$ на бесконечный провод с параметрами (L, C). Найти ток в проводе.

12. В газе, находящемся в состоянии покоя, создано в момент времени $t=0$ уплотнение S_0, локализованное в объеме, ограниченном заданной поверхностью σ. Найти уплотнение $S(M, t)$ как функцию площади σ_t части поверхности сферы S_M^{at}, которая заключена внутри σ.

13. Какие линейные уравнения с постоянными коэффициентами вида

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xt}+a_{22}u_{tt}+b_1u_x+b_2u_t+cu=0$$

имеют решения в виде произвольных бегущих волн $f(x-at)$, где $a=\text{const}$? (Нет дисперсии.)

14. Какие уравнения задачи 13 имеют решения в виде произвольных бегущих волн с затуханием $e^{-\mu t}f(x-at)$?

ГЛАВА IV

МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ (МЕТОД ФУРЬЕ)

Типичными задачами, к решению которых применяется метод разделения переменных, являются краевые задачи в ограниченных областях для уравнений гиперболического и параболического типа. Существо метода лучше всего можно понять на простейших из них — на однородных краевых задачах. Мы будем рассматривать параллельно краевые задачи для уравнений гиперболического и параболического типа.

§ 1. Сущность метода разделения переменных. Собственные функции и собственные значения. Их основные свойства

1. Пусть требуется найти функцию $u(M, t)$, удовлетворяющую для $t>0$ уравнению

$$\operatorname{div}(k\nabla u)-qu=\begin{cases}\rho u_{tt},\\ \rho u_t\end{cases}\tag{1}$$

в области D, ограниченной замкнутой кусочно-гладкой поверхностью S, непрерывную в замкнутой области $\overline{B}\equiv\equiv\{M\in\overline{D};\ t\geqslant 0\}$, где $\overline{D}=D+S$, и удовлетворяющую дополнительным условиям:

краевому

$$\left(\gamma_1\frac{\partial u}{\partial n}+\gamma_2 u\right)_S=0\tag{2}$$

и начальным

$$u(M,\ 0)=\varphi(M),\qquad u_t(M,\ 0)=\varphi_1(M)$$

$$(\text{соответственно}\ \ u(M,\ 0)=\varphi(M)).\tag{3}$$

Если ввести обозначение $L[u] \equiv \operatorname{div}(k \nabla u) - qu$, то уравнение (1) можно написать в виде

$$L[u] = \begin{cases} \rho u_{tt}, \\ \rho u_t. \end{cases} \tag{1'}$$

Это уравнение и краевые условия (2) — линейные и однородные. Следовательно, если u_1 и u_2 суть решения уравнения (1), удовлетворяющие условию (2), то и функции

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2,$$

где c_1 и c_2 — константы, будут также решениями уравнения (1), удовлетворяющими условию (2).

Попытаемся с помощью суперпозиции всех линейно независимых частных решений описанного типа (т. е. удовлетворяющих краевым условиям (2)) удовлетворить и начальным условиям (3)[1]). Для этого будем искать нетривиальные[2]) частные решения уравнения (1), удовлетворяющие краевым условиям (2), в классе функций вида $\Phi(M)\Psi(t)$, где $\Phi(M)$ — непрерывны в $\overline{D}$, $\Psi(t)$ — непрерывны в $0 \leqslant t < \infty$. Подставляя функцию $\Phi(M)\Psi(t)$ в уравнение (1) и деля обе части уравнения на $\rho(M)\Phi(M)\Psi(t)$, получаем

$$\frac{L[\Phi]}{\rho\Phi} = \frac{\Psi''}{\Psi} \quad \left(\text{соответственно } \frac{\Psi'}{\Psi}\right).$$

Чтобы это равенство было тождественным (т. е. чтобы функция $\Phi(M)\Psi(t)$ удовлетворяла уравнению (1)), необходимо и достаточно, чтобы обе дроби $\frac{L[\Phi]}{\rho\Phi}$ и $\frac{\Psi''}{\Psi}$ были равны одной и той же константе:

$$\frac{L[\Phi]}{\rho\Phi} = -\lambda = \frac{\Psi''}{\Psi}.$$

Таким образом, должны выполняться тождества

$$\Psi'' + \lambda\Psi \equiv 0 \quad (\Psi' + \lambda\Psi \equiv 0) \quad \text{и} \quad L[\Phi] + \lambda\rho\Phi \equiv 0.$$

---

[1]) По аналогии с решением задачи Коши для обыкновенного линейного однородного дифференциального уравнения.

[2]) Т. е. не равные тождественно нулю.

Следовательно, в качестве функций $\Psi(t)$ и $\Phi(M)$ надо брать нетривиальные решения уравнений

$$\Psi'' + \lambda\Psi = 0 \quad (\text{соответственно } \Psi' + \lambda\Psi = 0) \tag{4}$$

$$L[\Phi] + \lambda\rho\Phi = 0, \tag{5}$$

причем функция $\Phi(M)$ должна удовлетворять краевому условию

$$\left(\gamma_1 \frac{\partial\Phi}{\partial n} + \gamma_2\Phi\right)_S = 0. \tag{6}$$

Задачу (5) — (6) называют *задачей Штурма — Лиувилля.* Она имеет нетривиальные решения не при всех значениях λ.

Определение. Те значения λ, при которых задача (5) — (6) имеет нетривиальные решения, называются *собственными значениями* (с. з.) краевой задачи (5) — (6), а соответствующие им нетривиальные решения $\Phi(M)$ уравнения (5) — *собственными функциями* (с. ф.) краевой задачи (5) — (6).

В дальнейшем мы будем предполагать, что $k(M)$, $q(M)$ и $\rho(M)$ непрерывны в $\overline{D}$; $k(M) > 0$, $\rho(M) \geqslant 0$ (но $\rho(M) \not\equiv 0$), $q(M) \geqslant 0$ в $\overline{D}$; $\gamma_1(M)$ и $\gamma_2(M) \geqslant 0$ на S и $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0$.

При этих условиях справедлива

Теорема 1. *Существует бесконечное множество с. з.* $\{\lambda_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *и соответствующих им с. ф.* $\{\Phi_n(M)\}$ *краевой задачи* (5) — (6).

Доказательство этой теоремы мы опускаем.

Будем говорить, что *функция $f(M)$ имеет кусочно-непрерывные в $\overline{D}$ частные производные 1-го и 2-го порядков, если существует конечное число попарно не пересекающихся областей $D_1, D_2, \ldots, D_n$ таких, что* 1) $\overline{D} = \overline{D}_1 + \overline{D}_2 + \ldots + \overline{D}_n$; 2) *$f(M)$ имеет непрерывные и ограниченные частные производные 1-го и 2-го порядков в каждой из областей $D_1, D_2, \ldots, D_n$.*

Обозначим через *A класс функций,* которые: а) *непрерывны в $\overline{D}$,* б) *имеют кусочно-непрерывные в $\overline{D}$ частные производные* 1-*го и* 2-*го порядков,* в) *удовлетворяют краевым условиям* (6).

Собственные функции краевой задачи (5) — (6), очевидно, принадлежат классу A, но не исчерпывают всех функций этого класса.

2. Собственные значения и собственные функции краевой задачи (5) — (6) обладают рядом свойств, из которых мы сформулируем, прежде всего, следующее.

Теорема разложимости (Стеклова). *Всякая функция $f(M)$ из класса A разлагается в ряд Фурье по собственным функциям краевой задачи* (5) — (6), *абсолютно и равномерно сходящийся в области $\overline{D}$.*

Доказательство этой теоремы мы опускаем [1]).

Рядом Фурье функции $f(M)$ по функциям $\{\Phi_n(M)\}$ называется ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n\Phi_n(M)$, в котором коэффициенты C_n вычисляются по формулам

$$C_n = \frac{1}{\int\limits_D \rho\,\Phi_n^2\,d\tau} \int\limits_D f(M)\,\rho(M)\,\Phi_n(M)\,d\tau.$$

Решив задачу Штурма — Лиувилля, обращаемся к уравнению (4). Для каждого собственного значения λ_n оно имеет свое общее решение

$$\Psi_n(t) = C_n\cos\sqrt{\lambda_n}\,t + D_n\sin\sqrt{\lambda_n}\,t$$
$$(\text{или } \Psi_n(t) = C_n e^{-\lambda_n t}).$$

Таким образом, частными решениями уравнения (1), удовлетворяющими только краевым условиям (2), являются функции вида

$$u_n(M, t) = (C_n\cos\sqrt{\lambda_n}\,t + D_n\sin\sqrt{\lambda_n}\,t)\,\Phi_n(M)$$
$$(\text{или } u_n(M, t) = C_n e^{-\lambda_n t}\,\Phi_n(M)).$$

Эти функции можно записать в виде

$$u_n = B_n\sin(\sqrt{\lambda_n}t + \theta_n)\,\Phi_n(M),$$

где $B_n = \sqrt{C_n^2 + D_n^2}$, $\theta_n = \operatorname{arctg}\dfrac{C_n}{D_n}$.

Движения, описываемые такими функциями, называются *собственными колебаниями*, а также *стоячими волнами*; $u_1(M, t)$ — основной тон, а $u_2(M, t)$, $u_3(M, t)$, ... — обертоны. Числа $\sqrt{\lambda_1}$, $\sqrt{\lambda_2}$, ... называются *частотами собственных*

[1]) Для одномерного случая эта теорема будет доказана в гл. IX.

колебаний (основного тона и обертонов). Частоты собственных колебаний не зависят от начальных условий. Физически это означает, что частоты собственных колебаний не зависят от способа возбуждения их. Они характеризуют свойства самой колеблющейся системы и определяются материальными константами системы (например, скоростью звука в среде), геометрическими факторами (формой, размерами) и режимом на границе.

Собственная функция $B_n\Phi_n(M)$ дает профиль амплитуды стоячей волны.

Если мы теперь возьмем сумму таких частных решений по всем собственным функциям

$$u(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + D_n \sin \sqrt{\lambda_n} t)\, \Phi_n(M), \tag{7}$$

то возникает вопрос: нельзя ли так выбрать коэффициенты C_n и D_n, чтобы эта сумма была решением задачи (1) — (3)? Положительный ответ дает

Теорема 2. *Непрерывное в замкнутой области* $\overline{B} \equiv \{M \in \overline{D};\ t \geqslant 0\}$ *решение задачи* (1) — (3) *представляется в виде ряда* (7), *где*

$$C_n = \frac{1}{\|\Phi_n\|^2} \int\limits_D \rho(P)\, \varphi(P)\, \Phi_n(P)\, d\tau_P,$$

$$D_n = \frac{1}{\|\Phi_n\|^2} \int\limits_D \rho(P)\, \varphi_1(P)\, \Phi_n(P)\, d\tau_P,$$

$$\|\Phi_n\|^2 = \int\limits_D \rho(P)\, \Phi_n^2(P)\, d\tau_P.$$

Число $\|\Phi_n\|$ называется *нормой* функции $\Phi_n(M)$.

Введем в рассмотрение функционал

$$R[w, \Phi] = -\int\limits_D wL[\Phi]\, d\tau_P.$$

Для него справедлива

Лемма. *Функционал* $R[w, \Phi]$ *симметричен на функциях класса A, т. е.* $R[w, \Phi] = R[\Phi, w]$ *для любых функций* w *и* Φ *из класса A.*

Доказательство. Используя известную формулу

$$p \operatorname{div}(\boldsymbol{E}) = \operatorname{div}(p\boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E}\nabla p \quad \text{для} \quad p = w, \ \boldsymbol{E} = k\nabla\Phi,$$

функционал $R[w, \Phi]$ можно записать в виде (см. обозначение оператора L на стр. 67)

$$R[w, \Phi] = \int_D k(\nabla w \cdot \nabla \Phi)\, d\tau + \int_D qw\Phi\, d\tau - \int_D \operatorname{div}(k \cdot w \cdot \nabla\Phi)\, d\tau.$$

Последний интеграл по формуле Остроградского равен $\int_S kw \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\tau$, поэтому

$$R[w, \Phi] = \int_D k(\nabla w \cdot \nabla\Phi)\, d\tau + \int_D qw\Phi\, d\tau - \int_S kw \frac{\partial \Phi}{\partial n}\, d\sigma. \tag{8}$$

Если мы имеем дело с первой или второй краевой задачей, то $\int_S kw \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\tau = 0$, так как $w\big|_S = 0$ $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\Big|_S = 0\right)$. В этих случаях симметричность $R[w, \Phi]$ очевидна. Если мы имеем дело с третьей краевой задачей, то из краевого условия находим $\frac{\partial \Phi}{\partial n}\Big|_S = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\Phi\Big|_S$. Поэтому $R[w, \Phi]$ можно записать в виде

$$R[w, \Phi] = \int_D k(\nabla w \cdot \nabla\Phi)\, d\tau + \int_D qw\Phi\, d\tau + \int_S \frac{\gamma_2}{\gamma_1} kw\Phi\, d\sigma.$$

Симметричность также очевидна.

Замечание. На функциях класса A, очевидно, $R[\Phi, \Phi] \geqslant 0$.

Доказательство теоремы 2. Пусть $u(M, t)$ — искомое решение. Поскольку оно при всяком $t > 0$ непрерывно в $\bar{D}$ и удовлетворяет краевым условиям (2), оно принадлежит классу A. Следовательно, по теореме Стеклова его можно представить в виде ряда Фурье

$$u(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(t)\, \Phi_n(M), \tag{9}$$

где

$$\Psi_n(t) = \frac{1}{\|\Phi_n\|^2} \int_D \rho(P)\, u(P, t)\, \Phi_n(P)\, d\tau_P. \tag{10}$$

Используя уравнение (5) для $\Phi_n(M)$, последнюю формулу можно преобразовать к виду

$$\Psi_n(t) = \frac{-1}{\lambda_n \|\Phi_n\|^2} \int_D uL[\Phi_n]\, d\tau = \frac{R[u, \Phi_n]}{\lambda_n \|\Phi_n\|^2},$$

или, согласно лемме,

$$\Psi_n(t) = \frac{R[\Phi_n, u]}{\lambda_n \|\Phi_n\|^2} = \frac{-1}{\lambda_n \|\Phi_n\|^2} \int\limits_D \Phi_n(P) L[u] \, d\tau.$$

Используя уравнение (1), получаем

$$\Psi_n(t) = \frac{-1}{\lambda_n \|\Phi_n\|^2} \int\limits_D \rho \Phi_n u_{tt} \, d\tau,$$

откуда, сравнивая полученный результат с формулой (10), имеем

$$\Psi_n(t) \equiv \frac{-\Psi_n''}{\lambda_n}, \text{ т. е. } \Psi_n'' + \lambda_n \Psi \equiv 0.$$

Таким образом, функция $\Psi_n(t)$ является решением уравнения $\Psi'' + \lambda_n \Psi = 0$ и, следовательно, может быть записана в виде

$$\Psi_n(t) = C_n \cos \sqrt{\lambda_n}\, t + D_n \sin \sqrt{\lambda_n}\, t,$$

где

$$C_n = \Psi_n(0), \quad D_n \sqrt{\lambda_n} = \Psi_n'(0).$$

Используя формулу (10), находим

$$C_n = \Psi_n(0) = \frac{1}{\|\Phi_n\|^2} \int\limits_D \rho(P) u(P, 0) \Phi_n(P) \, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\|\Phi_n\|^2} \int\limits_D \rho(P) \varphi(P) \Phi_n(P) \, d\tau,$$

$$D_n = \frac{\Psi_n'(0)}{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n} \|\Phi_n\|^2} \int\limits_D \rho(P) \varphi_1(P) \Phi_n(P) \, d\tau,$$

ч. т. д.

Предположив существование решения задачи (1) — (3), мы пришли к заключению, что оно представляется рядом (7), следовательно, оно единственно [1]).

3. Обратимся к рассмотрению следующих свойств собственных функций и собственных значений.

Свойство 1. *Если Φ есть собственная функция, отвечающая собственному значению λ, то и $C\Phi$ (C — кон-*

---

[1]) Мы при этом опирались на теорему разложимости.

станта) есть собственная функция, отвечающая тому же собственному значению.

Свойство 2. *Если Φ_1 и Φ_2 — собственные функции, отвечающие собственному значению λ, то и любая линейная комбинация $C_1\Phi_1 + C_2\Phi_2$ есть собственная функция, отвечающая тому же λ.* Справедливость этих утверждений очевидна.

Свойство 3. *Собственные функции Φ_1 и Φ_2, отвечающие различным собственным значениям λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), ортогональны в области D с весом $\rho(M)$, т. е.*

$$\int_D \rho(P)\,\Phi_1(P)\,\Phi_2(P)\,d\tau = 0.$$

Доказательство. По определению собственных функций и собственных значений имеем тождества

$$L[\Phi_1] + \lambda_1\rho\Phi_1 \equiv 0,$$
$$L[\Phi_2] + \lambda_2\rho\Phi_2 \equiv 0.$$

Умножим первое из них на Φ_2, второе — на Φ_1 и результаты вычтем один из другого. Интегрируя тождество

$$\Phi_2 L[\Phi_1] - \Phi_1 L[\Phi_2] \equiv (\lambda_2 - \lambda_1)\,\rho\Phi_1\Phi_2$$

по области D, получим

$$-R[\Phi_2, \Phi_1] + R[\Phi_1, \Phi_2] = (\lambda_2 - \lambda_1)\int_D \rho\Phi_1\Phi_2\,d\tau.$$

В силу симметрии функционала R[1]) левая часть этого равенства равна нулю. Следовательно, и $\int_D \rho\,\Phi_1\Phi_2\,d\tau = 0$, ибо $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ч. т. д.

Если собственному значению λ отвечают r линейно независимых собственных функций $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_r$, то эти функции не обязаны быть попарно ортогональными. Однако мы можем заменить их другими собственными функциями $\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2, \ldots, \tilde{\Phi}_r$, являющимися их линейными комбинациями и притом попарно ортогональными. Действительно, полагаем $\tilde{\Phi}_1 = \Phi_1$. Если $\int_D \rho\Phi_1\Phi_2\,d\tau = 0$, то полагаем $\tilde{\Phi}_2 = \Phi_2$, если же $\int_D \rho\Phi_1\Phi_2\,d\tau \neq 0$,

---

[1]) Собственные функции принадлежат классу A,

то полагаем $\tilde{\Phi}_2 = \tilde{\Phi}_1 + B_1\Phi_2$. Константу B_1 находим из условия $\int_D \rho\tilde{\Phi}_1\tilde{\Phi}_2\,d\tau = 0$, т. е. из уравнения

$$\int_D \rho\tilde{\Phi}_1^2\,d\tau + B_1\int_D \rho\tilde{\Phi}_1\Phi_2\,d\tau = 0.$$

Если Φ_3 ортогональна функциям $\tilde{\Phi}_1$ и $\tilde{\Phi}_2$, то полагаем $\tilde{\Phi}_3 = \Phi_3$, в противном случае полагаем $\tilde{\Phi}_3 = \tilde{\Phi}_1 + B_{32}\tilde{\Phi}_2 + B_{33}\Phi_3$. Константы B_{32} и B_{33} находим из условий $\int_D \rho\tilde{\Phi}_1\tilde{\Phi}_3\,d\tau = 0$ и $\int_D \rho\tilde{\Phi}_2\tilde{\Phi}_3\,d\tau = 0$, т. е. из уравнений

$$\int_D \rho\tilde{\Phi}_1^2\,d\tau + B_{32}\int_D \rho\tilde{\Phi}_1\tilde{\Phi}_2\,d\tau + B_{33}\int_D \rho\tilde{\Phi}_1\Phi_3\,d\tau = 0,$$

$$\int_D \rho\tilde{\Phi}_1\tilde{\Phi}_2\,d\tau + B_{32}\int_D \rho\tilde{\Phi}_2^2\,d\tau + B_{33}\int_D \rho\tilde{\Phi}_2\Phi_3\,d\tau = 0$$ [1]

и т. д.

Продолжая этот процесс ортогонализации, мы построим r собственных функций $\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2, \ldots, \tilde{\Phi}_r$, отвечающих тому же собственному значению λ и уже попарно ортогональных. Предполагая в дальнейшем, что такой процесс ортогонализации проведен (если в нем была надобность), мы можем утверждать, что *любые две линейно независимые собственные функции краевой задачи* (5)—(6) *ортогональны в области D с весом* ρ.

Свойство 4. *Все собственные значения задачи* (5)—(6) *вещественны.*

Действительно, предположим, что $\lambda = \alpha + i\beta$ $(\beta \neq 0)$ является собственным значением, а $\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2$ — отвечающей ему собственной функцией. Тогда выполняется тождество

$$L[\Phi_1 + i\Phi_2] + (\alpha + i\beta)\,\rho\,(\Phi_1 + i\Phi_2) \equiv 0.$$

Следовательно,

$$L[\Phi_1] + \alpha\rho\Phi_1 - \beta\rho\Phi_2 \equiv 0,$$

$$i\,\{L[\Phi_2] + \alpha\rho\Phi_2 + \beta\rho\Phi_1\} \equiv 0.$$

---

[1] Если Φ_3 ортогональна $\tilde{\Phi}_1$, но не ортогональна $\tilde{\Phi}_2$, то полагаем $\tilde{\Phi}_3 = \tilde{\Phi}_2 + B_3\Phi_3$ и B_3 находим из условия

$$\int_D \rho\tilde{\Phi}_3\tilde{\Phi}_2\,d\tau = \int_D \rho\tilde{\Phi}_2\,d\tau + B_3\int_D \rho\Phi_3\tilde{\Phi}_2\,d\tau = 0.$$

Вычитая почленно эти тождества, получим

$$L[\Phi_1 - i\Phi_2] + (\alpha - i\beta)\,\rho\,(\Phi_1 - i\Phi_2) \equiv 0.$$

Таким образом, $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ и $\bar{\Phi} = \Phi_1 - i\Phi_2$ являются собственным значением и собственной функцией той же задачи. По свойству 3

$$\int\limits_D \rho\,(\Phi_1 + i\Phi_2)(\Phi_1 - i\Phi_2)\,d\tau = 0, \text{ или } \int\limits_D \rho\,(\Phi_1^2 + \Phi_2^2)\,d\tau = 0,$$

что невозможно.

Свойство 5. *Все собственные значения задачи* (5)—(6) *неотрицательны.*

Для доказательства умножаем тождество $L[\Phi_n] + \lambda_n\rho\Phi_n \equiv 0$ на Φ_n и результат интегрируем по области D. Получим

$$\int\limits_D \Phi_n L[\Phi_n]\,d\tau + \lambda_n \int\limits_D \rho\Phi_n^2\,d\tau = 0,$$

откуда

$$\lambda_n = \frac{R[\Phi_n, \Phi_n]}{\|\Phi_n\|^2}.$$

Поскольку $R[\Phi_n, \Phi_n] \geqslant 0$, то $\lambda_n \geqslant 0$.

Замечание. Для первой и третьей краевых задач все собственные значения положительны. Для второй краевой задачи с $q(M) \equiv 0$ $\lambda = 0$ является собственным значением, а $\Phi \equiv 1$ — отвечающей ему собственной функцией.

Пример 1. Пусть требуется решить задачу[1]:

$$a^2 u_{xx} = u_{tt},$$

$$u(x, 0) = \varphi(x),\ u_t(x, 0) = \varphi_1(x);\ u(0, t) = u(l, t) = 0, \qquad (11)$$

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0.$$

Решение. Среди функций вида $\Phi(x)\Psi(t)$ ищем такие решения уравнения (11), которые удовлетворяют только

---

[1]) Напомним, что эту задачу мы решали в гл. III методом характеристик. Тогда мы продолжали начальные значения $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ нечетно относительно точки $x = 0$ на отрезок $(-l, 0)$ и затем периодически на всю прямую. Затем к продолженным значениям применяли формулу Даламбера. Читателю предлагается непосредственно показать, что решение, полученное методом характеристик, совпадает с решением, полученным методом разделения переменных.

краевым условиям задачи. Подставляя $\Phi(x)\Psi(t)$ в уравнение, получим

$$\frac{\Phi''}{\Phi} \equiv \frac{\Psi''}{a^2\Psi} = -\lambda.$$

Следовательно, $\Psi'' + a^2\lambda\Psi = 0$ и

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \quad \Phi(0) = \Phi(l) = 0. \tag{12}$$

Это — первая краевая задача. Все ее собственные значения положительны. Поэтому общее решение задачи (12) можно записать в виде

$$\Phi(x) = A\cos\sqrt{\lambda}\,x + B\sin\sqrt{\lambda}\,x.$$

Из краевого условия на левом конце находим $A = 0$. Следовательно, $\Phi(x) = B\sin\sqrt{\lambda}\,x$ и $B \neq 0$. Из краевого условия на правом конце находим $B\sin\sqrt{\lambda}\,l = 0$. Следовательно, $\sin\sqrt{\lambda}\,l = 0$, откуда $\sqrt{\lambda}\,l = n\pi$ и

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Таковы собственные значения. Соответствующие им собственные функции суть $\Phi_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x$.

Для каждого λ_n находим

$$\Psi_n(t) = C_n\cos\frac{a\pi n}{l}t + D_n\sin\frac{a\pi n}{l}t.$$

Согласно теореме 2 (п. 2) искомым решением задачи будет функция

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{a\pi n}{l}t + D_n\sin\frac{a\pi n}{l}t\right)\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

где

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi, \qquad D_n = \frac{2}{a\pi n}\int_0^l \varphi_1(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi,$$

$$\|\Phi_n\|^2 = \int_0^l \sin^2\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi = \frac{l}{2}.$$

Пример 2. Пусть требуется решить задачу

$$a^2 u_{xx} = u_t; \qquad u(x, 0) = \varphi(x); \qquad u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0.$$

Как и в предыдущем примере, находим

$$\begin{aligned} &\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \quad \Phi'(0) = \Phi'(l) = 0, \\ &\Psi' + a^2\lambda\Psi = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь мы имеем дело со второй краевой задачей и $q \equiv 0$. Следовательно, $\lambda = 0$ будет собственным значением, а $\Phi(x) \equiv 1$ — отвечающей ему собственной функцией.

Остальные собственные значения и собственные функции находим, как и в примере 1:

$$\Phi(x) = A\cos\sqrt{\lambda}\, x + B\sin\sqrt{\lambda}\, x.$$

Из условия $\Phi'(0) = 0$ находим $B = 0$. Следовательно, $A \neq 0$ и $\Phi(x) = A\cos\sqrt{\lambda}\, x$. Из условия $\Phi'(l) = 0$ находим $\sin\sqrt{\lambda}\, l = 0$, следовательно, $\sqrt{\lambda}\, l = \pi n$ и $\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$.

Таким образом,

$$0, \frac{\pi^2}{l^2}, \frac{4\pi^2}{l^2}, \ldots, \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \ldots \text{— собственные значения,}$$

$$1, \cos\frac{\pi}{l}x, \cos\frac{2\pi}{l}x, \ldots, \cos\frac{\pi n}{l}x, \ldots \text{— собственные функции.}$$

Для каждого λ_n находим соответствующие функции $\Psi_n(t)$:

$$\Psi_n(t) = C_n e^{-a^2\lambda_n t} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Искомым решением задачи будет, согласно теореме 2 (п. 2), функция

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-a^2\lambda_n t} \cos\frac{\pi n}{l}x,$$

где

$$C_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\, d\xi, \quad C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\cos\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi \quad (n = 1, 2, 3 \ldots),$$

$$\|\Phi_0\|^2 = l, \qquad \|\Phi_n\|^2 = \int_0^l \cos^2\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi = \frac{l}{2} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Пример 3. Решить задачу о температуре однородного стержня длины l, боковая поверхность которого теплоизолирована, а на концах его происходит конвективный теплообмен со средами, имеющими соответственно постоянные температуры u_1 и u_2. Начальная температура произвольная.

Математическая постановка задачи:

$$a^2 u_{xx} = u_t, \tag{14}$$

$$u_x(0, t) - h_1[u(0, t) - u_1] = 0, \tag{15}$$

$$u_x(l, t) + h_2[u(l, t) - u_2] = 0, \tag{16}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x). \tag{17}$$

Ищем решение в виде $u(x, t) = v(x) + w(x, t)$, где $v(x)$ — решение уравнения (14), удовлетворяющее краевым условиям (15) и (16), т. е.

$$v'' = 0, \tag{14_1}$$

$$v'(0) - h_1[v(0) - u_1] = 0, \tag{15_1}$$

$$v'(l) + h_2[v(l) - u_2] = 0. \tag{16_1}$$

Для функции $w(x, t)$ задача ставится следующим образом:

$$a^2 w_{xx} = w_t, \tag{14_2}$$

$$w_x(0, t) - h_1 w(0, t) = 0, \tag{15_2}$$

$$w_x(l, t) + h_2 w(l, t) = 0, \tag{16_2}$$

$$w(x, 0) = \varphi_1(x) = \varphi(x) - v(x). \tag{17_2}$$

Функция $v(x)$ описывает стационарный режим, а $w(x, t)$ — отклонение от него.

Решаем сначала задачу для $v(x)$. Общее решение уравнения (14_1) имеет вид

$$v(x) = C_1 x + C_2.$$

Постоянные C_1 и C_2 определяем из краевых условий (15_1) (16_1):

$$C_1 - h_1(C_2 - u_1) = 0,$$

$$C_1 + h_2[C_1 l + C_2 - u_2) = 0,$$

откуда

$$C_1 = \frac{h_1(u_2 - u_1)}{h_1 + h_2 + h_1 h_2 l}, \quad C_2 = u_1 + \frac{C_1}{h_1}.$$

Таким образом, стационарный режим найден. Задачу для $w(x, t)$ решаем методом разделения переменных. Среди функций вида $\Phi(x)\Psi(t)$ ищем решения уравнения (14_2), удовлетворяющие лишь краевым условиям (15_2), (16_2). Подставляя функцию $\Phi(x)\Psi(t)$ в уравнение (14_2) и в краевые условия (15_2), (16_2), получим:

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \tag{18}$$

$$\Phi'(0) - h_1\Phi(0) = 0, \tag{19}$$

$$\Phi'(l) + h_2\Phi(l) = 0, \tag{20}$$

$$\Psi' + a^2\lambda\Psi = 0. \tag{21}$$

В силу свойства 5 задача (18) — (20) имеет лишь положительные собственные значения. Поэтому общее решение уравнения (18) можно написать в виде

$$\Phi(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}\,x.$$

Из краевого условия (19) находим $B\sqrt{\lambda} = h_1 A$. Следовательно,

$$\Phi(x) = \frac{B}{h_1}(\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,x + h_1\sin\sqrt{\lambda}x). \tag{22}$$

Множитель $B\frac{1}{h_1}$ отнесем за счет функции $\Psi(t)$. Подставляя функцию (22) в соотношение (20), получим уравнение для определения собственных значений:

$$\operatorname{ctg}\mu = \frac{1}{l(h_1+h_2)}\left(\mu - \frac{h_1h_2l^2}{\mu}\right),$$

где $\mu = \sqrt{\lambda}l$. Пусть $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ — положительные корни этого уравнения. Тогда собственными значениями будут числа

$$\lambda_n = \frac{\mu_n^2}{l^2}.$$

Собственные функции будут иметь вид

$$\Phi_n(x) = \frac{\mu_n}{l}\cos\frac{\mu_n}{l}x + h_1\sin\frac{\mu_n}{l}x.$$

Они ортогональны на отрезке $[0, l]$ с весом $\rho \equiv 1$. Обратимся к уравнению (21). Его общее решение при $\lambda = \lambda_n$ имеет вид

$$\Psi_n(t) = C_n e^{-a^2\lambda_n t}.$$

Тогда

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2\lambda_n t} \Phi_n(x).$$

Коэффициенты C_n находим из начального условия, пользуясь ортогональностью собственных функций $\Phi_n(x)$:

$$C_n = \frac{1}{\|\Phi_n\|^2} \int_0^l \varphi_1(\xi) \left(\frac{\mu_n}{l} \cos \frac{\mu_n}{l} \xi + h_1 \sin \frac{\mu_n}{l} \xi\right) d\xi,$$

$$\|\Phi_n\|^2 = \int_0^l \left(\frac{\mu_n}{l} \cos \frac{\mu_n}{l} \xi + h_1 \sin \frac{\mu_n}{l} \xi\right)^2 d\xi.$$

Замечание. Описанный в этом примере способ построения решения путем выделения стационарного режима и последующего нахождения отклонения от него применяется к широкому классу краевых задач со стационарными (т. е. не зависящими от времени) неоднородностями, содержащимися в уравнении или в краевых условиях (или и в уравнении, и в краевых условиях).

Пример 4. Решить задачу о поперечных колебаниях струны, один конец которой жестко закреплен, а другой свободен, если на свободном конце имеется сосредоточенная масса m_0 и начальное возбуждение произвольно.

Математическая постановка задачи:

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \qquad a^2 = \frac{T}{\rho_0},$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad u_t(x, 0) = \varphi_1(x);$$

$$u(0, t) = 0, \qquad T u_x(l, t) = m_0 u_{tt}(l, t).$$

В классе функций $\Phi(x)\Psi(t)$ ищем решения, удовлетворяющие лишь краевым условиям. Разделяя переменные, находим

$$\Psi'' + a^2\lambda\Psi = 0, \tag{23}$$

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \tag{24}$$

$$\Phi(0) = 0. \tag{25}$$

Краевое условие на правом конце запишется в виде

$$T\Phi'(l)\Psi(t) - m_0\Phi(l)\Psi''(t) = 0.$$

Заменяя в нем $\Psi''(t)$ из уравнения (23) через $\Psi(t)$ и деля обе части равенства на $\Psi(t)$, получим

$$\Phi'(l)+h\lambda\Phi(l)=0, \tag{26}$$

где $h=\frac{a^2m_0}{T}$.

Решения уравнения (24), удовлетворяющие условию (25), имеют вид $\Phi(x)=\sin\sqrt{\lambda}x$. Из условия (26) находим уравнение для определения собственных значений $\lambda_n>0$:

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{-1}{h\mu},\quad \mu=\sqrt{\lambda}\,l.$$

Им соответствуют собственные функции

$$\Phi_n(x)=\sin\frac{\mu_n}{l}x.$$

Нетрудно непосредственно убедиться, что они не ортогональны друг другу с весом $\rho(x)\equiv 1$. Этот факт не противоречит общей теореме об ортогональности собственных функций, поскольку краевое условие (26) не является обычным краевым условием типа III: оно содержит явно (а не через собственную функцию) собственное значение λ. Чтобы понять, какая ортогональность будет иметь место, заметим, что уравнение для $u(x, t)$ можно записать в следующем виде:

$$Tu_{xx}=[\rho_0+m_0\delta(x-l)]\,u_{tt}.$$

Следовательно, уравнение для собственных функций можно написать в виде

$$T\Phi''+\lambda\rho(x)\Phi=0,$$

где

$$\rho(x)=\rho_0+m_0\delta(x-l).$$

Поэтому собственные функции $\Phi_n(x)$ будут ортогональны с весом $\rho(x)$. Легко проверить это и непосредственными вычислениями.

Далее действуем по обычной схеме. Находим $\Psi_n(t)$, тогда

$$u(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{a\mu_n}{l}t+D_n\sin\frac{a\mu_n}{l}t\right)\sin\frac{\mu_n}{l}x.$$

Из начальных условий определяем коэффициенты C_n и D_n, пользуясь ортогональностью собственных функций с весом $\rho = \rho_0 + m_0\delta(x - l)$:

$$C_n = \frac{1}{\|\Phi_n\|^2}\left\{\int_0^l \rho_0\varphi(\xi)\,\Phi_n(\xi)\,d\xi + m_0\varphi(l)\,\Phi_n(l)\right\},$$

$$D_n = \frac{l}{a\mu_n\,\|\Phi_n\|^2}\left\{\int_0^l \rho_0\varphi_1(\xi)\,\Phi_n(\xi)\,d\xi + m_0\,\varphi_1(l)\,\Phi_n(l)\right\},$$

$$\|\Phi_n\|^2 = \rho_0\int_0^l \Phi_n^2(\xi)\,d\xi + m_0\Phi_n^2(l).$$

Вернемся к рассмотрению свойств собственных значений и собственных функций.

Заметим, прежде всего, что так как для функций Φ класса A имеем $R[\Phi, \Phi] \geqslant 0$, то существует

$$\inf_{\Phi \in A} \frac{R[\Phi, \Phi]}{\|\Phi\|^2} = \mu \geqslant 0.$$

Свойство 6 (экстремальное свойство) выражает

Теорема 3. *Если* $\mu = \inf\limits_{\Phi \in A} \dfrac{R[\Phi, \Phi]}{\|\Phi\|^2}$ *достигается на некоторой функции* $\tilde{\Phi}$ *из класса* A, *то* $\tilde{\Phi}$ *есть собственная функция, а* μ *— отвечающее ей собственное значение задачи* (5) — (6). *При этом* μ *будет, очевидно, наименьшим собственным значением.*

Доказательство. Для всякой функции Φ из класса A имеем $\dfrac{R[\Phi, \Phi]}{\|\Phi\|^2} - \mu \geqslant 0$; в частности, $\lambda_n = \dfrac{R[\Phi_n, \Phi_n]}{\|\Phi_n\|^2} \geqslant \mu$. Следовательно, для $\Phi \in A$:

$\Psi[\Phi] \equiv R[\Phi, \Phi] - \mu\|\Phi\|^2 \geqslant 0$, в то время как

$$\Psi[\tilde{\Phi}] = R[\tilde{\Phi}, \tilde{\Phi}] - \mu\|\tilde{\Phi}\|^2 = 0.$$

Таким образом, функционал $\Psi[\Phi]$ достигает минимума на функции $\tilde{\Phi}$. Это равносильно тому, что функция $\varphi(\alpha) = \Psi[\tilde{\Phi} + \alpha f]$, где $f \in A$, достигает минимума при $\alpha = 0$.

Но тогда $\varphi'(0)=0$. Подсчитаем эту производную:

$$\varphi'(0)=\frac{d}{d\alpha}\{R[\tilde{\Phi}+\alpha f,\ \tilde{\Phi}+\alpha f]-\mu\|\tilde{\Phi}+\alpha f\|^2\}_{\alpha=0}=$$

$$=-\frac{d}{d\alpha}\left\{\int\limits_D(\tilde{\Phi}+\alpha f)L[\tilde{\Phi}+\alpha f]\,d\tau-\mu\int\limits_D\rho(\tilde{\Phi}+\alpha f)^2\,d\tau\right\}_{\alpha=0}=$$

$$=-\int\limits_D\{fL[\tilde{\Phi}]+\tilde{\Phi}L[f]\}\,d\tau-2\mu\int\limits_D\rho\tilde{\Phi}f\,d\tau=$$

$$=-2\int\limits_D f\{L[\tilde{\Phi}]+\mu\rho\tilde{\Phi}\}\,d\tau.$$

Мы воспользовались здесь симметрией функционала $R[f,\ \tilde{\Phi}]$ на функциях класса A.

Таким образом, для произвольной функции f из A имеем

$$\int\limits_D f\{L[\tilde{\Phi}]+\mu\rho\tilde{\Phi}\}\,d\tau=0.$$

Отсюда следует[1]), что в точках непрерывности функции $L[\tilde{\Phi}]$ выполняется тождество

$$L[\tilde{\Phi}]+\mu\rho\tilde{\Phi}\equiv 0,$$

ч. т. д.

Если минимум того же функционала искать в классе функций A_k, принадлежащих A и ортогональных с весом ρ в области D собственным функциям $\Phi_1,\ \Phi_2,\dots,\ \Phi_{k-1}$, то этот минимум будет k-м по величине собственным значением λ_k, а функция, на которой он достигается, — соответствующей ему собственной функцией Φ_k. Доказательство этого предложения проводится аналогично.

С в о й с т в о 7. *С ростом $k(M)\,(q(M))$ собственные значения не убывают. Точнее, если $k_1(M)\geqslant k_2(M)$ в $\overline{D}$, то* $\lambda_n^{(1)}\geqslant\lambda_n^{(2)}$. Проведем доказательство для λ_1.

Для любой функции $\Phi\in A$

$$\frac{R_1[\Phi,\ \Phi]}{\|\Phi\|^2}\geqslant\frac{R_2[\Phi,\ \Phi]}{\|\Phi\|^2},$$

---

[1]) По основной лемме вариационного исчисления.

где R_1 и R_2 — функционалы R, соответствующие функциям $k_1(M)$ и $k_2(M)$. Следовательно,

$$\lambda_1^{(1)} = \inf_{\Phi \in A} \frac{R_1[\Phi, \Phi]}{\|\Phi\|^2} \geqslant \inf_{\Phi \in A} \frac{R_2[\Phi, \Phi]}{\|\Phi\|^2} = \lambda_1^{(2)}.$$

Для случая $q_1(M) \geqslant q_2(M)$ доказательство почти дословно повторяется.

Свойство 8. *С ростом $\rho(M)$ собственные значения не возрастают. Точнее, если $\rho_1(M) \geqslant \rho_2(M)$ в $\overline{D}$, то $\lambda_n^{(1)} \leqslant \lambda_n^{(2)}$.*

Проведем доказательство для λ_1.

Для всякой функции Φ из A выполняется неравенство

$$\frac{R[\Phi, \Phi]}{\|\Phi\|_{\rho_1}^2} \leqslant \frac{R[\Phi, \Phi]}{\|\Phi\|_{\rho_2}^2},$$

где $\|\Phi\|_{\rho_1}$ и $\|\Phi\|_{\rho_2}$ — нормы функции Φ с весами ρ_1 и ρ_2. Тогда

$$\lambda_1^{(1)} = \inf_{\Phi \in A} \frac{R[\Phi, \Phi]}{\|\Phi\|_{\rho_1}^2} \leqslant \inf_{\Phi \in A} \frac{R[\Phi, \Phi]}{\|\Phi\|_{\rho_2}^2} = \lambda_1^{(2)},$$

ч. т. д.

Из свойств 7 и 8 следует, что *в одномерном случае собственные значения λ_n с ростом n растут как n^2*. Действительно, наряду с уравнением

$$\frac{d}{dx}[k(x)\Phi'(x)] - q(x)\Phi(x) + \lambda\rho(x)\Phi(x) = 0 \tag{27}$$

рассмотрим уравнения

$$k_2\Phi'' + (\lambda\rho_1 - q_2)\Phi = 0 \tag{28}$$

и

$$k_1\Phi'' + (\lambda\rho_2 - q_1)\Phi = 0, \tag{29}$$

где k_2, q_2, ρ_2 — максимальные значения функций $k(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ на отрезке $[0, l]$, k_1, q_1, ρ_1 — их минимальные значения (или sup и inf).

Для определенности рассмотрим первую краевую задачу, т. е. будем искать решения уравнений (27), (28) и (29), удовлетворяющие краевым условиям

$$\Phi(0) = \Phi(l) = 0. \tag{30}$$

Поскольку уравнения (28) и (29) имеют постоянные коэффициенты, то собственные значения задач (28)—(30) и (29)—(30) легко находятся; они равны

$$\lambda_n'' = \frac{\pi^2 n^2}{\rho_1 l^2} k_2 + \frac{q_2}{\rho_1}, \quad \lambda_n' = \frac{\pi^2 n^2}{\rho_2 l^2} k_1 + \frac{q_1}{\rho_2}.$$

По свойствам 7 и 8 собственные значения λ_n задачи (27)—(30) заключены между λ_n' и λ_n'', т. е.

$$\lambda_n' \leqslant \lambda_n \leqslant \lambda_n''.$$

Отсюда и следует справедливость высказанного утверждения. Из этих неравенств следует также справедливость теоремы 1 (§ 1) о существовании бесконечного числа собственных значений и собственных функций для одномерного случая[1]).

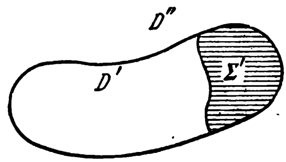

Рис. 12.

Свойство 9. *С уменьшением основной области D собственные значения не убывают, т. е. если $D' \subset D''$, то $\lambda_n' \geqslant \lambda_n''$.*

Мы проведем доказательство этого свойства лишь для λ_1 первой краевой задачи. Каждой из областей D' и D'' соответствуют свои классы функций A', A''.

Пусть некоторая функция Φ' принадлежит классу A'. Она равна нулю (в силу краевого условия на границе области D') на той части Σ' границы области D', которая содержится в D'' (см. рис. 12).

Функция Φ'', равная Φ' в области $\overline{D'}$ и нулю в области $\overline{D''} - \overline{D'}$ (заштрихованная часть), очевидно, принадлежит классу A''. Если мы проделаем такую операцию с каждой функцией класса A', то получим новый класс функций $\tilde{A}'$, содержащийся в A''. Для всякой функции $\Phi \in \tilde{A}'$ имеем

$$R''[\Phi, \Phi] = -\int_{D''} \Phi L[\Phi]\, d\tau = -\int_{D'} \Phi L[\Phi]\, d\tau = R'[\Phi, \Phi]$$

и

$$\int_{D''} \rho \Phi^2 d\tau = \int_{D'} \rho \Phi^2 d\tau,$$

[1]) Читателю рекомендуется самостоятельно провести доказательство для второй и третьей краевых задач.

ибо эта функция тождественно равна нулю в $\bar{D}'' - \bar{D}'$. Поэтому

$$\lambda_1' = \inf_{\Phi \in A'} \frac{R'[\Phi, \Phi]}{\|\Phi\|_1^2} = \inf_{\Phi \in \tilde{A}'} \frac{R''[\Phi, \Phi]}{\|\Phi\|_2^2} \geqslant \inf_{\Phi \in A''} \frac{R''[\Phi, \Phi]}{\|\Phi\|_2^2} = \lambda_1'',$$

Здесь $\|\Phi\|_1$ и $\|\Phi\|_2$ суть нормы функции Φ в областях D' и D''.

Определение. Собственное значение λ будем называть *r-кратным*, если число всех линейно независимых собственных функций, которые ему соответствуют, равно r.

Определение. Собственное значение λ будем называть *простым*, если любые две собственные функции, соответствующие этому λ, линейно зависимы.

Свойство 10. *Все собственные значения одномерной краевой задачи* (5)—(6) *простые.*

Доказательство. Пусть $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ — собственные функции, отвечающие одному и тому же собственному значению λ. Тогда обе эти функции являются решениями одного и того же уравнения

$$\frac{d}{dx}[k\Phi'] - q\Phi + \lambda\rho\Phi = 0$$

и удовлетворяют одним и тем же краевым условиям на левом конце:

$$\gamma_1\Phi_1'(0) - \gamma_2\Phi_1(0) = 0,$$

$$\gamma_1\Phi_2'(0) - \gamma_2\Phi_2(0) = 0.$$

Эти равенства можно рассматривать как систему линейных уравнений для γ_1 и γ_2. Поскольку $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0$, то определитель этой системы равен нулю. Но этот определитель есть определитель Вронского $W(x)$ для решений $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ в точке $x = 0$. Известно[1], что определитель Вронского, составленный из решений одного и того же линейного однородного уравнения, либо тождественно равен нулю, либо нигде не обращается в нуль. Так как в нашем случае $W(0) = 0$, то $W(x) \equiv 0$. Отсюда и следует линейная зависимость решений $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$. Заметим, что для многомерных краевых задач это утверждение неверно.

---

[1]) См. Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, гл. V, М., Физматгиз, 1959.

Пример 5. Рассмотрим задачу о колебаниях квадратной мембраны с закрепленными краями под действием начального возбуждения. Стороны квадрата направлены по осям координат.

Математическая постановка задачи:

$$a^2\Delta u = u_{tt}, \quad u = u(x, y, t), \tag{31}$$

$$u(0, y, t) = u(l, y, t) = 0, \tag{32}$$

$$u(x, 0, t) = u(x, l, t) = 0, \tag{33}$$

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = \varphi_1(x, y). \tag{34}$$

В классе функций вида $\Phi(x, y)\Psi(t)$ ищем решения уравнения (31), удовлетворяющие лишь краевым условиям (32), (33). Подставляя такую функцию в уравнение (31) и в соотношения (32), (33) и разделяя переменные, получим следующую задачу Штурма—Лиувилля:

$$\Delta\Phi + \lambda\Phi = 0, \tag{35}$$

$$\Phi(0, y) = \Phi(l, y) = 0, \tag{36}$$

$$\Phi(x, 0) = \Phi(x, l) = 0. \tag{37}$$

Эту задачу также можно решать методом разделения переменных. Будем искать решения в классе функций вида $\Phi(x, y) = A(x)B(y)$. Подставляя такую функцию в уравнение (35) и разделяя переменные, получим

$$\frac{A''}{A} + \frac{B''}{B} + \lambda = 0.$$

Чтобы это равенство было тождеством, необходимо, чтобы $\frac{A''}{A} = -\mu$ и $\frac{B''}{B} + \lambda = \mu$, т. е.

$$A'' + \mu A = 0, \tag{38}$$

$$B'' + (\lambda - \mu)B = 0 \quad \text{или} \quad B'' + \alpha B = 0. \tag{39}$$

Из условий (36), (37) находим

$$A(0) = A(l) = 0, \tag{40}$$

$$B(0) = B(l) = 0. \tag{41}$$

Таким образом, мы имеем первые краевые задачи (38), (40) и (39), (41). Собственные значения μ и $\lambda - \mu$ должны быть положительными (по свойству 5). Как и в примере 1, находим

$$\mu_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$A_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

а также

$$\alpha_k = \frac{\pi^2 k^2}{l^2} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$B_k(y) = \sin \frac{\pi k}{l} y.$$

Но $\alpha_k = \lambda - \mu_n$. Следовательно, $\lambda_{n,k} = \alpha_k + \mu_n$, или

$$\lambda_{n,k} = \frac{\pi^2}{l^2}(n^2 + k^2),$$

где k и n независимо друг от друга принимают значения 1, 2,... Таким образом, мы нашли собственные значения задачи (35)—(37). Им соответствуют собственные функции

$$\Phi_{n,k}(x, y) = \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi k}{l} y.$$

Собственные значения $\lambda_{n,k}$ и $\lambda_{k,n}$, очевидно, совпадают, а отвечающие им собственные функции

$$\Phi_{n,k} = \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi k}{l} y \text{ и } \Phi_{k,n} = \sin \frac{\pi k}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} y$$

линейно независимы. Например, $\lambda_{1,2} = \lambda_{2,1} = 5\frac{\pi^2}{l^2}$,

$$\Phi_{1,2} = \sin \frac{\pi}{l} x \sin \frac{2\pi}{l} y \text{ и } \Phi_{2,1} = \sin \frac{2\pi}{l} x \sin \frac{\pi}{l} y.$$

Таким образом, в этой задаче собственные значения не являются простыми.

Решение задачи (31) — (34) представляется рядом

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (C_{n,k} \cos a\sqrt{\lambda_{n,k}}\, t +$$

$$+ D_{n,k} \sin a\sqrt{\lambda_{n,k}}\, t) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi k}{l} y,$$

в котором коэффициенты $C_{n,k}$ и $D_{n,k}$ вычисляются по формулам:

$$C_{n,k}=\frac{4}{l^2}\int_0^l\int_0^l \varphi(\xi, \eta)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\sin\frac{\pi k}{l}\eta d\xi d\eta,$$

$$D_{n,k}=\frac{4}{al^2\sqrt{\lambda_{n,k}}}\int_0^l\int_0^l \varphi_1(\xi, \eta)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\sin\frac{\pi k}{l}\eta d\xi d\eta.$$

§ 2. Некоторые свойства совокупности собственных функций

Здесь мы рассмотрим некоторые свойства совокупности собственных функций $\{\Phi_n\}$.

Определение. Система попарно ортогональных в области (с весом ρ) функций $\{\Phi_n\}$ называется *полной в* $\bar{D}$, если для всякой функции $f(M)$, интегрируемой с квадратом в $\bar{D}$, выполняется равенство

$$\int_D \rho f^2 d\tau=\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 \|\Phi_k\|^2, \tag{42}$$

где C_k — коэффициенты Фурье функции $f(M)$ по функциям системы $\{\Phi_k\}$.

Достаточный признак полноты системы $\{\Phi_n\}$. *Если для всякой непрерывной в* $\bar{D}$ *функции* $F(M)$ *и для любого* $\varepsilon>0$ *существует линейная комбинация* $S_n=$ $=\alpha_1\Phi_1+\ldots+\alpha_n\Phi_n$, *для которой* $\int_D \rho(F-S_n)^2 d\tau<\varepsilon$, *то система* $\{\Phi_n\}$ *полна.*

Мы приведем лишь схему доказательства этого признака. Зафиксируем $\varepsilon>0$. Для всякой функции $f(M)$ с интегрируемым квадратом в $\bar{D}$ найдется такая непрерывная в $\bar{D}$ функция $\varphi(M)$, что $\int_D \rho(f-\varphi)^2 d\tau<\frac{\varepsilon}{4}$ [1]. Для функции $\varphi(M)$

[1] Это утверждение требует доказательства, на котором мы не будем останавливаться. Заметим лишь, что для одномерного и двумерного случаев такая функция $\varphi(M)$ строится просто. (См. Толстов Г. П., Ряды Фурье, М., Физматгиз, 1960).

и для выбранного ε по условию найдется такая линейная комбинация $S_n = \alpha_1\Phi_1 + \ldots + \alpha_n\Phi_n$, для которой

$$\int\limits_D \rho(\varphi - S_n)^2 d\tau < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Оценим интеграл

$$\int\limits_D \rho\left(f - \sum_{k=1}^{n} C_k\Phi_k\right)^2 d\tau,$$

в котором $\sum\limits_{k=1}^{n} C_k\Phi_k$ — частичная сумма ряда Фурье функции $f(M)$. Очевидно,

$$\int\limits_D \rho\left(f - \sum_{k=1}^{n} C_k\Phi_k\right)^2 d\tau = \\ = \int\limits_D \rho f^2 d\tau - 2\sum_{k=1}^{n} C_k \int\limits_D \rho f\Phi_k d\tau + \sum_{k=1}^{n} C_k^2 \|\Phi_k\|^2.$$

Мы при этом воспользовались ортогональностью функций Φ_k. Поскольку $\int\limits_D \rho f\Phi_k d\tau = C_k \|\Phi_k\|^2$, то

$$\int\limits_D \rho\left(f - \sum_{k=1}^{n} C_k\Phi_k\right)^2 d\tau = \int\limits_D \rho f^2 d\tau - \sum_{k=1}^{n} C_k^2 \|\Phi_k\|^2.$$

Известно, что квадратичное отклонение $\delta_n^2 = \int\limits_D \rho(f - S_n)^2 d\tau$ будет минимальным, если в качестве S_n взять $\sum\limits_{k=1}^{n} C_k\Phi_k$ [1]). Поэтому

$$0 \leqslant \int\limits_D \rho f^2 d\tau - \sum_{k=1}^{n} C_k^2 \|\Phi_k\|^2 = \int\limits_D \rho\left(f - \sum_{k=1}^{n} C_k\Phi_k\right)^2 d\tau \leqslant \\ \leqslant \int\limits_D \rho(f - S_n)^2 d\tau \leqslant \int\limits_D \rho(f - \varphi + \varphi - S_n)^2 d\tau \leqslant 2\int\limits_D \rho(f - \varphi)^2 d\tau + \\ + 2\int\limits_D \rho(\varphi - S_n)^2 d\tau < 2\cdot\frac{\varepsilon}{4} + 2\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Мы при этом воспользовались хорошо известным неравенством

$$(A + B)^2 \leqslant 2A^2 + 2B^2.$$

---

[1]) См. Фихтенгольц Г. М., Основы математического анализа, т. II, гл. XXVIII, М., Гостехиздат, 1956, а также М., 1964 г.

Таким образом,

$$0 \leqslant \int\limits_D \rho f^2 d\tau - \sum_{k=1}^{n} C_k^2 \| \Phi_k \|^2 < \varepsilon,$$

откуда и следует условие полноты:

$$\int\limits_D \rho f^2 d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 \| \Phi_k \|^2.$$

Ряды Фурье по полным системам функций $\{\Phi_n\}$ обладают следующим замечательным свойством:

Теорема. *Если система функций $\{\Phi_n\}$ полна в области $\bar{D}$, то ряд Фурье для всякой функции с интегрируемым квадратом в D можно почленно интегрировать независимо от того, сходится он или расходится, т. е. для любой области $D' \subset D$ справедливо равенство*

$$\int\limits_{D'} f(M)\, d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int\limits_{D'} \Phi_n(M)\, d\tau.$$

Доказательство. Оценим разность $\delta_n = \int\limits_{D'} f d\tau - \sum_{k=1}^{n} C_k \int\limits_{D'} \Phi_k d\tau$:

$$|\delta_n| = \left| \int\limits_{D'} \left(f - \sum_{k=1}^{n} C_k \Phi_k \right) d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{D'} \left| f - \sum_{k=1}^{n} C_k \Phi_k \right| d\tau \leqslant \int\limits_{D} \left| f - \sum_{k=1}^{n} C_k \Phi_k \right| d\tau.$$

Для оценки последнего интеграла воспользуемся неравенством Коши-Буняковского:

$$\int\limits_D \left| f - \sum_{k=1}^{n} C_k \Phi_k \right| d\tau = \int\limits_D \sqrt{\rho} \left| f - \sum_{k=1}^{n} C_k \Phi_k \right| \frac{d\tau}{\sqrt{\rho}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int\limits_D \rho \left(f - \sum_{k=1}^{n} C_k \Phi_k \right)^2 d\tau} \sqrt{\int\limits_D \frac{d\tau}{\rho}} =$$

$$= \sqrt{\int\limits_D \rho f^2 d\tau - \sum_{k=1}^{n} C_k^2 \| \Phi_k \|^2} \sqrt{\int\limits_D \frac{d\tau}{\rho}}.$$

Последний интеграл ограничен, а разность

$$\int_D \rho f^2 d\tau - \sum_{k=1}^{n} C_k^2 \| \Phi_k \|^2$$

при $n \to \infty$ стремится к нулю по условию полноты. Следовательно, $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$, ч. т. д.

Теорема. *Система собственных функций краевой задачи* (5) — (6) *полна.*

Доказательство. Возьмем произвольную непрерывную в $\overline{D}$ функцию $f(M)$. Тогда, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, в классе A (см. § 1) найдется такая функция $g(M)$, что

$$\int_D \rho (f - g)^2 d\tau < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{43}$$

Функция $g(M)$ представляется рядом Фурье по собственным функциям, $g(M) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \Phi_k$, равномерно сходящимся в $\overline{D}$. Следовательно, для всякого $\varepsilon_1 > 0$ найдется такое $N(\varepsilon_1)$, что

$$\left| g - \sum_{k=1}^{n} C_k \Phi_k \right| < \varepsilon_1 \text{ для } n > N(\varepsilon_1). \tag{44}$$

Покажем, что $\int_D \rho \left(f - \sum_{k=1}^{n} C_k \Phi_k\right)^2 d\tau < \varepsilon$. Тогда согласно достаточному признаку полноты система $\{\Phi_n\}$ будет полной. Очевидно,

$$\int_D \rho \left(f - \sum_{k=1}^{n} C_k \Phi_k\right)^2 d\tau = \int_D \rho \left(f - g + g - \sum_{k=1}^{n} C_k \Phi_k\right)^2 d\tau \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int_D \rho (f - g)^2 d\tau + 2 \int_D \rho \left(g - \sum_{k=1}^{n} C_k \Phi_k\right)^2 d\tau.$$

Используя неравенства (43) и (44), получим

$$\int_D \rho \left(f - \sum_{k=1}^{n} C_k \Phi_k\right)^2 d\tau < \frac{\varepsilon}{2} + 2\varepsilon_1^2 \int_D \rho d\tau < \varepsilon,$$

если взять $\varepsilon_1 \leqslant \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2\sqrt{B}}$, где $B = \int_D \rho d\tau$.

Эта теорема вместе с предыдущей позволяет интегрировать почленно ряды Фурье по собственным функциям краевой задачи (5) — (6) для всякой функции, интегрируемой с квадратом, не заботясь не только о равномерной сходимости этих рядов, но даже вообще об их сходимости.

§ 3. Решение неоднородных краевых задач методом Фурье

Знание системы собственных функций $\{\Phi_n\}$ и соответствующих им собственных значений $\{\lambda_n\}$ позволяет решать и неоднородные краевые задачи. Рассмотрим некоторые из них.

1. Пусть требуется найти решение задачи

$$L[u]+f(M, t)=\rho u_{tt} \text{ (соответственно } u_t), \tag{45}$$

$$u(M, 0)=0, \quad u_t(M, 0)=0, \tag{46}$$

$$\left(\gamma_1 \frac{\partial u}{\partial n}+\gamma_2 u\right)_S=0, \tag{47}$$

непрерывное в замкнутой области $\bar{B} \equiv \{M \in \bar{D};\ t \geqslant 0\}$.

Искомое решение $u(M, t)$ принадлежит классу A, поэтому, согласно теореме Стеклова, оно может быть представлено в виде ряда Фурье по собственным функциям $\{\Phi_n\}$ соответствующей однородной задачи (5) — (6):

$$u(M, t)=\sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(t)\,\Phi_n(M), \tag{48}$$

где

$$\Psi_n(t)=\frac{1}{\|\Phi_n\|^2} \int_D \rho u(P, t)\,\Phi_n(P)\,d\tau. \tag{49}$$

Выражая $\rho\Phi_n$ под знаком интеграла (49) из уравнения (5), получим

$$\Psi_n(t)=\frac{-1}{\lambda_n\|\Phi_n\|^2} \int_D uL[\Phi_n]\,d\tau=\frac{R[u, \Phi_n]}{\lambda_n\|\Phi_n\|^2}=$$

$$=\frac{R[\Phi_n, u]}{\lambda_n\|\Phi_n\|^2}=\frac{-1}{\lambda_n\|\Phi_n\|^2} \int_D \Phi_n L[u]\,d\tau.$$

Выражая $L[u]$ из уравнения (45), получим

$$\Psi_n(t)=\frac{-1}{\lambda_n\|\Phi_n\|^2} \int_D \rho u_{tt}\Phi_n\,d\tau+\frac{1}{\lambda_n\|\Phi_n\|^2} \int_D f\Phi_n\,d\tau. \tag{50}$$

Первое слагаемое в правой части формулы (50) равно $\frac{-\Psi_n''}{\lambda_n}$. Второе слагаемое представляет известную функцию, обозначим ее через $f_n(t)\frac{1}{\lambda_n}$. Таким образом,

$$\Psi_n(t) \equiv \frac{-\Psi_n''}{\lambda_n} + \frac{f_n}{\lambda_n}.$$

Следовательно, $\Psi_n(t)$ есть решение уравнения

$$\Psi_n'' + \lambda_n \Psi_n = f_n(t) \quad (\text{соответственно } \Psi_n' + \lambda_n \Psi_n = f_n)$$

с дополнительными условиями:

$$\Psi_n(0) = \frac{1}{\|\Phi_n\|^2} \int\limits_D \rho u(P,\ 0)\, \Phi_n(P)\, d\tau = 0,$$

$$\Psi_n'(0) = \frac{1}{\|\Phi_n\|^2} \int\limits_D \rho u_t(P,\ 0)\, \Phi_n(P)\, d\tau = 0.$$

Решение такой задачи имеет вид

$$\Psi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int\limits_0^t \sin \sqrt{\lambda_n}\,(t-\theta)\, f_n(\theta)\, d\theta$$

$$\left(\text{соответственно } \Psi_n(t) = \int\limits_0^t e^{-\lambda_n(t-\theta)} f_n(\theta)\, d\theta\right).$$

Подставляя полученные функции $\Psi_n(t)$ в формулу (48), получим искомое решение в виде ряда Фурье по собственным функциям. Если, в частности, $f(M,\ t) = f(t)\,\delta(M,\ M_0)$, то

$$f_n(t) = \frac{1}{\|\Phi_n\|^2} \int\limits_D f(t)\, \delta(P,\ M_0)\, \Phi_n(P)\, d\tau = \frac{\Phi_n(M_0)}{\|\Phi_n\|^2} f(t)$$

и

$$\Psi_n(t) = \frac{\Phi_n(M_0)}{\sqrt{\lambda_n}\, \|\Phi_n\|^2} \int\limits_0^t \sin \sqrt{\lambda_n}\,(t-\theta)\, f(\theta)\, d\theta$$

$$\left(\text{соответственно } \Psi_n(t) = \frac{\Phi_n(M_0)}{\|\Phi_n\|^2} \int\limits_0^t e^{-\lambda_n(t-\theta)} f(\theta)\, d\theta\right).$$

Если требуется решить задачу

$$L[u]+f(M, t)=\rho u_{tt} \qquad (\rho u_t),$$
$$u(M, 0)=\varphi(M), \qquad u_t(M, 0)=\varphi_1(M),$$
$$\left(\gamma_1 \frac{\partial u}{\partial n}+\gamma_2 u\right)_S=0,$$

то будем искать решение в виде суммы двух функций

$$u(M, t)=v(M, t)+w(M, t),$$

являющихся решениями следующих задач:

$$v: \qquad L[v]=\rho v_{tt} \qquad (\rho v_t),$$
$$v(M, 0)=\varphi(M), \qquad v_t(M)=\varphi_1(M),$$
$$\left(\gamma_1 \frac{\partial v}{\partial n}+\gamma_2 v\right)_S=0;$$

$$w: \qquad L[w]+f(M, t)=\rho w_{tt} \qquad (\rho w_t),$$
$$w(M, 0)=w_t(M, 0)=0,$$
$$\left(\gamma_1 \frac{\partial w}{\partial n}+\gamma_2 w\right)_S=0.$$

Каждую из этих задач мы уже умеем решать.

2. Пусть требуется найти решение задачи

$$L[u]+f(M, t)=\rho u_{tt} \qquad (\rho u_t), \tag{51}$$
$$\left(\gamma_1 \frac{\partial u}{\partial n}+\gamma_2 u\right)_S=\beta(M, t), \tag{52}$$
$$u(M, 0)=\varphi(M), \qquad u_t(M, 0)=\varphi_1(M), \tag{53}$$

непрерывное в замкнутой области $\overline{B} \equiv \{M \in \overline{D};\ t \geqslant 0\}$.

Мы рассмотрим следующий способ решения этой задачи. Среди функций $v(M, t)$, непрерывных в замкнутой области $\overline{B}$ и имеющих в этой области кусочно-непрерывные частные производные 1-го и 2-го порядков, возьмем какую-нибудь функцию $v_1(M, t)$, которая удовлетворяет заданным краевым условиям (52). Будем искать функцию $u(M, t)$ в виде суммы $u=v_1(M, t)+w(M, t)$, где для функции $w(M, t)$, непрерывной в области $\bar{B}$, задача ставится следующим образом:

$$L[w]+f_1(M, t)=\rho w_{tt} \qquad (\rho w_t),$$
$$w(M, 0)=\bar{\varphi}(M), \qquad w_t(M, 0)=\bar{\varphi}_1(M),$$
$$\left(\gamma_1 \frac{\partial w}{\partial n}+\gamma_2 w\right)_S=0,$$

где

$$f_1(M, t)=f(M, t)+L[v_1]-\rho v_{1tt},$$
$$\bar{\varphi}(M)=\varphi(M)-v_1(M, 0), \qquad \bar{\varphi}_1(M)=\varphi_1(M)-v_{1t}(M, 0).$$

Эту задачу мы уже рассмотрели в п. **1**. Функцию $v_1(M, t)$ или угадывают или же находят методом Дюамеля (см. ниже п. **3**).

Пример 6. Требуется решить задачу

$$a^2 u_{xx}=u_{tt},$$
$$u(x, 0)=\varphi_1(x), \qquad u_t(x, 0)=\varphi_2(x),$$
$$u(0, t)=\mu_1(t), \qquad u(l, t)=\mu_2(t). \tag{*}$$

В качестве функции $v_1(x, t)$, удовлетворяющей краевым условиям (*), берем функцию [1])

$$v_1(x, t)=\frac{l-x}{l}\mu_1(t)+\frac{x}{l}\mu_2(t).$$

Решение $u(x, t)$ ищем в виде суммы

$$u(x, t)=v_1(x, t)+w(x, t).$$

Функция $w(x, t)$, очевидно, будет решением следующей задачи:

$$a^2 w_{xx}+\frac{x-l}{l}\mu_1''(t)-\frac{x}{l}\mu_2''(t)=w_{tt},$$
$$w(x, 0)=\varphi_1(x)+\frac{x-l}{l}\mu_1(0)-\frac{x}{l}\mu_2(0)=\tilde{\varphi}_1(x),$$
$$w_t(x, 0)=\varphi_2(x)+\frac{x-l}{l}\mu_1'(0)-\frac{x}{l}\mu_2'(0)=\tilde{\varphi}_2(x),$$
$$w(0, t)=w(l, t)=0.$$

[1]) Мы предполагаем, что функции $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ дважды дифференцируемы.

Функцию $w(x, t)$ ищем также в виде суммы $w = R(x, t) + Q(x, t)$, где $R(x, t)$ есть решение однородной краевой задачи

$$a^2 R_{xx} = R_{tt},$$
$$R(x, 0) = \tilde{\varphi}_1(x), \qquad R_t(x, 0) = \tilde{\varphi}_2(x),$$
$$R(0, t) = R(l, t) = 0$$

и имеет вид (см. пример 1)

$$R(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos a\sqrt{\lambda_n}\, t + D_n \sin a\sqrt{\lambda_n}\, t) \sin\frac{\pi n}{l} x,$$

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \qquad C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \tilde{\varphi}_1(\xi) \sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi,$$

$$D_n = \frac{2}{a\pi n}\int_0^l \tilde{\varphi}_2(\xi) \sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi;$$

а $Q(x, t)$ есть решение следующей задачи:

$$a^2 Q_{xx} + f(x, t) = Q_{tt},$$
$$Q(x, 0) = Q_t(x, 0) = 0,$$
$$Q(0, t) = Q(l, t) = 0,$$

где $f(x, t) = \frac{x-l}{l}\mu_1''(t) - \frac{x}{l}\mu_2''(t)$.

Согласно п. 1 решение имеет вид

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(t) \sin\frac{\pi n}{l} x.$$

Функции $\Psi_n(t)$ вычисляются по формулам:

$$\Psi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^t \sin\sqrt{\lambda_n}(t-\theta) f_n(\theta)\, d\theta,$$

где

$$f_n(\theta) = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi, t) \sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi = \frac{2}{\pi n}[(-1)^n \mu_2''(\theta) - \mu_1''(\theta)].$$

Замечание 1. Если краевые условия имеют вид

$$\alpha_1 u_x(0, t) - \beta_1 u(0, t) = \mu_1(t), \quad \alpha_2 u_x(l, t) + \beta_2 u(l, t) = \mu_2(t),$$

то в качестве функции $v_1(x, t)$ (удовлетворяющей этим краевым условиям) можно взять функцию

$$v(x, t) = Dx^2\mu_2(t) - C(x-l)^2\mu_1(t),$$

где

$$C = \frac{1}{2\alpha_1 l + \beta_1 l^2}, \quad D = \frac{1}{2\alpha_2 l + \beta_2 l^2}.$$

Замечание 2. Иногда легко найти функцию $v_1(x, t)$, удовлетворяющую не только заданным неоднородным краевым условиям, но также и заданному уравнению.

Пример 7. Требуется решить задачу:

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \tag{54}$$

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u_t(x, 0) = \varphi_2(x), \tag{55}$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = A \sin \omega t \quad \left(\frac{\omega}{a} l \neq n\pi\right). \tag{56}$$

Среди функций вида $F(x)\sin\omega t$ нетрудно найти решение уравнения (54) $v_1(x, t)$, удовлетворяющее краевым условиям (56). Действительно, подставляя такую функцию в уравнение (54) и деля обе части равенства на $\sin\omega t$, получим уравнение для $F(x)$:

$$a^2 F'' + \omega^2 F = 0. \tag{57}$$

Из краевых условий (56) находим, что

$$F(0) = 0, \quad F(l) = A. \tag{58}$$

Решение задачи (57), (58), очевидно, имеет вид

$$F(x) = A \frac{\sin\frac{\omega}{a} x}{\sin\frac{\omega}{a} l}.$$

Следовательно,

$$v_1(x, t) = A \frac{\sin\frac{\omega}{a} x}{\sin\frac{\omega}{a} l} \sin\omega t.$$

Решение задачи (54) — (56) будем искать в виде

$$u(x, t) = v_1(x, t) + w(x, t),$$

где $w(x, t)$ является решением следующей задачи:

$$a^2 w_{xx} = w_{tt},$$
$$w(0, t) = 0, \quad w(l, t) = 0,$$
$$w(x, 0) = \varphi_1(x), \quad w_t(x, 0) = \varphi_2(x) - A\omega \frac{\sin \frac{\omega}{a} x}{\sin \frac{\omega}{a} l} = \bar{\varphi}_2(x).$$

Это однородная краевая задача, которая решается методом разделения переменных.

3. Метод Дюамеля. Метод Дюамеля решения краевых задач с неоднородными краевыми условиями применяется к решению задач вида

$$L[u] = \rho(M) \left\{ \begin{matrix} u_{tt}, \\ u_t, \end{matrix} \right. \tag{59}$$

$$u(M, 0) = u_t(M, 0) = 0 \text{ (соответственно } u(M, 0) = 0), \tag{60}$$

$$\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)_S = \mu(M, t) \tag{61}$$

и состоит в следующем.

1) Сначала решаем задачу (59)—(61) со стационарной неоднородностью в краевом условии, т. е. с краевым условием вида

$$\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)_S = \eta(t)\,\mu(M, \tau)$$

(стационарная неоднородность $\mu(M, \tau)$ в краевом режиме включается с момента $t = 0$), где τ — фиксированное число. Пусть $w(M, t, \tau)$ — решение этой задачи, непрерывное вместе с производными первого порядка и с производной w_{tt} в области $(M \in D;\ t \geqslant 0)$ [1]).

Тогда решением задачи (59)—(61) с краевыми и начальными условиями вида

$$\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)_S = \eta(t - \tau)\,\mu(M, \tau), \qquad u|_{t=\tau} = u_t|_{t=\tau} = 0$$

(стационарная неоднородность $\mu(M, \tau)$ включается с момента

[1]) Решение этой задачи надо трактовать как обобщенную функцию, поскольку $\eta(t)\,\mu(M, \tau)$ есть обобщенная функция.

$t=\tau$) будет функция $w(M, t-\tau, \tau)\,\eta(t-\tau)$. Заметим, что во внутренних точках M области D выполняются тождества

$$w(M, 0, t) \equiv w_t(M, 0, t) \equiv 0. \tag{62}$$

2) Решением задачи (59)—(61) с краевыми и начальными условиями вида

$$u\,|_{t=\tau} = u_t\,|_{t=\tau} = 0,$$

$$\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)_S = \mu(M, \tau)\,[\eta(t-\tau) - \eta(t-\tau-d\tau)]$$

(стационарная неоднородность $\mu(M, \tau)$ в краевом режиме действует лишь в течение промежутка времени от $t=\tau$ до $t=\tau+d\tau$) будет функция

$$w(M, t-\tau, \tau)\,\eta(t-\tau) - w(M, t-\tau, \tau)\,\eta(t-\tau-d\tau) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}[w(M, t-\tau, \tau)\,\eta(t-\tau)]\,d\tau.$$

3) В исходной краевой задаче (59)—(61) неоднородность в краевом режиме действует в течение промежутка времени от 0 до t. Поэтому можно ожидать, что решением задачи (59) — (61) будет функция

$$u(M, t) = \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial t}[w(M, t-\tau, \tau)\,\eta(t-\tau)]\,d\tau. \tag{**}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости этого предположения. В самом деле, эту функцию можно записать также в виде

$$u(M, t) = \int\limits_0^t \eta(t-\tau)\,w_t(M, t-\tau, \tau)\,d\tau +$$
$$+ \int\limits_0^t w(M, t-\tau, \tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau,$$

ибо $\frac{d}{dt}\eta(t-\tau) = \delta(t-\tau)$. Поскольку $\eta(t-\tau) = 1$ для всех τ от 0 до t, то, используя основное свойство δ-функции, получим

$$u(M, t) = \int\limits_0^t w_t(M, t-\tau, \tau)\,d\tau + w(M, 0, t). \tag{63}$$

Из этой формулы, а также из формулы для производной

$$u_t(M, t) = \int_0^t w_{tt}(M, t-\tau, \tau)\,d\tau + w_t(M, 0, t) \tag{64}$$

непосредственно следует, что начальные условия (60) удовлетворяются ($w(M, 0, t) \equiv w_t(M, 0, t) \equiv 0$ для внутренних точек области D). Краевое условие (61) также удовлетворяется, так как

$$\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)_S = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\alpha\frac{\partial w}{\partial n} + \beta w\right)_S \eta(t-\tau)\right\} d\tau =$$

$$= \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\{\mu(M, \tau)\,\eta^2(t-\tau)\}\,d\tau = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\{\mu(M, \tau)\,\eta(t-\tau)\}\,d\tau =$$

$$= \int_0^t \mu(M, \tau)\frac{d}{dt}\eta(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t \mu(M, \tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau = \mu(M, t).$$

Подставим выражение (**) для $u(M, t)$ в уравнение (59), для чего воспользуемся формулами (63) и (64). Для внутренних точек области D, в силу (62), имеем

$$u(M, t) = \int_0^t w_t(M, t-\tau, \tau)\,d\tau,$$

$$u_t(M, t) = \int_0^t w_{tt}(M, t-\tau, \tau)\,d\tau.$$

Следовательно,

$$u_{tt} = \int_0^t w_{ttt}(M, t-\tau, \tau)\,d\tau + w_{tt}(M, 0, t).$$

Из тождества

$$L[w(M, t-\tau, \tau)] \equiv \rho(M)\,w_{tt}(M, t-\tau, \tau),$$

пользуясь непрерывностью w_{tt} в области ($M \in D$; $t \geqslant 0$), находим (при $t-\tau \to 0$)

$$L[w(M, 0, t)] = \rho(M)\,w_{tt}(M, 0, t) \equiv 0,$$

поскольку $w(M, 0, t) \equiv 0$ для внутренних точек области D, и следовательно, $L[w(M, 0, t)] \equiv 0$.

Таким образом,

$$u_{tt}(M, t) = \int_0^t w_{ttt}(M, t-\tau, \tau)\, d\tau.$$

Поэтому

$$L[u] - \rho u_{tt} \equiv \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\{L[w] - \rho w_{tt}\}\, d\tau \equiv 0,$$

так как $L[w] \equiv \rho w_{tt}$ по построению. То есть выражение (**) дает решение задачи (59)—(61).

Рассмотрим частный случай, когда $\mu(M, t) = Q(t)$. Аналогично предыдущему решение можно построить следующим образом.

1) Решаем уравнение (59) с краевым условием вида

$$\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)_S = \eta(t),$$

т. е. для $Q(t) \equiv 1$.

Пусть $R(M, t)$ — решение этой задачи. Тогда решением задачи с краевым условием вида

$$\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)_S = \eta(t)\, Q(\tau),$$

где τ — фиксированное число, будет функция $Q(\tau) R(M, t)$.

2) Решением уравнения (59) с краевыми и начальными условиями вида

$$\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)_S = Q(\tau)\, \eta(t-\tau),$$
$$u|_{t=\tau} = u_t|_{t=\tau} = 0$$

будет функция $Q(\tau) R(M, t-\tau)\, \eta(t-\tau)$. Заметим, что в силу начальных условий для всех внутренних точек области D выполняются тождества

$$R(M, 0) \equiv R_t(M, 0) \equiv 0.$$

3) Решением уравнения (59) с краевыми и начальными условиями вида

$$\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)_S = Q(\tau)\,[\eta(t-\tau) - \eta(t-\tau-d\tau)],$$
$$u|_{t=\tau} = u_t|_{t=\tau} = 0$$

будет функция

$$Q(\tau)[R(M,t-\tau)\eta(t-\tau)-R(M,t-\tau-d\tau)\eta(t-\tau-d\tau)]=$$
$$=Q(\tau)\frac{\partial}{\partial t}[R(M,t-\tau)\eta(t-\tau)]\,d\tau.$$

4) Решением исходной краевой задачи будет функция

$$u(M,t)=\int_0^t Q(\tau)\frac{\partial}{\partial t}R(M,t-\tau)\,d\tau.$$

В справедливости этого убеждаемся непосредственной проверкой, как и в предыдущем случае.

Таким образом, в этом случае достаточно найти решение $R(M,t)$ задачи с очень простой (стационарной) неоднородностью в краевом условии $Q(t)\equiv 1$.

Пример 8. Найти решение задачи

$$a^2u_{xx}=u_t,\qquad u(x,0)=0,\qquad u(0,t)=0,\qquad u(l,t)=Q(t).$$

Сначала находим решение задачи $R(x,t)$ для $Q(t)\equiv 1$. Функцию $R(x,t)$ ищем в виде суммы $R=v(x)+P(x,t)$, в которой $v(x)$ описывает стационарный режим, а $P(x,t)$ — отклонение от него.

Для $v(x)$ задача ставится следующим образом:

$$v''=0,\qquad v(0)=0,\qquad v(l)=1.$$

Решением будет функция $\frac{x}{l}$. Для $P(x,t)$ задача ставится следующим образом:

$$a^2P_{xx}=P_t,\qquad P(x,0)=\frac{-x}{l},\qquad P(0,t)=P(l,t)=0.$$

Решая эту задачу методом разделения переменных (см. пример 1), находим

$$P(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_ne^{-a^2\lambda_nt}\sin\frac{\pi n}{l}x,\qquad \lambda_n=\frac{\pi^2n^2}{l^2}.$$

Коэффициенты C_n определяются из начального условия

$$\frac{-x}{l}=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{\pi n}{l}x$$

и равны

$$C_n = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Таким образом,

$$R(x, t) = \frac{x}{l} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-a^2 \lambda_n t} \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Следовательно, решением исходной задачи будет функция

$$u(x, t) = \int_0^t Q(\tau) \frac{\partial}{\partial t} [R(x, t-\tau) \eta(t-\tau)] \, d\tau,$$

или

$$u(x, t) = \int_0^t Q(\tau) \frac{\partial}{\partial t} R(x, t-\tau) \, d\tau + \\ + \int_0^t Q(\tau) R(x, t-\tau) \delta(t-\tau) \, d\tau = \int_0^t Q(\tau) \frac{\partial}{\partial t} R(x, t-\tau) \, d\tau + \\ + Q(t) R(x, 0).$$

Функция $R(x, 0)$ равна нулю для внутренних точек отрезка $[0, l]$ и для $x = 0$, а при $x = l$ имеем $R(x, 0) = 1$.

Если надо решить задачу

$$a^2 u_{xx} = u_t, \qquad u(x, 0) = 0, \qquad u(0, t) = Q_1(t), \qquad u(l, t) = Q_2(t),$$

то решение ищем в виде суммы двух функций $u = v + w$, где для v и w задачи ставятся следующим образом:

$$v: \qquad a^2 v_{xx} = v_t, \quad v(x, 0) = 0, \quad v(0, t) = Q_1(t), \quad v(l, t) = 0;$$

$$w: \qquad a^2 w_{xx} = w_t, \quad w(x, 0) = 0, \quad w(0, t) = 0, \quad w(l, t) = Q_2(t).$$

Каждая из этих задач решается методом Дюамеля, как показано на примере.

Этот метод применяется и для решения краевых задач на полубесконечной прямой.

§ 4. Единственность решения краевых задач

1. Вопрос о единственности решения рассмотренных выше задач решается следующим образом. Если имеются два непрерывных в замкнутой области $\overline{B} \equiv \{M \in \overline{D};\ t \geqslant 0\}$ решения задачи (1)—(3) u_1 и u_2, то их разность $v(M, t) = u_1(M, t) - u_2(M, t)$ является решением однородной краевой задачи:

$$L[v] = \rho v_{tt} \quad (\text{соответственно } \rho v_t),$$
$$v(M, 0) = v_t(M, 0) = 0,$$
$$\left(\gamma_1 \frac{\partial v}{\partial n} + \gamma_2 v\right)_S = 0.$$

В классе функций A эта задача имеет единственное решение, $v \equiv 0$. Следовательно, $u_1 = u_2$. Заключение о единственности решения однородной краевой задачи в классе функций A опиралось на справедливость теоремы разложимости Стеклова. Однако требование справедливости теоремы разложимости не является необходимым для единственности решения краевых задач.

Ниже в ряде случаев мы приведем доказательства теорем единственности решения краевых задач без ссылки на теорему разложимости.

Теорема. *Решение краевой задачи*

$$\frac{\partial}{\partial x}[k u_x] + f(x, t) = \rho u_{tt},$$
$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \varphi_1(x),$$
$$\alpha_1 u_x(0, t) - \beta_1 u(0, t) = r_1(t); \quad \alpha_2 u_x(l, t) + \beta_2 u(l, t) = r_2(t),$$

где α_i, $\beta_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2)$, $k(x) > 0$, $\rho(x) > 0$, *непрерывное в замкнутой области* $\{0 \leqslant x \leqslant l;\ t \geqslant 0\}$, *единственно.*

Доказательство. Пусть $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ — два решения этой задачи. Функция $v = u_1 - u_2$ является решением однородной задачи

$$\frac{\partial}{\partial x}(k v_x) = \rho v_{tt}, \tag{65}$$
$$v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{66}$$
$$\alpha_1 v_x(0, t) - \beta_1 v(0, t) = 0; \quad \alpha_2 v_x(l, t) + \beta_2 v(l, t) = 0 \tag{67}$$

и непрерывна в области $\{0 \leqslant x \leqslant l;\ t \geqslant 0\}$. Докажем, что $v(x, t) \equiv 0$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l [k(x) v_x^2(x, t) + \rho(x) v_t^2(x, t)]\, dx\ ^{1)} \tag{68}$$

---

[1]) Нетрудно показать, что функция $E(t)$ равна энергии колебаний, описываемых уравнением $\frac{\partial}{\partial x}(k v_x) = \rho v_{tt}$ для внутренних точек отрезка $[0, l]$, и поэтому называется *интегралом энергии.*

и покажем, что $E(t) \equiv 0$. Для этого вычислим $E'(t)$:

$$E'(t) = \int_0^l (kv_x v_{xt} + \rho v_t v_{tt})\, dx.$$

Проинтегрировав первое слагаемое по частям, получим

$$E'(t) = kv_x v_t \Big|_0^l - \int_0^l v_t \left[\frac{\partial}{\partial x}(kv_x) - \rho v_{tt}\right] dx.$$

Поскольку функция $v(x, t)$ удовлетворяет уравнению (65), подынтегральное выражение равно нулю, поэтому

$$E'(t) = kv_x v_t \Big|_0^l = k(l) v_x(l, t) v_t(l, t) - k(0) v_x(0, t) v_t(0, t). \quad (69)$$

Если мы имеем дело с первой краевой задачей, то $v_t(0, t) = v_t(l, t) \equiv 0$, и следовательно, $E'(t) \equiv 0$. Если мы имеем дело со второй краевой задачей, то $v_x(l, t) = v_x(0, t) = 0$, и следовательно, $E'(t) \equiv 0$. В этих случаях $E(t) = \text{const} = E(0)$.

По формуле (68) с учетом начальных условий (66) находим $E(0) = 0$. Таким образом, для первой и второй краевых задач $E(t) \equiv 0$. Если мы имеем дело с третьей краевой задачей, то поступаем следующим образом.

Из краевых условий (67) находим

$$v_x(0, t) = \frac{\beta_1}{\alpha_1} v(0, t), \qquad v_x(l, t) = \frac{-\beta_2}{\alpha_2} v(l, t)$$

и подставляем эти значения в формулу (69). Получим

$$E'(t) = -\frac{\beta_2}{\alpha_2} k(l) v(l, t) v_t(l, t) - \frac{\beta_1}{\alpha_1} k(0) v(0, t) v_t(0, t).$$

Очевидно, это выражение можно записать в виде

$$E'(t) = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\beta_2}{2\alpha_2} k(l) v^2(l, t) + \frac{\beta_1}{2\alpha_1} k(0) v^2(0, t)\right].$$

Интегрируя это соотношение по промежутку от 0 до t, получим

$$E(t) - E(0) =$$
$$= -\frac{\beta_2}{2\alpha_2} k(l)\left[v^2(l, t) - v^2(l, 0)\right] - \frac{\beta_1}{2\alpha_1} k(0)\left[v^2(0, t) - v^2(0, 0)\right].$$

Поскольку $E(0)=0$, $v(l, 0)=v(0, 0)=0$, то

$$E(t)=\frac{-\beta_2}{2\alpha_2}k(l)v^2(l, t)-\frac{\beta_1}{2\alpha_1}k(0)v^2(0, t)\leqslant 0.$$

Но из самого определения $E(t)$ непосредственно следует, что $E(t)\geqslant 0$. Следовательно, $E(t)\equiv 0$. Таким образом, для любого решения задачи (65)—(67) $E(t)\equiv 0$, т. е.

$$\int_0^l [kv_x^2+\rho v_t^2]\,dx\equiv 0.$$

Отсюда следует, что

$$k(x)v_x^2(x, t)+\rho(x)v_t^2(x, t)\equiv 0$$

$(k(x)>0$ и $\rho(x)>0)$ и потому $v_x(x, t)\equiv 0$ и $v_t(x, t)\equiv 0.$

Следовательно, $v(x, t)\equiv\text{const}$. Поскольку $v(x, t)$ непрерывна в замкнутой области, то

$$v(x, t)=v(x, 0)\equiv 0,$$

ч. т. д.

Замечание. Требование непрерывности решения в замкнутой области существенно, так как при невыполнении этого требования единственности нет. Действительно, если мы прибавим к решению, например, первой краевой задачи функцию $\bar{u}(x, t)=C$ $(C=\text{const})$ внутри области $\{0<x<l;\ t>0\}$ и равную нулю на ее границе, то получим решение той же краевой задачи при любом значении C.

2. Обратимся теперь к уравнению параболического типа

$$\frac{\partial}{\partial x}[ku_x]=\rho u_t. \tag{70}$$

Доказательство единственности решения краевых задач для уравнений параболического типа основывается, как мы увидим ниже, на совершенно других идеях. Докажем, прежде всего, следующую теорему.

Теорема о максимуме и минимуме. *Всякое решение* $u(x, t)$ *уравнения* (70), *непрерывное в замкнутой области* $\overline{D}\equiv\{0\leqslant x\leqslant l;\ 0\leqslant t\leqslant T\}$, *принимает наибольшее и наименьшее значения или на нижней границе области* $\overline{D}$ (при $t=0$), *или на боковых границах* ($x=0$, $x=l$).

Доказательство. Если $u(x, t) \equiv \mathrm{const}$, справедливость теоремы очевидна. Поэтому пусть $u(x, t) \not\equiv \mathrm{const}$. Для определенности будем доказывать теорему для наибольшего значения [1].

Пусть $M_Г$ — наибольшее значение функции $u(x, t)$ на границах $t=0$, $x=0$, $x=l$ и M_D — наибольшее значение $u(x, t)$ в области $\bar{D}$. Требуется доказать, что $M_Г = M_D$. Предположим, что $M_D > M_Г$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$v(x, t) = u(x, t) + \alpha(T-t),$$

где число $\alpha > 0$ и $\alpha < \frac{M_D - M_Г}{2T}$. Функция $v(x, t)$ непрерывна в $\bar{D}$, следовательно, она достигает в $\bar{D}$ наибольшего значения в некоторой точке (x_1, t_1). Очевидно, $v(x_1, t_1) \geqslant M_D$, так как $v(x, t) \geqslant u(x, t)$ в $\bar{D}$.

Точка (x_1, t_1) не может лежать ни на одной из трех границ: $t=0$, $x=0$, $x=l$. Действительно,

$$|v(x, 0)| \leqslant |u(x, 0)| + \alpha T < M_Г + \frac{1}{2}(M_D - M_Г) < M_D,$$

$$|v(0, t)| \leqslant |u(0, t)| + \alpha(T-t) \leqslant M_Г + \frac{1}{2}(M_D - M_Г) < M_D,$$

$$|v(l, t)| \leqslant |u(l, t)| + \alpha(T-t) \leqslant M_Г + \frac{1}{2}(M_D - M_Г) < M_D,$$

в то время как $v(x_1, t_1) \geqslant M_D$.

Таким образом, точка (x_1, t_1) принадлежит области $D \equiv \{0 < x < l;\ 0 < t \leqslant T\}$ и поэтому в ней функция $u(x, t)$ должна удовлетворять уравнению (70). Однако

$$u_x(x_1, t_1) = v_x(x_1, t_1) = 0, \qquad u_{xx}(x_1, t_1) = v_{xx}(x_1, t_1) \leqslant 0,$$
$$u_t(x_1, t_1) = v_t(x_1, t_1) + \alpha > 0 \qquad (\text{ибо } v_t(x_1, t_1) \geqslant 0),$$

и следовательно, $u(x, t)$ в точке (x_1, t_1) не удовлетворяет уравнению (70). Полученное противоречие заставляет отказаться от гипотезы, что $M_D > M_Г$. Следовательно, $M_D = M_Г$.

Эта теорема является выражением того очевидного факта, что тепло (или диффундирующее вещество) перемещается

[1] Доказательство теоремы для наименьшего значения сводится к доказательству для наибольшего значения заменой $u(x, t)$ на $-u(x, t)$.

лишь от мест с большей температурой (концентрацией) к местам с меньшей температурой, т. е. «растекается». С заданием начальной температуры (концентрации вещества) на границе $t=0$ области D_1 с момента $t=0$ начнется процесс «растекания» тепла (вещества) во внутренние точки области. Очевидно, в силу отмеченного выше факта, при этом температура во внутренних точках не может стать выше температуры на границе $t=0$. То же можно сказать и о случаях, когда задается температура на границах $x=0$ или $x=l$.

Следствие 1. (Теорема единственности решения первой краевой задачи.) *Решение первой краевой задачи*

$$\frac{\partial}{\partial x}(ku_x)+f(x,\ t)=\rho u_t, \tag{71}$$

$$u(0,t)=\mu_1(t),\quad u(l,t)=\mu_2(t),\quad u(x,0)=\varphi(x),$$

непрерывное в области $\bar{D}_0$, $\bar{D}_0\equiv\{0\leqslant x\leqslant l;\ t\geqslant 0\}$, *единственно.*

Пусть u_1 и u_2 — два решения этой задачи. Функция $u=u_1-u_2$ является решением уравнения (70), удовлетворяющим следующим краевым и начальным условиям:

$$u(0,\ t)=u(l,\ t)=0,\qquad u(x,\ 0)=0.$$

В любой области $\bar{D}\equiv\{0\leqslant x\leqslant l;\ 0\leqslant t\leqslant T\}$ это решение непрерывно и поэтому принимает наибольшее и наименьшее значения на границах области: $t=0$, $x=0$, $x=l$. Очевидно, эти значения равны нулю. Следовательно, и $u(x,\ t)\equiv 0$ в области $\bar{D}$, ч. т. д.

Следствие 2. *Если решения уравнения* (71) $u_1(x,\ t)$ *и* $u_2(x,\ t)$, *непрерывные в области* $\bar{D}$, *на границах области* $t=0$, $x=0$, $x=l$ *удовлетворяют неравенствам* $u_1(x,t)<u_2(x,\ t)$, *то и всюду в* $\bar{D}$ *выполняется неравенство*

$$u_1(x,\ t)<u_2(x,\ t).$$

Действительно, функция $u(x,\ t)=u_2-u_1$ является решением уравнения (70), непрерывна в $\bar{D}$ и на границах $t=0$, $x=0$, $x=l$ положительна. Следовательно, наибольшее и наименьшее значения функции $u(x,t)$ положительны. Поэтому всюду в $\bar{D}$ $u(x,\ t)=u_2-u_1>0$, ч. т. д.

Следствие 3. (Теорема о непрерывной зависимости решения первой краевой задачи от краевых и начальных значений.) *Если в краевых задачах*

$$\frac{\partial}{\partial x}(ku_x)+f(x,\ t)=\rho u_t,$$

$$u(0,\ t)=\mu_1(t),\qquad u(l,\ t)=\mu_2(t),\qquad u(x,\ 0)=\varphi(x)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x}(k\bar{u}_x)+f(x,\ t)=\rho\bar{u}_t,$$

$$\bar{u}(0,\ t)=\bar{\mu}_1(t),\qquad \bar{u}(l,\ t)=\bar{\mu}_2(t),\qquad \bar{u}(x,\ 0)=\bar{\varphi}(x)$$

для функций μ_1, μ_2, $\bar{\mu}_1$, $\bar{\mu}_2$, φ, $\bar{\varphi}$ *выполняются неравенства*

$$|\mu_1(t)-\bar{\mu}_1(t)|<\varepsilon,\qquad |\mu_2(t)-\bar{\mu}_2(t)|<\varepsilon$$

для всех значений $t\geqslant 0$ *и*

$$|\varphi(x)-\bar{\varphi}(x)|<\varepsilon$$

во всех точках отрезка $0\leqslant x\leqslant l$, *то для непрерывных в* $\bar{D}$ *решений* $u(x,\ t)$ *и* $\bar{u}(x,\ t)$ *выполняется всюду в* $\bar{D}$ *неравенство*

$$|u(x,\ t)-\bar{u}(x,\ t)|<\varepsilon.$$

Это непосредственно вытекает из следствия 2.

Задачи

1. Решить задачу о колебании струны $0\leqslant x\leqslant l$ с жестко закрепленными концами, если до момента $t=0$ она находилась в состоянии равновесия под действием поперечной силы $F_0=\text{const}$, приложенной в точке $x=x_0$ струны перпендикулярно к невозмущенному положению струны, а в момент $t=0$ действие силы F_0 мгновенно прекращается.

2. Решить задачу о колебании струны с жестко закрепленными концами под действием импульса P, сообщенного струне в момент времени $t=0$ в точке $x=x_0$.

3. Стержень с жестко закрепленным концом $(x=0)$ находится в состоянии равновесия под действием продольной силы $F_0=\text{const}$, приложенной к концу $x=l$. В момент $t=0$ действие силы F_0 мгновенно прекращается. Решить задачу о колебании этого стержня.

4. Один конец стержня $(x=l)$ закреплен упруго, а другой $(x=0)$ в начальный момент времени получает продольный импульс P. Решить задачу о колебании стержня.

5. Найти температуру шара радиуса R, на поверхности которого происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой нулевой температуры. Начальная температура шара равна $f(r)$.

6. Решить задачу об остывании сферической оболочки $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, на внутренней и внешней поверхностях которой происходит конвективный теплообмен со средой нулевой температуры; $u(r, 0) = f(r)$, $R_1 < r < R_2$.

7. В замкнутом сферическом сосуде $0 \leqslant r \leqslant R$ происходит диффузия вещества, частицы которого размножаются, причем скорость размножения пропорциональна концентрации. Найти размеры сосуда (критические размеры), при которых процесс будет иметь лавинный характер, если: а) на поверхности сосуда поддерживается концентрация, равная нулю; б) стенка сосуда непроницаема; в) стенка сосуда полупроницаемая.

8. Найти собственные значения и собственные функции прямоугольной мембраны с краевыми условиями типа I, II и III. Показать в случае квадрата, что одному с. з. могут соответствовать две с. ф.

9. Определить собственные значения и собственные функции прямоугольного параллелепипеда при краевых условиях типа I, II и III.

10. Найти собственные частоты акустических резонаторов [1]), имеющих форму: а) прямоугольного параллелепипеда, б) шара.

11. Решить задачу **1** главы II.

12. Решить задачу о продольных колебаниях стержня $0 \leqslant x \leqslant l$, один конец которого закреплен жестко, а к другому с момента $t = 0$ приложена сила $F_0 = \text{const}$.

13. Решить задачу о температуре стержня $0 \leqslant x \leqslant l$, концы которого поддерживаются при постоянной температуре (u_1 и u_2), а на боковой поверхности его происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой равна $u_3 = \text{const}$. Начальная температура произвольная.

14. Решить задачу о температуре стержня $0 \leqslant x \leqslant l$, на концах и боковой поверхности которого происходит конвективный теплообмен со средами, имеющими постоянную температуру. Начальная температура произвольна.

15. Давление и температура воздуха в цилиндре $0 \leqslant x \leqslant l$ равны атмосферным; один конец цилиндра с момента $t = 0$ открыт, а другой остается все время закрытым. Концентрация некоторого газа в атмосфере равна $u_0 = \text{const}$. С момента $t = 0$ газ диффундирует в цилиндр через открытый конец. Найти количество газа $Q(t)$, продиффундировавшего в цилиндр, если его начальная концентрация в цилиндре равна нулю.

16. Решить задачу **15**, предполагая, что диффундирующий газ распадается со скоростью, пропорциональной его концентрации.

17. Найти электрическое напряжение в проводе $0 \leqslant x \leqslant l$ с пренебрежимо малыми утечкой и самоиндукцией, один конец ко-

---

[1]) *Акустическими резонаторами* называются замкнутые объемы с отражающими звук стенками, предназначенные для усиления звуковых колебаний.

торого изолирован, а к другому приложена постоянная э. д. с. E_0. Начальный потенциал равен $v_0 = \text{const}$, а начальный ток равен нулю.

18. Найти электрическое напряжение в проводе с пренебрежимо малыми утечкой и самоиндукцией, если его конец $x = l$ заземлен, начальный ток и начальный потенциал равны нулю, а к концу $x = 0$ приложена постоянная э. д. с. E_0 через сосредоточенное сопротивление R_0.

19. Проводящий слой $0 \leqslant x \leqslant l$ был свободен от электромагнитных полей. В момент $t = 0$ всюду вне слоя возникло постоянное однородное магнитное поле H_0, параллельное слою. Найти магнитное поле в слое при $t > 0$.

20. Найти температуру стержня $0 \leqslant x \leqslant l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если его начальная температура равна нулю, один конец поддерживается при нулевой температуре, а другой теплоизолирован, и с момента $t = 0$ в точке x_0, $0 < x_0 < l$, действует источник постоянной мощности Q.

21. Найти температуру однородной пластины с нулевой начальной температурой, через грань $x = 0$ которой подается, начиная с $t = 0$, тепловой поток постоянной плотности q, а грань $x = l$ поддерживается при температуре $u_0 = \text{const}$.

22. Через проводник, имеющий форму плоской пластины толщины l, пропускается, начиная с момента $t = 0$, постоянный ток, выделяющий тепло с плотностью $Q = \text{const}$. Найти температуру пластины при $t > 0$, если на границах ее происходит отдача тепла в окружающую среду по закону Ньютона. Температура среды равна $u_0 = \text{const}$. Начальная температура пластины равна нулю.

23. Начальная температура шара $0 \leqslant r \leqslant R$ равна $u_0 = \text{const}$, а на его поверхности происходит конвективный теплообмен со средой, имеющей температуру $u_1 = \text{const}$. Найти температуру шара при $t > 0$.

24. Поток тепла (за единицу времени) Q втекает через плоскую часть поверхности бруса полукруглого сечения и вытекает через остальную часть его поверхности. Найти стационарное распределение температуры по сечению бруса, считая, что втекающий и вытекающий потоки распределены с постоянными плотностями.

25. Стрелка прибора укреплена на конце стержня длины l, закрепленного в сечении $x = 0$. Решить задачу о крутильных колебаниях стержня, если в начальный момент $t = 0$ стрелка была закручена на угол α и отпущена без начальной скорости. Момент инерции стрелки относительно оси вращения равен I_0.

26. К струне $0 \leqslant x \leqslant l$ с жестко закрепленными концами с момента $t = 0$ приложена непрерывно распределенная сила с линейной плотностью: а) $\Phi = \Phi_0 \sin \omega t$, б) $\Phi = \Phi_0 \cos \omega t$, где $\Phi_0 = \text{const}$. Решить задачу о колебании струны.

27. Решить задачу о колебании струны $0 \leqslant x \leqslant l$ с жестко закрепленными концами под действием силы $F = F_0 \sin \omega t$ (и $F_0 \cos \omega t$), приложенной к точке x_0 с момента $t = 0$, при отсутствии резонанса.

28. Найти температуру стержня $0 \leqslant x \leqslant l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если с момента $t = 0$ начинают действовать тепловые источники, распределенные по стержню с плотностью $\Phi(t)\sin\frac{\pi}{l}x$. Начальная температура равна нулю. Концы поддерживаются при нулевой температуре.

29. По стержню $0 \leqslant x \leqslant l$, на боковой поверхности которого происходит конвективный теплообмен со средой нулевой температуры, движется печь со скоростью $v_0 = \mathrm{const}$. Поток тепла (в единицу времени) от печи к стержню равен $q = Ae^{-ht}$, где h — коэффициент теплообмена, входящий в уравнение теплопроводности для стержня $u_t = a^2u_{xx} - hu$. Найти температуру стержня, если его начальная температура равна нулю, а концы поддерживаются при нулевой температуре.

30. Решить задачу о продольных колебаниях стержня $0 \leqslant x \leqslant l$, если конец $x = 0$ стержня закреплен жестко, а к концу $x = l$, начиная с момента $t = 0$, приложена сила $F = A\sin\omega t$ (и $A\cos\omega t$), $A = \mathrm{const}$.

31. Решить задачу о температуре шара $0 \leqslant r \leqslant R$, если его начальная температура равна $u_0 = \mathrm{const}$, а внутрь шара, начиная с момента $t = 0$, через его поверхность подается постоянный тепловой поток плотности $q = \mathrm{const}$.

32. Стержень $0 \leqslant x \leqslant l$ с теплоизолированной боковой поверхностью и постоянным поперечным сечением составлен из двух однородных стержней $0 \leqslant x \leqslant x_0$, $x_0 \leqslant x \leqslant l$ с различными физическими свойствами. Найти температуру в стержне, если его начальная температура равна $f(x)$, а концы поддерживаются при нулевой температуре.

33. Найти температуру однородного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью, в точке x_0 которого находится сосредоточенная теплоемкость C_0. Начальная температура произвольна, а концы поддерживаются при нулевой температуре.

34. Найти напряжение в проводе с пренебрежимо малыми самоиндукцией и утечкой, если один конец его $(x = l)$ заземлен через сосредоточенную емкость C_0, а к другому $(x = 0)$ приложена постоянная э. д. с. E_0. Начальный потенциал и начальный ток равны нулю.

35. Найти решение первой внутренней краевой задачи в круге радиуса R для уравнения Лапласа с краевыми условиями: а) $u(R, \varphi) = A\cos\varphi$; б) $u(R, \varphi) = A + B\sin\varphi$; в) $u|_{r=R} = Axy$; г) $u(R, \varphi) = A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi$.

36. Решить вторую внутреннюю краевую задачу в круге радиуса R для уравнения Лапласа с краевыми условиями: а) $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C = A$; б) $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C = Ax$; в) $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C = A(x^2 - y^2)$; г) $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C = A\sin\varphi + B\sin^3\varphi$. Отметить неправильно поставленные задачи.

37. Решить первую внутреннюю краевую задачу в кольце $R_1 < r < R_2$ для уравнения Лапласа с граничными условиями $u|_{r=R_1} = u_1$, $u|_{r=R_2} = u_2$. Пользуясь решением задачи, найти емкость цилиндрического конденсатора, рассчитанную на единицу длины.

38. Найти емкость сферического конденсатора, заполненного диэлектриком с диэлектрической постоянной $\varepsilon = \varepsilon_1$ для $a < r < c$ и $\varepsilon = \varepsilon_2$ для $c < r < b$.

39. Найти потенциал электростатического поля сферы радиуса R, заряженной до потенциала u_0 и помещенной в неограниченную среду с диэлектрической постоянной ε, равной $\varepsilon = \varepsilon_1$ для $R < r < c$ и $\varepsilon = \varepsilon_2$ для $r > c$. Рассмотреть частные случаи: а) $c = \infty$; б) $\varepsilon_2 = \infty$; в) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$.

40. Найти решение внутренних краевых задач в кольце $R_1 < r < R_2$ для уравнения $\Delta u = A$ с краевыми условиями: а) $u|_{r=R} = u_1$, $u|_{r=R_2} = u_2$; б) $u|_{r=R_1} = u_1$, $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=R_2} = u_2$.

41. Найти решение краевой задачи $\Delta u = 1$, $u|_{r=R_1} = 0$, $u|_{r=R_2} = 0$ в сферическом слое $R_1 < r < R_2$.

42. Найти распределение потенциала электростатического поля $u(x, y)$ внутри коробки прямоугольного сечения $-a < x < a$, $-b < y < b$, две противоположные грани которой ($x = \pm a$) имеют потенциал V_0, а две другие заземлены.

ГЛАВА V

МЕТОД ФУНКЦИЙ ИСТОЧНИКА (ФУНКЦИЙ ГРИНА) ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

В гл. IV мы рассмотрели решение краевых задач для уравнений параболического типа. Перейдем к рассмотрению задачи Коши для уравнений параболического типа, ограничиваясь простейшими из них. Здесь метод характеристик неприменим. Для решения задачи Коши очень удобен метод функций источника (функций Грина).

§ 1. Единственность решения задачи о распространении тепла на бесконечной прямой

Рассмотрим сначала одномерную задачу. Докажем единственность ее решения [1]).

Теорема единственности. *Решение задачи Коши*

$$a^2 u_{xx} + f(x, t) = u_t, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \tag{2}$$

непрерывное и ограниченное в замкнутой области $\overline{D}_1 \equiv \equiv \{-\infty < x + \infty;\ t \geqslant 0\}$, *единственно.*

Доказательство. Пусть $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ — два решения задачи. По условию теоремы существует такое число M, что $|u_1| \leqslant M$ и $|u_2| \leqslant M$ всюду в $\overline{D}_1$. Рассмотрим функцию $v(x, t) = u_2(x, t) - u_1(x, t)$. Эта функция является решением задачи:

$$a^2 v_{xx} = v_t, \tag{3}$$

$$v(x, 0) = 0, \tag{4}$$

непрерывным в $\overline{D}_1$, причем $|v(x, t)| \leqslant 2M$ всюду в $\overline{D}_1$.

---

[1]) В гл. IV, § 3 доказывалась единственность решения краевой задачи для уравнений параболического типа.

Введем в рассмотрение область $\overline{D}_b \equiv \{|x| \leqslant b; \quad t \geqslant 0\}$ и вспомогательную функцию

$$w(x, t) = \frac{4M}{b^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right).$$

Очевидно, $w(x, t)$ является решением уравнения (3), непрерывным в области $\overline{D}_b$. Кроме того, на границах области $\overline{D}_b$ имеем $|v(x, t)| \leqslant w(x, t)$. Действительно,

$$|v(x, 0)| = 0 \leqslant w(x, 0) = \frac{2M}{b^2} x^2,$$

$$|v(\pm b, t)| \leqslant 2M \leqslant w(\pm b, t) =$$
$$= \frac{4M}{b^2}\left(\frac{b^2}{2} + a^2 t\right) = 2M + \frac{4M}{b^2} a^2 t.$$

Таким образом, к функциям $v(x, t)$ и $w(x, t)$ в области $\overline{D}_b$ мы можем применить следствие 2 (гл. IV, § 3). Согласно этому следствию $|v(x, t)| \leqslant w(x, t)$ всюду в $\overline{D}_b$. Рассмотрим теперь произвольную точку (x_1, t_1) области $\overline{D}_1$. При любом достаточно большом b эта точка принадлежит области $\overline{D}_b$. Следовательно,

$$|v(x_1, t_1)| \leqslant \frac{4M}{b^2}\left(\frac{x_1^2}{2} + a^2 t_1\right).$$

Взяв произвольное $\varepsilon > 0$ и достаточно большое b, мы будем иметь

$$|v(x_1, t_1)| \leqslant \frac{4M}{b^2}\left(\frac{x_1^2}{2} + a^2 t_1\right) < \varepsilon.$$

Следовательно, $v(x_1, t_1) = 0$. Ввиду произвольности точки (x_1, t_1) равенство $v(x, t) = 0$, т. е. $u_2 \equiv u_1$, выполняется всюду в $\overline{D}_1$.

§ 2. Фундаментальное решение (функция Грина) на прямой

1. Определение. *Фундаментальным решением* $G(x - x_0, t)$ простейшего уравнения теплопроводности на бесконечной прямой *(функцией Грина)* называется решение задачи Коши

$$a^2 u_{xx} = u_t, \tag{5}$$

$$u(x, 0) = \delta(x - x_0), \tag{6}$$

непрерывное всюду в области $\overline{D}_1'$ кроме точки $(x_0, 0)$.

Часто фундаментальное решение называют также *функцией влияния мгновенного точечного теплового источника* или, короче, *функцией источника.*

Построим эту функцию $G(x-x_0, t)$. Для этого решим сначала следующую специальную задачу Коши:

$$a^2 u_{xx} = u_t, \tag{7}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \eta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geqslant 0. \end{cases} \tag{8}$$

Будем *искать автомодельное* решение этой задачи[1]), т. е. решение в классе функций вида $f\left(\frac{x}{t^\alpha}\right)$, где число α называется *показателем автомодельности.*

Подставив функцию $u = f\left(\frac{x}{t^\alpha}\right)$ в уравнение (7), получим

$$\frac{a^2}{t^{2\alpha}} f''(z) = \frac{-\alpha z}{t} f'(z), \text{ где } z = \frac{x}{t^\alpha}.$$

Чтобы это равенство было тождественным относительно z, необходимо, чтобы $\alpha = \frac{1}{2}$. Уравнение для $f(z)$ будет иметь вид

$$f''(z) + \frac{z}{2a^2} f'(z) = 0. \tag{9}$$

Из начальных условий (8) для $u(x, t)$ находим

$$f(-\infty) = 0, \quad f(+\infty) = 1. \tag{10}$$

Таким образом, задача для $f(z)$ поставлена.

Интегрируя соотношение (9), получим

$$\ln f'(z) = \frac{-z^2}{4a^2} + \ln C, \text{ или } f'(z) = Ce^{-\frac{z^2}{4a^2}}.$$

Отсюда

$$f(z) = C \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}} d\xi = 2aC \int_{-\infty}^{\frac{z}{2a}} e^{-y^2} dy.$$

Эта функция удовлетворяет первому из условий (10); из

---

[1]) Об автомодельных решениях см. Седов Л. И., Методы подобия и размерности в механике, М., Гостехиздат, 1957.

второго условия находим соотношение для определения C

$$1 = 2aC\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = 2aC\sqrt{\pi}.$$

Отсюда $C = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}$. Таким образом, решение задачи (7)—(8) имеет вид

$$u(x, t) = f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4a^2t}}} e^{-y^2}dy.$$

Его можно записать также в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-y^2}dy + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\frac{x}{\sqrt{4a^2t}}} e^{-y^2}dy,$$

или

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\left[1 + \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{4a^2t}}\right)\right],$$

где $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-y^2}dy$ — интеграл ошибок.

Если условие (8) написать в виде

$$u(x, 0) = u_0\eta(x - x_0),$$

то решением задачи (7)—(8) будет функция

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2}\left[1 + \Phi\left(\frac{x - x_0}{\sqrt{4a^2t}}\right)\right].$$

Если же $u(x, 0) = u_0[\eta(x - x_1) - \eta(x - x_2)]$, то

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2}\left[\Phi\left(\frac{x - x_1}{4a^2t}\right) - \Phi\left(\frac{x - x_2}{4a^2t}\right)\right]. \qquad (11)$$

Представим себе теперь, что на отрезке $[x_1, x_2]$ в начальный момент времени ($t = 0$) выделилось количество тепла Q, равномерно распределенное по отрезку. Это равносильно заданию начальной температуры

$$u(x, 0) = \frac{Q}{c\rho(x_2 - x_1)}[\eta(x - x_1) - \eta(x - x_2)].$$

Такому начальному значению соответствует, в силу (11), решение задачи Коши

$$u(x, t) = \frac{Q}{2c\rho} \cdot \frac{\Phi\left(\frac{x - x_1}{\sqrt{4a^2t}}\right) - \Phi\left(\frac{x - x_2}{\sqrt{4a^2t}}\right)}{x_2 - x_1}. \tag{12}$$

Если мы теперь будем стягивать отрезок $[x_1, x_2]$ в точку x_0 и сохранять при этом количество тепла Q, то функция (12) будет стремиться к пределу, равному

$$-\frac{Q}{c\rho}\frac{\partial}{\partial z}\Phi\left(\frac{x - z}{\sqrt{4a^2t}}\right)\Bigg|_{z = x_0} = \frac{Q}{c\rho}\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция

$$G(x - x_0, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}} \tag{*}$$

удовлетворяет уравнению (5). Кроме того, $G(x - x_0, 0) = \delta(x - x_0)$, ибо устремляя t к нулю по последовательности $\{t_n\}$, где $t_n = \frac{1}{4a^2n}$, мы получим последовательность значений функций $G(x - x_0, t_n) = \sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-n(x-x_0)}$, определяющую δ-функцию $\delta(x - x_0)$ (см. Дополнение). Непрерывность функции $G(x - x_0, t)$ всюду в $\overline{D}_1$, кроме точки $(x_0, 0)$, очевидна. Таким образом, $G(x - x_0, t)$ является решением задачи (5)—(6) и, следовательно, является искомым фундаментальным решением. Функция $G(x - \xi, t)$ дает температуру бесконечной прямой (например, бесконечного тонкого стержня) при $t > 0$, обусловленную мгновенным выделением в начальный момент времени ($t = 0$) в точке $x = \xi$ количества тепла $Q = c\rho$; поэтому вполне оправдано ее второе наименование как функции влияния мгновенного точечного теплового источника. Если $Q \neq c\rho$, то температура равна $\frac{Q}{c\rho}G(x - \xi, t)$.

Замечание. Если в точках ξ_1 и ξ_2 в начальный момент времени мгновенно выделились количества тепла, равные соответственно Q_1 и Q_2, то температура бесконечной прямой, обусловленная этими источниками, равна

$$\frac{Q_1}{c\rho}G(x - \xi_1, t) + \frac{Q_2}{c\rho}G(x - \xi_2, t).$$

2. Определение. *Фундаментальным решением* простейшего уравнения теплопроводности (*функцией Грина*) на полубесконечной прямой с краевым условием $u(0, t) = 0$ (или $u_x(0, t) = 0$) называется решение задачи

$$a^2 u_{xx} = u_t,$$
$$u(x, 0) = \delta(x - x_0) - \delta(x + x_0)$$

(или, соответственно, задачи

$$a^2 u_{xx} = u_t,$$
$$u(x, 0) = \delta(x - x_0) + \delta(x + x_0)),$$

непрерывное всюду в замкнутой области $\overline{D}_1$, кроме точек $(-x_0, 0)$ и $(x_0, 0)$.

Используя вышеприведенное замечание, находим решение:

$$G^*(x, x_0; t) = G(x - x_0, t) - G(x + x_0, t) = \\ = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\left[e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4a^2 t}}\right]$$

(соответственно $G^{**}(x, x_0; t) = G(x - x_0, t) + G(x + x_0, t) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\left[e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4a^2 t}}\right]\Bigg).$$

§ 3. Решение задачи о распространении тепла на бесконечной прямой

1. Теперь мы можем построить решение задачи Коши. Рассмотрим сначала однородное уравнение

$$a^2 u_{xx} = u_t, \tag{13}$$
$$u(x, 0) = \varphi(x). \tag{14}$$

Воспользуемся температурной интерпретацией задачи.

На прямой $t = 0$ возьмем отрезок длины $d\xi$, содержащий точку $x = \xi$. Количество тепла, выделившегося в момент $t = 0$ на этом отрезке, равно $c\rho\varphi(\xi)\,d\xi$. Это количество тепла можно отнести к точке ξ. Таким образом, мы будем иметь точечный источник, в котором мгновенно в момент времени $t = 0$ в точке $x = \xi$ выделилось количество тепла

$dQ = c\rho\varphi(\xi)\,d\xi$. Температура на бесконечной прямой для $t > 0$, обусловленная действием этого источника, равна

$$\frac{dQ}{c\rho} G(x-\xi,\ t) = \varphi(\xi)\, G(x-\xi,\ t)\, d\xi.$$

И так для каждого отрезка длины $d\xi$ прямой $t=0$. Имея в виду замечание на стр. 119, естественно предположить, что температура, обусловленная действием всех таких отрезков, т. е. обусловленная заданием начальной температуры $u(x,\ 0) = \varphi(x)$, будет равна

$$u(x,\ t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, G(x-\xi,\ t)\, d\xi. \qquad (15)$$

Если это верно, то функция (15) и будет решением задачи Коши (13)—(14). Чтобы убедиться в справедливости последнего, достаточно доказать, что функция (15) удовлетворяет уравнению (13) для всех $-\infty < x < \infty$ и $t > 0$, а также начальному условию (14).

Проверим сначала условие (14). Согласно формуле (15) и учитывая также, что $G(x-\xi,\ 0) = \delta(x-\xi)$, имеем

$$u(x,\ 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, G(x-\xi,\ 0)\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, \delta(x-\xi)\, d\xi = \varphi(x).$$

Последний интеграл равен $\varphi(x)$, согласно основному свойству δ-функции. Таким образом, функция (15) действительно удовлетворяет условию (14).

Чтобы установить, что функция (15) является решением уравнения (13), достаточно доказать, что эту функцию можно дифференцировать по x (дважды) и по t под знаком интеграла. Действительно, если

$$u_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, G_{xx}(x-\xi,\ t)\, d\xi \quad \text{и} \quad u_t = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, G_t(x-\xi,\ t)\, d\xi,$$

то

$$a^2 u_{xx} - u_t = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, \{a^2 G_{xx} - G_t\}\, d\xi \equiv 0,$$

так как функция $G(x-\xi,\ t)$ является решением уравнения (13).

Очевидно, достаточно показать, что интеграл (15) сходится, а интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, G_t d\xi, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, G_x d\xi \text{ и } \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, G_{xx} d\xi \qquad (**)$$

равномерно сходятся в области $D_\varepsilon \equiv \{-\infty < x < \infty;\ t \geqslant \varepsilon\}$ с произвольным $\varepsilon > 0$.

Будем предполагать при этом, что $\varphi(x)$ ограничена, т. е. $|\varphi(x)| \leqslant M$.

В интеграле (15) произведем замену переменной интегрирования: $\alpha = \dfrac{\xi - x}{\sqrt{4a^2t}}$. Тогда (см. формулу (*) на стр. 119):

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2a\alpha\sqrt{t})\, e^{-\alpha^2}\, d\alpha,$$

$$|u(x, t)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x + 2a\alpha\sqrt{t})|\, e^{-\alpha^2}\, d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha = M. \qquad (16)$$

Таким образом, интеграл (15) сходится, притом равномерно, в области $\overline{D}_1$ и $|u| \leqslant M$. Если предположить дополнительно, что $\varphi(x)$ непрерывна всюду, то из этого следует также непрерывность функции (15) в замкнутой области $\overline{D}_1$ [1]).

З а м е ч а н и е. Из неравенства (16) следует, что, если начальные значения $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ отличаются меньше, чем на ε, т. е. $|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \varepsilon$ для всех x, то соответствующие им решения задачи Коши $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ также отличаются друг от друга меньше, чем на ε, т. е.

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| < \varepsilon.$$

Таким образом, решение задачи Коши непрерывно зависит от начальных значений.

---

[1]) При дополнительном предположении об ограниченности функции $\varphi(x)$. Если $\varphi(x)$ кусочно-непрерывна, то функция (15) непрерывна всюду в $\overline{D}_1$, кроме точек прямой $t = 0$, в которых $\varphi'(x)$ разрывна.

Рассмотрим теперь первый из интегралов (**)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, G_t d\xi = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)}{2t} G(x-\xi, t)\, d\xi + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)(x-\xi)^2}{4a^2t^2} G(x-\xi, t)\, d\xi.$$

Первый интеграл заменой переменной $\alpha = \frac{\xi - x}{\sqrt{4a^2t}}$ сводится к интегралу

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}\, t} \varphi(x + 2a\alpha\sqrt{t})\, e^{-\alpha^2}\, d\alpha.$$

Этот интеграл равномерно сходится в области D_ε с произвольным $\varepsilon > 0$, поскольку подынтегральная функция мажорируется в этой области функцией $\frac{M}{2\sqrt{\pi}\,\varepsilon} e^{-\alpha^2}$, интеграл от которой сходится. Второй интеграл (**) той же заменой переменной сводится к интегралу $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2}{\sqrt{\pi}\, t} \varphi(x + 2a\alpha\sqrt{t})\, e^{-\alpha^2} d\alpha$. Этот интеграл равномерно сходится в области D_ε с произвольным $\varepsilon > 0$, поскольку подынтегральная функция мажорируется в этой области функцией $\frac{M}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \alpha^2 e^{-\alpha^2}$, интеграл от которой сходится. Аналогично поступаем с третьим интегралом (**). Таким образом, мы доказали, что формула (15) действительно дает решение задачи Коши (13) — (14).

Аналогично строятся решения задач:

а) $a^2 u_{xx} = u_t$, $u(x, 0) = \varphi(x)$ $(0 \leqslant x < \infty)$, $u(0, t) = 0$,

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} \varphi(\xi)\, G^*(x, \xi; t)\, d\xi. \tag{17}$$

б) $a^2 u_{xx} = u_t$, $u(x, 0) = 0$ $(0 \leqslant x < x)$, $u_x(0, t) = 0$,

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} G^{**}(x, \xi; t)\, \varphi(\xi)\, d\xi. \tag{18}$$

Доказательство того, что функции (17) и (18) являются решениями задач а) и б), проводится совершенно аналогично предыдущему.

Замечание 1. Из формулы (15) следует, что тепло распространяется вдоль стержня мгновенно. Действительно, пусть начальная температура $\varphi(x)$ положительна на конечном отрезке (x_1, x_2) бесконечного стержня и равна нулю вне (x_1, x_2). Тогда температура произвольной точки x стержня равна

$$u(x, t) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(\xi)\, G(x-\xi, t)\, d\xi.$$

Очевидно, при сколь угодно малых $t > 0$ эта функция положительна для любого x. К такому выводу мы пришли вследствие неточности физических предпосылок, которыми мы пользовались при постановке задачи Коши (например, при написании уравнения (13)).

Замечание 2. Полученную формулу (15) можно рассматривать как свертку (см. Дополнение) фундаментального решения

$$G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$$

с начальной функцией $\varphi(x)$, т. е.

$$u(x, t) = G(x, t) * \varphi(x).$$

Если в этой формуле в качестве начальной функции $\varphi(x)$ брать произвольную финитную обобщенную функцию, то $u(x, t)$ будет также решением задачи Коши.

2. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить задачу Коши

$$a^2 u_{xx} = u_t; \qquad u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} u_1, & x < 0, \\ u_2, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

По формуле (15)

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, G(x-\xi, t)\, d\xi =$$

$$= u_1 \int_{-\infty}^{0} G(x-\xi, t)\, d\xi + u_2 \int_{0}^{\infty} G(x-\xi, t)\, d\xi.$$

Произведя замену переменной $\alpha = \frac{x-\xi}{\sqrt{4a^2t}}$, получим

$$u(x, t) = \frac{-u_1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4a^2t}}} e^{-\alpha^2}\, d\alpha - \frac{u_2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{x}{\sqrt{4a^2t}}}^{-\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha =$$

$$= -\frac{u_1}{\sqrt{\pi}} \left(\int\limits_{\infty}^{0} + \int\limits_{0}^{\frac{x}{\sqrt{4a^2t}}} \right) - \frac{u_2}{\sqrt{\pi}} \left(\int\limits_{\frac{x}{\sqrt{4a^2t}}}^{0} + \int\limits_{0}^{-\infty} \right) =$$

$$= \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_2 - u_1}{2} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{4a^2t}} \right).$$

Пример 2. Решить задачу Коши

$$a^2 u_{xx} = u_t, \qquad u(x, 0) = Ae^{-x^2}.$$

По формуле (15) имеем

$$u(x, t) = A \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} G(x - \xi, t)\, d\xi.$$

Произведя замену переменной $\alpha = \frac{\xi - x}{\sqrt{4a^2t}}$, получим

$$u(x, t) = \frac{A}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x + 2a\alpha\sqrt{t})^2} e^{-\alpha^2}\, d\alpha =$$

$$= \frac{Ae^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-4xa\alpha\sqrt{t} - (4a^2t + 1)\alpha^2}\, d\alpha =$$

$$= \frac{Ae^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{4x^2a^2t}{1+4a^2t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{2ax\sqrt{t}}{\sqrt{1+4a^2t}} + \sqrt{1+4a^2t}\,\alpha \right)^2} d\alpha.$$

Произведя в последнем интеграле замену переменной по формуле $\frac{2ax\sqrt{t}}{\sqrt{1+4a^2t}} + \sqrt{1+4a^2t}\,\alpha = \beta$, получим

$$u(x, t) = \frac{A}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{-x^2}{1+4a^2t}} \frac{1}{\sqrt{1+4a^2t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2}\, d\beta = \frac{A}{\sqrt{1+4a^2t}} e^{\frac{-x^2}{1+4a^2t}}.$$

3. Обратимся к неоднородному уравнению. Решение задачи Коши

$$a^2 u_{xx} + f(x, t) = u_t, \tag{19}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \tag{20}$$

будем искать в виде суммы двух функций

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

являющихся решениями следующих задач:

$$v: \qquad a^2 v_{xx} = v_t, \quad v(x, 0) = \varphi(x);$$

$$w: \qquad a^2 w_{xx} + f(x, t) = w_t, \tag{19}$$

$$w(x, 0) = 0. \tag{21}$$

Функция $v(x, t)$ дается формулой (15).

Для построения решения задачи (19), (21) воспользуемся снова температурной интерпретацией уравнения (19). В этом уравнении $c\rho f(x, t)$ есть плотность тепловых источников в единицу времени[1]. Следовательно, на отрезке длины $d\xi$, содержащем точку ξ, за промежуток времени $(\tau, \tau + d\tau)$ выделится количество тепла $dQ = c\rho f(\xi, \tau)\, d\xi d\tau$. Если это количество тепла считать выделившимся в точке ξ мгновенно в момент времени τ, то температура, обусловленная действием этого источника, равна

$$\frac{dQ}{c\rho} G(x - \xi, t - \tau) = f(\xi, \tau)\, G(x - \xi, t - \tau)\, d\xi d\tau.$$

Имея в виду замечание на стр. 119, естественно предположить, что температура, обусловленная действием всех таких источников (распределенных по всей прямой) в течение промежутка времени от 0 до t, будет равна

$$w(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \tau)\, G(x - \xi, t - \tau)\, d\xi d\tau. \tag{22}$$

Формула (22) дает решение задачи (19), (21). Действительно, условие (21), очевидно, удовлетворяется. Проверка же того, что функция (22) удовлетворяет уравнению (19), производится аналогично тому, как это делалось на стр. 122—123 для

---

[1]) См. вывод уравнения теплопроводности (стр. 30).

функции (15). Поэтому мы не будем производить соответствующие выкладки.

Если, в частности, тепловой источник действует лишь в точке ξ_0, но изменяется со временем, то функция $f(x, t)$ в уравнении (19) будет иметь вид

$$f(x, t) = f(t)\,\delta(x - \xi_0).$$

Тогда решение задачи (19), (21) с такой неоднородностью будет иметь вид

$$w(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - \xi_0) f(\tau)\, G(x - \xi,\ t - \tau)\, d\xi d\tau =$$

$$= \int_0^t f(\tau)\, G(x - \xi_0,\ t - \tau)\, d\tau.$$

Мы здесь воспользовались свойством δ-функции.

Замечание 3. Решение задачи Коши для неоднородного уравнения с нулевыми начальными значениями

$$a^2 u_{xx} + f(x, t) = u_t, \qquad u(x, 0) = 0$$

также можно записать в виде свертки (по двум переменным!) фундаментального решения $G(x, t)$ с функцией $f(x, t)$:

$$u(x, t) = G(x, t) * f(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi,\ t - \tau) f(\xi, \tau)\, d\xi d\tau.$$

Замечание 4. Решение задачи (19), (21) на полупрямой с краевым условием $w(0, t) = 0$ (или $w_x(0, t) = 0$) строится аналогично и дается формулой

$$w(x, t) = \int_0^t \int_0^{\infty} f(\xi, \tau)\, G^*(x, \xi, t - \tau)\, d\xi d\tau$$

(или $w = \int_0^t \int_0^{\infty} f G^{**}\, d\xi\, d\tau$).

§ 4. Решение задачи о распространении тепла в трехмерном (двумерном) пространстве

Теперь обратимся к рассмотрению задачи Коши для уравнения теплопроводности в дву- и трехмерном пространствах. Рассмотрим сначала однородное уравнение

$$a^2 \Delta u = u_t. \tag{23}$$

Определение. *Фундаментальным решением* $G(M, M_0; t)$ *уравнения* (23) называется такое его решение, которое:

а) *удовлетворяет начальному условию*

$$u(M, 0) = \delta(M, M_0); \tag{24}$$

б) *непрерывно всюду в замкнутой области* $\overline{D}_3 \equiv \equiv \{-\infty < x, y, z < \infty;\ t \geqslant 0\}$, кроме точки $(x_0, y_0, z_0, 0)$.

Здесь x, y, z и x_0, y_0, z_0 — координаты точек соответственно M и M_0, $\delta(M, M_0)$ — δ-функция с особенностью в точке M_0. Для нахождения $G(M, M_0; t)$ докажем сначала лемму.

Лемма. *Если в задаче Коши*

$$a^2 \Delta u = u_t, \qquad u(M, 0) = \varphi(M)$$

начальная функция $\varphi(M)$ *представляется в виде*

$$\varphi(M) = \varphi_1(x)\,\varphi_2(y)\,\varphi_3(z),$$

то решением задачи будет функция

$$u(M, t) = u_1(x, t)\,u_2(y, t)\,u_3(z, t),$$

где $u_1(x, t)$, $u_2(y, t)$ $u_3(z, t)$ — *решения соответствующих одномерных задач:*

$$a^2 u_{1xx} = u_{1t}, \quad u_1(x, 0) = \varphi_1(x)$$

и т. д.

Доказательство. В силу условий леммы

$$a^2 \Delta(u_1 u_2 u_3) = u_2 u_3 a^2 u_{1xx} + u_1 u_3 a^2 u_{2yy} + u_1 u_2 a^2 u_{3zz} \equiv$$
$$\equiv u_2 u_3 u_{1t} + u_1 u_3 u_{2t} + u_1 u_2 u_{3t} \equiv (u_1 u_2 u_3)_t.$$

Таким образом, $u = u_1 u_2 u_3$ удовлетворяет данному уравнению и, очевидно, также начальному условию.

Заметим далее, что $\delta(M, M_0) = \delta(x - x_0)\,\delta(y - y_0)\,\delta(z - z_0)$. Поэтому, применяя доказанную лемму к задаче (23) — (24), получим искомое фундаментальное решение

$$G(M, M_0; t) = G(x - x_0, t)\,G(y - y_0, t)\,G(z - z_0, t).$$

Используя формулы для одномерных фундаментальных решений $G(x - x_0, t)$ и т. д., получим

$$G(M, M_0; t) = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\right)^3 e^{-\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}{4a^2 t}}$$

для трехмерного пространства и

$$G(M, M_0; t) = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\right)^2 e^{-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{4a^2t}}$$

для двумерного пространства.

По причинам, о которых мы говорили в § 1 (стр. 119), эти функции называют также функциями влияния мгновенного точечного теплового источника. Если в точке M_0 в начальный момент $t=0$ мгновенно выделится количество тепла, равное Q, то температура в произвольной точке M пространства, обусловленная действием этого источника, равна (для $t>0$) $\frac{Q}{c\rho} G(M, M_0; t)$. Используя это обстоятельство, легко построить решение задачи Коши для однородного уравнения

$$a^2 \Delta u = u_t, \qquad u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z).$$

Решением будет функция

$$u(x, y, z, t) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t)\, d\xi d\eta d\zeta. \tag{25}$$

Решением задачи

$$a^2 \Delta u + f(x, y, z, t) = u_t, \qquad u(x, y, z, 0) = 0$$

будет функция

$$u(x, y, z, t) = \\ = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta, \zeta, \tau)\, G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta; t-\tau)\, d\xi d\eta d\zeta d\tau. \tag{26}$$

Решение задачи Коши для неоднородного уравнения

$$a^2 \Delta u + f(M, t) = u_t, \qquad u(M, 0) = \varphi(M)$$

равно сумме функций (25) и (26).

Доказательства последних утверждений проводятся почти дословно так же, как это делалось для одномерного случая. Поэтому мы их не будем приводить.

Замечание. Решение задачи Коши

$$a^2 \Delta u = u_t, \qquad u(M, 0) = \varphi(x, y, z)$$

можно также записать в виде свертки (по трем переменным!) фундаментального решения

$$G(x, y, z; t)=\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\right)^3 e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4a^2 t}}$$

с начальной функцией $\varphi(x, y, z)$:

$$u(x, y, z, t)=G(x, y, z; t)*\varphi(x, y, z)=$$

$$=\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi, y-\eta, z-\zeta; t)\,\varphi(\xi, \eta, \zeta)\,d\xi d\eta d\zeta.$$

Мы проиллюстрировали применение метода функций источника к решению задач в бесконечном пространстве или в полупространстве. Этот метод можно применять также и к решению краевых задач в ограниченных (по пространственным переменным) областях. Так, если определить фундаментальное решение первой краевой задачи как решение задачи

$$a^2 u_{xx}=u_t,$$

$$u(0, t)=0=u(l, t), \qquad u(x, 0)=\delta(x-x_0),$$

непрерывное всюду в области $\overline{D}_l\equiv\{0\leqslant x\leqslant l;\ t\geqslant 0\}$, кроме точки $(x_0, 0)$ (обозначим это решение через $\overline{G}(x, x_0; t)$)[1]), то решение задачи

$$a^2 u_{xx}=u_t,$$

$$u(0, t)=u(l, t)=0, \qquad u(x, 0)=\varphi(x)$$

можно записать в виде

$$u(x, t)=\int\limits_0^l \varphi(\xi)\,\overline{G}(x, \xi; t)\,d\xi.$$

Аналогично обстоит дело в случаях второй и третьей краевых задач. Однако этот метод не характерен для ограниченных областей и обычно не применяется.

---

[1]) Решая эту задачу методом разделения переменных, находим

$$\overline{G}(x, x_0; t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\sin\frac{\pi n}{l}x_0\cdot\sin\frac{\pi a n t}{l}.$$

Задачи

1. Начальный ток и начальное напряжение в полубесконечном однородном проводе $0 \leqslant x \leqslant \infty$ равны нулю. Самоиндукция единицы длины провода пренебрежимо мала. С момента $t = 0$ к концу провода приложена постоянная э. д. с. E_0. Найти напряжение в проводе.

2. Найти распределение температуры в неограниченном пространстве, вызванное тем, что в начальный момент $t = 0$ на сферической поверхности радиуса r_0 выделилось мгновенно Q равномерно распределенных единиц тепла. (Построение функции влияния мгновенного сферического источника тепла.)

3. Найти концентрацию диффундирующего вещества в неограниченном пространстве, начальная концентрация которого равна $u|_{t=0} = u_0 = \text{const}$ для $0 \leqslant r < R$ и $u|_{t=0} = 0$ для $r > R$.

4. Решить задачу 3 для полупространства $z > 0$, предполагая что $z_0 < R$, $(0, 0, z_0)$ — координаты центра сферы, в которой начальная концентрация равна u_0. Рассмотреть случаи, когда а) плоскость $z = 0$ непроницаемая для диффундирующего вещества, б) на плоскости $z = 0$ поддерживается концентрация, равная нулю.

5. Найти температуру полубесконечного стержня $0 \leqslant x < \infty$ с теплоизолированными концом и боковой поверхностью, обусловленную действием тепловых источников плотности $Q(t)$ на отрезке (a, b) $(0 < a < b)$, начиная с момента $t = t_0$.

6. С помощью функции источника, найденной в задаче 2, решить краевую задачу

$$a^2\left(u_{rr} + \frac{2}{r} u_r\right) + f(r, t) = u_t, \qquad 0 < r, \ t < \infty,$$

$$u(r, 0) = \varphi(r), \qquad |u| < \infty, \qquad r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

7. Найти распределение температуры в неограниченном пространстве, вызванное тем, что в начальный момент $t = 0$ на каждой единице длины бесконечной цилиндрической поверхности радиуса r_0 выделилось Q равномерно распределенных единиц тепла. (Построение функции влияния мгновенного цилиндрического источника тепла.)

8. С помощью функции источника, найденной в задаче 7, решить краевую задачу

$$a^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r\right) + f(r, t) = u_t, \qquad 0 < r, \ t < \infty,$$

$$u(r, 0) = \varphi(r), \qquad |u| < \infty, \qquad r^2 = x^2 + y^2.$$

9. Построить функцию влияния мгновенного точечного источника на бесконечной прямой для уравнения

$$a^2 u_{xx} - hu = u_t.$$

ГЛАВА VI

УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА. МЕТОД ФУНКЦИЙ ГРИНА

Мы рассмотрим основные методы решения краевых задач для простейшего уравнения эллиптического типа $\Delta u = f(M)$, а также вопросы единственности решений. Этому будут посвящены VI и VII главы.

§ 1. Формула Грина. Простейшие свойства гармонических функций

Все результаты, к которым мы придем в этой главе, будут получены из небольшого числа формул и соотношений. Выводом этих формул мы и займемся прежде всего.

1. Пусть функции $u(M)$ и $v(M)$ обладают следующими свойствами:

1) непрерывны вместе с частными производными первого порядка всюду в замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной поверхностью S, кроме, может быть, конечного числа точек;

2) интегрируемы вместе с частными производными первого порядка в области D;

3) имеют интегрируемые в области D частные производные второго порядка.

Тогда

$$R[u, v] = -\int_D vL[u]\,d\tau = \int_D k(\nabla u\cdot\nabla v)\,d\tau + \int_D quv\,d\tau - \int_S kv\frac{\partial u}{\partial n}\,d\tau\text{ [1]}. \qquad (1)$$

---

[1]) См. формулу (8) гл. IV.

Здесь $L[u] \equiv \operatorname{div}(k \nabla u) - qu$. Вычитая $R[u, v]$ из $R[v, u]$, получим формулу Грина

$$\int_D \{vL[u] - uL[v]\}\, d\tau = \int_S k \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}\right) d\sigma. \qquad (2)$$

Для одномерного случая формула Грина имеет вид

$$\int_0^l \{vL[u] - uL[v]\}\, dx = k \left(v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}\right)\Big|_0^l. \qquad (2_1)$$

Следствие. Пусть $L[u] \equiv \operatorname{div}(k \nabla u)$. Если для такого оператора $L[u]$ в формуле (2) положить $v \equiv 1$, а в качестве $u(M)$ взять решение уравнения $L[u] = f(M)$, непрерывное вместе с частными производными первого порядка в области $\overline{D} = D + S$, то получим

$$\int_S k \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma = \int_D f(M)\, d\tau. \qquad (3)$$

Для двусвязной области D', ограниченной двумя концентрическими сферами S_R и S_{R_1} $(R_1 < R)$ с центром в точке M_0, формула (2) запишется в виде

$$\int_{D'} \{vL[u] - uL[v]\}\, d\tau =$$

$$= \int_{S_R} k \left(v \frac{\partial u}{\partial r} - u \frac{\partial v}{\partial r}\right) d\sigma - \int_{S_{R_1}} k \left(v \frac{\partial u}{\partial r} - u \frac{\partial v}{\partial r}\right) d\sigma. \qquad (4)$$

Минус перед интегралом по S_{R_1} появился потому, что на поверхности S_{R_1} выполняется равенство $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}$.

Пусть $L[u] \equiv \Delta u$. Непрерывные решения уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ называются *гармоническими функциями*. Непосредственной проверкой убеждаемся, что в трехмерном пространстве функция $\frac{1}{r}$ является гармонической всюду, кроме точки, где $r = 0$.

В двумерном случае функция $\ln\left(\frac{1}{r}\right)$ является гармонической всюду, кроме точки, где $r = 0$.

Применяя формулу (3) к гармоническим в области D функциям (непрерывным вместе с их частными производными первого порядка в $D+S$), получим

$$\int\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma = 0. \tag{5}$$

2. Теорема о среднем значении. *Значение в центре M_0 шаровой области D_R функции $u(M)$, гармонической в D_R и непрерывной вместе с частными производными первого порядка в $\overline{D}_R = D_R + S_R$, равно среднему арифметическому ее значений на сфере S_R, т. е.*

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{S_R} u(M)\, d\sigma. \tag{6}$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (4), полагая в ней $L[u] \equiv \Delta u$,

$$v = \frac{1}{r_{M_0M}} \quad \left(r_{M_0M} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}\right);$$

в качестве $u(M)$ возьмем функцию, гармоническую в шаровой области D_R, ограниченной поверхностью S_R, и непрерывную вместе с u_x, u_y, u_z в $D_R + S_R$. При этих условиях интеграл по D' ($D' \subset D_R$) равен нулю. Интегралы по S_R и по S_{R_1} от произведения $v\frac{\partial u}{\partial r}$ в силу соотношения (5) также равны нулю (функция v равна на этих поверхностях соответственно $\frac{1}{R}$ и $\frac{1}{R_1}$, $k \equiv 1$). Таким образом, будем иметь

$$\int\limits_{S_R} u \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma - \int\limits_{S_{R_1}} u \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma = 0.$$

Вычисляя производные и применяя к последнему интегралу теорему о среднем значении интеграла, получим

$$\frac{1}{R^2} \int\limits_{S_R} u(M)\, d\sigma = \frac{1}{R_1^2} \cdot 4\pi R_1^2 \cdot u(M^*), \qquad M^* \in S_{R_1}.$$

Устремляя теперь R_1 к нулю, получим формулу (6).

Мы рассматривали гармонические функции в трехмерном пространстве. Для двумерного пространства (плоскости) теорема о среднем значении записывается соотношением

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{C_R} u(M)\, ds. \tag{7}$$

Здесь C_R — окружность с центром в точке M_0. Для получения этой формулы надо в соотношении, аналогичном (4), взять $v = \ln\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)$.

§ 2. Единственность решения краевых задач

В этом параграфе мы рассмотрим вопросы единственности решения первой и второй краевых задач. При этом надо различать внутренние и внешние краевые задачи. Постановка внутренних краевых задач приведена в гл. II. Первая внешняя краевая задача состоит в том, чтобы найти функцию, удовлетворяющую уравнению $L[u] = f(M)$ в точках, расположенных в н е замкнутой поверхности S, и принимающую заданные значения на поверхности S: $u|_S = \varphi(M)$. Аналогично ставится в т о р а я в н е ш н я я краевая задача.

1. Сначала мы рассмотрим вопросы единственности решения внутренних краевых задач.

Т е о р е м а (о наибольшем и наименьшем значении). *Функция $u(M)$, гармоническая в конечной области D, ограниченной замкнутой поверхностью S, и непрерывная в $\bar{D} = D + S$, достигает своего наибольшего и наименьшего значений на границе S.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через H_S наибольшее значение функции u на S, а через H_D — наибольшее значение u в $\bar{D}$. Нам надо доказать, что $H_D = H_S$. Предположим, что это неверно. Тогда $H_D > H_S$ и в некоторой точке M_0 ($M_0 \in D$) имеем $u(M_0) = H_D$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$v(M) = u(M) + \frac{H_D - H_S}{2d^2}\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right],$$

где d — диаметр области D, т. е. верхняя граница расстояний между точками области D; (x_0, y_0, z_0), (x, y, z) —

координаты точек M_0 и M. Очевидно, для всех точек $M \in D$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2<d^2,$$

$v(M_0)=u(M_0)=H_D$. С другой стороны, в точках M границы области S имеем

$$v(M) \leqslant H_S+\frac{H_D-H_S}{2}=\frac{H_D+H_S}{2}<H_D.$$

Следовательно, непрерывная в $\overline{D}$ функция $v(M)$ должна достигать наибольшего значения в некоторой внутренней точке M_1 области D. В этой точке должно быть $\Delta v \leqslant 0$, так как в точке максимума ни одна из производных v_{xx}, v_{yy}, v_{zz} не может быть положительной. С другой стороны,

$$\Delta v=\Delta u+3\frac{H_D-H_S}{d^2}=3\frac{H_D-H_S}{d^2}>0.$$

Полученное противоречие заставляет отказаться от гипотезы, что $H_D>H_S$. Следовательно, $H_D=H_S$. Применяя полученный результат к функции $-u$, мы получим доказательство теоремы и для наименьшего значения.

Из этой теоремы легко следует единственность решения первой внутренней краевой задачи для уравнения $\Delta u=f(M)$.

Теорема единственности. *Решение первой внутренней краевой задачи*

$$\Delta u=f(M), \qquad u|_S=\varphi(M),$$

непрерывное в замкнутой области $\overline{D}=D+S$, *единственно.*

Доказательство. Пусть две функции u_1 и u_2 являются решением этой задачи. Тогда их разность $u=u_1-u_2$ является гармонической в D функцией, непрерывной в $\overline{D}$ и равной нулю на S. По теореме о наибольшем и наименьшем значении наибольшее и наименьшее значения u равны нулю. Следовательно, $u=u_1-u_2\equiv 0$ всюду в D.

Легко также доказать теорему о непрерывной зависимости решения первой внутренней краевой задачи от граничных значений для уравнения $\Delta u=f(M)$.

Теорема. *Пусть* $u_1(M)$ *и* $u_2(M)$ — *решения первой внутренней краевой задачи для уравнения* $\Delta u=f(M)$, *непрерывные в* $\overline{D}$ *и принимающие на границе* S *области* D *значения* $\varphi_1(M)$ *и* $\varphi_2(M)$. *Тогда, если всюду на* S *выполняется неравенство* $|\varphi_1-\varphi_2|<\varepsilon$, *то всюду в* D *выполняется* *неравенство*

$$|u_1(M) - u_2(M)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Функция $u = u_1 - u_2$ гармоническая в D, непрерывна в $\overline{D}$ и $u|_S = \varphi_1 - \varphi_2$. Поскольку $-\varepsilon < \varphi_1 - \varphi_2 < \varepsilon$, то по теореме о наибольшем и наименьшем значении наибольшее и наименьшее значения функции $u(M)$ заключены между $-\varepsilon$ и ε. Следовательно, $|u| < \varepsilon$, т. е. $|u_1(M) - u_2(M)| < \varepsilon$. Верна также

Теорема. *Если последовательность непрерывных в некоторой замкнутой и ограниченной области $\overline{D}$ и гармонических в D функций $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ равномерно сходится на границе области, то она также равномерно сходится в $\overline{D}$*[1]).

2. Теорема. *Все решения второй внутренней краевой задачи*

$$L[u] \equiv \operatorname{div}(k \nabla u) - qu = f(M), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \varphi(M) \quad (k > 0, q \geqslant 0),$$

непрерывные вместе с частными производными первого порядка в замкнутой области $\overline{D} = D + S$, могут отличаться между собой только на постоянную, т. е. для любых двух решений u_1 и u_2 выполняется тождество $u_1 - u_2 \equiv \text{const}$. (Для различных пар решений эти константы, вообще говоря, различны.)

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 — два решения задачи. Функция $w = u_1 - u_2$ является решением задачи

$$L[w] = 0, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_S = 0.$$

Применяя формулу (1) к функциям $u = w$ и $v = w$, получим

$$\int_D k(\nabla w)^2 \, d\tau + \int_D q w^2 \, d\tau - \int_S k w \frac{\partial w}{\partial n} \, d\sigma = -\int_D w L[w] \, d\tau = 0.$$

В силу краевых условий интеграл по S равен нулю. Поэтому

$$\int_D \{k(\nabla w)^2 + q w^2\} \, d\tau = 0,$$

[1]) Читателю рекомендуется самостоятельно доказать эту теорему, используя достаточный критерий Коши сходимости последовательности.

откуда $k(\nabla w)^2+qw^2\equiv 0$. Следовательно, $k(\nabla w)^2\equiv 0$ и $qw^2\equiv 0$. Если $q\not\equiv 0$, то $w=u_1-u_2\equiv 0$. Если $q\equiv 0$, то из тождества $k(\nabla w)^2\equiv 0$ следует, что $\nabla w\equiv 0$, так как $k>0$, откуда $w=u_1-u_2=\text{const}$. Теорема доказана.

Замечание. При произвольных функциях $\varphi(M)$ и $f(M)$ (даже непрерывных) вторая краевая задача может не иметь решения. Действительно, пусть $L[u]\equiv \operatorname{div}(k\nabla u)$. Тогда для решения второй краевой задачи $u(M)$, непрерывного вместе с частными производными 1-го порядка в $\overline{D}=D+S$, должно выполняться соотношение (3). Поскольку $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=\varphi(M)$, то получим

$$\int_D f(M)\,d\tau=\int_S k\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma=\int_S k\varphi(M)\,d\sigma.$$

Таким образом, функции $f(M)$ и $\varphi(M)$ должны быть связаны соотношением

$$\int_D f(M)\,d\tau=\int_S k\varphi(M)\,d\sigma. \tag{8}$$

В частности, если $f(M)=0$, то функция $\varphi(M)$ должна удовлетворять условию

$$\int_S k\varphi\,d\sigma=0. \tag{9}$$

Легко понять физический смысл соотношений (8) и (9), если $u(M)$ интерпретировать как стационарную температуру, а $k(M)$ — как коэффициент теплопроводности. Тогда соотношение (8) выражает следующий очевидный факт: для того чтобы существовало стационарное решение, необходимо, чтобы количество тепла, образующееся в области D за промежуток времени Δt от действия внутренних источников, было равно суммарному потоку тепла, уходящего через границу области S за тот же промежуток времени.

Используя формулу (1), совершенно аналогично можно доказать единственность решения третьей внутренней краевой задачи, непрерывного вместе с частными производными первого порядка в $\overline{D}$[1]).

[1]) Читателю рекомендуется провести доказательство самостоятельно.

3. Для единственности решения внешних краевых задач надо ставить дополнительные условия относительно поведения решения на бесконечности. Действительно, если искать решение первой внешней краевой задачи в области $r > R$ с краевым условием $u\big|_{r=R} = C$, где C — постоянная, то решениями будут функции $u_1 \equiv C$, $u_2 = C\dfrac{R}{r}$ и $u = Au_1 + Bu_2$, где A и B — произвольные постоянные, такие, что $A + B = 1$.

Обозначим через D_1 область точек, лежащих вне замкнутой поверхности S. Для трехмерного пространства справедлива

Теорема. *Решение $u(M)$ первой внешней краевой задачи для уравнения $\Delta u = f(M)$, непрерывное в замкнутой области $\overline{D}_1 = D_1 + S$ и равномерно стремящееся к нулю при стремлении M к бесконечности, единственно.*

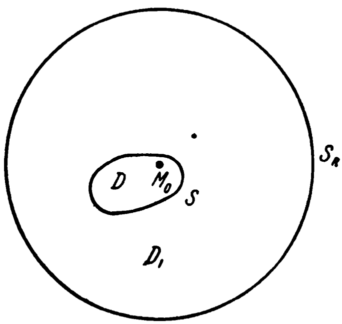

Рис. 13.

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 — два решения задачи. Функция $u = u_1 - u_2$ гармоническая в D_1, непрерывная в $\overline{D}_1$ и $u|_S = 0$.

Из какой-нибудь точки M_0 области D, ограниченной поверхностью S, как из центра, опишем сферу S_R настолько большого радиуса R, чтобы вся эта поверхность S лежала в D_1 (рис. 13). В области D_2, ограниченной поверхностями S_R и S, функция u гармонична и непрерывна в $\overline{D}_2$. Следовательно, по теореме о наибольшем и наименьшем значении функция u принимает наибольшее и наименьшее значения в точках поверхностей S_R и S. Выбрав произвольное $\varepsilon > 0$, мы возьмем R столь большим, чтобы на S_R иметь $|u| < \varepsilon$. Это возможно в силу равномерного стремления $u(M)$ к нулю при стремлении M к бесконечности. Поскольку $u|_S = 0$, то по упомянутой теореме всюду в области D_2 выполняется неравенство $|u| < \varepsilon$. Ввиду произвольности ε это и означает, что $u = u_1 - u_2 \equiv 0$. Теорема доказана.

Для двумерного случая вместо условия равномерного стремления к нулю функции $u(M)$ при стремлении M к бесконечности надо поставить условие ограниченности решения в области D_1. Мы не будем останавливаться на доказательстве теоремы единственности для этого случая[1]).

Для единственности решения второй внешней краевой задачи в трехмерном пространстве кроме равномерного стремления решения к нулю на бесконечности требуется наложить дополнительные условия на поведение в бесконечности частных производных первого порядка. Так, если искомое решение равномерно стремится к нулю на бесконечности, а частные производные u_x, u_y, u_z стремятся к нулю (при M, стремящейся к бесконечности), как $\frac{A}{r^2}$, то имеет место единственность решения второй внешней краевой задачи[1]).

§ 3. Метод функций Грина

Приступим к описанию методов решения краевых задач для уравнений эллиптического типа

$$L[u]=f(M), \tag{10}$$

$$\left(\alpha_1 u+\alpha_2 \frac{\partial u}{\partial n}\right)_S=\varphi(M), \tag{11}$$

где

$$\alpha_1=\alpha_1(M), \qquad \alpha_2=\alpha_2(M), \qquad \alpha_1,\ \alpha_2 \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \alpha_1^2+\alpha_2^2 \neq 0.$$

Одним из таких методов является метод разделения переменных. Мы проиллюстрируем его на двух примерах.

Пример 1. Найти функцию $u(r, \varphi)$, гармоническую в круге D_R радиуса R, непрерывную в замкнутой области $\overline{D}_R$ и принимающую на границе этой области $(r=R)$ заданные значения $f(\varphi)$, т. е.

$$\Delta u=0, \tag{12}$$

$$u(R, \varphi)=f(\varphi). \tag{13}$$

В силу однозначности искомого решения $u(r, \varphi)$, оно должно быть периодическим по φ с периодом 2π, т. е.

$$u(r, \varphi+2\pi) \equiv u(r, \varphi). \tag{14}$$

Из непрерывности решения в замкнутой области $\overline{D}_R$ следует его ограниченность в $\overline{D}_R$.

---

[1]) См. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, М-Л., Гостехиздат, 1951 г.

Среди функций вида $\Phi(r)\,\Psi(\varphi)$ ищем ограниченные в $\overline{D}_R$ и периодические по φ (с периодом 2π) решения уравнения (12). Записывая лапласиан в полярных координатах

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}=0 \tag{12_1}$$

и разделяя переменные, получим

$$r\frac{d}{dr}(r\,\Phi')-\lambda\Phi=0, \tag{15}$$

$$\Psi''+\lambda\Psi=0. \tag{16}$$

Из условия (14) находим

$$\Psi(\varphi+2\pi)\equiv\Psi(\varphi). \tag{17}$$

При $\lambda<0$ уравнение (16) не имеет решений, удовлетворяющих условию (17). Следовательно, $\lambda\geqslant 0$. Для $\lambda>0$ находим

$$\Psi(\varphi)=A\sin\sqrt{\lambda}\,\varphi+B\cos\sqrt{\lambda}\,\varphi.$$

Из условия (17) находим, что $\sqrt{\lambda}\,2\pi=2\pi n$. Отсюда $\lambda_n=n^2$, где n — произвольное целое неотрицательное число. Таким образом, собственные значения задачи (16) — (17) суть

$$\lambda_n=n^2 \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

а им соответствующие собственные функции суть:

$$1,\ \sin\varphi,\ \cos\varphi,\ \ldots,\ \sin n\varphi,\ \cos n\varphi,\ \ldots.$$

При $\lambda=0$ общим решением уравнения (16) будет

$$\Psi(\varphi)=A_0\varphi+B_0.$$

Лишь при $A_0=0$ оно будет удовлетворять условию (17). Таким образом, $\lambda=0$ соответствует собственная функция $\Psi_0(\varphi)\equiv 1$.

Обратимся к уравнению (15). При $\lambda=n^2$ имеем

$$r^2\Phi''+r\Phi'-n^2\Phi=0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\Phi_n(r)=C_n r^n+\frac{D_n}{r^n} \qquad (n>0), \tag{18}$$

$$\Phi_0(r)=C_0+D_0\ln\frac{1}{r} \qquad (n=0). \tag{19}$$

В силу ограниченности искомого решения в формулах (18) и (19) надо положить $D_n = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

Таким образом, ограниченными решениями уравнения (12_1) вида $\Phi(r)\Psi(\varphi)$, удовлетворяющими условию (14), будут функции

$$u_n = r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Решение задачи (12) — (14) представится в виде ряда

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \tag{20}$$

Коэффициенты A_n и B_n находим из условия (13):

$$f(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) R^n, \tag{21}$$

пользуясь ортогональностью собственных функций на отрезке $[0, 2\pi]$ с весом $\rho \equiv 1$:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi)\, d(\xi), \quad A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) \cos n\xi\, d\xi,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) \sin n\xi\, d\xi \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{22}$$

Замечание 1. Ряд (20) с коэффициентами, вычисляемыми по формулам (22), нетрудно просуммировать. Однако мы не будем здесь этого делать, так как в § 4 задача (12) — (14) будет решена другим методом, позволяющим получить результат в конечном виде.

Замечание 2. Решение краевой задачи (12) — (14) для внешности круга представляется рядом

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi),$$

коэффициенты которого определяются из условия (13). Для кольцевой области, образованной двумя концентрическими окружностями радиусов R_1 и R_2, решение представляется рядом

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n r^n+\frac{D_n}{r^n}\right)(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)+A_0+B_0\ln r,$$

коэффициенты которого (A_0, B_0, C_nA_n, C_nB_n, D_nA_n и D_nB_n) определяются из краевых условий[1]):

$$u(R_1,\ \varphi)=f_1(\varphi),\qquad u(R_2,\ \varphi)=f_2(\varphi).$$

Пример 2. Решить краевую задачу

$$\Delta u=0, \tag{23}$$

$$u(0,\ y)=u(l,\ y)=0, \tag{24}$$

$$u(x,\ 0)=f_1(x),\quad u(x,\ b)=f_2(x) \tag{25}$$

в прямоугольной области $\{0\leqslant x\leqslant l;\quad 0\leqslant y\leqslant b\}$.

В классе функций вида $\Phi(x)\Psi(y)$ ищем решения уравнения (23), удовлетворяющие лишь однородным краевым условиям (24). Подставляя такую функцию в уравнение (23) и разделяя переменные, получим

$$\frac{\Phi''}{\Phi}+\frac{\Psi''}{\Psi}=0.$$

Чтобы это равенство было тождеством, необходимо, чтобы $\frac{\Phi''}{\Phi}=-\lambda$, $\frac{\Psi''}{\Psi}=\lambda$, где λ — постоянное число.

Таким образом получаем уравнения для функций $\Phi(x)$ и $\Psi(y)$:

$$\Phi''+\lambda\Phi=0, \tag{26}$$

$$\Psi''-\lambda\Psi=0. \tag{27}$$

Из условий (24) находим, что

$$\Phi(0)=\Phi(l)=0. \tag{28}$$

Задача (26), (28) имеет лишь положительные собственные значения

$$\lambda_n=\frac{\pi^2n^2}{l^2}\qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

---

[1]) Читателю рекомендуется написать соответствующие формулы для определения этих коэффициентов.

Им отвечают собственные функции $\Phi_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x$[1]. Обратимся к уравнению (27). При $\lambda = \lambda_n$ оно имеет общее решение вида

$$\Psi_n(y) = C_n \operatorname{ch}\sqrt{\lambda_n}\,y + D_n \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\,y.$$

Следовательно, решения уравнения (23), удовлетворяющие лишь краевым условиям (24), имеют вид

$$u_n(x, y) = \Phi_n(x)\,\Psi_n(y).$$

Решение задачи (23) — (25) представляется рядом

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \operatorname{ch}\sqrt{\lambda_n}\,y + D_n \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\,y) \sin\frac{\pi n}{l}x,$$

коэффициенты которого определяем из краевых условий (25):

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{\pi n}{l}x$$

и

$$f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \operatorname{ch}\frac{\pi n}{l}b + D_n \operatorname{sh}\frac{\pi n}{l}b\right) \sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Отсюда

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l f_1(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi$$

и

$$C_n \operatorname{ch}\frac{\pi n}{l}b + D_n \operatorname{sh}\frac{\pi n}{l}b = \frac{2}{l}\int_0^l f_2(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi.$$

В гл. XI, XII (§§ 1, 4) приводятся другие примеры применения метода разделения переменных к уравнениям эллиптического типа, требующие использования специальных функций.

Другим методом решения краевых задач для уравнений эллиптического типа является метод функций Грина. Он состоит в следующем.

---

[1]) См. гл. IV, § 1, пример 1.

Сначала находят решение задачи (10) — (11) при специальных значениях функций $f(M)$ и $\varphi(M)$. Именно, решают задачу

$$L(G) = -\delta(M, P), \tag{29}$$

$$\left(\alpha_1 G + \alpha_2 \frac{\partial G}{\partial n}\right)_S = 0. \tag{30}$$

Это решение называют функцией Грина задачи (10) — (11).

Мы будем требовать, чтобы искомая функция $G(M, P)$ была непрерывной (вместе с частными производными первого порядка, если $\alpha_2 \neq 0$) всюду в замкнутой области $\bar{D}$, кроме, быть может, точки P, в которой G может иметь особенность.

Если функция Грина найдена, то с ее помощью легко найти и решение исходной задачи (10) — (11). Для этого применим формулу Грина к функциям $v = G(M, P)$ и к искомому решению $u(M)$:

$$\int_D \{GL[u] - uL[G]\}\, d\tau = \int_S k\left(G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n}\right) d\sigma.\text{[1]} \tag{31}$$

Поскольку в области D $L[u] = f(M)$, а $L[G] = -\delta(M, P)$, то соотношение (31) можно записать в виде

$$\int_D f(M)\, G(M, P)\, d\tau_M + \int_D u(M)\, \delta(M, P)\, d\tau_M = \\ = \int_S k\left(G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n}\right) d\sigma_M.$$

Второй интеграл левой части по свойству δ-функции равен $u(P)$. Поэтому последнее соотношение можно записать в виде

$$u(P) = \int_S k\left(G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n}\right) d\sigma_M - \int_D G(M, P) f(M)\, d\tau_M. \tag{32}$$

Здесь интегрирование производится по координатам точки M.

Для первой краевой задачи ($\alpha_1 \equiv 1$, $\alpha_2 \equiv 0$)

$$G|_S = 0, \qquad u|_S = \varphi,$$

---

[1]) Здесь и в дальнейшем производная $\frac{\partial}{\partial n}$ берется по направлению внешней нормали к S.

и из формулы (32) получаем решение задачи (10) — (11)

$$u(P) = -\int_S k\varphi(M)\frac{\partial G}{\partial n}d\sigma_M - \int_D G(M, P)f(M)\,d\tau_M. \quad (33)$$

Для второй краевой задачи ($\alpha_1 \equiv 0$, $\alpha_2 \equiv 1$)

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \varphi(M),$$

и из формулы (32) получаем решение задачи (10) — (11)

$$u(P) = \int_S k\varphi(M)\,G(M, P)\,d\sigma_M - \int_D G(M, P)f(M)\,d\tau_M. \quad (34)$$

Для третьей краевой задачи ($\alpha_1 \neq 0$ и $\alpha_2 \neq 0$)

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left.G\right|_S, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \frac{-\alpha_1}{\alpha_2}\left.u\right|_S + \left.\frac{\varphi(M)}{\alpha_2}\right|_S.$$

В этом случае формула (32) дает

$$u(P) = \int_S \frac{k\varphi(M)}{\alpha_2(M)}G(M, P)\,d\sigma_M - \int_D G(M, P)f(M)\,d\tau_M. \quad (35)$$

Таким образом, исходная краевая задача (10) — (11) сводится к задаче о нахождении функции Грина. О способах нахождения функций Грина мы будем говорить позже.

Отметим некоторые свойства функций Грина.

Функции Грина обладают свойством симметрии, т. е.

$$G(M, P) = G(P, M).$$

Для доказательства этого применим формулу Грина к функциям $G_1 = G(M, P_1)$ и $G_2 = G(M, P_2)$, где P_1 и P_2 — произвольные фиксированные точки области D. Получим

$$\int_D \{G_1 L[G_2] - G_2 L[G_1]\}\,d\tau_M = \int_S k\left(G_1\frac{\partial G_2}{\partial n} - G_2\frac{\partial G_1}{\partial n}\right)d\sigma_M.$$

Левая часть равна

$$-\int_D \{G(M, P_1)\,\delta(M, P_2) - G(M, P_2)\,\delta(M, P_1)\}\,d\tau_M = \\ = G(P_1, P_2) - G(P_2, P_1).$$

Следовательно,

$$G(P_1, P_2) - G(P_2, P_1) = \int_S k\left(G_1\frac{\partial G_2}{\partial n} - G_2\frac{\partial G_1}{\partial n}\right)d\sigma_M.$$

Интеграл в правой части равен нулю. Действительно, если мы имеем дело с первой (или второй) краевой задачей, то это следует из граничных условий для G_1 и G_2 $\left(G|_S = 0\right.$ или $\left.\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_S = 0\right)$. Если мы имеем дело с третьей краевой задачей, то, выражая $\frac{\partial G_1}{\partial n}$ и $\frac{\partial G_2}{\partial n}$ из краевых условий через G_1 и G_2 и подставляя эти значения в подынтегральное выражение, получим

$$\left(G_1 \frac{\partial G_2}{\partial n} - G_2 \frac{\partial G_1}{\partial n}\right)_S = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} G_1 G_2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} G_2 G_1 \equiv 0.$$

Таким образом, $G(P_1, P_2) = G(P_2, P_1)$.

Теперь займемся изучением особенности функции Грина в точке P. При этом мы ограничимся случаем, когда $L[u] \equiv \equiv \Delta u$. Для этого случая функция Грина имеет в точке P особенность вида[1] $\frac{1}{4\pi r_{MP}}$ — для трехмерного пространства, $\frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r_{MP}}\right)$ — для плоскости.

Исходя из структуры уравнения $\Delta G = -\delta(M, P)$, которому удовлетворяет функция Грина, можно ожидать, что функцию Грина можно представить в виде

$$G(M, P) = \psi(r_{MP}) + v(M, P),$$

где v — гармонична в D (как функция точки M), а функция $\psi(r_{MP})$ имеет особенность в точке P, т. е. при $r_{MP} = 0$, и должна удовлетворять уравнению $\Delta\psi = -\delta(M, P)$.

Рассмотрим для определенности трехмерный случай. Обозначим через D_P^R шаровую область с центром в точке P радиуса R, ограниченную поверхностью S_P^R. Проинтегрируем тождество

$$\Delta\psi \equiv -\delta(M, P)$$

по области D_P^R $(D_P^R \subset D)$. Получим

$$\int\limits_{D_P^R} \Delta\psi \, d\tau_M = -1.$$

[1]) Это верно и для операторов вида $L[u] \equiv \Delta u + qu$, где $q = \mathrm{const}$.

По формуле Остроградского интеграл в левой части равен

$$\int\limits_{S_P^R} \frac{\partial\psi}{\partial n} d\sigma_M = \int\limits_{S_P^R} \frac{d\psi}{\partial r} d\sigma_M.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{S_P^R} \frac{d\psi}{dr} d\sigma_M = -1.$$

На сфере S_P^R функция $\frac{d\psi}{\partial r}$ имеет постоянное значение, поэтому

$$\left.\frac{d\psi}{dr}\right|_{r=R} \int\limits_{S_P^R} d\sigma = -1, \text{ или } 4\pi R^2 \frac{d\psi(R)}{dR} = -1.$$

Отсюда

$$\psi(R) = \frac{1}{4\pi R}.$$

Таким образом, функция Грина $G(M, P)$ имеет вид

$$G(M, P) = \frac{1}{4\pi r_{MP}} + v(M, P), \tag{36}$$

и, следовательно, имеет в точке P особенность вида $\frac{1}{4\pi r_{MP}}$.

Для плоскости $G(M, P)$ имеет вид

$$G(M, P) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r_{MP}}\right) + v(M, P). \tag{36_1}$$

Мы не будем повторять соответствующие выкладки. Функция $v(M, P)$ определяется как решение задачи

$$\Delta v = 0, \quad \left(\alpha_1 v + \alpha_2 \frac{\partial v}{\partial n}\right)_S = -\left(\frac{\alpha_1}{r_{MP}} + \alpha_2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{MP}}\right)}{\partial n}\right)_S \frac{1}{4\pi}.$$

Она единственна для первой (и третьей) краевой задачи и определяется с точностью до аддитивной постоянной для второй краевой задачи.

Для внешних краевых задач функция Грина определяется аналогично. Она также обладает свойством симметрии и для $L[u] = \Delta u + qu$ имеет те же особенности.

Пользуясь формулой (36), нетрудно дать физическую интерпретацию функций Грина для оператора Δu. Мы это сделаем для первой краевой задачи.

Пусть поверхность S, ограничивающая область D, сделана из проводника и заземлена. Поместим в точке P внутри D электрический заряд величины $\frac{1}{4\pi}$. Этот заряд индуцирует некоторое распределение зарядов на поверхности S. Потенциал электростатического поля в области D будет равен сумме:

1) потенциала поля, созданного точечным зарядом; он равен $\frac{1}{4\pi r_{MP}}$, и

2) потенциала поля, созданного индуцированными зарядами; он равен $v(M, P)$. Эта сумма и равна $G(M, P)$.

Таким образом, $G(M, P)$ можно интерпретировать как потенциал поля, созданного точечным зарядом, помещенным внутри заземленной замкнутой проводящей поверхности. При такой интерпретации свойство симметрии функции Грина выражает принцип взаимности точки заряда и точки наблюдения.

Замечание 3. Определенная таким образом функция Грина не всегда существует. Так, функция Грина второй внутренней краевой задачи для оператора Лапласа $L[u] \equiv \Delta u$ не существует, поскольку не существует соответствующая функция $v(M)$ $\left(G = \frac{1}{4\pi r} + v\right)$, гармоническая в D, непрерывная в $\bar{D}$ вместе с частными производными первого порядка и удовлетворяющая условию

$$\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_S = \varphi(M) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right),$$

ибо не выполняется необходимое условие $\int\limits_S \varphi\, d\sigma = 0$. В этом случае функцию Грина можно определить как решение краевой задачи

$$\Delta G = -\delta(M, P), \qquad \left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S = \frac{1}{S_0},$$

где S_0 — площадь поверхности S. Такая функция существует и определяется с точностью до аддитивной постоянной.

Пользуясь формулой (32), находим решение $u(P)$ второй краевой задачи (10) — (11)

$$u(P)=\int\limits_S k(M)\,G(M,P)\,\varphi(M)\,d\sigma_M - {}$$
$$- \int\limits_D G(M,P)\,f(M)\,d\tau_M - \int\limits_S \frac{ku}{S_0}\,d\sigma,$$

или

$$u(P)=\int\limits_S k(M)\,G(M,P)\,\varphi(M)\,d\sigma_M - \int\limits_D G(M,P)\,f(M)\,d\tau_M + C,$$

где

$$C=\mathrm{const} \qquad \left(C=-\int\limits_S k(M)\frac{u(M)}{S_0}\,d\sigma_M\right).$$

§ 4. Построение функций Грина. Интеграл Пуассона

Одним из методов построения функций Грина является *метод отражения*. Мы поясним его на примерах.

Пример 1. Построить функцию Грина первой краевой задачи для полупространства, ограниченного плоскостью Q (без ограничения общности ее можно считать совпадающей с координатной плоскостью $z=0$).

Пусть P — особая точка функции Грина. Поскольку

$$G(M,P)=\frac{1}{4\pi r_{MP}}+v,$$

задача сводится к отысканию функции v, гармонической в рассматриваемом полупространстве (например, $z>0$) и равной $\frac{-1}{4\pi r_{MP}}$ на его границе. Такой функцией, очевидно, является функция $v=\frac{-1}{4\pi r_{MP_1}}$, где P_1 — точка, симметричная точке P относительно плоскости Q. Действительно, функция $\frac{-1}{4\pi r_{MP_1}}$ гармонична в полупространстве $z>0$ и равна $\frac{1}{4\pi r_{MP}}$ в точках $M\in Q$, ибо для таких точек $r_{MP}=r_{MP_1}$. Таким образом, искомой функцией Грина будет функция

$$G(M,P)=\frac{1}{4\pi r_{MP}}-\frac{1}{4\pi r_{MP_1}}.$$

Такой способ построения функции Грина для полупространства, ограниченного плоскостью, подсказывается приведенной в § 3 физической интерпретацией функции Грина. В самом деле, если мы поместим в симметричных точках P и P_1 точечные заряды величины $\frac{1}{4\pi}$ и $\frac{-1}{4\pi}$, то потенциал электростатического поля, созданного этими зарядами, будет функцией, гармонической всюду, кроме точек P и P_1, и равен нулю на плоскости Q.

Аналогично для полуплоскости, ограниченной прямой l, функция Грина имеет вид

$$G(M,\ P)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MP}}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MP_1}},$$

где точка P_1 симметрична точке P относительно прямой l.

Пример 2. Построить функцию Грина первой краевой задачи для прямого угла D на плоскости, ограниченного прямолинейными лучами l_1 и l_2.

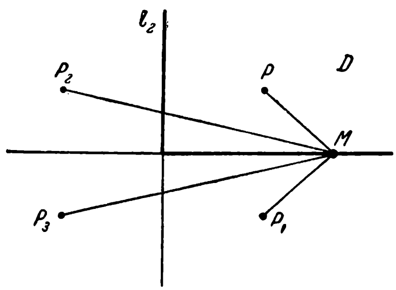

Рис. 14.

Пусть P — особая точка функции Грина. Симметричных ей относительно границы точек будет две: P_1 и P_2 (рис. 14).

Пусть P_3 точка, симметричная точкам P_1 и P_2 относительно продолжения сторон угла. Тогда функцией Грина будет следующая функция:

$$G(M,P)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MP}}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MP_1}}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MP_2}}+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MP_3}}.$$

Действительно, здесь функция v равна

$$-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MP_1}}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MP_2}}+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MP_3}}.$$

Она гармонична в прямом угле D (как функция точки M) и равна $\frac{-1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MP}}$ на его сторонах. Последнее следует из того, что если $M \in l_1$, то $r_{MP} = r_{MP_1}$, $r_{MP_2} = r_{MP_3}$; если $M \in l_2$, то $r_{MP} = r_{MP_2}$, $r_{MP_1} = r_{MP_3}$.

Пример 3. Построить функцию Грина первой (внутренней) краевой задачи для круга

$$G(M, P) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MP}} + v.$$

Задача сводится к построению функции v, гармонической в круге и равной $\frac{-1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MP}}$ на его границе.

Пусть P — особая точка функции Грина. Обозначим через P_1 точку, симметричную точке P относительно границы области (окружности C). (Точка P_1 называется симметричной точке P относительно окружности C, если обе эти точки лежат на одном луче, выходящем из центра круга, и произведение их расстояний ρ_1 и ρ от центра равно квадрату радиуса, т. е. $\rho\rho_1 = R^2$.) Если точка M лежит на окружности C, то, как видно из рис. 15,

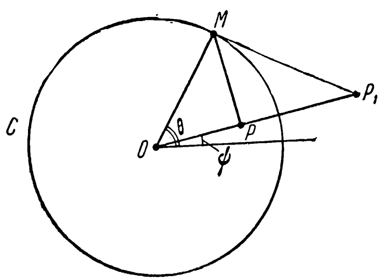

Рис. 15.

$$r_{MP_1} = \frac{R}{\rho} r_{MP}, \qquad (37)$$

так как треугольники OMP_1 и OMP подобны. Поэтому функция

$$v = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{\rho r_{MP_1}}$$

и будет искомой. Следовательно, функция Грина первой (внутренней) краевой задачи для круга имеет вид

$$G(M, P) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MP}} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{\rho r_{MP_1}}. \qquad (38)$$

Пример 4. Решить первую внутреннюю краевую задачу для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге.

Искомое решение дается формулой

$$u(P) = -\int\limits_C \varphi(s) \frac{\partial G}{\partial n} ds, \qquad (39)$$

получающейся из формулы (33) при $f(M)\equiv 0$. В рассматриваемом случае функция Грина G определяется формулой (38). Вычислим $\frac{\partial G}{\partial n}$:

$$\frac{\partial G}{\partial n}=\frac{\partial G}{\partial r}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{r_{MP}}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}_{MP})-\frac{1}{2\pi}\frac{1}{r_{MP_1}}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}_{MP_1}).$$

Из треугольников OMP и OMP_1 (рис. 15) находим

$$\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}_{MP})=\frac{R^2+r_{MP}^2-\rho^2}{2Rr_{MP}},\quad \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}_{MP_1})=\frac{R^2+r_{MP_1}^2-\rho_1^2}{2Rr_{MP_1}},$$

поэтому

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_C=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{R^2+r_{MP}^2-\rho^2}{2Rr_{MP}^2}-\frac{R^2+r_{MP_1}^2-\rho_1^2}{2Rr_{MP_1}^2}\right).$$

Заменяя r_{MP_1} по формуле (37), а ρ_1 по формуле $\rho_1=\frac{R^2}{\rho}$, получим

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_C=\frac{1}{2\pi R}\frac{R^2-\rho^2}{r_{MP}^2}.$$

Из $\triangle OPM$ находим $r_{MP}^2=R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta-\psi)$, поэтому

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_C=\frac{1}{2\pi R}\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta-\psi)}.$$

Подставляя это значение в формулу (39), получим *интеграл Пуассона*

$$u(P)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{(R^2-\rho^2)\,\varphi(\theta)\,d\theta}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta-\psi)},\tag{40}$$

где (ρ,ψ) — полярные координаты точки P, (R,θ) — полярные координаты точки M на C.

Задачи

1. Построить функцию Грина первой внешней краевой задачи: а) для круга; б) для шара ($L[u]\equiv\Delta u$).

2. Построить функцию Грина первой внутренней краевой задачи для кругового сектора $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{n}$ ($L[u]\equiv\Delta u$).

3. Построить функцию Грина первой внутренней краевой задачи: а) для шарового слоя $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$; б) для кольца $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$.

4. Построить функцию Грина первой внутренней краевой задачи для плоского слоя $0 \leqslant z \leqslant h$ $(L[u] \equiv \Delta u)$.

5. Пользуясь принципом максимума и минимума для гармонических функций, доказать, что функция Грина первой краевой задачи для области D положительна в D $(L[u] \equiv \Delta u)$.

6. Доказать, что линии (поверхности) уровня функции Грина задачи **5** суть замкнутые линии, охватывающие особую точку и не пересекающие друг друга.

7. Пользуясь интегралом Пуассона, доказать теоремы:

а) *Всякая гармоническая функция, положительная во всей плоскости, есть постоянная;*

б) теорема Гарнака. *Пусть* $\{u_i(x, y)\}$, $i = 1, 2, \ldots,$ — *гармонические функции в конечной области* D, *ограниченной контуром* Γ, *и непрерывные в* $\overline{D}$. *Тогда, если ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x, y)$ *равномерно сходится на контуре* Γ, *то он равномерно сходится в* D, *и его сумма есть гармоническая функция в* D.

ГЛАВА VII

ПОТЕНЦИАЛЫ

В главе VI мы рассмотрели метод разделения переменных и метод функций Грина решения краевых задач для уравнений эллиптического типа. Третьим методом решения таких задач является метод сведения их к интегральным уравнениям.

Идея этого метода состоит в том, что решение краевой задачи ищется в виде некоторых интегралов специального вида — потенциалов с неизвестными плотностями распределения зарядов (масс). В этой главе мы рассмотрим простейшие свойства потенциалов и применение их к решению краевых задач.

§ 1. Объемный потенциал

1. Потенциал электростатического поля (в пространстве), созданного зарядом величины e, находящимся в точке P, равен (в произвольной точке M)

$$u(M)=\frac{e}{r_{MP}},$$

где r_{MP} — расстояние между точками M и P.

Если в точках $P_1, P_2, \ldots, P_n$ находятся заряды $e_1, e_2, \ldots, e_n$, то потенциал электростатического поля, созданного этими зарядами, равен

$$u(M)=\frac{e_1}{r_{MP_1}}+\frac{e_2}{r_{MP_2}}+\ldots+\frac{e_n}{r_{MP_n}}. \tag{1}$$

Пусть в области D распределены заряды с плотностью $\rho(P)$. В малом объеме $d\tau_P$, содержащем точку P, заключен заряд величины $\rho(P)\,d\tau_P$. Потенциал поля, созданного этим зарядом, приближенно равен

$$\frac{\rho(P)}{r_{MP}}\,d\tau_P.$$

Потенциал поля, созданного зарядами, содержащимися в области D, равен

$$u(M)=\int\limits_D \frac{\rho(P)}{r_{MP}}\,d\tau_P. \qquad (2)$$

Интеграл (2) называется *объемным потенциалом*. Для двумерного пространства (плоскости) объемный потенциал имеет вид

$$u(M)=\int\limits_D \rho(P)\ln\left(\frac{1}{r_{MP}}\right)ds_P. \qquad (3)$$

2. Таким образом, объемный потенциал представляется несобственным интегралом. Рассмотрим несобственный интеграл более общего вида

$$u(M)=\int\limits_D f(M, P)\,d\tau_P, \qquad (4)$$

где $f(M, P)$ — непрерывная функция двух точек M и P, $M \neq P$, обращающаяся в бесконечность при $M=P$.

Будем называть интеграл (4) *равномерно сходящимся в окрестности точки* M_0, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое δ, что:

1) для всякой области $D^{\delta}_{M_0}$, содержащей точку M_0, с диаметром, меньшим δ, $d(D^{\delta}_{M_0})<\delta$, и 2) для всех точек M, отстоящих от точки M_0 на расстоянии, меньшем δ, $\overline{MM_0}<\delta$ выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_{D^{\delta}_{M_0}} f(M, P)\,d\tau_P\right|<\varepsilon.$$

Это понятие лежит в основе доказательства ряда свойств потенциалов. Основное свойство равномерно сходящегося несобственного интеграла выражает

Теорема. *Несобственный интеграл, равномерно сходящийся в окрестности точки* M_0, *непрерывен в этой точке.*

Доказательство. Оценим разность

$$u(M) - u(M_0) = u_1(M) - u_1(M_0) + \{u_2(M) - u_2(M_0)\},$$

где

$$u_1(M) = \int\limits_{D^\delta_{M_0}} f(M, P)\, d\tau_P, \qquad u_2(M) = \int\limits_{D - D^\delta_{M_0}} f(M, P)\, d\tau_P.$$

Поскольку интеграл (4) равномерно сходится в окрестности точки M_0, то для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое δ, что для области $D^\delta_{M_0}$ с $d(D^\delta_{M_0}) < \delta$ и для всех точек M, отстоящих от M_0 на расстоянии, меньшем δ, будут выполняться неравенства

$$|u_1(M)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad |u_1(M_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5}$$

Так как $M_0 \notin D - D^\delta_{M_0}$, то интеграл $u_2(M)$ не является несобственным, и функция $u_2(M)$ непрерывна в точке M_0. Следовательно, для того же ε найдется такое δ_1, что для всех точек M, отстоящих от точки M_0 на расстоянии, меньшем δ_1, выполняется неравенство

$$|u_2(M) - u_2(M_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{6}$$

Пусть $\delta_2 = \min\{\delta, \delta_1\}$. Тогда для всех точек M, таких что $\overline{MM_0} < \delta_2$, выполняются неравенства (5) и (6), а следовательно, и неравенство

$$|u(M) - u(M_0)| < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Заметим, что из равномерной сходимости несобственного интеграла следует его сходимость в точке M_0.

3. Рассмотрим простейшие свойства объемного потенциала с ограниченной плотностью $\rho(P)$, $|\rho(P)| \leqslant A$.

Свойство 1. *Объемный потенциал определен и непрерывен всюду.*

Если точка M_0 не принадлежит области D, интеграл $u(M_0)$ не является несобственным. Поскольку подынтегральная функция, как функция точки M, непрерывна в точке M_0, то непрерывен в этой точке и интеграл $u(M)$.

Если $M_0 \in D$, то, согласно теореме п. **2** и замечанию в конце п. **2**, достаточно доказать равномерную сходимость интеграла в окрестности точки M_0. Для этого оценим интеграл

$$\int\limits_{D_{M_0}^{\delta}} \frac{\rho(P)}{r_{MP}}\,d\tau_P.$$

Очевидно

$$\left|\int\limits_{D_{M_0}^{\delta}} \frac{\rho(P)}{r_{MP}}\,d\tau_P\right| \leqslant \int\limits_{D_{M_0}^{\delta}} \frac{|\rho|}{r_{MP}}\,d\tau_P \leqslant A\int\limits_{D_{M_0}^{\delta}} \frac{d\tau_P}{r_{MP}} < A\int\limits_{T_M^{2\delta}} \frac{d\tau_P}{r_{MP}},$$

где $T_M^{2\delta}$ — шаровая область с центром в точке M радиуса 2δ [1]). Переходя в последнем интеграле к сферическим координатам, получим

$$A\int\limits_{T_M^{2\delta}} \frac{d\tau_P}{r_{MP}} = A\int\limits_0^{2\delta}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} r\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi = 8A\pi\delta^2 \qquad (r = r_{MP}).$$

Таким образом, $\left|\int\limits_{D_{M_0}^{\delta}} \frac{\rho(P)}{r_{MP}}\,d\tau_P\right| < 8A\pi\delta^2$. Чтобы этот интеграл был меньше наперед заданного числа ε, достаточно взять $\delta < \sqrt{\frac{\varepsilon}{8\pi A}}$.

Свойство 2. *Объемный потенциал имеет всюду непрерывные частные производные первого порядка по координатам точки M.*

Если $M_0 \overline{\in} D$, интеграл $u(M_0)$ не является несобственным. Поскольку подынтегральная функция, как функция точки M, имеет в точке M_0 непрерывные частные производные первого порядка по координатам точки M, этим свойством обладает и интеграл $u(M)$, причем производные вычисляются путем дифференцирования под знаком интеграла:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int\limits_D \frac{(\xi - x)}{r_{MP}^3}\rho(P)\,d\tau_P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \int\limits_D \frac{(\eta - y)}{r_{MP}^3}\rho(P)\,d\tau_P,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \int\limits_D \frac{(\zeta - z)}{r_{MP}^3}\rho(P)\,d\tau_P, \tag{7}$$

где (ξ, η, ζ) — координаты точки P.

---

[1]) $D_{M_0}^{\delta} \subset T_M^{2\delta}$.

Если $M_0 \in D$, то нам достаточно доказать равномерную сходимость в окрестности точки M_0 интегралов от производных в правых частях формул (7). Тогда законно дифференцирование под знаком интеграла, причем для производных $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$ справедливы формулы (7) [1]. Для определенности рассмотрим интеграл

$$\int\limits_D \frac{(\xi - x)\,\rho(P)}{r_{MP}^3}\,d\tau_P.$$

Очевидно,

$$\left|\int\limits_{D_{M_0}^\delta} \frac{(\xi - x)}{r_{MP}^3}\,\rho(P)\,d\tau_P\right| \leqslant A \int\limits_{D_{M_0}^\delta} \frac{|\xi - x|}{r_{MP}}\,\frac{d\tau_P}{r_{MP}^2} \leqslant A \int\limits_{D_{M_0}^\delta} \frac{d\tau_P}{r_{MP}^2},$$

так как $\left|\frac{\xi - x}{r_{MP}}\right| = |\cos(\widehat{r, n})| \leqslant 1$. Далее,

$$A \int\limits_{D_{M_0}^\delta} \frac{d\tau_P}{r_{MP}^2} \leqslant A \int\limits_{T_M^{2\delta}} \frac{d\tau_P}{r_{MP}^2} = A \int\limits_0^{2\delta}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi = 8\pi A\delta.$$

Чтобы выполнялось неравенство

$$\left|\int\limits_{D_{M_0}^\delta} \frac{(\xi - x)\,\rho(P)}{r_{MP}^3}\,d\tau_P\right| < \varepsilon,$$

достаточно взять $\delta < \frac{\varepsilon}{8\pi A}$.

Свойство 3. *Объемный потенциал является гармонической функцией вне области D, в которой расположены заряды (массы).*

Это свойство следует из того, что для точек $M \notin D$ интеграл (2) не является несобственным, и поэтому оператор Лапласа можно вносить под знак интеграла:

$$\Delta u = \Delta\left(\int\limits_D \frac{\rho(P)}{r_{MP}}\,d\tau_P\right) = \int\limits_D \rho(P)\,\Delta\left(\frac{1}{r_{MP}}\right)d\tau_P \equiv 0,$$

так как для точек $M \notin D$ имеем $\Delta\left(\frac{1}{r_{MP}}\right) \equiv 0$.

---

[1]) См. Фихтенгольц Г. М., Основы математического анализа, т. II, гл. XVIII, М., Гостехиздат, 1964.

Свойство 4. *В точках области D объемный потенциал удовлетворяет соотношению*

$$\Delta u = -4\pi\rho(M). \tag{8}$$

Мы при этом будем предполагать, что $\rho(P)$ имеет ограниченные и интегрируемые частные производные первого порядка $\frac{\partial\rho}{\partial\xi}, \frac{\partial\rho}{\partial\eta}, \frac{\partial\rho}{\partial\zeta}$.

Доказательство. Вычисление вторых производных $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ путем дифференцирования правых частей формул (7) под знаком интеграла здесь неприменимо, так как мы получим при этом расходящиеся интегралы, например:

$$-\int\limits_D \frac{\rho}{r_{MP}^3}\,d\tau_P + \int \frac{3(\xi - x)^2\rho(P)}{r_{MP}^5}\,d\tau_P.$$

Для доказательства существования вторых производных поступим следующим образом. Пусть $M_0 \in D$; $T_{M_0}^\delta$ — шаровая область радиуса δ с центром в точке M_0, ограниченная сферической поверхностью $S_{M_0}^\delta$, причем $T_{M_0}^\delta \subset D$. Тогда для точек M области $T_{M_0}^\delta$ можно написать

$$u(M) = u_1(M) + u_2(M),$$

где

$$u_1(M) = \int\limits_{T_{M_0}^\delta} \frac{\rho(P)}{r_{MP}}\,d\tau_P, \qquad u_2(M) = \int\limits_{D - T_{M_0}^\delta} \frac{\rho(P)}{r_{MP}}\,d\tau_P.$$

Интеграл $u_2(M)$ не является несобственным и по свойству 3 представляет гармоническую в точке M_0 функцию, т. е. $\Delta u_2|_{M=M_0} = 0$. Следовательно, $\Delta u|_{M=M_0} = \Delta u_1|_{M=M_0}$. Поэтому нам достаточно рассмотреть функцию $u_1(M)$.

Производную

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \int\limits_{T_{M_0}^\delta} \frac{\xi - x}{r_{MP}^3}\,d\tau_P = \int\limits_{T_{M_0}^\delta} \rho(P)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right)d\tau_P$$

можно также записать следующим образом:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = -\int\limits_{T^{\delta}_{M_0}} \rho(P)\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right) d\tau_P = \int\limits_{T^{\delta}_{M_0}} \frac{\frac{\partial \rho}{\partial \xi}}{r_{MP}} d\tau_P - \int\limits_{T^{\delta}_{M_0}} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\rho}{r_{MP}}\right) d\tau.$$

Применяя ко второму интегралу формулу Остроградского, получим

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \int\limits_{T^{\delta}_{M_0}} \frac{\frac{\partial \rho}{\partial \xi}}{r_{MP}} d\tau_P - \int\limits_{S^{\delta}_{M_0}} \frac{\rho(P)}{r_{MP}} \cos\alpha \, d\sigma_P, \tag{9}$$

где α — угол между направлением внешней нормали к поверхности $S^{\delta}_{M_0}$ и осью x.

Первый интеграл правой части формулы (9) представляет собой объемный потенциал с плотностью зарядов (масс) $\rho_1(P) = \frac{\partial \rho}{\partial \xi}$ и поэтому, по свойству 2, имеет непрерывную производную первого порядка по x. Второй интеграл не является несобственным и поэтому имеет непрерывную производную первого порядка по x во всякой внутренней точке M области $T^{\delta}_{M_0}$. Следовательно, $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ имеет непрерывную в $T^{\delta}_{M_0}$ производную $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$. При этом

$$\left.\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right|_{M=M_0} = \int\limits_{T^{\delta}_{M_0}} \frac{(\xi - x_0)\frac{\partial \rho}{\partial \xi}}{r^3_{M_0P}} d\tau_P - \int\limits_{S^{\delta}_{M_0}} \frac{\rho(P)}{r^3_{M_0P}} (\xi - x_0) \cos\alpha \, d\sigma_P.$$

Но $\frac{\xi - x_0}{r_{M_0P}} = \cos\alpha$, поэтому

$$\left.\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right|_{M=M_0} = \int\limits_{T^{\delta}_{M_0}} \frac{(\xi - x_0)\frac{\partial \rho}{\partial \xi}}{r^3_{M_0P}} d\tau_P - \int\limits_{S^{\delta}_{M_0}} \frac{\rho(P)}{r^2_{M_0P}} \cos^2\alpha \, d\sigma_P. \tag{10}$$

Аналогично находим:

$$\left.\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}\right|_{M=M_0} = \int\limits_{T^\delta_{M_0}} \frac{(\eta - y_0)\dfrac{\partial \rho}{\partial \eta}}{r^3_{M_0P}}\, d\tau_P - \int\limits_{S^\delta_{M_0}} \frac{\rho(P)}{r^2_{M_0P}} \cos^2\beta\, d\sigma_P, \tag{11}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\right|_{M=M_0} = \int\limits_{T^\delta_{M_0}} \frac{(\zeta - z_0)\dfrac{\partial \rho}{\partial \zeta}}{r^3_{M_0P}}\, d\tau_P - \int\limits_{S^\delta_{M_0}} \frac{\rho(P)}{r^2_{M_0P}} \cos^2\gamma\, d\sigma_P, \tag{12}$$

где β и γ — углы между нормалью к $S^\delta_{M_0}$ и осями y и z соответственно.

Складывая формулы (10), (11) и (12), получим

$$\Delta u\big|_{M=M_0} = \Delta u_1\big|_{M=M_0} = \int\limits_{T^\delta_{M_0}} \frac{\dfrac{\partial \rho}{\partial \zeta}}{r^2_{M_0P}} \cos\alpha\, d\tau_P + \int\limits_{T^\delta_{M_0}} \frac{\dfrac{\partial \rho}{\partial \eta}}{r^2_{M_0P}} \cos\beta\, d\tau_P +$$

$$+ \int\limits_{T^\delta_{M_0}} \frac{\dfrac{\partial \rho}{\partial \zeta}}{r^2_{M_0P}} \cos\gamma\, d\tau_P - \int\limits_{S^\delta_{M_0}} \frac{\rho\, d\sigma_P}{r^2_{M_0P}}. \tag{13}$$

Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве свойства 2, найдем, что каждый из интегралов по области $T^\delta_{M_0}$ в формуле (13) не превосходит $4\pi B\delta$, где B — верхняя граница функций $\left|\dfrac{\partial \rho}{\partial \xi}\right|$, $\left|\dfrac{\partial \rho}{\partial \eta}\right|$, $\left|\dfrac{\partial \rho}{\partial \zeta}\right|$, т. е.

$$\left|\int\limits_{T^\delta_{M_0}}\right| \leqslant 4\pi B\delta. \tag{14}$$

Применяя к последнему интегралу формулы (13) теорему о среднем значении, получим

$$\int\limits_{S^\delta_{M_0}} \frac{\rho}{r^2_{M_0P}}\, d\sigma_P = 4\pi\rho(P^*), \tag{15}$$

где $P^* \in S^\delta_{M_0}$. Переходя в формуле (13) к пределу при $\delta \to 0$ и учитывая неравенства (14) и формулу (15), получим

$$\Delta u \Big|_{M=M_0} = -4\pi\rho(M_0).$$

В двумерном случае аналогом формулы (8) будет соотношение

$$\Delta u = -2\pi\rho(M_0). \tag{16}$$

Свойство 5. *При стремлении точки наблюдения к бесконечности объемный потенциал стремится к нулю (в трехмерном случае; D — ограниченная область).*

Для доказательства этого свойства применим теорему о среднем значении к интегралу (2). Получим

$$u(M) = \frac{1}{r_{MP^*}} \int_D \rho \, d\tau_P = \frac{m}{r_{MP^*}},$$

где $P^* \in D$, $m = \int \rho \, d\tau_P$ — суммарный заряд. Отсюда и следует свойство 5.

Пример. Найдем объемный потенциал равномерно заряженного шара D радиуса R. Очевидно, искомый потенциал есть функция расстояния r от центра шара до точки наблюдения:

$$u(M) = u(r).$$

Вне шара D: $\Delta u = 0$, следовательно, $u = \frac{C_1}{r} + C_2$. По свойству 5 $u(r) \to 0$ $(r \to \infty)$. Следовательно, $C_2 = 0$. Внутри шара D: $\Delta u = -4\pi\rho$, или $\frac{d}{dr}(r^2 u') = -4\pi\rho r^2$. Следовательно, $u(r) = \frac{-2}{3}\pi r^2 \rho + \frac{A}{r} + B$ для $r \leqslant R$. Поскольку объемный потенциал ограничен всюду, то $A = 0$. Из условия непрерывности потенциала и его производных первого порядка находим

$$\frac{-2}{3}\pi R^2 \rho + B = \frac{C_1}{R} \quad \text{и} \quad -\frac{4}{3}\pi R \rho = \frac{-C_1}{R^2},$$

откуда $C_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$, $B = 2\pi R^2 \rho$. Таким образом,

$$u(r) = \begin{cases} \frac{2}{3}\pi(3R^2 - r^2)\rho, & r \leqslant R, \\ \frac{4}{3}\pi \frac{R^3 \rho}{r}, & r \geqslant R. \end{cases}$$

Замечание. Объемный потенциал можно записать в виде свертки (по переменным x, y, z) фундаментального решения $\frac{1}{4\pi r}=\frac{1}{4\pi}(x^2+y^2+z^2)^{-0,5}$ уравнения Лапласа $\Delta u=0$ $\left(\Delta\left(\frac{1}{4\pi r}\right)= -\delta(x, y, z)\right)$ с функцией $4\pi\rho(x, y, z)$:

$$u(M)=\left(\frac{1}{r}*\rho\right)=\iiint\limits_D \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}=$$

$$=\int\limits_D \frac{\rho(P)\,d\tau_P}{r_{MP}}.$$

Пользуясь этой записью и свойствами свертки, все изложенные свойства объемного потенциала получаются немедленно. Например:

$$\Delta u=\Delta\left(\frac{1}{r}*\rho\right)=\Delta\left(\frac{1}{r}\right)*\rho=-4\pi\delta(M)*\rho(M)=-4\pi\rho(M),$$

так как $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=-4\pi\delta(M)$ и $\delta(M)*\rho(M)=\rho(M)$.

§ 2. Потенциал простого слоя

Пусть заряды (массы) распределены по поверхности S с плотностью $\rho(P)$. Потенциал поля, созданного этими зарядами, равен

$$v(M)=\int\limits_S \frac{\rho(P)}{r_{MP}}\,d\sigma_P. \tag{17}$$

Этот интеграл называется *потенциалом простого слоя*. В дальнейшем мы будем считать, что функция $\rho(P)$ ограничена, $|\rho(P)|\leqslant H$, а поверхность S является поверхностью Ляпунова. Поверхность S называется *поверхностью Ляпунова*, если она обладает следующими свойствами:

1) в каждой точке поверхности S существует касательная плоскость;

2) для каждой точки P поверхности S существует такая окрестность S_P, что всякая прямая, параллельная нормали в точке P, пересекает S_P не более одного раза;

3) угол $\gamma(P, P_1)=(\boldsymbol{n}_P, \boldsymbol{n}_{P_1})$, образованный нормалями $\boldsymbol{n}_P$ и $\boldsymbol{n}_{P_1}$ в точках P и P_1, удовлетворяет следующему условию:

$$\gamma(P, P_1) < A r^{\delta}_{PP_1},$$

где A и δ — некоторые постоянные и $0 < \delta \leqslant 1$.

Рассмотрим некоторые свойства потенциала простого слоя.

Свойство 1. *Потенциал простого слоя определен всюду.*

Для точек M, не принадлежащих несущей поверхности S, это очевидно. Если $M \in S$, то интеграл (17) является несобственным по двумерной области S. Известно, что несобственный интеграл по двумерной области

$$\int \frac{d\sigma_P}{r^{\alpha}_{MP}}$$

абсолютно сходится, если $\alpha < 2$ [1]. В нашем случае $\alpha = 1$, следовательно, интеграл (17) сходится.

Свойство 2. *Потенциал простого слоя непрерывен всюду.*

Если $M \notin S$, то интеграл (17) не является несобственным и его непрерывность непосредственно следует из непрерывности подынтегральной функции $\dfrac{1}{r_{MP}}$.

Если $M_0 \in S$, то достаточно доказать равномерную сходимость интеграла (17) в окрестности точки M_0. Оценим интеграл

$$v_1(M) = \int\limits_{S^{\delta}_{M_0}} \frac{\rho(P)\, d\sigma_P}{r_{MP}}$$

по части поверхности $S^{\delta}_{M_0}$ ($S^{\delta}_{M_0} \subset S$), содержащей точку M_0 и имеющей диаметр, меньший δ, $d(S^{\delta}_{M_0}) < \delta$. Для этого воспользуемся системой координат с началом в точке M_0, ось z которой направлена по нормали к поверхности S в этой точке. Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка, отстоящая от точки M_0 на расстоянии, меньшем δ, $\overline{MM_0} < \delta$. Обозначим

[1]) См. Толстов Г. П., Курс математического анализа, т. II, гл. XX, М., Гостехиздат, 1957.

через $\sum_{M_0}^{\delta}$ проекцию поверхности $S_{M_0}^{\delta}$ на плоскость (x, y), а через $Q_{M_1}^{2\delta}$ — круг на плоскости (x, y) с центром в точке $M_1(x, y, 0)$ радиуса 2δ. Очевидно, $\sum_{M_0}^{\delta} \subset Q_{M_1}^{2\delta}$. Проекция на плоскость (x, y) элемента поверхности $d\sigma$ равна $ds = d\sigma \cdot \cos\gamma$, где γ — угол между нормалью к поверхности S и осью z. Очевидно,

$$|v_1(M)| \leqslant H \int_{S_{M_0}^{\delta}} \frac{d\sigma_P}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} \leqslant$$

$$\leqslant H \int_{S_{M_0}^{\delta}} \frac{d\sigma_P}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} = H \int_{\Sigma_{M_0}^{\delta}} \frac{ds}{\cos\gamma\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}.$$

По третьему свойству поверхностей Ляпунова δ можно взять настолько малым, чтобы для точек $P \in S_{M_0}^{\delta}$ иметь $\cos\gamma \geqslant \frac{1}{2}$. Поэтому будем иметь

$$|v_1(M)| \leqslant 2H \int_{\Sigma_{M_0}^{\delta}} \frac{ds}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} \leqslant$$

$$\leqslant 2H \int_{Q_{M_1}^{2\delta}} \frac{ds}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}.$$

Вводя полярную систему координат с началом в точке M_1, легко вычислить последний интеграл, он равен

$$2H \int_{Q_{M_1}^{2\delta}} \frac{ds}{r} = 2H \int_0^{2\delta}\int_0^{2\pi} dr\, d\varphi = 8\pi H\delta.$$

Чтобы интеграл $|v_1(M)|$ был меньше заданного числа ε, достаточно взять $\delta < \frac{1}{8\pi H}$.

Свойство 3. *Потенциал простого слоя является гармонической функцией всюду, кроме точек несущей поверхности S.*

Это свойство очевидно, так как для точек $M \notin S$ интеграл (17) не является несобственным, поэтому

$$\Delta v = \int\limits_S \rho(P)\, \Delta\left(\frac{1}{r_{MP}}\right) d\sigma_P \equiv 0.$$

Свойство 4. *Если несущая поверхность S ограничена, то потенциал простого слоя стремится к нулю, когда точка M стремится к бесконечности.*

Для доказательства этого применим к интегралу (17) теорему о среднем значении:

$$v(M) = \frac{1}{r_{MP^*}} \int\limits_S \rho(P)\, d\sigma_P = \frac{m}{r_{MP^*}}, \tag{18}$$

где $P^* \in S$, $m = \int\limits_S \rho\, d\sigma$ — суммарный заряд.

Из формулы (18) непосредственно следует свойство 4.

Свойство 5. *Нормальные производные потенциала простого слоя имеют разрыв первого рода в точках поверхности S со скачком, равным $4\pi\rho(M)$.*

На доказательстве этого свойства мы останавливаться не будем [1]).

Для двумерного случая (плоскости) потенциал простого слоя имеет вид

$$v(M) = \int\limits_C \rho(P) \ln\left(\frac{1}{r_{MP}}\right) ds_P.$$

Для него справедливы свойства 1—3. При стремлении точки M к бесконечности он стремится к ∞ как $\ln r_{MP}$. Скачок нормальных производных в точках кривой C равен $2\pi\rho(M)$. Доказательства всех этих свойств проводятся аналогично трехмерному случаю, поэтому мы не будем повторять их.

§ 3. Потенциал двойного слоя

1. Пусть в точках P_1 и P_2 (рис. 16) расположены заряды величиною $-e$ и e. Потенциал электростатического поля, созданного этим диполем, равен

$$w(M) = e\left(\frac{1}{r_{MP_2}} - \frac{1}{r_{MP_1}}\right),$$

[1]) См. Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, изд. 3-е, гл. II, М., Физматгиз, 1961.

или

$$w(M) = eh \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right)\bigg|_{P=P^*},$$

где P^* — некоторая точка отрезка P_1P_2 и производная берется по направлению $\boldsymbol{n}$ отрезка от P_1 к P_2 (оси диполя), h — расстояние между точками P_1 и P_2. Величина $eh = \nu$ называется *моментом диполя*. Если мы будем сближать точки P_1 и P_2, сохраняя момент диполя ν (увеличивая при этом величину зарядов e), то в пределе (при $h \to 0$) получим точечный диполь, расположенный в точке P, потенциал которого равен

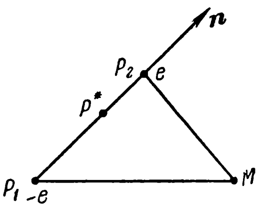

Рис. 16.

$$w(M) = \nu \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right),$$

где производная берется по координатам точки P в направлении оси диполя.

Пусть S — двусторонняя поверхность с непрерывно меняющейся касательной плоскостью. Это означает, что если в некоторой точке P этой поверхности выбрано положительное направление нормали $\boldsymbol{n}_P$ к поверхности и точка P движется по любой замкнутой кривой (лежащей на S), причем направление нормали меняется при этом непрерывно, то при возвращении в исходную точку направление нормали совпадает с исходным. На этой поверхности можно в каждой точке одно из направлений нормали принять за положительное, так что единичный вектор этого направления $\boldsymbol{n}$ будет непрерывным на поверхности. Мы будем предполагать, что такое положительное направление выбрано.

2. Если на двусторонней поверхности S распределены диполи с плотностью моментов $\nu(P)$, так что оси их в каждой точке совпадают с положительным направлением нормали, то потенциал поля, созданного этими диполями, равен

$$w(M) = \int_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right) d\sigma_P. \qquad (19)$$

Этот интеграл называется *потенциалом двойного слоя*. Такое название связано с тем, что к интегралу (19) приводят также следующие рассуждения. Пусть S — двусторонняя поверхность с фиксированным положительным направлением нормали.

Вообразим теперь, что на положительном направлении нормали в каждой точке мы отложили отрезки длиною h. Геометрическое место концов этих отрезков образует поверхность S_1, отстоящую от S на расстоянии h. Пусть на поверхности S распределены отрицательные заряды с плотностью $\frac{1}{h}\nu(P)$, а на поверхности S_1 — положительные заряды с той же плотностью (рис. 17).

Мы будем иметь «двойной слой» зарядов противоположных знаков, который можно рассматривать так же, как совокупность диполей, распределенных по поверхностям S и S_1 с плотностью $\frac{1}{h}\nu(P)$. Потенциал поля, созданного диполем, «опирающимся» на элементы $d\sigma$ поверхностей S и S_1, равен $\nu(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right)d\sigma$. Потенциал поля, созданного всеми диполями, равен

$$\int\limits_S \nu(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right)d\sigma_P.$$

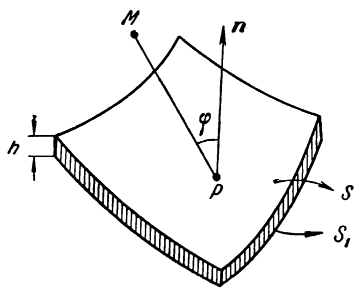

Рис. 17.

Если мы устремим h к нулю, то получим «двойной слой» на поверхности S, потенциал которого вычисляется по формуле (19). Поверхность S будем называть *несущей поверхностью.*

Поскольку
$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right)=\frac{\cos\varphi}{r_{MP}^2},$$

где φ — угол между положительным направлением нормали к поверхности S в точке P и отрезком PM, то потенциал двойного слоя можно также написать в виде

$$w(M)=\int\limits_S \nu(P)\frac{\cos\varphi}{r_{MP}^2}\,d\sigma_P. \qquad (20)$$

Если мы обозначим через $d\omega_{MP}$ телесный угол, под которым из точки M виден элемент поверхности $d\sigma_P$, то

$$r_{MP}^2 d\omega_{MP}=\cos\varphi\, d\sigma_P.$$

Эта формула непосредственно следует из того, что по определению $d\omega_{MP}$ есть площадь элемента единичной сферы с центром в точке M, высеченного конусом с вершиной в точке M, опирающимся на элемент поверхности $d\sigma_P$ (рис. 18); $d\omega_{MP}$ имеет положительный знак, если угол φ острый, и отрицательный, если угол φ тупой. Поэтому потенциал двойного слоя можно также написать в виде

$$w(M) = \int_S \nu(P)\, d\omega_{MP}. \tag{21}$$

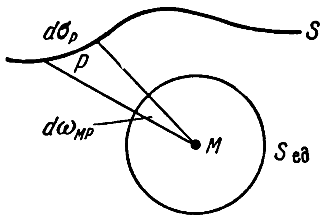

Рис. 18.

3. Из формулы (21) следует, что потенциал двойного слоя определен и в точках M несущей поверхности. Таким образом, имеем:

Свойство 1. *Потенциал двойного слоя определен всюду.*

Свойство 2. *В точках M, не лежащих на несущей поверхности S, потенциал двойного слоя является гармонической функцией.*

Для доказательства воспользуемся формулой (20). Если $M \notin S$, то интеграл (20) не является несобственным и поэтому

$$\Delta w = \Delta \left(\int_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{MP}} \right) d\sigma_P \right) = \int_S \nu(P) \Delta \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{MP}} \right) \right\} d\sigma_P =$$

$$= \int_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \Delta \left(\frac{1}{r_{MP}} \right) \right\} d\sigma_P \equiv 0.$$

Свойство 3. *При стремлении точки наблюдения M к бесконечности потенциал двойного слоя стремится к нулю.* Мы предполагаем при этом, что поверхность S имеет конечную площадь и расположена в конечной области.

Для доказательства воспользуемся формулой (20). Применяя к интегралу теорему о среднем значении, получим

$$w(M) = \nu(P) \frac{\cos\varphi}{r_{MP}^2} \bigg|_{P=P^*} \cdot \int_S d\sigma_P,$$

где $P^* \in S$. Отсюда и следует справедливость свойства.

В последующем будем полагать, что несущая поверхность S замкнутая. В качестве положительного направления нормали возьмем внутреннюю нормаль к поверхности S.

Рассмотрим частный вид потенциала двойного слоя — потенциал с постоянной плотностью моментов ν_0. Для такого потенциала $\tilde{w}(M)$ справедливы формулы:

$$\tilde{w}(M)=\begin{cases} 4\pi\nu_0, & \text{если точка } M \text{ расположена внутри } S,\\ 2\pi\nu_0, & \text{если точка } M \text{ расположена на } S,\\ 0, & \text{если точка } M \text{ расположена вне } S.\end{cases}$$

Для доказательства этого воспользуемся формулой (21). Пусть точка M расположена внутри S. Предположим сначала, что всякий луч, проведенный из точки M, пересекает поверхность S лишь в одной точке. Тогда интеграл $\int\limits_S d\omega_{MP}$ равен полному телесному углу, под которым видна внутренняя сторона поверхности S. Очевидно, этот угол равен 4π. Следовательно, в этом случае $\tilde{w}(M)=4\pi\nu_0$.

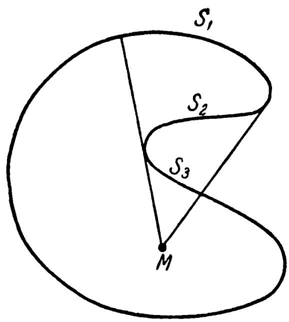

Рис. 19.

Если часть лучей (или все), проведенных из точки M, пересекает поверхность S в конечном числе ($\leqslant k$) точек, то телесные углы $d\omega_{MP}$, под которыми видны элементы поверхности $d\sigma_P$, пересекаемые лучами изнутри S (например, $d\sigma_P$, лежащие на S_1 и S_3 рис. 19), будут положительными, а телесные углы $d\omega_{MP}$, под которыми видны элементы поверхности $d\sigma_P$, пересекаемые лучами извне S (например, $d\sigma_P$, лежащие на S_2, рис. 19), будут отрицательными, так как в этом случае угол φ между внутренней нормалью и направлением отрезка $\overrightarrow{PM}$ будет тупым и, следовательно, $\cos\varphi$ — отрицательным. В силу этого, очевидно,

$$\int\limits_{S_3} d\omega_{MP}+\int\limits_{S_2} d\omega_{MP}=0.$$

Поэтому алгебраическая сумма всех телесных углов $d\omega_{MP}$ будет также равна 4π.

Таким образом, и в этом случае $\tilde{w}(M)=4\pi\nu_0$. Если точка M лежит вне поверхности S, то телесные углы $d\omega_{MP}$, отвечающие элементам $d\sigma_P$ поверхности S_1 (рис. 20), будут отрицательными, а телесные углы $d\omega_{MP}$, отвечающие элементам $d\sigma_P$ поверхности S_2 (рис. 20), будут положительными. Поэтому

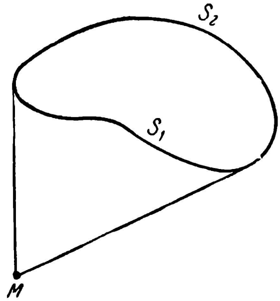

Рис. 20.

$$\int_S d\omega_{MP} = \int_{S_1} d\omega_{MP} + \int_{S_2} d\omega_{MP} = 0.$$

Таким образом, если точка M лежит вне S, то $\tilde{w}(M) = 0$. Аналогично устанавливается, что $\tilde{w}(M) = 2\pi\nu_0$, если $M \in S$.

Теперь мы можем выяснить поведение потенциала двойного слоя в окрестности точки M, лежащей на несущей поверхности.

Свойство 4. *Если плотность моментов $\nu(P)$ непрерывна на S, то потенциал двойного слоя $w(M)$ имеет разрыв первого рода в точках несущей поверхности S со скачком, равным* $4\pi\nu(M)$:

$$w_{\text{вн}}(M_0) - w_{\text{н}}(M_0) = 4\pi\nu(M_0), \qquad M_0 \in S.$$

Здесь $w_{\text{вн}}(M_0)$ — предел функции $w(M)$ в точке M_0, когда точка M стремится к M_0 изнутри поверхности; $w_{\text{н}}(M_0)$ — предел функции $w(M)$ в точке M_0, когда точка M стремится к M_0 снаружи.

Для простоты мы будем предполагать, что каждый луч, проведенный из точки M, пересекает S не более чем k раз (хотя утверждение верно для произвольной поверхности Ляпунова). Пусть M_0 — фиксированная точка поверхности S. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\overline{w}(M) = \int_S \{\nu(P) - \nu(M_0)\}\, d\omega_{MP} = w(M) - \tilde{w}(M). \tag{22}$$

Лемма. *Функция $\overline{w}(M)$ непрерывна в точке M_0.*

Доказательство. Обозначим через S' часть поверхности S, содержащуюся в некоторой δ-окрестности $D^{\delta}_{M_0}$ точки M_0, а через S'' — остальную часть S. Тогда $\overline{w}(M)$ можно записать в виде

$$\overline{w}(M) = \overline{w}_1(M) + \overline{w}_2(M),$$

где
$$\overline{w}_1(M)=\int\limits_{S'}\{\nu(P)-\nu(M_0)\}\,d\omega_{MP},$$
$$\overline{w}_2(M)=\int\limits_{S''}\{\nu(P)-\nu(M_0)\}\,d\omega_{MP}.$$

Функция $\overline{w}_2(M)$ непрерывна в точке M_0. Поэтому для произвольного $\varepsilon>0$ величина $|w_2(M)-w_2(M_0)|$ будет меньше $\frac{\varepsilon}{3}$, если $\overline{MM_0}$ достаточно мало. Далее,
$$|\overline{w}_1(M)|=\left|\int\limits_{S'}\{\nu(P)-\nu(M_0)\}\,d\omega_{MP}\right|\leqslant\int\limits_{S'}|\nu(P)-\nu(M_0)|\,|d\omega_{MP}|.$$

В силу непрерывности $\nu(P)$ в точке M_0 величина $|\nu(P)-\nu(M_0)|$ будет меньше $\frac{\varepsilon}{12k\pi}$, если δ (радиус окрестности $D^{\delta}_{M_0}$ точки M_0) будет достаточно мал. Далее,
$$\int\limits_{S'}|d\omega_{MP}|<4\pi k.$$

Следовательно,
$$|\overline{w}_1(M)|\leqslant\int\limits_{S'}|\nu(P)-\nu(M_0)|\,|d\omega_{MP}|<\frac{\varepsilon}{3}$$
и
$$|\overline{w}_1(M_0)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Поэтому
$$|\overline{w}(M)-\overline{w}(M_0)|\leqslant|\overline{w}_1(M)|+|\overline{w}_1(M_0)|+$$
$$+|\overline{w}_2(M)-\overline{w}_2(M_0)|<\varepsilon,$$

если точка M достаточно близка к M_0. Лемма доказана.

Доказательство свойства 4. Перейдем в формуле (22) к пределу, устремляя точку M к M_0 изнутри и снаружи поверхности S, тогда получим соответственно
$$\overline{w}_{\text{вн}}(M_0)=w_{\text{вн}}(M_0)-4\pi\nu(M_0)=\overline{w}(M_0)=$$
$$=w(M_0)-2\pi\nu(M_0)=\overline{w}_{\text{н}}(M_0)=w_{\text{н}}(M_0)-0,$$

где $\overline{w}(M_0)$ и $w(M_0)$ — значения функций $\overline{w}(M)$ и $w(M)$ в точке M_0 на S. Из этих равенств находим
$$w_{\text{вн}}(M_0)=w(M_0)+2\pi\nu(M_0), \tag{23}$$
$$w_{\text{н}}(M_0)=w(M_0)-2\pi\nu(M_0), \tag{24}$$
$$w_{\text{вн}}(M_0)-w_{\text{н}}(M_0)=4\pi\nu(M_0). \tag{25}$$

Для двумерного случая совершенно аналогичными рассуждениями можно установить, что в точках M_0 несущей кривой C имеем

$$w_{\text{вн}}(M_0) = w(M_0) + \pi\nu(M_0), \tag{26}$$

$$w_{\text{н}}(M_0) = w(M_0) - \pi\nu(M_0), \tag{27}$$

$$w_{\text{вн}}(M_0) - w_{\text{н}}(M_0) = 2\pi\nu(M_0). \tag{28}$$

§ 4. Применение потенциалов к решению краевых задач

Рассмотренные свойства потенциалов позволяют пользоваться ими как удобным аппаратом для решения краевых задач. Мы покажем это на примере первой внутренней краевой задачи

$$\Delta u = f(M) \text{ в } D, \tag{29}$$

$$u|_S = \varphi(M) \tag{30}$$

и $u(M)$ непрерывна в $\overline{D} = D + S$.

Частным решением уравнения (29) является, очевидно, (по свойству 4, § 1) объемный потенциал

$$u_1(M) = \frac{-1}{4\pi} \int\limits_D \frac{f(P)}{r_{MP}}\, d\tau_P.$$

Поэтому естественно искать решение задачи (29), (30) в виде суммы

$$u(M) = u_1(M) + u_2(M),$$

где для функции $u_2(M)$ краевая задача будет ставиться следующим образом:

$$\Delta u_2 = 0, \tag{31}$$

$$u_2|_S = \varphi(M) - u_1(M)|_S = F(M). \tag{32}$$

Попытаемся искать решение этой задачи в виде потенциала двойного слоя

$$w(M) = \int\limits_S \nu(P) \frac{\cos\varphi}{r_{MP}^2}\, d\sigma_P$$

с надлежаще подобранной функцией $\nu(P)$. При любом выборе функции $\nu(P)$ этот потенциал гармоничен в D (по свойству 2, § 3). Чтобы удовлетворить краевому условию (32), надо, чтобы в точках $M \in S$ выполнялось соотношение $w_{\text{вн}}(M) = F(M)$. Пользуясь формулой (23) § 3, это условие можно написать в виде

$$w(M) + 2\pi\nu(M) = F(M),$$

или

$$\int_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{MP}}\right) d\sigma_P + 2\pi\nu(M) = F(M). \tag{33}$$

Решением краевой задачи (31), (32) будет потенциал двойного

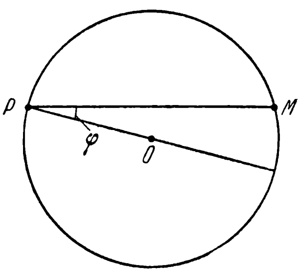

Рис. 21.

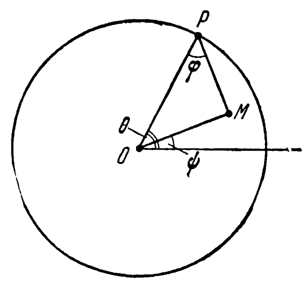

Рис. 22.

слоя с такой плотностью $\nu(P)$, которая удовлетворяет условию (33).

Таким образом, наша краевая задача сводится к решению интегрального уравнения (33) относительно $\nu(P)$.

Пример. Решим первую краевую задачу для круга радиуса R, ограниченного окружностью C:

$$\Delta u = 0, \qquad u|_C = F(s),$$

где s — длина дуги окружности.

В точках M окружности (рис. 21)

$$\frac{\cos\varphi}{r_{MP}} = \frac{1}{2R}. \tag{34}$$

Решение ищем в виде потенциала двойного слоя

$$u(s) = \int_C \nu(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right) d\xi = \int_C \nu(\xi) \frac{\cos\varphi}{r} d\xi.$$

С учетом формулы (34) краевое условие дает интегральное уравнение для определения $\nu(s)$:

$$\int_C \frac{1}{2R} \nu(\xi)\, d\xi + \pi\nu(s) = F(s). \tag{35}$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$\nu(s) = \frac{1}{\pi} F(s) + A,$$

где A — неизвестная постоянная. Подставляя эту функцию в уравнение (35), получим

$$\int_C \frac{1}{2R} \left[\frac{1}{\pi} F(\xi) + A\right] d\xi + F(s) + \pi A = F(s),$$

откуда

$$\frac{1}{2\pi R} \int_C F(\xi)\, d\xi + 2\pi A = 0 \quad \text{и} \quad A = \frac{-1}{4\pi^2 R} \int_C F(\xi)\, d\xi.$$

Таким образом,

$$\nu(s) = \frac{1}{\pi} F(s) - \frac{1}{4\pi^2 R} \int_C F(\xi)\, d\xi.$$

Следовательно, решение краевой задачи имеет вид

$$u(M) = \int_C \nu(\xi) \frac{\cos\varphi}{r}\, d\xi = \frac{1}{\pi} \int_C \frac{F(\xi)\cos\varphi}{r}\, d\xi -$$
$$- \frac{1}{4\pi^2 R} \int_C F(\xi)\, d\xi \int_C \frac{\cos\varphi}{r}\, d\xi = \frac{1}{\pi} \int_C \frac{\cos\varphi}{r} F(\xi)\, d\xi -$$
$$- \frac{1}{2\pi R} \int_C F(\xi)\, d\xi = \frac{1}{\pi} \int_C \left(\frac{\cos\varphi}{r} - \frac{1}{2R}\right) F(\xi)\, d\xi,$$

или

$$u = \frac{1}{\pi} \int_C \frac{2rR\cos\varphi - r^2}{2Rr^2} F(\xi)\, d\xi.$$

Из $\triangle OPM$ (рис. 22) находим ($OM = \rho$):

$$\frac{2Rr\cos\varphi - r^2}{2Rr^2} = \frac{R^2 - \rho^2}{2R\,[R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(\theta - \psi)]},$$

поэтому

$$u(M) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - \rho^2) F(R \cdot \theta) d\theta}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\theta - \psi)}.$$

Мы получили интеграл Пуассона.

Решение второй краевой задачи для уравнения Лапласа надо искать в виде потенциала простого слоя с неизвестной плотностью $\rho(P)$.

Задачи

1. Найти объемный потенциал масс, распределенных с плотностью $\rho(r)$ в сферическом слое $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Рассмотреть также случай $\rho(r) = \rho_0 = \text{const}$.

2. Найти потенциал простого слоя, распределенного с постоянной плотностью ρ_0 на сфере.

3. Найти электростатическое поле объемных зарядов, равномерно распределенных внутри шара, расположенного над идеально проводящей плоскостью $z = 0$.

4. Найти логарифмический потенциал круга с постоянной плотностью зарядов.

5. Найти логарифмический потенциал простого слоя отрезка с постоянной плотностью зарядов.

6. Найти логарифмический потенциал двойного слоя отрезка с постоянной плотностью моментов.

7. С помощью потенциала двойного слоя решить первую краевую задачу для уравнения Лапласа: а) вне круга, б) в полуплоскости.

ГЛАВА VIII

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Мы видели (гл. VII, § 4), что первая краевая задача для уравнений эллиптического типа сводится к линейному интегральному уравнению. В этой главе мы изложим некоторые начальные сведения о линейных интегральных уравнениях второго рода. Для простоты записи мы всюду, кроме § 1, будем рассматривать одномерный случай. Все результаты верны и для многомерного.

§ 1. Классификация линейных интегральных уравнений

Уравнения вида

$$\varphi(M) - \lambda \int\limits_D K(M, P)\,\varphi(P)\,d\tau_P = f(M),$$

где $\varphi(P)$ — искомая функция, $f(M)$ и $K(M, P)$ — известные функции, D — фиксированная область, λ — числовой параметр, называются *интегральными уравнениями Фредгольма второго рода*. Если $f(M) \equiv 0$, уравнение называется *однородным*, в противном случае — *неоднородным*.

Уравнения вида

$$\varphi(M) - \lambda \int\limits_{D(M)} K(M, P)\,\varphi(P)\,d\tau_P = f(M),$$

где $D(M)$ — переменная область, зависящая от точки M, называются *интегральными уравнениями Вольтерра второго рода*. Например, в одномерном случае

$$\varphi(x) - \lambda \int\limits_a^x K(x, s)\,\varphi(s)\,ds = f(x).$$

Если $f(M) \equiv 0$, уравнение называется *однородным*, в противном случае — *неоднородным*.

Уравнения вида

$$\int_D K(M, P)\,\varphi(P)\,d\tau_P = f(M),$$

где D — фиксированная область, называются *интегральными уравнениями Фредгольма первого рода*.

Уравнения вида

$$\int_{D(M)} K(M, P)\,\varphi(P)\,d\tau_P = f(M)$$

называются *интегральными уравнениями Вольтерра первого рода*. Функция $K(M, P)$ называется *ядром интегрального уравнения*.

Замечание. Уравнения Вольтерра являются частным видом уравнений Фредгольма. Так, если в одномерном случае положить

$$K_1(x, s) = \begin{cases} 0, & x < s < b, \\ K(x, s), & a < s \leqslant x, \end{cases}$$

то уравнение Вольтерра

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, s)\,\varphi(s)\,ds = f(x)$$

можно записать как уравнение Фредгольма с ядром $K_1(x, s)$

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K_1(x, s)\,\varphi(s)\,ds = f(x).$$

Ядра $K_1(x, s)$ указанного вида иногда называют *ядрами Вольтерра*.

§ 2. Задачи, приводящие к интегральным уравнениям

1. Задача Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка может быть приведена к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Для определенности рассмотрим уравнение второго порядка:

$$y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = f(x), \tag{1}$$

$$y(0) = y_0, \qquad y'(0) = y_0'. \tag{2}$$

Введем обозначение

$$y''(x) = \varphi(x). \tag{3}$$

Тогда

$$y'(x) = y_0' + \int_0^x \varphi(s)\, ds, \tag{4}$$

$$y(x) = y_0 + \int_0^x y'(\xi)\, d\xi. \tag{5}$$

Заменяя производную $y'(\xi)$ в формуле (5) ее значением по формуле (4), получим

$$y(x) = y_0 + xy_0' + \int_0^x \int_0^\xi \varphi(s)\, ds\, d\xi.$$

Изменяя в этой формуле порядок интегрирования, получим

$$y(x) = y_0 + xy_0' + \int_0^x (x - s)\, \varphi(s)\, ds. \tag{6}$$

Таким образом, мы выразили функцию $y(x)$ и ее производные $y'(x)$ и $y''(x)$ через функцию $\varphi(x)$ по формулам (3), (4), (6). Подставляя эти значения в уравнение (1) и внося под знак интеграла функции $a(x)$ и $b(x)$, получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\varphi(x) + \int_0^x \{ a(x) + (x - s)\, b(x) \}\, \varphi(s)\, ds = f_1(x) \tag{7}$$

с ядром $K(x, s) = a(x) + (x - s)\, b(x)$, где

$$f_1(x) = f(x) - y_0' a(x) - y_0 b(x) - xy_0' b(x).$$

Для уравнений n-го порядка процедура сведения задачи Коши к интегральному уравнению аналогична.

2. Покажем теперь, что задача Штурма — Лиувилля на конечном отрезке может быть сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Для этого введем понятие функции Грина краевой задачи и изучим ее простейшие свойства.

Определение. *Функцией Грина* $G(x,\ s)$ *краевой задачи*

$$L[y] \equiv \frac{d}{dx}[k(x)y'] - q(x)y = -f(x)\,^{1)},$$

$$\alpha_1 y'(0) - \beta_1 y(0) = 0,\quad \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0$$

называется решение краевой задачи:

$$L[y] = -\delta(x-s),$$

$$\alpha_1 y'(0) - \beta_1 y(0) = 0,\quad \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0,$$

непрерывное на отрезке $[0,\ l]$. Докажем некоторые свойства функции Грина $G(x,\ s)$.

1) *Функция Грина обладает свойством симметрии, т. е.*

$$G(x,\ s) = G(s,\ x).$$

Доказательство. Применим формулу Грина для одномерного случая (гл. VI, § 1) к функциям $v = G_1 = G(x,\ s_1)$ и $u = G_2 = G(x,\ s_2)$. Получим

$$\int_0^l \{G(x,\ s_2)\,\delta(x-s_1) - G(x,\ s_1)\,\delta(x-s_2)\}\,dx = \\ = k(x)\left(G_1\frac{\partial G_2}{\partial x} - G_2\frac{\partial G_1}{\partial x}\right)\Big|_0^l. \qquad (8)$$

По свойству δ-функции интеграл в левой части равенства (8) равен $G(s_1,\ s_2) - G(s_2,\ s_1)$, в то время как правая часть равна нулю. Для первой и второй краевых задач это прямо следует из обращения в нуль функций G_1 и G_2 или $\frac{\partial G_1}{\partial x}$ и $\frac{\partial G_2}{\partial x}$ на концах промежутка (при $x=0$ и $x=l$). Для третьей краевой задачи выражаем значения производных $\frac{\partial G_1}{\partial x}$ и $\frac{\partial G_2}{\partial x}$ на концах промежутка через G_1 и G_2:

$$\frac{\partial G_1}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\beta_1}{\alpha_1}G(0,\ s_1),\quad \frac{\partial G_2}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\beta_1}{\alpha_1}G(0,\ s_2),$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial x}\Big|_{x=l} = \frac{-\beta_2}{\alpha_2}G(l,\ s_1),\quad \frac{\partial G_2}{\partial x}\Big|_{x=l} = \frac{-\beta_2}{\alpha_2}G(l,\ s_2)$$

---

[1]) Функция $k(x)$ предполагается непрерывной на отрезке $[0,\ l]$ вместе с производной $k'(x)$, а $q(x)$ непрерывна на $[0,\ l]$.

и подставляем эти значения в правую часть равенства (8). Получим

$$-\frac{\beta_2}{\alpha_2}G(l,\ s_1)\,G(l,\ s_2)+\frac{\beta_2}{\alpha_2}G(l,\ s_2)\,G(l,\ s_1)+$$
$$+\frac{\beta_1}{\alpha_1}G(0,\ s_1)\,G(0,\ s_2)-\frac{\beta_1}{\alpha_1}G(0,\ s_2)\,G(0,\ s_1)=0.$$

Таким образом, действительно

$$G(s_2,\ s_1)=G(s_1,\ s_2).$$

2) *Частная производная функции Грина $G_x(x,\ s)$ имеет разрыв первого рода при $x=s$ со скачком, равным $\frac{-1}{k(s)}$, т. е.*

$$G_x(s+0,\ s)-G_x(s-0,\ s)=\frac{-1}{k(s)}. \tag{9}$$

Для доказательства этого проинтегрируем тождество

$$L[G]\equiv-\delta(x-s)$$

по переменному x от $s-\varepsilon$ до $s+\varepsilon$, где $\varepsilon>0$. Получим

$$\int\limits_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon}L[G]\,dx=\int\limits_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon}\left\{\frac{d}{dx}[k(x)\,G_x(x,\ s)]-q(x)\,G(x,\ s)\right\}dx=$$
$$=-1,$$

или

$$k(x)\,G_x(x,\ s)\Big|_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon}-\int\limits_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon}q(x)\,G(x,\ s)\,dx=-1.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим

$$G_x(s+0,\ s)-G_x(s-0,\ s)=\frac{-1}{k(s)},$$

поскольку $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon}q(x)\,G(x,\ s)\,dx=0.$

3. Теорема. *Существует единственная функция Грина.*

Предварительно докажем две леммы.

Лемма 1. *Существует решение $y_1(x)$ уравнения $L[y]=0$, удовлетворяющее краевому условию $\alpha_1 y'(0)-\beta_1 y(0)=0$.*

Доказательство. Известно, что существует решение задачи Коши для уравнения $L[y]=0$ с любыми начальными значениями $y(0)=y_0$, $y'(0)=y_0'$ [1]). В частности, следовательно, существует решение с такими начальными значениями $y(0)$ и $y'(0)$, которые связаны соотношением $\alpha_1 y'(0)-\beta_1 y(0)=0$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Всякие два решения $y_1(x)$ и $\bar{y}_1(x)$ уравнения $L[y]=0$, удовлетворяющие одному и тому же краевому условию, отличаются друг от друга лишь постоянным множителем, т. е. $\bar{y}_1(x)=C_1 y_1(x)$.*

Доказательство. Функции $y_1(x)$ и $\bar{y}_1(x)$ являются решениями линейного уравнения 2-го порядка $L[y]=0$ и удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &\alpha_1 y_1'(0)-\beta_1 y_1(0)=0,\\ &\alpha_1 \bar{y}_1'(0)-\beta_1 \bar{y}_1(0)=0. \end{aligned} \tag{10}$$

Эти соотношения можно рассматривать как систему уравнений для α_1 и β_1. Поскольку хотя бы одно из чисел α_1 и β_1 не равно нулю, определитель системы (10) равен нулю:

$$w(0)=\begin{vmatrix} y_1'(0) & y_1(0)\\ \bar{y}_1'(0) & \bar{y}_1(0)\end{vmatrix}=0.$$

Этот определитель является значением определителя Вронского при $x=0$ для решений $y_1(x)$ и $\bar{y}_1(x)$. Известно [1]), что определитель Вронского, составленный из решений одного и того же линейного однородного уравнения, либо тождественно равен нулю, либо нигде не обращается в нуль. Так как в нашем случае $w(0)=0$, то определитель Вронского для $y_1(x)$ и $\bar{y}_1(x)$ тождественно равен нулю. Отсюда [1]) следует линейная зависимость уравнений $y_1(x)$ и $\bar{y}_1(x)$, т. е. $\bar{y}_1(x)=Cy_1(x)$.

Перейдем к доказательству теоремы. Мы будем предполагать, что $\lambda=0$ не является собственным значением краевой

---

[1]) См. Степанов, В. В., Курс дифференциальных уравнений, изд. 8-е, М., Физматгиз, 1959.

задачи:

$$L[y]+\lambda y=0,$$

$$\alpha_1 y'(0)-\beta_1 y(0)=0,\quad \alpha_2 y'(l)+\beta_2 y(l)=0. \tag{*}$$

Пусть $y_1(x)$ — решение уравнения $L[y]=0$, удовлетворяющее краевому условию $\alpha_1 y'(0)-\beta_1 y(0)=0$. По лемме 1 такое решение существует. Всякое другое решение, удовлетворяющее тому же краевому условию, по лемме 2 имеет вид $C_1 y_1(x)$. По этим же соображениям существует решение $y_2(x)$ уравнения $L[y]=0$, удовлетворяющее краевому условию $\alpha_2 y'(l)+\beta_2 y(l)=0$. Всякое решение уравнения $L[y]=0$, удовлетворяющее тому же краевому условию, имеет вид $C_2 y_2(x)$.

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы. Если бы это было не так, мы имели бы $y_2(x)\equiv Cy_1(x)$. Но тогда функция $y_2(x)$ была бы решением уравнения $L[y]=0$, удовлетворяющим обоим краевым условиям. Следовательно, $\lambda=0$ было бы собственным значением краевой задачи (*), что противоречит исходному предположению.

Выбирая константы C_1 и C_2 надлежащим образом, мы построим из функций $C_1 y_1(x)$ и $C_2 y_2(x)$ функцию Грина. Положим

$$G(x,\ s)=\begin{cases} C_1 y_1(x), & x\leqslant s,\\ C_2 y_2(x), & x\geqslant s.\end{cases} \tag{11}$$

Из свойства непрерывности функции Грина при $x=s$ находим

$$C_1 y_1(s)=C_2 y_2(s),$$

откуда

$$\frac{C_1}{y_2(s)}=\frac{C_2}{y_1(s)}=C.$$

Следовательно, $C_1=Cy_2(s)$, $C_2=Cy_1(s)$. Коэффициент C определяем из условия (9), которому должна удовлетворять функция Грина

$$C\left[y_1(s)y_2'(s)-y_2(s)y_1'(s)\right]=\frac{-1}{k(s)}. \tag{12}$$

Выражение в квадратных скобках есть вронскиан решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$, равный $\frac{D}{k(s)}$ $(D=\text{const})$. Поскольку функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ определяются с точностью до постоянных множителей, то их можно выбрать так, чтобы вронскиан решений $y_1(s)$ и $y_2(s)$ был равен $\frac{-1}{k(s)}$, т. е. считать $D=-1$. Тогда соотношение (12) принимает вид

$$\frac{-C}{k(s)}=\frac{-1}{k(s)}.$$

Отсюда $C=1$. Таким образом, функция Грина имеет вид

$$G(x, s)=\begin{cases} y_2(s)y_1(x), & x\leqslant s, \\ y_1(s)y_2(x), & x\geqslant s. \end{cases} \tag{13}$$

Из формул (9) и (13) непосредственно следует, что

$$G_x(x, x-0)-G_x(x, x+0)=\frac{-1}{k(x)}. \tag{14}$$

4. Теперь докажем две теоремы Гильберта

1-я теорема Гильберта.

Какова бы ни была интегрируемая функция $f(x)$, решение $y(x)$ краевой задачи

$$L[y]=-f(x), \tag{15}$$

$$\alpha_1 y'(0)-\beta_1 y(0)=0, \quad \alpha_2 y'(l)+\beta_2 y(l)=0 \tag{16}$$

представляется формулой

$$y(x)=\int_0^l G(x, \xi)f(\xi)\,d\xi. \tag{17}$$

Доказательство. Применим формулу Грина для одномерного случая (гл. VI, § 1) к функциям $u=y(x)$ и $v=G(x, s)$.

Получим

$$\int_0^l \{G(x, s)L[y]-y(x)L[G]\}\,dx=k(x)[G(x, s)y'(x)-$$
$$-y(x)G_x(x, s)]_0^l,$$

или

$$-\int_0^l G(x, s)f(x)\,dx+\int_0^l y(x)\delta(x-s)\,dx=$$
$$=k(x)[G(x, s)y'(x)-y(x)G_x(x, s)]_0^l.$$

Из краевых условий (16) для $y(x)$ и $G(x, s)$ (см. определение) следует, что левая часть этого равенства равна нулю. Следовательно,

$$\int_0^l G(x, s) f(x)\, dx = y(s).$$

Изменяя обозначения переменной интегрирования и пользуясь симметрией функции Грина, получим объявленную в теореме формулу.

2-я теорема Гильберта. *Какова бы ни была непрерывная функция $f(x)$, функция*

$$y(x) = \int_0^l G(x, \xi) f(\xi)\, d\xi \tag{18}$$

является решением краевой задачи (15)—(16).

Доказательство. Очевидно, функция $y(x)$ непрерывна на отрезке $[0, l]$ и

$$y'(x) = \int_0^l G_x(x, \xi) f(\xi)\, d\xi. \tag{19}$$

Следовательно,

$$\alpha_1 y'(0) - \beta_1 y(0) = \int_0^l \{\alpha_1 G_x(0, \xi) - \beta_1 G(0, \xi)\}\, f(\xi)\, d\xi = 0,$$

так как по определению функции Грина подынтегральное выражение тождественно равно нулю. Аналогично,

$$\alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0. \tag{20}$$

Таким образом, функция $y(x)$ удовлетворяет краевым условиям (16).

Вычислим $L[y]$. Имеем

$$L[y] \equiv \int_0^l L[G] f(\xi)\, d\xi \equiv -\int_0^l \delta(x - \xi) f(\xi)\, d\xi \equiv -f(x).$$

Таким образом, $y(x)$ удовлетворяет уравнению (15). Теорема доказана.

5. Применим теоремы Гильберта к задаче Штурма — Лиувилля

$$L[y] + \lambda\rho(x)y = 0, \tag{21}$$

$$\alpha_1 y'(0) - \beta_1 y(0) = 0, \quad \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0. \tag{22}$$

По 1-й теореме Гильберта решение этой задачи дается формулой

$$y(x) = \lambda \int_0^l G(x, s)\rho(s)y(s)\,ds, \tag{23}$$

т. е. искомое решение удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма (23). Обратно, по 2-й теореме Гильберта решение уравнения (23) является решением задачи Штурма — Лиувилля (21)—(22). Таким образом, задача Штурма — Лиувилля эквивалентна интегральному уравнению (23).

Мы рассмотрели случай, когда $\lambda = 0$ не является собственным значением краевой задачи (*).

Если $\lambda = 0$ является собственным значением краевой задачи (*), то *функцией Грина* $G(x, s)$ *краевой задачи*

$$L[y] = -f(x),$$

$$\alpha_1 y'(0) - \beta_1 y(0) = 0, \quad \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0$$

назовем решение краевой задачи

$$L[y] = -\delta(x - s) + \Phi_0(x)\Phi_0(s),$$

$$\alpha_1 y'(0) - \beta_1 y(0) = 0, \quad \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0,$$

непрерывное на отрезке $[0, l]$ и ортогональное собственной функции $\Phi_0(x)$, соответствующей собственному значению $\lambda = 0$, т. е. такое, что

$$\int_0^l \Phi_0(x)G(x, s)\,dx = 0.$$

Соответствующие свойства функции Грина в этом случае доказываются аналогично.

§ 3. Интегральные уравнения с вырожденными ядрами

Ядро $K(x, s)$ называется *вырожденным*, если оно имеет вид

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, b_i(s), \tag{24}$$

где $a_i(x)$ — линейно независимые функции.

Решение уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. В самом деле, подставляя в уравнение

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds+f(x) \tag{25}$$

ядро (24), получим

$$\varphi(x)=\lambda\sum_{i=1}^{n} C_i a_i(x)+f(x), \tag{26}$$

где $C_i=\int_a^b b_i(s)\varphi(s)\,ds$ — неизвестные числа.

Таким образом, решение уравнения (25) с вырожденным ядром надо искать в виде (26). Подставляя эту функцию в уравнение (25) и сравнивая коэффициенты при одних и тех же функциях $a_i(x)$ справа и слева, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно C_i:

$$C_i=\lambda\sum_{j=1}^{n} C_j\alpha_{ij}+\beta_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{27}$$

где

$$\alpha_{ij}=\int_a^b a_i(s)\,b_j(s)\,ds, \qquad \beta_i=\int_a^b f(s)\,b_i(s)\,ds.$$

Решив эту систему, мы найдем C_i, а следовательно и решение уравнения (25) $\varphi(x)$.

§ 4. Существование решений

1. Если ядро вырожденное, то вопрос о существовании решения интегрального уравнения Фредгольма сводится к вопросу о существовании решения соответствующей системы алгебраических уравнений (27). В более общем случае мы докажем существование решения уравнения (25) (при достаточно малых значениях $|\lambda|$) *методом последовательных приближений*.

Для простоты выкладок будем предполагать, что: 1) ядро $K(x, s)$ непрерывно в квадрате $a\leqslant x,\ s\leqslant b$; тогда оно ограничено некоторой константой A, $|K| \leqslant A$; 2) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a.\ b]$, следовательно, она ограничена на этом отрезке некоторой константой B, $|f| \leqslant B$. Построим последовательность функций

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots$$

по следующему правилу:

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,\ s)\, \varphi_0(s)\, ds, \tag{28}$$

где $\varphi_0(s)$ — произвольная фиксированная непрерывная функция,

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,\ s)\, \varphi_1(s)\, ds, \tag{29}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,\ s)\, \varphi_{n-1}(s)\, ds, \tag{30}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Теорема. *Последовательность* (28) — (30) *функций* $\varphi_n(x)$ *равномерно сходится на отрезке* $[a,\ b]$ *к функции* $\bar{\varphi}(x)$, *являющейся решением уравнения* (25).

Доказательство. Преобразуем формулы для получения функций $\varphi_n(x)$. Подставляя функцию $\varphi_1(x)$ в формулу для $\varphi_2(x)$, получим

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,\ s) f(s)\, ds + \\ + \lambda^2 \int_a^b K(x,\ s) \int_a^b K(s,\ t)\, \varphi_0(t)\, dt\, ds.$$

Меняя в последнем интеграле порядок интегрирования, получим

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K_1(x,\ s) f(s)\, ds + \lambda^2 \int_a^b K_2(x,\ t)\, \varphi_0(t)\, dt,$$

где

$$K_1(x,\ s) = K(x,\ s), \qquad K_2(x,\ t) = \int_a^b K_1(x,\ s)\, K_1(s,\ t)\, ds.$$

Аналогично находим

$$\varphi_n(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K_1(x, s)f(s)\,ds+\lambda^2\int_a^b K_2(x, s)f(s)\,ds+\ldots$$
$$\ldots+\lambda^{n-1}\int_a^b K_{n-1}(x, s)f(s)\,ds+\lambda^n\int_a^b K_n(x, t)\,\varphi_0(t)\,dt,$$

где $K_n(x, t)=\int_b^a K_1(x, s)\,K_{n-1}(s, t)\,ds$. Предел функции $\varphi_n(x)$, если он существует, равен сумме ряда

$$\bar{\varphi}(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K_1(x, s)f(s)\,ds+\ldots$$
$$\ldots+\lambda^n\int_a^b K_n(x, s)f(s)\,ds+\ldots \qquad (31)$$

Докажем равномерную сходимость этого ряда. Для этого оценим интегралы

$$\int_a^b K_n(x, s)f(s)\,ds.$$

Очевидно,

$$|K_2(x, s)|\leqslant\int_a^b |K_1(x, s)\,K_1(s, t)|\,ds\leqslant A^2(b-a),$$
$$|K_3(x, s)|\leqslant\int_a^b |K_1(x, s)\,K_2(s, t)|\,ds\leqslant A^3(b-a)^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$|K_n(x, s)|\leqslant\int_a^b |K_1(x, s)\,K_{n-1}(s, t)|\,ds\leqslant A^n(b-a)^{n-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

поэтому

$$\left|\int_a^b K_n(x, s)f(s)\,ds\right|\leqslant A^n(b-a)^{n-1}\int_a^b |f(s)|\,ds\leqslant A^nB(b-a)^n.$$

Следовательно, числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} BA^n|\lambda|^n(b-a)^n \qquad (32)$$

является мажорантным для ряда (31). Если $|\lambda| < \frac{1}{A(b-a)}$, то ряд (32) сходится. Следовательно, при таких λ ряд (31), а вместе с ним и последовательность функций $\varphi_n(x)$, равномерно сходится к функции $\bar{\varphi}(x)$. Эта функция является решением уравнения (25). В самом деле, переходя в формуле (30) к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\bar{\varphi}(x) \equiv \lambda \int_a^b K(x, s)\,\bar{\varphi}(s)\,ds + f(x).$$

Переход к пределу под знаком интеграла здесь законен, так как последовательность сходится равномерно.

Заметим, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \bar{\varphi}(x)$ не зависит от выбора функции $\varphi_0(s)$ (нулевого приближения). Из этого легко следует единственность решения уравнения (25). В самом деле, если существует еще одно решение $\psi(x)$ уравнения (25), то, полагая в процедуре построения функций (28) — (30) $\varphi_0(x) = \psi(x)$, получим

$$\varphi_1(x) = \psi(x),\quad \varphi_2(x) = \psi(x),\quad \ldots,\quad \varphi_n(x) = \psi(x),\quad \ldots$$

Эта последовательность имеет пределом функцию $\bar{\varphi}(x)$. Но вместе с тем очевидно:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \psi(x).$$

Таким образом,

$$\bar{\varphi}(x) = \psi(x).$$

2. Поскольку ряд (31) сходится при $|\lambda| < \frac{1}{A(b-a)}$, то при таких же λ сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A^n |\lambda|^{n-1} (b-a)^{n-1}$. Но этот ряд является мажорантным для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, s)$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, s)$ сходится равномерно. Поэтому ряд (31) можно записать в виде

$$\bar{\varphi}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, s) \right\} f(s)\,ds,$$

или

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,\ s,\ \lambda)f(s)\,ds, \qquad (33)$$

где функция $R(x,\ s,\ \lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_n(x,\ s)$ называется *резольвентой* уравнения (25).

Таким образом, если нам известна резольвента уравнения (25), то по формуле (33) мы получим его решение. Мы определили резольвенту лишь для малых значений $|\lambda|$. Однако ее можно определить на любой конечной области комплексной плоскости переменного λ путем аналитического продолжения (кроме, может быть, конечного числа особых точек этой области). Если это сделано, то по формуле (33) мы получим решение уравнения (25) для любых значений λ, кроме упомянутых особых точек. Мы не будем подробно на этом останавливаться[1]).

3. Если мы применим описанную выше процедуру к уравнению Вольтерра

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^x K(x,\ s)\,\varphi(s)\,ds+f(x) \qquad (a\leqslant x\leqslant b), \qquad (34)$$

то получим последовательность функций:

$$\varphi_1(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,\ s)\,\varphi_0(s)\,ds,$$

$$\varphi_2(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,\ s)\,\varphi_1(s)\,ds,$$

. . . .

$$\varphi_n(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,\ s)\,\varphi_{n-1}(s)\,ds,$$

. . . .

---

[1]) См. Михлин С. Г., Интегральные уравнения и их приложения к некоторым проблемам механики, математической физики и техники, ч. I, гл. I, М. — Л., Гостехиздат, 1949.

Эта последовательность равномерно сходится на $[a, b]$ **при любых значениях параметра** λ. В самом деле, очевидно, справедливы неравенства:

$$|\varphi_1(x)| \leqslant |f(x)| + |\lambda| \int_a^x |K(x, s)|\,|\varphi_0(s)|\,ds \leqslant$$
$$\leqslant B + |\lambda|\,AB_0(x-a), \text{ где } |\varphi_0(s)| \leqslant B_0,$$

$$|\varphi_2(x)| \leqslant |f(x)| + |\lambda| \int_a^x |K(x, s)|\,|\varphi_1(s)|\,ds \leqslant$$
$$\leqslant B + |\lambda|\,A \int_a^x \{B + |\lambda|\,AB_0(s-a)\}\,ds =$$
$$= B + |\lambda|\,AB(x-a) + |\lambda|^2 A^2 B_0 \frac{(x-a)^2}{2!}.$$

Вообще,

$$|\varphi_n(x)| \leqslant B + |\lambda|\,AB(x-a) + \ldots + |\lambda^{n-1}|\,A^{n-1} B \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} +$$
$$+ |\lambda|^n A^n B_0 \frac{(x-a)^n}{n!}.$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} B|\lambda|^n A^n \frac{(x-a)^n}{n!}$ равномерно сходится на отрезке $[a, b]$ и его частичные суммы являются мажорантными для функций $\varphi_n(x)$, то последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ также сходится равномерно; $\bar{\varphi}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)$, очевидно, является решением уравнения (34) и притом единственным.

§ 5. Понятие о приближенных методах решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода

Описанный в § 4 метод последовательных приближений построения решения может служить приближенным методом решения интегральных уравнений. В качестве приближенного решения надо брать функции $\varphi_n(x)$, определяемые формулами (28) — (30).

Второй метод решения интегральных уравнений состоит в том, что ядро уравнения $K(x, s)$ аппроксимируют с надлежащей точностью вырожденным ядром

$$\overline{K}(x, s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) b_i(s).$$

Решение уравнения с ядром $\overline{K}(x, s)$ и будет приближенным решением исходного уравнения [1]).

Третий метод, его называют **методом сеток**, состоит в следующем.

Отрезки $[a, b]$ изменения переменных x и s разбивают на n одинаковых частей точками деления x_i, s_j. Интеграл $\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds$ в интегральном уравнении заменяют интегральной суммой. Получают соотношение

$$\varphi(x) \cong \sum_{j=1}^{n} K(x, s_j)\varphi_j \Delta s_j + f(x).$$

Полагая здесь x равным x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, рассмотрим систему уравнений

$$\varphi_i = \lambda \sum_{j=1}^{n} K_{ij}\varphi_j \Delta s_j + f_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{35}$$

где

$$\varphi_i = \varphi(x_i), \quad K_{ij} = K(x_i, s_j), \quad f_i = f(x_i), \quad \Delta s_j = s_{j+1} - s_j.$$

Решая эту систему относительно φ_i, получим значения приближенного решения в узловых точках. Мы не будем останавливаться на подробном изложении этих и других методов приближенного решения, отсылая читателя к специальной литературе [2]).

---

[1]) Михлин С. Г., Лекции по линейным интегральным уравнениям, М., Физматгиз, 1959.

[2]) Канторович Л. В. и Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, изд. 5-е, гл. II, М., Физматгиз, 1962.

§ 6. Теоремы Фредгольма

В этом параграфе и в следующей главе мы будем рассматривать лишь интегральные уравнения Фредгольма II рода

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds = f(x). \tag{36}$$

1. Однородное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds \tag{37}$$

при любых значениях параметра λ, очевидно, имеет тривиальное решение $\varphi(x) \equiv 0$. Однако при некоторых значениях λ оно может иметь и нетривиальные решения.

Определение. Значения параметра λ, при которых уравнение (37) имеет нетривиальные решения (т. е. не равные тождественно нулю), называются *собственными значениями* (с. з.) уравнения (37) (ядра $K(x, s)$), а соответствующие им решения $\varphi(x)$ — собственными функциями (с. ф.) уравнения (ядра). Справедлива следующая

Теорема 1. *Если в уравнении* (36) λ *не равно собственному значению соответствующего однородного уравнения* (37), *то уравнение* (36) *может иметь лишь единственное решение*[1]).

Доказательство. Пусть $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — два решения уравнения (36). Тогда справедливы тождества

$$\varphi_1(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi_1(s)\,ds \equiv f(x),$$

$$\varphi_2(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi_2(s)\,ds \equiv f(x),$$

откуда

$$(\varphi_1 - \varphi_2) - \lambda \int_a^b K(x, s)(\varphi_1 - \varphi_2)\,ds \equiv 0.$$

---

[1]) Существование решения здесь не доказывается. Это будет сделано на стр. 197.

Следовательно, разность $\varphi(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$ является решением однородного уравнения. Поскольку λ не является собственным значением, то $\varphi(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\equiv 0$. Теорема доказа́на.

2. Для дальнейшего напомним некоторые теоремы о системах линейных алгебраических уравнений.

Теорема А. *Для того чтобы однородная система уравнений*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{38}$$

имела лишь тривиальное решение (т. е. решение, состоящее только из нулей), необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы был отличным от нуля.

Теорема Б. *Если определитель однородной системы* (38) *равен нулю, то эта система имеет $p=n-r$ линейно независимых решений, где r — ранг матрицы системы.*

Теорема В. *Если однородная система уравнений* (38) *имеет лишь тривиальное решение, то соответствующая ей неоднородная система уравнений*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{39}$$

имеет единственное решение при любых значениях правых частей b_i.

3. Как указывалось в § 5, приближенное решение уравнения (36) можно получить, заменяя это уравнение соответствующей системой линейных алгебраических уравнений

$$\varphi_m-\lambda\sum_{j=1}^{n} K_{jm}\varphi_j\Delta s_j=f_m \qquad (m=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{40}$$

и решая затем эту систему.

Таким же путем известные теоремы о системах линейных алгебраических уравнений переносятся на интегральные уравнения Фредгольма II рода. Для интегральных уравнений эти теоремы называются теоремами Фредгольма. Ниже мы укажем один из способов получения теорем Фредгольма, не вдаваясь в подробные доказательства.

Функцию $\varphi_n(x)$, равную решению системы (40) в соответствующих узловых точках и линейную между ними, будем называть *полигональной функцией, соответствующей решению системы* (40). Справедлива

Теорема 2. *Полигональная функция* $\varphi_n(x)$, *соответствующая решению системы* (40), *равномерно стремится при* $n \to \infty$ *к решению интегрального уравнения* (36).

Мы опускаем доказательство этой теоремы. Теперь опишем способ получения теорем Фредгольма.

Пусть λ не является собственным значением ядра $K(x, s)$. Тогда однородное уравнение (37) имеет лишь тривиальное решение. Поэтому, имея в виду теоремы А и 2, можно утверждать, что соответствующая система алгебраических уравнений, которой заменяется интегральное уравнение (37), т. е. система

$$\tilde{\varphi}_m - \lambda \sum_{j=1}^{n} K_{jm} \tilde{\varphi}_j \Delta s_j = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, n),$$

имеет не равный нулю определитель. Следовательно, система уравнений

$$\varphi_m - \lambda \sum_{j=1}^{n} K_{jm} \varphi_j \Delta s_j = f_m \qquad (m = 1, 2, \ldots, n),$$

которой заменяется неоднородное интегральное уравнение (36), имеет единственное решение. Соответствующая этому решению полигональная функция $\varphi_n(x)$ при $n \to \infty$ по теореме 2 равномерно стремится к решению уравнения (36). Таким образом, справедлива

1-я теорема Фредгольма. *Для всякого* λ, *не равного собственному значению, уравнение* (36) *имеет единственное решение.*

Замечание. Поскольку определители системы (40) и транспонированной системы

$$\psi_m - \lambda \sum_{j=1}^{n} K_{mj} \psi_j \Delta s_j = f_m \qquad (m = 1, 2, \ldots, n)$$

совпадают, то для всякого λ, не равного с. з. ядра $K(x, s)$, сопряженное интегральное уравнение

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b K(s, x) \psi(s)\, ds = f(x)$$

также имеет единственное решение.

Теперь обратимся к рассмотрению случая, когда λ совпадает с одним из собственных значений. Справедлива

2-я теорема Фредгольма. *Если λ является собственным значением ядра $K(x, s)$, то как однородное интегральное уравнение* (37), *так и сопряженное ему уравнение имеют конечное число линейно независимых решений.*

Эта теорема следует из того, что однородная система алгебраических уравнений, соответствующая уравнению (37), имеет, согласно теореме Б, конечное число линейно независимых решений.

3-я теорема Фредгольма. *Пусть λ является собственным значением ядра $K(x, s)$. Тогда, для того чтобы уравнение* (36) *имело решение, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ в правой части уравнения* (36) *была ортогональной всем собственным функциям сопряженного однородного уравнения, соответствующим этому собственному значению.*

Необходимость условия доказывается просто. Действительно, если $\varphi(x)$ есть решение уравнения (36), то справедливо тождество

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds \equiv f(x).$$

Умножаем это тождество на собственную функцию $\psi(x)$ сопряженного уравнения и результат интегрируем (по x) по отрезку $[a, b]$. Получим

$$\int_a^b f(x)\,\psi(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx - \lambda \int_a^b \psi(x) \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds\,dx.$$

Поскольку

$$\lambda \int_a^b \psi(x) \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds\,dx = \int_a^b \varphi(s)\,\lambda \int_a^b K(x, s)\,\psi(x)\,dx\,ds$$

и

$$\lambda \int_a^b K(x, s)\,\psi(x)\,dx \equiv \psi(s),$$

то

$$\int_a^b f(x)\psi(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx - \int_a^b \varphi(s)\psi(s)\,ds = 0,$$

ч. т. д.

Доказательство достаточности более громоздко. Его можно провести, например, сначала для соответствующей системы алгебраических уравнений, а потом предельным переходом в полигональных функциях распространить этот результат и на интегральное уравнение. Мы не будем останавливаться на этом доказательстве[1]).

Пусть собственному значению λ отвечает r линейно независимых собственных функций. Тогда, очевидно, справедлива

Теорема. *Если в уравнении* (36) λ *совпадает с одним из собственных значений и выполняется условие существования решения уравнения* (36) (т. е. $f(x)$ *ортогональна соответствующим собственным функциям сопряженного уравнения), то решением уравнения* (36) *будет также всякая функция*

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \sum_{q=1}^{r} C_q \varphi_q(x),$$

где $\varphi_0(x)$ — *решение уравнения* (36), $\varphi_q(x)$ — *собственные функции ядра* $K(x, s)$, *отвечающие собственному значению* λ, C_q — *произвольные постоянные.*

Замечание. В § 4 было показано, что неоднородное уравнение Вольтерра имеет единственное решение при любых значениях параметра λ. Следовательно, согласно теоремам Фредгольма, уравнение Вольтерра не имеет собственных значений.

[1]) См., например, Петровский И. Г., Лекции по теории интегральных уравнений, М.—Л., Гостехиздат, 1951.

ГЛАВА IX

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С СИММЕТРИЧНЫМИ ЯДРАМИ

В этой главе мы будем рассматривать уравнения Фредгольма только с симметричными ядрами. Ядро $K(x, s)$ называется *симметричным*, если для всех x и s из квадрата $a \leqslant x, s \leqslant b$ выполняется тождество

$$K(x, s) \equiv K(s, x).$$

Если ядро $K(x, s)$ симметрично, то, очевидно, и все итерированные ядра $K_n(x, s)$ также симметричны. Напомним, что для простоты изложения мы ограничиваемся рассмотрением лишь непрерывных в квадрате $a \leqslant x, s \leqslant b$ ядер.

Уравнения с симметричными ядрами чаще других встречаются в задачах математической физики. Они обладают целым рядом специфических свойств, главное из которых выражает

Теорема 1. *Всякое непрерывное симметричное ядро, не равное тождественно нулю, имеет по крайней мере одно собственное значение.*

Мы не будем приводить доказательство этой теоремы[1]. Отметим лишь, что среди несимметричных ядер имеются такие, у которых нет собственных значений. Таковым, например, является ядро $K(x, s) = \sin x \cos s$, $0 \leqslant x, s \leqslant 2\pi$, а также все ядра Вольтерра (см. замечание на стр. 199).

Совокупность всех собственных значений уравнения (ядра) будем называть *спектром собственных значений* уравнения (ядра), короче — *спектром уравнения* (ядра).

---

[1]) См. Петровский И. Г., Лекции по теории интегральных уравнений, М. — Л., Гостехиздат, 1951 и Михлин С. Г., Лекции по линейным интегральным уравнениям, М., Физматгиз, 1959.

§ 1. Простейшие свойства собственных функций и собственных значений

Очевидно, справедливы следующие два свойства.

Свойство 1. *Если $\varphi(x)$ есть собственная функция, соответствующая собственному значению λ, то $C\varphi(x)$, где C — произвольная постоянная, также является собственной функцией, соответствующей тому же λ.*

Постоянный множитель C можно выбрать так, чтобы норма собственной функции $C\varphi(x)$, т. е. $\|C\varphi\|=\sqrt{\int\limits_a^b C^2\varphi^2(x)\,dx}$, была равна единице, $\|C\varphi\|=1$. В дальнейшем будем предполагать, что все собственные функции нормированы указанным образом к единице.

Свойство 2. *Если две собственные функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ соответствуют одному и тому же собственному значению λ, то, каковы бы ни были постоянные C_1 и C_2, функции $C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)$ также являются собственными функциями, соответствующими тому же собственному значению λ.*

Докажем

Свойство 3. *Собственные функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, соответствующие различным собственным значениям λ_1 и λ_2, ортогональны на отрезке $[a, b]$, т. е.*

$$\int\limits_a^b \varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,dx=0.$$

Доказательство. По условию справедливы тождества

$$\frac{1}{\lambda_1}\varphi_1(x)\equiv\int\limits_a^b K(x, s)\,\varphi_1(s)\,ds, \qquad \frac{1}{\lambda_2}\varphi_2(x)\equiv\int\limits_a^b K(x, s)\,\varphi_2(s)\,ds.$$

Первое из них умножим на $\varphi_2(x)$, второе — на $\varphi_1(x)$ и почленно вычтем результаты один из другого. Полученное тождество интегрируем (по x) по отрезку $[a, b]$:

$$\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)\int\limits_a^b \varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,dx=\int\limits_a^b\int\limits_a^b K(x, s)\,\varphi_1(s)\,\varphi_2(x)\,ds\,dx-$$
$$-\int\limits_a^b\int\limits_a^b K(x, s)\,\varphi_2(s)\,\varphi_1(x)\,ds\,dx.$$

Меняя порядок интегрирования во втором члене правой части равенства и учитывая симметричность ядра, получим

$$\int_a^b\int_a^b K(x, s)\varphi_2(s)\varphi_1(x)\,ds\,dx = \int_a^b\int_a^b K(x, s)\varphi_1(x)\varphi_2(s)\,dx\,ds = \\ = \int_a^b\int_a^b K(x, s)\varphi_1(s)\varphi_2(x)\,ds\,dx.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)\,dx = 0.$$

Отсюда и следует ортогональность.

Если ортогонализировать собственные функции, соответствующие одному собственному значению λ [1]), то можно утверждать, что любые две линейно независимые собственные функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ ортогональны.

В дальнейшем мы будем предполагать, что такая ортогонализация произведена всюду, где она необходима. Следовательно, семейство собственных функций можно считать ортонормированным.

Свойство 4. *Все собственные значения интегральных уравнений с симметричными ядрами вещественны.*

Доказательство. Предположим, что $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, есть комплексное собственное значение, а $\varphi(x) = \psi_1(x) + i\psi_2(x)$ — соответствующая ему с. ф. Тогда

$$\psi_1(x) + i\psi_2(x) \equiv (\alpha + i\beta)\int_a^b K(x, s)[\psi_1(s) + i\psi_2(s)]\,ds.$$

Отсюда следуют тождества

$$\psi_1(x) \equiv \alpha\int_a^b K(x, s)\psi_1(s)\,ds - \beta\int_a^b K(x, s)\psi_2(s)\,ds,$$

$$\psi_2(x) \equiv \alpha\int_a^b K(x, s)\psi_2(s)\,ds + \beta\int_a^b K(x, s)\psi_1(s)\,ds.$$

---

[1]) См. стр. 74.

Умножим второе из этих тождеств на i и результат вычтем из первого, получим

$$\psi_1(x) - i\psi_2(x) \equiv (\alpha - i\beta)\int_a^b K(x, s)[\psi_1(s) - i\psi_2(s)]\, ds.$$

Таким образом,

$$\bar{\lambda} = \alpha - i\beta \quad \text{и} \quad \bar{\varphi}(x) = \psi_1(x) - i\psi_2(x)$$

также являются соответствующими друг другу с. з. и с. ф. Поскольку $\bar{\lambda} \neq \lambda$ (ибо $\beta \neq 0$), то по свойству 3 функции $\varphi(x)$ и $\bar{\varphi}(x)$ ортогональны, т. е.

$$\int_a^b \varphi(x)\bar{\varphi}(x)\, dx = \int_a^b \{\psi_1^2(x) + \psi_2^2(x)\}\, dx = 0.$$

Отсюда ввиду непрерывности функций $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ следует, что $\psi_1(x) \equiv \psi_2(x) \equiv 0$. А тогда $\varphi(x) \equiv 0$, что невозможно. Таким образом, свойство доказано.

Свойство 5. *На каждом конечном отрезке* $[A, B]$ *содержится лишь конечное число (оно может быть равным нулю) собственных значений.*

Доказательство. Допустим, что на некотором отрезке $[A_0, B_0]$ содержится бесконечное множество собственных значений. Выберем из этого множества некоторую бесконечную последовательность собственных значений $\{\tilde{\lambda}_n\}$. Пусть $\{\tilde{\varphi}_n(x)\}$ — последовательность соответствующих им собственных функций. Поскольку семейство функций $\{\tilde{\varphi}_n(x)\}$ является ортонормированным, а коэффициенты Фурье ядра $K(x, s)$ по функциям этого семейства равны $\frac{1}{\tilde{\lambda}_n}\tilde{\varphi}_n(x)$, то справедливо неравенство Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\varphi}_n^2(x)}{\tilde{\lambda}_n^2} \leqslant \int_a^b K^2(x, s)\, ds.$$

Следовательно, для любого целого $p > 0$

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{\tilde{\varphi}_n^2(x)}{\tilde{\lambda}_n^2} \leqslant \int_a^b K^2(x, s)\, ds.$$

Интегрируя это неравенство (по x) по отрезку $[a, b]$, получим

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{\tilde{\lambda}_n^2} \leqslant \int_a^b \int_a^b K^2(x, s)\, ds\, dx.$$

Поскольку все $\tilde{\lambda}_n$ лежат на конечном отрезке $[A_0, B_0]$, то все числа $\tilde{\lambda}_n^2$ меньше числа B^2, $\tilde{\lambda}_n^2 < B^2$, где $B^2 = \max\{A_0^2, B_0^2\}$. Заменив в сумме $\sum\limits_{n=1}^{p} \frac{1}{\tilde{\lambda}_n^2}$ все $\tilde{\lambda}_n^2$ бо́льшим числом B^2, для любого целого p получим

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{B^2} \leqslant \int_a^b \int_a^b K^2(x, s)\, ds\, dx,$$

что невозможно, ибо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{B^2}$ расходящийся, и следовательно, для достаточно больших p сумма $\sum\limits_{n=1}^{p} \frac{1}{B^2}$ будет больше числа $\int\limits_a^b \int\limits_a^b K^2(x, s)\, ds\, dx$.

Из свойства 5 непосредственно следует, что: а) все собственные значения можно занумеровать в порядке роста их абсолютных величин, т. е.

$$|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_n| \leqslant \ldots;$$

б) если спектр собственных значений бесконечный, то $|\lambda_n| \to \infty$ при $n \to \infty$.

Свойство 6. *Каждому собственному значению λ соответствует конечное число q собственных функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_q(x)$.*

Доказательство. Допустим, что некоторому с. з. $\tilde{\lambda}$ соответствует бесконечная последовательность собственных функций $\tilde{\varphi}_1(x), \tilde{\varphi}_2(x), \ldots, \tilde{\varphi}_n(x), \ldots$

Из неравенства Бесселя следует, что для всякого целого $p > 0$ выполняется неравенство

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{\tilde{\varphi}_n^2(x)}{\tilde{\lambda}^2} \leqslant \int_a^b K^2(x, s)\, ds.$$

Интегрируя это неравенство (по x) по отрезку $[a, b]$ и учитывая нормированность собственных функций, для любого целого $p > 0$ получим

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{\tilde{\lambda}^2} \leqslant \int_a^b \int_a^b K^2(x, s)\, ds\, dx \quad \text{или} \quad p \leqslant \tilde{\lambda}^2 \int_a^b \int_a^b K^2(x, s)\, ds\, dx,$$

что невозможно. Следовательно, каждому с. з. λ соответствует лишь конечное число с. ф.

Из изложенного в гл. VIII, § 3 следует, что вырожденное симметричное ядро имеет лишь конечный спектр. Действительно, для того чтобы однородная система линейных уравнений ((27) при $\beta_i = 0$, гл. VIII) для определения коэффициентов C_i имела ненулевое решение, необходимо, чтобы определитель этой системы $D(\lambda)$ был равен нулю: $D(\lambda) = 0$. Из этого уравнения мы находим собственные значения. Очевидно, оно имеет лишь конечное число корней. Верно и обратное: если симметричное ядро $K(x, s)$ имеет конечный спектр, то оно вырожденное. Действительно, пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — спектр ядра, а $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — совокупность всех соответствующих собственных функций ядра (полная система). Рассмотрим симметричную непрерывную функцию

$$K^{(n)}(x, s) = K(x, s) - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\lambda_p} \varphi_p(x)\, \varphi_p(s).$$

Если она не равна тождественно нулю, $K^{(n)}(x, s) \not\equiv 0$, то по теореме 1 она имеет по крайней мере одно собственное значение μ и соответствующую собственную функцию $\psi(x)$:

$$\psi(x) \equiv \mu \int_a^b K^{(n)}(x, s)\, \psi(s)\, ds.$$

Функция $\psi(x)$ ортогональна всем собственным функциям $\varphi_q(x)$ ядра $K(x, s)$, ибо

$$\int_a^b \psi(x)\varphi_q(x)\,dx = \mu\int_a^b \varphi_q(x)\int_a^b K^{(n)}(x, s)\psi(s)\,ds\,dx =$$
$$= \mu\int_a^b\int_a^b K^{(n)}(x, s)\varphi_q(x)\psi(s)\,ds\,dx.$$

Меняя здесь порядок интегрирования, получим

$$\int_a^b\int_a^b K^{(n)}(x, s)\psi(s)\varphi_q(x)\,ds\,dx =$$
$$= \int_a^b \psi(s)\int_a^b \left\{K(x, s) - \sum_{p=1}^{n}\frac{\varphi_p(x)\varphi_p(s)}{\lambda_p}\right\}\varphi_q(x)\,dx\,ds.$$

Поскольку функции $\varphi_p(x)$ ортонормированы, то последний интеграл равен

$$\int_a^b \psi(s)\left\{\int_a^b K(x, s)\varphi_q(x)\,dx - \frac{\varphi_q(s)}{\lambda_q}\right\}ds =$$
$$= \int_a^b \psi(s)\left\{\frac{1}{\lambda_q}\varphi_q(s) - \frac{1}{\lambda_q}\varphi_q(s)\right\}ds = 0;$$

μ и $\psi(x)$ суть с. з. и с. ф. ядра $K(x, s)$, ибо

$$\mu\int_a^b K(x, s)\psi(s)\,ds = \mu\int_a^b\left\{K^{(n)}(x, s) + \sum_{p=1}^{n}\frac{\varphi_p(x)\varphi_p(s)}{\lambda_p}\right\}\psi(s)\,ds =$$
$$= \mu\int_a^b K^{(n)}(x, s)\psi(s)\,ds = \psi(x).$$

Мы при этом воспользовались ортогональностью функции $\psi(x)$ к функциям $\varphi_p(x)$. Поскольку $\psi(x)$ есть с. ф. ядра $K(x, s)$ и функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ образуют полную систему собственных функций ядра $K(x, s)$, то $\psi(x)$ должна быть линейной комбинацией функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$. Но это невозможно, так как $\psi(x)$ ортогональна всем этим функциям. Таким образом, нельзя предполагать, что $K^{(n)}(x, s) \not\equiv 0$. Следовательно, $K^{(n)}(x, s) \equiv 0$ или

$$K(x, s) = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\lambda_p} \varphi_p(x) \varphi_p(s),$$

т. е. ядро $K(x, s)$ является вырожденным. Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Для того чтобы спектр симметричного ядра был конечным, необходимо и достаточно, чтобы ядро было вырожденным.*

§ 2. Спектр итерированных ядер

Для интегрального оператора $\int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds$ введем краткое обозначение

$$A\varphi \equiv \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds.$$

Из определения итерированных ядер следует, что

$$A(A\varphi) = A^2\varphi = \int_a^b K_2(x, s) \varphi(s) ds,$$

вообще

$$A^n\varphi = A(A^{n-1}\varphi) = \int_a^b K_n(x, s) \varphi(s) ds.$$

Для собственных функций $\varphi_p(x)$ и собственных значений λ_p справедливы равенства

$$\varphi_p(x) = \lambda_p A\varphi_p = \lambda_p A(\lambda_p A\varphi_p) = \lambda_p^2 A^2\varphi_p = \ldots$$
$$\ldots = \lambda_p^n A^n\varphi_p = \lambda_p^n \int_a^b K_n(x, s) \varphi_p(s) ds,$$

из которых следует

Теорема 3. *Если $\varphi_p(x)$ и λ_p суть собственные функции и собственные значения ядра $K(x, s)$, то $\varphi_p(x)$ и λ_p^n будут собственной функцией и собственным значением ядра $K_n(x, s)$.*

Справедлива также

Теорема 4. *Если* μ *есть собственное значение ядра* $K_n(x, s)$, *то собственным значением ядра* $K(x, s)$ *будет по крайней мере один из корней (вещественных!) n-й степени числа* μ.

Для доказательства нам понадобится

Лемма. *Если* $h_1, h_2, \ldots, h_n$ — *корни уравнения* $h^n = \mu$, *то*

$$h_1^s + h_2^s + \ldots + h_n^s = 0$$

для $s = 1, 2, \ldots, n-1$.

Доказательство. Как известно, $h_m = \sqrt[n]{\mu}\,\xi^m$, где $\sqrt[n]{\mu}$ — какой-нибудь корень уравнения $h^n = \mu$, $\xi = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Тогда

$$h_1^s + h_2^s + \ldots + h_n^s = \sqrt[n]{\mu^s}\,(1 + \xi^s + \xi^{2s} + \ldots + \xi^{s(n-1)})\,\xi^s =$$
$$= \xi^s \sqrt[n]{\mu^s}\,\frac{\xi^{sn} - 1}{\xi^s - 1} = 0,$$

так как $\xi^{sn} = 1$.

Доказательство теоремы. Пусть $\psi(x)$ — собственная функция ядра $K_n(x, s)$, соответствующая собственному значению μ. Определим функции $\varphi_p(x)$ по формулам

$$\varphi_p(x) = \frac{1}{n}(\psi + h_pA\psi + h_p^2A^2\psi + \ldots + h_p^{n-1}A^{n-1}\psi). \qquad (1)$$

Суммируя эти равенства по p от $p = 1$ до $p = n$ и принимая во внимание лемму, получим

$$\psi(x) \equiv \sum_{p=1}^{n} \varphi_p(x).$$

Из этого тождества следует, что среди функций $\varphi_p(x)$ имеется хотя бы одна, не равная тождественно нулю. Нетрудно видеть, что $\varphi_p(x) \equiv h_pA\varphi_p$. В самом деле, применяя оператор A к тождеству (1) и умножая результат на h_p, получим

$$h_pA\varphi_p \equiv \frac{1}{n}(h_pA\psi + h_p^2A^2\psi + \ldots + h_p^{n-1}A^{n-1}\psi) + \frac{1}{n}h_p^nA^n\psi,$$

или

$$h_pA\varphi_p \equiv \varphi_p(x) - \frac{1}{n}\psi(x) + \frac{1}{n}h_p^nA^n\psi \equiv \varphi_p(x),$$

поскольку $h_p^n = \mu$ и $\mu A^n\psi \equiv \psi$.

Таким образом, неравные тождественно нулю функции $\varphi_p(x)$ являются собственными функциями ядра $K(x, s)$, а h_p — соответствующими им собственными значениями. По свойству 4 ядро $K(x, s)$ имеет лишь вещественные с. з. Следовательно, функции $\varphi_p(x)$, отвечающие комплексным корням h_p, тождественно равны нулю. Если n нечетно, то имеется лишь один вещественный корень $\sqrt[n]{\mu}=h_p$, который и должен быть собственным значением ядра $K(x, s)$, а $\varphi_p(x)\equiv\psi(x)$ — его собственной функцией. Если n четно, имеются два вещественных корня. Пусть $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — отвечающие им собственные функции. Тогда

$$\psi(x)\equiv\varphi_1(x)+\varphi_2(x). \tag{2}$$

Таким образом, при нечетном n каждая с. ф. ядра $K_n(x, s)$ будет также с. ф. ядра $K(x, s)$. При четном n каждая с. ф. ядра $K_n(x, s)$ будет либо совпадать с с. ф. ядра $K(x, s)$ (одна из функций $\varphi_1(x)$ или $\varphi_2(x)$ в формуле (2) может быть тождественно равной нулю), либо являться линейной комбинацией собственных функций ядра $K(x, s)$. Это означает, что если $\{\lambda_p\}$ и $\{\varphi_p(x)\}$ суть совокупности всех собственных значений и собственных функций ядра $K(x, s)$, то $\{\lambda_p^n\}$ и $\{\varphi_p(x)\}$ — совокупности всех собственных значений и собственных функций ядра $K_n(x, s)$.

§ 3. Разложение итерированных ядер

В этом параграфе мы докажем, что для всякого $n\geqslant 3$ справедливо разложение

$$K_n(x, s)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\varphi_p(x)\,\varphi_p(s)}{\lambda_p^n}, \tag{3}$$

в котором ряд сходится абсолютно и равномерно в квадрате $a\leqslant x,\ s\leqslant b$.

Докажем сначала, что ряд, стоящий в правой части (3), сходится абсолютно и равномерно в квадрате $a\leqslant x,\ s\leqslant b$. Для этого оценим отрезок ряда

$$\sum_{p=m}^{m+q}\frac{1}{|\lambda_p^n|}\,|\varphi_p(x)\,\varphi_p(s)|\leqslant\frac{1}{2\,|\lambda_m^{n-2}|}\sum_{p=m}^{m+q}\left[\frac{\varphi_p^2(x)}{\lambda_p^2}+\frac{\varphi_p^2(s)}{\lambda_p^2}\right]. \tag{4}$$

Мы при этом воспользовались неравенством

$$|A \cdot B| \leqslant \frac{1}{2}(A^2 + B^2)$$

и тем, что $|\lambda_p|$ монотонно стремятся к бесконечности при $p \to \infty$. По неравенству Бесселя

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varphi_p^2(x)}{\lambda_p^2} \leqslant \int_a^b K^2(x, s)\, ds \leqslant D,$$

где $D = \text{const}$ и $D > 0$. Поэтому при $q > 0$

$$\sum_{p=m}^{m+q} \left| \frac{\varphi_p(x)\,\varphi_p(s)}{\lambda_p^n} \right| \leqslant \frac{D}{|\lambda_m^{n-2}|}. \tag{5}$$

Так как $|\lambda_m| \to \infty$ при $m \to \infty$[1]), то из неравенства (5) по критерию Коши и следует абсолютная и равномерная сходимость ряда (3).

Пусть

$$\Phi(x, s) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_p^n} \varphi_p(x)\,\varphi_p(s).$$

Функция $\Phi(x, s)$ непрерывна в квадрате $a \leqslant x, s \leqslant b$. Нам надо доказать, что $K_n(x, s) \equiv \Phi(x, s)$. Предположим, что это неверно. Тогда симметричная функция

$$Q(x, s) = K_n(x, s) - \Phi(x, s)$$

по теореме 1 имеет с. з. μ и с. ф. $\psi(x)$, т. е.

$$\psi(x) \equiv \mu \int_a^b Q(x, s)\,\psi(s)\, ds.$$

Функция $\psi(x)$ ортогональна всем собственным функциям $\varphi_r(x)$ ядра $K(x, s)$, так как

$$\int_a^b \psi(x)\,\varphi_r(x)\, dx = \mu \int_a^b \int_a^b Q(x, s)\,\psi(s)\,\varphi_r(x)\, ds\, dx =$$

$$= \mu \int_a^b \psi(s) \int_a^b \left\{ K_n(x, s) - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_p^n} \varphi_p(x)\,\varphi_p(s) \right\} \varphi_r(x)\, dx\, ds =$$

$$= \mu \int_a^b \psi(x) \left\{ \int_a^b K_n(x, s)\,\varphi_r(x)\, dx - \frac{\varphi_r(s)}{\lambda_r^n} \right\} ds = 0,$$

---

[1]) См. следствие б) из свойства 5,

поскольку $\varphi_r(s) \equiv \lambda_r^n \int_a^b K_n(x, s)\varphi_r(x)\,dx$. Функция $\psi(x)$ является собственной функцией ядра $K_n(x, s)$, поскольку

$$\psi(x) \equiv \mu \int_a^b Q(x, s)\psi(s)\,ds \equiv \mu \int_a^b \Big\{K_n(x, s) - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varphi_p(x)\varphi_p(s)}{\lambda_p^n}\Big\}\psi(s)\,ds \equiv \mu \int_a^b K_n(x, s)\psi(s)\,ds.$$

Мы воспользовались при этом ортогональностью функции $\psi(x)$ ко всем собственным функциям $\varphi_p(x)$.

Следовательно, как показано было в § 2, $\psi(x)$ должна быть линейной комбинацией функций $\varphi_p(x)$. Но это невозможно, так как $\psi(x)$ ортогональна всем функциям $\varphi_p(x)$. Таким образом, нельзя предполагать, что $Q(x, s) \not\equiv 0$.

Замечание. Разложение (3) справедливо и для $K_2(x, s)$ $(n=2)$, а также, при некоторых дополнительных условиях, и для $K(x, s)$. На доказательстве этого мы не будем останавливаться[1]).

§ 4. Теорема Гильберта—Шмидта

Теперь мы докажем одну из фундаментальных теорем теории линейных интегральных уравнений, имеющую многочисленные приложения, — теорему разложимости.

Теорема Гильберта — Шмидта. *Если функция $f(x)$ может быть представлена в форме*

$$f(x) = \int_a^b K(x, s)\,h(s)\,ds, \tag{6}$$

где $h(s)$ — кусочно-непрерывна на $[a, b]$, то она представляется рядом Фурье по собственным функциям ядра $K(x, s)$, т. е.

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} f_p\varphi_p(x), \tag{7}$$

[1]) См. Михлин С. Г., Лекции по линейным интегральным уравнениям, М., Физматгиз, 1959.

где

$$f_p = \int_a^b f(x)\,\varphi_p(x)\,dx,$$

и этот ряд сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[a, b]$.

Для доказательства нам понадобится

Лемма. *Для того чтобы непрерывная функция* $Q(x)$ *была ортогональной ядру* $K(x, s)$, *т. е.*

$$\int_a^b K(x, s)\,Q(s)\,ds \equiv 0, \tag{8}$$

необходимо и достаточно, чтобы она была ортогональной каждой собственной функции ядра, т. е.

$$\int_a^b Q(x)\,\varphi_p(x)\,dx = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Доказательство. Достаточность:

$$\int_a^b Q(x)\,\varphi_p(x)\,dx = \lambda_p \int_a^b\int_a^b K(x, s)\,\varphi_p(s)\,Q(x)\,ds\,dx =$$
$$= \lambda_p \int_a^b \varphi_p(s) \left\{ \int_a^b K(x, s)\,Q(x)\,dx \right\} ds = 0,$$

так как внутренний интеграл равен нулю.

Необходимость. Рассмотрим вспомогательный интеграл

$$J_1 = \int_a^b\int_a^b K_4(x, s)\,Q(x)\,Q(s)\,ds\,dx.$$

Он равен нулю, так как, используя разложение (3) для $n = 4$ и равенства (9), получим

$$J_1 = \int_a^b\int_a^b \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varphi_p(x)\,\varphi_p(s)}{\lambda_p^4}\,Q(x)\,Q(s)\,ds\,dx =$$
$$= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_p^4} \int_a^b \varphi_p(x)\,Q(x)\,dx \int_a^b \varphi_p(s)\,Q(s)\,ds = 0.$$

Поскольку $K_4(x, s)=\int\limits_a^b K_2(x, t) K_2(t, s)\, dt$, то

$$0=J_1=\int\limits_a^b\int\limits_a^b\left\{\int\limits_a^b K_2(x, t) K_2(t, s)\, dt\right\} Q(x) Q(s)\, ds=$$
$$=\int\limits_a^b\left\{\left[\int\limits_a^b K_2(x, t) Q(x)\, dx\right]\left[\int\limits_a^b K_2(t, s) Q(s)\, ds\right]\right\} dt=$$
$$=\int\limits_a^b\left\{\int\limits_a^b K_2(x, t) Q(x)\, dx\right\}^2 dt.$$

Следовательно,

$$\int\limits_a^b K_2(x, t) Q(x)\, dx \equiv 0. \tag{10}$$

Мы при этом воспользовались симметричностью ядра $K_2(x, s)$. Умножая тождество (10) на $Q(t)$ и интегрируя результат (по t) по отрезку $[a, b]$, получим

$$\int\limits_a^b\int\limits_a^b K_2(x, t) Q(x) Q(t)\, dx dt=0.$$

Заменяя в этом равенстве $K_2(x, t)$ интегралом $\int\limits_a^b K(x, \xi) K(\xi, t)\, d\xi$ и производя преобразования, аналогичные произведенным выше, получим

$$\int\limits_a^b K(x, \xi) Q(x)\, dx \equiv 0.$$

Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Коэффициенты Фурье f_p функции $f(x)$ равны $\frac{h_p}{\lambda_p}$, где h_p — коэффициенты Фурье функции $h(s)$. Действительно,

$$f_p=\int\limits_a^b f(x) \varphi_p(x)\, dx=\int\limits_a^b \varphi_p(x)\int\limits_a^b K(x, s) h(s)\, ds dx=$$
$$=\int\limits_a^b h(s)\int\limits_a^b K(x, s) \varphi_p(x)\, dx=\int\limits_a^b h(s) \frac{\varphi_p(s)}{\lambda_p}\, ds=\frac{h_p}{\lambda_p},$$

поэтому вместо ряда (7) можно рассматривать ряд

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{h_p}{\lambda_p} \varphi_p(x). \tag{11}$$

Доказательство теоремы. Докажем сначала абсолютную и равномерную сходимость ряда (11). По неравенству Коши — Буняковского имеем

$$\sum_{p=n}^{n+q} \left| \frac{h_p}{\lambda_p} \varphi_p(x) \right| \leqslant \sqrt{\sum_{p=n}^{n+q} h_p^2} \sqrt{\sum_{p=n}^{n+q} \frac{\varphi_p^2(x)}{\lambda_p^2}}. \tag{12}$$

По неравенству Бесселя

$$\sum_{p=1}^{\infty} h_p^2 \leqslant \int_a^b h^2(s)\,ds \quad \text{и} \quad \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varphi_p^2(x)}{\lambda_p^2} \leqslant \int_a^b K^2(x, s)\,ds \leqslant D.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{p=1}^{\infty} h_p^2$ сходится, поэтому его отрезок $\sum\limits_{p=n}^{n+q} h_p^2$ может быть сделан меньшим $\frac{\varepsilon}{D}$ (где ε — произвольное число), если n взять достаточно большим. Отсюда для достаточно больших n

$$\sum_{p=n}^{n+q} \left| \frac{h_p}{\lambda_p} \varphi_p(x) \right| < \varepsilon \text{ для всех } x \in [a, b],$$

что и означает абсолютную и равномерную сходимость ядра (11). Пусть

$$Q(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{h_p}{\lambda_p} \varphi_p(x) - f(x).$$

Функция $Q(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Она ортогональна всем функциям $\varphi_p(x)$. Действительно,

$$\int_a^b f(x)\varphi_r(x)\,dx = \int_a^b \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{h_p}{\lambda_p} \varphi_p(x) - f(x) \right\} \varphi_r(x)\,dx =$$

$$= \frac{h_r}{\lambda_r} - f_r = 0.$$

Следовательно, согласно лемме, она ортогональна ядру $K(x, s)$, т. е.

$$\int_a^b K(x, s) Q(x) dx \equiv 0. \tag{13}$$

Далее, в силу ортогональности функций $Q(x)$ и $\varphi_p(x)$,

$$\int_a^b Q^2(x) dx = \int_a^b Q(x) \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{h_p}{\lambda_p} \varphi_p(x) - f(x) \right\} dx =$$

$$= -\int_a^b Q(x) f(x) dx.$$

Заменяя здесь $f(x)$ по формуле (6) и используя формулу (13), получим

$$\int_a^b Q^2(x) dx = -\int_a^b Q(x) \int_a^b K(x, s) h(s) ds dx =$$

$$= -\int_a^b h(s) \int_a^b K(x, s) Q(x) dx ds = 0.$$

Следовательно,

$$Q(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{h_p}{\lambda_p} \varphi_p(x) - f(x) \equiv 0.$$

Теорема доказана.

§ 5. Разложение решения неоднородного уравнения

Пусть в уравнении

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds + f(x) \tag{14}$$

λ не равно ни одному из собственных значений. Тогда по 1-й теореме Фредгольма это уравнение имеет единственное решение, которое можно записать в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda g(x), \tag{15}$$

где

$$g(x) = \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds,$$

По теореме Гильберта — Шмидта функция $g(x)$ может быть представлена рядом по собственным функциям ядра $K(x, s)$:

$$g(x) = \sum_{p=1}^{\infty} C_p \varphi_p(x). \tag{16}$$

Подставим в уравнение (14) вместо $\varphi(x)$ ее значение по формуле (15), получим

$$f(x) + \lambda \sum_{p=1}^{\infty} C_p \varphi_p(x) \equiv f(x) + \\ + \lambda \int_a^b K(x, s) \left\{ f(s) + \lambda \sum_{p=1}^{\infty} C_p \varphi_p(s) \right\} ds,$$

или

$$\sum_{p=1}^{\infty} C_p \varphi_p(x) \equiv \int_a^b K(x, s) f(s)\, ds + \lambda \sum_{p=1}^{\infty} C_p \int_a^b K(x, s)\, \varphi_p(s)\, ds.$$

Применяя теорему Гильберта — Шмидта к функции

$$\int_a^b K(x, s) f(s)\, ds$$

и заменяя $\int_a^b K(x, s)\, \varphi_p(s)\, ds$ через $\frac{\varphi_p(x)}{\lambda_p}$, получим

$$\sum_{p=1}^{\infty} C_p \varphi_p(x) \equiv \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p}{\lambda_p} \varphi_p(x) + \lambda \sum_{p=1}^{\infty} C_p \frac{\varphi_p(x)}{\lambda_p},$$

откуда

$$C_p = \frac{f_p}{\lambda_p} + \frac{\lambda}{\lambda_p} C_p \quad \text{или} \quad C_p = \frac{f_p}{\lambda_p - \lambda}.$$

Таким образом, искомое решение уравнения (14) представляется следующим абсолютно и равномерно сходящимся рядом

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p}{\lambda_p - \lambda} \varphi_p(x). \tag{17}$$

Если λ равно некоторому собственному значению λ_r, которому отвечают собственные функции $\varphi_r(x)$, $\varphi_{r+1}(x)$, $\ldots$, $\varphi_{r+q}(x)$, то $\lambda_r = \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_{r+q}$.

В этом случае, как видно из формул для определения коэффициентов C_p, должны выполняться равенства

$$f_r = f_{r+1} = \ldots = f_{r+q} = 0,$$

или

$$\int\limits_a^b f(x)\,\varphi_{r+t}(x)\,dx = 0 \qquad (t = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ q),$$

т. е. функция $f(x)$ должна быть ортогональной всем собственным функциям ядра, соответствующим собственному значению λ_r. При этом коэффициенты C_r, C_{r+1}, $\ldots$, C_{r+q} не определяются (остаются произвольными), и решение уравнения (14) может быть записано в виде

$$\varphi(x) = C_r\varphi_r(x) + C_{r+1}\varphi_{r+1}(x) + \ldots + C_{r+q}\varphi_{r+q}(x) + \\ + \lambda_r \sum_p{}' \frac{f_p}{\lambda_p - \lambda_r}\varphi_p(x), \qquad (18)$$

где $\sum'$ означает суммирование по всем значениям p, кроме $v = r,\ r+1,\ \ldots,\ r+q$.

Замечание. Уравнение с несимметричным ядром вида

$$\varphi(x) = \lambda\int\limits_a^b K(x,\ s)\,\rho(s)\,\varphi(s)\,ds,$$

где $\rho(s)$ — известная функция, $\rho(s) \geqslant 0$ на $[a,\ b]$ и $K(x, s)$ — симметричная функция, очевидно, приводится к уравнению с симметричным ядром относительно функции $\psi(x) = \varphi(x)\sqrt{\rho(x)}$:

$$\psi(x) = \lambda\int\limits_a^b K(x,\ s)\sqrt{\rho(x)\,\rho(s)}\,\psi(s)\,ds.$$

§ 6. Теорема Стеклова

В гл. VIII, § 2 было показано, что краевая задача

$$L[\Phi] + \lambda\rho\Phi \equiv \frac{d}{dx}[k\Phi'] - q\Phi + \lambda\rho\Phi = 0, \qquad (19)$$

$$\alpha_1\Phi'(0) - \beta_1\Phi(0) = 0,\ \ \alpha_2\Phi'(l) + \beta_2\Phi(l) = 0, \qquad (20)$$

эквивалентна интегральному уравнению

$$\Phi(x)=\lambda\int_a^b G(x, s)\rho(s)\Phi(s)\,ds, \tag{21}$$

или

$$\Psi(x)=\lambda\int_a^b K_1(x, s)\Psi(s)\,ds, \tag{22}$$

где $K_1(x, s)=G(x, s)\sqrt{\rho(x)\rho(s)}$, $\Psi(x)=\Phi(x)\sqrt{\rho(x)}$, а $G(x, s)$ — функция Грина краевой задачи (19) — (20).

Следовательно, с. з. и с. ф. краевой задачи (19) — (20) совпадают с с. з. и с. ф. ядра $K_1(x, s)$. Это обстоятельство позволяет получить теорему Стеклова из теоремы Гильберта — Шмидта. Действительно, пусть $f(x)$ есть функция класса A (см. гл. IV, § 1), тогда

$$L[f]\equiv\frac{d}{dx}[kf']-qf=-F(x)$$

будет кусочно-непрерывной функцией и по 1-й теореме Гильберта (см. гл. VIII, § 2)

$$f(x)=\int_a^b G(x, s)F(s)\,ds.$$

Следовательно, по теореме Гильберта — Шмидта $f(x)$ может быть представлена абсолютно и равномерно сходящимся рядом Фурье по собственным функциям $\{\Phi_p(x)\}$ краевой задачи (19) — (20):

$$f(x)=\sum_{p=1}^{\infty}C_p\Phi_p(x).$$

Таким образом, доказана теорема разложимости Стеклова для одномерного случая (гл. IV, § 1).

§ 7. Классификация ядер

Рассмотрим еще одно применение теоремы Гильберта — Шмидта. Среди симметричных ядер особый интерес представляют положительно определенные (соответственно отрицательно определенные) ядра. Ядро $K(x, s)$ называется *положительно определенным* (соответственно *отрицательно* *определенным*) если для всякой кусочно-непрерывной функции $h(x)$ интегральная форма

$$J=\int_a^b\int_a^b K(x, s)\,h(x)\,h(s)\,ds\,dx \tag{23}$$

положительна (соответственно, отрицательна).

Нетрудно показать, что *необходимым и достаточным условием положительной (отрицательной) определенности ядра $K(x, s)$ является условие, чтобы все его собственные значения λ_p были положительными (отрицательными).*

Действительно, функция

$$f(x)=\int_a^b K(x, s)\,h(s)\,ds$$

по теореме Гильберта — Шмидта представляется равномерно сходящимся на $[a, b]$ рядом:

$$f(x)=\int_a^b K(x, s)\,h(s)\,ds=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{h_p}{\lambda_p}\varphi_p(x). \tag{24}$$

Умножая обе части этого равенства на $h(x)$ и интегрируя результат (по x) по отрезку $[a, b]$, получим

$$J=\int_a^b\int_a^b K(x, s)\,h(s)\,h(x)\,ds\,dx=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{h_p^2}{\lambda_p}. \tag{25}$$

Следовательно, если все с. з. λ_p положительны (отрицательны), то и форма (23) положительна (отрицательна). Если форма (23) положительна для всякой кусочно непрерывной функции $h(x)$, то для $h(x)=\varphi_n(x)$ формула (25) дает

$$\int_a^b\int_a^b K(x, s)\,\varphi_n(s)\,\varphi_n(x)\,ds\,dx=\frac{1}{\lambda_n}.$$

Следовательно, $\lambda_n>0$. Аналогично для отрицательной формы. Для положительно определенных (отрицательно определенных) ядер справедлива

Теорема. *Если ядро $K(x, s)$ положительно (отрицательно) определенно и непрерывно по совокупности пере-*

менных x, s в квадрате $a \leqslant x$, $s \leqslant b$, то оно представляется равномерно сходящимся рядом

$$K(x, s) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varphi_p(x)\,\varphi_p(s)}{\lambda_p},$$

где φ_p и λ_p — собственные функции и собственные значения этого ядра.

Мы не будем приводить доказательство этой теоремы [1].

Следует отметить, что все теоремы и факты, относящиеся к уравнениям Фредгольма, описанные в этой главе и в § 5 гл. VIII, справедливы также для многомерного случая и притом для ядер вида

$$K(P, Q) = \frac{H(P, Q)}{|PQ|^{\alpha}}, \qquad \alpha < \frac{d}{2},$$

где $H(P, Q)$ — непрерывное ядро, $|PQ|$ — расстояние между точками P и Q, d — размерность пространства [1]).

§ 8. Спектр симметричных ядер, заданных на бесконечном промежутке

Мы рассмотрели интегральные уравнения с конечным промежутком (областью) интегрирования $[a, b]$. Для интегральных уравнений с бесконечным промежутком интегрирования изложенные выше результаты, вообще говоря, не имеют места. Так, для симметричных ядер, заданных в ограниченной области, были установлены следующие факты:

1) спектр такого ядра дискретный;

2) спектр невырожденного ядра бесконечный;

3) каждому собственному значению соответствует конечное число линейно независимых собственных функций.

Для симметричных ядер, заданных на бесконечном промежутке, эти утверждения, вообще говоря, уже неверны, как показывают приводимые ниже примеры.

Пример 1. Уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\infty} \sin(xs)\,\varphi(s)\,ds \tag{26}$$

---

[1]) См. Петровский И. Г., Лекции по теории интегральных уравнений, М. — Л., Гостехиздат, 1951.

имеет лишь два собственных значения: $\lambda_1=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, $\lambda_2=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, и каждому из них соответствует бесконечное множество линейно независимых собственных функций.

Для доказательства этого воспользуемся известными формулами:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty \sin(xs)\,e^{-as}\,ds=\frac{x\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{a^2+x^2},$$

$$\int_0^\infty \frac{s\cdot\sin(xs)}{a^2+s^2}\,ds=\frac{\pi}{2}\,e^{-ax},$$

где $x>0$ и $a>0$. Складывая и вычитая эти формулы, получим

$$\int_0^\infty \sin(xs)\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-as}+\frac{s}{a^2+s^2}\right]ds=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-ax}+\frac{x}{a^2+x^2}\right]$$

и

$$\int_0^\infty \sin(xs)\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-as}-\frac{s}{a^2+s^2}\right]ds=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-ax}-\frac{x}{a^2+x^2}\right].$$

Таким образом, $\lambda_1=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ и $\lambda_2=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ суть собственные значения уравнения (26), а

$$\varphi_1(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-ax}+\frac{x}{a^2+x^2} \quad \text{и} \quad \varphi_2(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-ax}-\frac{x}{a^2+x^2}$$

при любом значении параметра a — отвечающие им собственные функции. Функции $\varphi_1(x)$ (равно как и функции $\varphi_2(x)$), отвечающие различным значениям параметра a, очевидно, линейно независимые. Следовательно, каждому из собственных значений λ_1 и λ_2 отвечает бесконечное множество линейно независимых собственных функций. Теперь покажем, что уравнение (26) не имеет других собственных значений. Для этого в правую часть уравнения (26) подставляем $\varphi(s)$, определяемое этим уравнением. Получим

$$\varphi(x)=\lambda^2\int_0^\infty \sin(xs)\int_0^\infty \sin(st)\,\varphi(t)\,dt\,ds.$$

Сравнивая эту формулу с интегралом Фурье

$$\varphi(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin(xs)\int_0^\infty \sin(st)\,\varphi(t)\,dt\,ds,$$

находим, что $\lambda^2=\frac{2}{\pi}$.

Пример 2. Рассмотрим уравнения вида

$$\varphi(x)=\lambda\int_{-\infty}^{\infty} H(|x-s|)\,\varphi(s)\,ds, \tag{27}$$

где $H(z)$ обладает следующими свойствами:

1) непрерывна и положительна для всех $z\geqslant 0$;

2) существует такое положительное число A $(A\leqslant\infty)$, что интеграл $\int_0^\infty H(z)\operatorname{ch}\alpha z\,dz$ сходится для всех положительных α, меньших A $(\alpha<A)$, и расходится для $\alpha=A$.

Для этого уравнения можно найти все с. з. и с. ф. Будем искать решение в виде $\varphi(x)=e^{\alpha x}$. Подставляя эту функцию в уравнение (27), получим

$$e^{\alpha x}=\lambda\int_{-\infty}^{x} H(x-s)\,e^{\alpha s}\,ds+\lambda\int_x^\infty H(s-x)\,e^{\alpha s}\,ds,$$

или, после замены переменной интегрирования ($x-s=z$ в первом интеграле и $s-x=z$ — во втором)

$$e^{\alpha x}=\lambda\int_0^\infty H(z)\,e^{\alpha(x-z)}dz+\lambda\int_0^\infty H(z)\,e^{\alpha(x+z)}\,dz,$$

откуда

$$1=2\lambda\int_0^\infty H(z)\operatorname{ch}\alpha z\,dz.$$

Таким образом, при

$$\lambda=\lambda(\alpha)=\frac{1}{2\int_0^\infty H(z)\operatorname{ch}\alpha z dz} \tag{28}$$

функция $\varphi(x)=e^{\alpha x}$, где $\alpha<A$, будет решением уравнения (27), т. е. его собственной функцией, отвечающей собственному значению $\lambda=\lambda(\alpha)$.

Аналогично находим, что для $\alpha < A$ функция $e^{-\alpha x}$ также будет собственной функцией уравнения (27), отвечающей тому же собственному значению $\lambda = \lambda(\alpha) = \lambda(-\alpha)$.

Поскольку $\operatorname{ch} \alpha z$ монотонно возрастает по α, то $\lambda(\alpha)$, определяемое формулой (28), монотонно и непрерывно убывает в интервале $0 \leqslant \alpha < A$ от значения $\lambda(0) = \dfrac{1}{2\int\limits_0^\infty H(z)\,dz}$ до значения $\lambda(A) = 0$. Таким образом, каждому значению $\lambda \in [0, \lambda(0)]$ соответствует вполне определенное значение $\alpha\ (\alpha \geqslant 0)$, определяемое из формулы (28), а следовательно, и решения уравнения (27), равные

$$C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Собственному значению $\lambda(0)$ отвечает решение

$$\varphi(x) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2\alpha} = x,$$

в чем легко убедиться и непосредственной подстановкой.

Если $\lambda > \dfrac{1}{2\int\limits_0^\infty H(z)\,dz}$, то надо искать решение в виде $e^{\pm i\beta x}$. Тогда подстановкой этих функций в уравнение (27) находим, что значениям $\lambda = \lambda(i\beta) = \lambda(-i\beta)$, где

$$\lambda(i\beta) = \lambda(-i\beta) = \frac{1}{2\int\limits_0^\infty H(z)\cos\alpha z\,dz} > \frac{1}{2\int\limits_0^\infty H(z)\,dz},$$

отвечают вещественные решения уравнения (27) $\cos\beta x$ и $\sin\beta x$.

Таким образом, спектр уравнения (27) сплошной: все неотрицательные λ являются его собственными значениями. Так, если взять уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-s|}\varphi(s)\,ds, \tag{29}$$

то здесь $H(z) = e^{-z}$, $\lambda(\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \alpha^2)$, $\lambda(0) = \frac{1}{2}$ и $A = 1$.

Следовательно, для $\lambda \in (0;\ 0{,}5)$ решениями уравнения (29) будут функции $e^{\pm\sqrt{1-2\lambda}\,x}$, для $\lambda = 0{,}5$ — функция $\varphi(x) = x$, а для $\lambda > 0{,}5$ — функции $\cos(\sqrt{2\lambda - 1}\,x)$ и $\sin(\sqrt{2\lambda - 1}\,x)$, так как $\lambda(i\beta) = 0{,}5(1 + \beta^2)$.

Мы не рассматривали здесь **сингулярные** интегральные уравнения, имеющие многочисленные приложения. Читателя, интересующегося такими уравнениями, отсылаем к специальной литературе[1]).

---

[1]) Михлин С. Г., Интегральные уравнения и их приложения к некоторым проблемам механики, математической физики и техники, М. — Л., Гостехиздат, 1949. Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, М., Физматгиз, 1962.

ЧАСТЬ II

В ряде случаев при пользовании методами, изложенными в части I (например, при пользовании методом разделения переменных в цилиндрических и сферических координатах), мы приходим к так называемым специальным функциям: *цилиндрическим*, *сферическим* и другим. Характерная особенность этих функций состоит в том, что они являются решениями уравнений с особыми точками вида

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dy}{dx}\right]-q(x)y=0,$$

где коэффициент $k(x)$ обращается в нуль в одной или нескольких точках промежутка изменения переменной x. Решения таких уравнений имеют ряд специфических свойств.

Специальные функции находят применения в широком круге задач. В части II мы изложим основные свойства цилиндрических и сферических функций и некоторых специальных полиномов, а также их приложения.

ГЛАВА X

ГАММА-ФУНКЦИЯ

Гамма-функцией (или *эйлеровым интегралом* II рода) называется функция

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt. \tag{1}$$

Она обладает следующими свойствами.

Свойство 1. $\Gamma(z)$ *определена и непрерывна в области* $\operatorname{Re} z>0$.

Доказательство. Рассмотрим замкнутую область $\bar{D} \equiv \{0 < \delta \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant N\}$, где δ и N — произвольные фиксированные числа. Для всех $z \in \bar{D}$ выполняются неравенства:

$$|t^{z-1}e^{-t}| \leqslant t^{\delta-1} \quad \text{для} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

$$|t^{z-1}e^{-t}| \leqslant e^{-t}t^{N-1} \quad \text{для} \quad 1 \leqslant t < \infty.$$

Следовательно, функция

$$f(t) = \begin{cases} t^{\delta-1}, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ t^{N-1}e^{-t}, & 1 < t < \infty, \end{cases}$$

является можорантной для $|t^{z-1}e^{-t}|$ на промежутке $0 \leqslant t < \infty$ для всех $z \in \bar{D}$. Поскольку интеграл $\int\limits_0^\infty f(t)\,dt = \int\limits_0^1 t^{\delta-1}dt + \int\limits_1^\infty t^{N-1}e^{-t}dt$ сходится, то интеграл $\int\limits_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$ сходится равномерно для $z \in \bar{D}$. Отсюда следует, что $\Gamma(z)$ определена и непрерывна[1]) в области $\bar{D}$; а тем самым, ввиду произвольности δ и N, и в области $0 < \operatorname{Re} z < \infty$.

Свойство 2. $\Gamma(x)$ *аналитична в области* $\operatorname{Re} z > 0$.

Для доказательства этого свойства достаточно показать, что интеграл $\int\limits_C \Gamma(z)\,dz$, взятый по произвольному кусочно-гладкому замкнутому контуру C, лежащему в области $\bar{D}$, равен нулю. Тогда по теореме Морера[2]) $\Gamma(z)$ будет аналитичной в области D, а следовательно, и в области $\operatorname{Re} z > 0$;

$$\int\limits_C \Gamma(z)\,dz = \int\limits_C \left(\int\limits_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt\right)dz = \int\limits_0^\infty e^{-t}\left(\int\limits_C t^{z-1}dz\right)dt = 0,$$

так как по интегральной теореме Коши[2])

$$\int\limits_C t^{z-1}dz = 0.$$

---

[1]) Фихтенгольц Г. М., Основы математического анализа, М., Физматгиз, 1964.

[2]) Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, М., Физматгиз, 1958.

Перемена порядка интегрирования здесь законна, так как интеграл $\int\limits_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ сходится равномерно для $z \in \bar{D}$.

Свойство 3. *Для всех z из области* $\operatorname{Re} z > 0$ *выполняется тождество*

$$\Gamma(z+1) \equiv z\Gamma(z). \tag{2}$$

Справедливость этого свойства устанавливается непосредственно путем интегрирования по частям:

$$\Gamma(z+1) = \int\limits_0^\infty t^z e^{-t}dt = -e^{-t}t^z\Big|_0^\infty + z\int\limits_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt =$$

$$= z\int\limits_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt = z\Gamma(z).$$

Применяя последовательно тождество (2), находим формулу

$$\Gamma(z) \equiv \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)(z+n)}. \tag{3}$$

Свойство 4. *Функцию* $\Gamma(z)$ *с помощью формулы* (3) *можно аналитически продолжить на всю плоскость переменного z, кроме точек $z = 0, -1, -2, \ldots, -n, \ldots$, в которых $\Gamma(z)$, очевидно, имеет полюсы 1-го порядка с вычетами, равными*

$$\operatorname{Re}\Gamma(-n) = \frac{(-1)^n}{n!}$$

Свойство 5. $\Gamma(n+1) = n!$

Непосредственным вычислением находим $\Gamma(1) = 1$. Тогда из формулы (3) получаем

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{2_1}$$

Таким образом, $\Gamma(z)$ можно считать распространением факториальной функции на произвольные комплексные числа.

Свойство 6. *Имеет место соотношение*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) \equiv \frac{\pi}{\sin \pi z}. \tag{4}$$

Замечание. Нам достаточно установить справедливость свойства 6 для $z = x$, где $0 < x < 1$. Тогда по теореме единственности аналитических функций оно будет верным для всех z.

Доказательство.

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt=2\int_0^\infty u^{2x-1}e^{-u^2}du \quad (t=u^2);$$

$$\Gamma(1-x)=\int_0^\infty t^{-x}e^{-t}dt=2\int_0^\infty v^{-2x+1}e^{-v^2}dv \quad (t=v^2).$$

Следовательно,

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=4\int_0^\infty u^{2x-1}e^{-u^2}\,du\int_0^\infty v^{-2x+1}e^{-v^2}\,dv=$$

$$=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)}\left(\frac{u}{v}\right)^{2x-1}dudv.$$

Производя замену $u=r\cos\varphi$, $v=r\sin\varphi$, получим

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=4\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2}r(\operatorname{ctg}\varphi)^{2x-1}dr\,d\varphi=$$

$$=4\int_0^\infty e^{-r^2}rdr\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{ctg}\varphi)^{2x-1}d\varphi=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{ctg}\varphi)^{2x-1}\,d\varphi.$$

Если в последнем интеграле сделать замену переменной $\operatorname{ctg}^2\varphi=e^\beta$, то получим

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{x\beta}d\beta}{1+e^\beta}=\frac{\pi}{\sin\pi x}\ ^{1)},$$

что и требовалось доказать.

Свойство 7. $\Gamma(z)$ *не имеет нулей.*

Действительно, пусть z_0 — нуль гамма-функции. Очевидно, z_0 не равен ни целому отрицательному числу, ни нулю. Из формулы (4) находим

$$\lim_{z\to z_0}\Gamma(1-z)=\lim_{z\to z_0}\frac{\pi}{\Gamma(z)\sin\pi z}=\infty.$$

Таким образом, z_0 есть особая точка для $\Gamma(1-z)$. Но по свойству 4 особыми точками гамма-функции являются

---

[1]) См. Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, гл. I, М., Физматгиз, 1958.

только целые неположительные числа. Следовательно, $1-z_0=-n$, где n — целое и $n \geqslant 0$, а $z_0=1+n$. Тогда

$$\Gamma(z_0)=\Gamma(n+1)=n! \neq 0.$$

Таким образом, предположение о существовании нуля z_0 функции $\Gamma(z)$ противоречиво.

Свойство 8. *Справедлива формула*

$$\Gamma(z)=\frac{1}{e^{2\pi i z}-1}\int\limits_{\gamma} t^{z-1}e^{-t}dt, \quad (5)$$

где γ есть контур, изображенный на рис. 23.

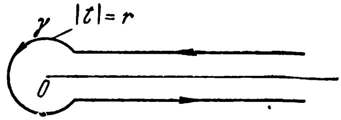

Рис. 23.

Для доказательства справедливости формулы (5) докажем лемму

$$\int\limits_{\gamma_1} t^{z-1}e^{-t}dt=\int\limits_{\gamma_2} t^{z-1}e^{-t}dt,$$

где γ_1 и γ_2 — контуры, изображенные на рис. 24.

Для этого рассмотрим интеграл по контуру C, изображенному на рис. 25. Контур C ограничивает односвязную

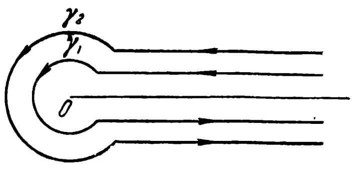

Рис. 24.

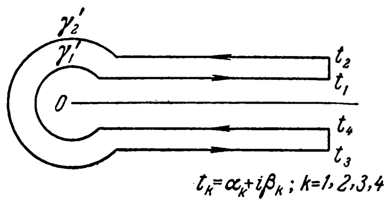

Рис. 25.

область, в которой функция $e^{-t}t^{z-1}$ аналитична. Следовательно, по интегральной теореме Коши

$$\int\limits_{C} e^{-t}t^{z-1}dt=0.$$

Вместе с тем

$$0=\int\limits_{C} e^{-t}t^{z-1}dt=\int\limits_{\gamma_2'} e^{-t}t^{z-1}dt+\int\limits_{\gamma_1'} e^{-t}t^{z-1}dt+$$
$$+\int\limits_{t_1t_2} e^{-t}t^{z-1}dt+\int\limits_{t_3t_4} e^{-t}t^{z-1}dt,$$

где γ_1', γ_2' показаны на рис. 25, а $t_k=\alpha_k+i\beta_k$ ($k=1, 2, 3, 4$).

Перейдем в этом равенстве к пределу при $\alpha \to \infty$, сохраняя β_k постоянными. Интегралы $\int\limits_{\gamma_2'}$ и $\int\limits_{\gamma_1'}$ будут стремиться при этом к $\int\limits_{\gamma_2}$ и $-\int\limits_{\gamma_1}$ соответственно. Если мы докажем, что интегралы $\int\limits_{t_1t_2}$ и $\int\limits_{t_3t_4}$, взятые по отрезкам t_1t_2 и t_3t_4, будут стремиться при этом к нулю, то лемма будет доказана. Оценим $\int\limits_{t_1t_2}$, учитывая, что $z = x + iy$:

$$\left|\int\limits_{t_1t_2} e^{-t}t^{z-1}dt\right| \leqslant \int\limits_{t_1t_2} |e^{-t}t^{z-1}|\,|dt| = e^{-\alpha}\int\limits_{t_1t_2}|t^{z-1}|\,|dt| =$$

$$= e^{-\alpha}\int\limits_{t_1t_2} |t|^{x-1}e^{-y\arg t}dt.$$

Так как $|t| < 2\alpha$ и $\arg t \leqslant 2\pi$, то

$$e^{-\alpha}\int\limits_{t_1t_2} |t|^{x-1}e^{-y\arg t}|dt| < e^{-\alpha}(2\alpha)^{x-1}e^{2\pi|y|}\,|t_2 - t_1|.$$

При всяком фиксированном z последнее произведение стремится к нулю при $\alpha \to \infty$. Таким образом, $\int\limits_{t_1t_2} e^{-t}t^{z-1}dt \to 0$ при $\alpha \to \infty$. Точно так же доказывается стремление к нулю интеграла по отрезку t_3t_4. Лемма доказана.

Пользуясь этой леммой, мы можем взять в интеграле

$$F(z) = \int\limits_{\gamma} e^{-t}t^{z-1}dt$$

в качестве контура γ контур, составленный из окружности γ_0 радиуса r с центром в точке $t = 0$ и из верхнего и нижнего берегов разреза вдоль вещественной оси от r до ∞:

$$F(z) = \int\limits_{\gamma_0} e^{-t}t^{z-1}dt - \underset{\text{(верхн. берег)}}{\int\limits_r^\infty} e^{-t}t^{z-1}dt + \underset{\text{(нижн. берег)}}{\int\limits_r^\infty} e^{-t}t^{z-1}dt.$$

Интеграл $F_0(z) = \int\limits_{\gamma_0} e^{-t}t^{z-1}dt$ является аналитической всюду функцией z. Действительно, $F_0(z)$ непрерывна во всей плоскости и интеграл $\int\limits_C F_0(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_0} e^{-t} \int\limits_C t^{z-1}\,dz\,dt$, взятый по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру C, равен нулю. Поэтому по теореме Морера $F_0(z)$ аналитична всюду.

Интеграл

$$F_1(z) = \int\limits_{\substack{r \\ \text{(верхн. берег)}}}^{\infty} e^{-t} t^{z-1}\,dt$$

можно записать в виде суммы двух интегралов:

$$F_1(z) = \int\limits_r^1 + \int\limits_1^\infty.$$

Интеграл $\int\limits_r^1 e^{-t} t^{z-1}\,dt$ не является несобственным и представляет непрерывную функцию от z. Интеграл $\int\limits_1^\infty e^{-t} t^{z-1}\,dt$ сходится равномерно в любой полосе $-N \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant N$, так как для всех $t > 1$ выполняется неравенство $|e^{-t} t^{z-1}| \leqslant e^{-t} t^{N-1}$, а интеграл $\int\limits_1^\infty e^{-t} t^{N-1}\,dt$ сходится. Следовательно, интеграл $\int\limits_1^\infty e^{-t} t^{z-1}\,dt$ также представляет непрерывную функцию переменного z в любой полосе $-N \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant N$, а тем самым и во всей плоскости переменного z. Отсюда следует, что функция $F_1(z)$ непрерывна во всей плоскости переменного z.

Далее, с помощью теоремы Морера устанавливаем аналитичность всюду функции $F_1(z)$. Интеграл $\int\limits_C F_1(z)\,dz$, взятый по произвольному кусочно-гладкому замкнутому контуру C, равен нулю, так как t^{z-1} является аналитической функцией от z и

$$\int\limits_C F_1(z)\,dz = \int\limits_C \left\{ \int\limits_r^1 + \int\limits_1^\infty \right\} dz =$$

$$= \int\limits_r^1 \left(\int\limits_C e^{-t} t^{z-1}\,dz \right) dt + \int\limits_1^\infty \left(\int\limits_C e^{-t} t^{z-1}\,dz \right) dt = 0.$$

Перемена порядка интегрирования здесь законна, так как интеграл $\int\limits_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$ сходится равномерно в любой полосе $-N \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant N$. Наконец,

$$F_2(z) = \int\limits_{\substack{r \\ \text{(нижн. берег)}}}^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt = e^{2\pi iz} \int\limits_{\substack{r \\ \text{(верхн. берег)}}}^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt = e^{2\pi iz}F_1(z).$$

Таким образом, $F(z) = F_0(z) + (e^{2\pi iz} - 1)F_1(z)$ аналитична

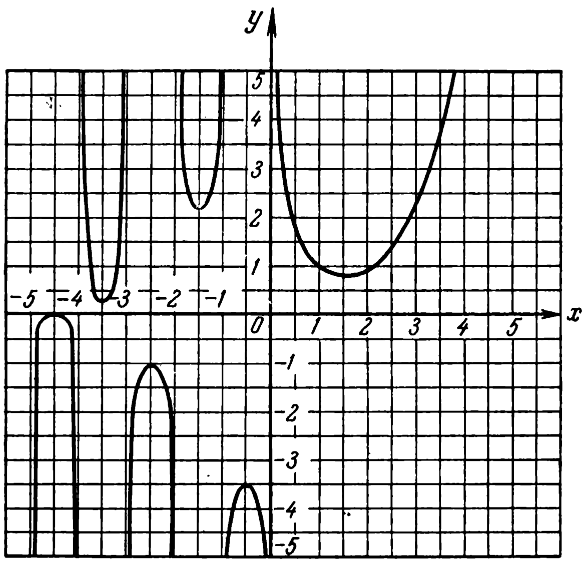

Рис. 26.

всюду. Поэтому для доказательства формулы (5) нам достаточно доказать ее для $z = x > 0$ [1]).

Доказательство. Имеем

$$F(x) = F_0(x) + (e^{2\pi ix} - 1)F_1(x). \tag{6}$$

[1]) См. замечание к свойству 6.

Заставим γ_0 стягиваться в точку. Тогда $F_1(x)$ будет стремиться к $\Gamma(x)$, а $F_0(x)$ будет стремиться к нулю, так как

$$|F_0(x)| \leqslant \int_{\gamma_0} |e^{-t}t^{x-1}|\,|dt| \leqslant \int_0^{2\pi} e^{-r}r^x\,d\varphi \leqslant r^x e^r 2\pi \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$(t = re^{i\varphi} \text{ на } \gamma_0).$$

Следовательно, осуществляя предельный переход в соотношении (6) при $r \to 0$, получим формулу (5).

Свойство 9. *Из свойств* 6 *и* 8 *следует соотношение*

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = \frac{e^{i\pi z}}{2\pi i}\int_\gamma e^{-t}t^{-z-1}\,dt. \tag{7}$$

Действительно,

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = \frac{\sin(\pi z + \pi)}{\pi}\Gamma(-z) = \frac{-\sin \pi z}{\pi}\Gamma(-z) =$$

$$= \frac{e^{-i\pi z} - e^{i\pi z}}{2\pi i\,(e^{-2\pi i z} - 1)}\int_\gamma e^{-t}t^{-z-1}\,dt = \frac{e^{i\pi z}}{2\pi i}\int_\gamma e^{-t}t^{-z-1}\,dt.$$

На рис. 26 приведен график гамма-функции.

ГЛАВА XI

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Многие задачи приводят к необходимости решать уравнение вида (1). К такому уравнению мы придем, например, при решении задач, рассмотренных в ч. I, методом разделения переменных, если будем пользоваться цилиндрическими (или полярными) координатами (задача о колебании круглой мембраны, об остывании круглого цилиндра и др.). Изучение свойств решений этого уравнения и будет предметом рассмотрения этой главы.

§ 1. Функции Бесселя

1. Рассмотрим уравнение

$$L[w] \equiv z^2 w'' + z w' + (z^2 - \nu^2) w = 0. \tag{1}$$

Решения этого уравнения, не равные тождественно нулю, называются *цилиндрическими функциями.*

Один класс цилиндрических функций мы построим следующим образом. Будем искать решение уравнения (1) в виде обобщенного степенного ряда

$$w = z^\sigma (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots), \tag{2}$$

где $a_0 \neq 0$. Тогда

$$zw' = z^\sigma [a_0\sigma + a_1(\sigma+1)z + a_2(\sigma+2)z^2 + \ldots],$$

$$z^2 w'' = z^\sigma [a_0\sigma(\sigma-1) + a_1(\sigma+1)\sigma z + a_2(\sigma+2)(\sigma+1)z^2 + \ldots].$$

Подставим эти значения w, zw' и z^2w'' в уравнение (1) и соберем члены с одинаковыми степенями z:

$$z^\sigma [a_0\sigma^2 - a_0\nu^2] + z^{\sigma+1}[a_1(\sigma+1)^2 - a_1\nu^2] + z^{\sigma+2}[a_2(\sigma+2)^2 -$$
$$- a_2\nu^2 + a_0] + \ldots + z^{\sigma+n}[a_n(\sigma+n)^2 - a_n\nu^2 + a_{n-2}] + \ldots \equiv 0.$$

Чтобы ряд (2) был решением уравнения (1), необходимо выполнение равенств

$$a_0(\sigma^2 - \nu^2) = 0;$$
$$a_1[(\sigma + 1)^2 - \nu^2] = 0;$$
$$a_2[(\sigma + 2)^2 - \nu^2] + a_0 = 0,$$
$$\ldots, a_n[(\sigma + n^2) - \nu^2] + a_{n-2} = 0, \ldots$$

Из первого равенства находим

$$\sigma = \pm \nu,$$

так как $a_0 \neq 0$. Возьмем $\sigma = \nu$. Тогда из второго равенства находим $a_1 = 0$. Далее,

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{(\sigma + n)^2 - \nu^2}, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

Так как $\sigma = \nu$, то

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{(2\nu + n)\,n}.$$

Очевидно,

$$a_{2k+1} = 0$$

для всех целых неотрицательных k, а

$$a_{2k} = \frac{-a_{2k-2}}{2^2(\nu + k)\,k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}(\nu + k)(\nu + k - 1)\ldots(\nu + 1)\,k!}.$$

Полагая $a_0 = \dfrac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}$ и используя формулы (2) и (2_1) предыдущей главы, получим

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu}\Gamma(k + \nu + 1)\,\Gamma(k + 1)}.$$

Таким образом, мы построили формальное решение уравнения (1) в виде обобщенного степенного ряда

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{\Gamma(k + \nu + 1)\,\Gamma(k + 1)}. \tag{3}$$

Этот ряд в его области сходимости является фактическим решением уравнения (1). Легко проверить, пользуясь, например, признаком д'Аламбера, что этот ряд сходится всюду, кроме, может быть, $z=0$. Следовательно, функция $J_\nu(z)$ является решением уравнения (1) всюду, кроме, может быть, $z=0$. Эту функцию называют *функцией Бесселя порядка* ν (иногда — *функцией Бесселя* 1*-го рода*). Поскольку уравнение (1) не меняется при замене ν на $-\nu$, то функция $J_{-\nu}(z)$ также является решением уравнения (1). Если ν не есть целое число, то функции $J_\nu(z)$ и $J_{-\nu}(z)$ линейно независимы, так как одна из них в окрестности $z=0$ ведет себя как z^ν, а другая как $z^{-\nu}$. Если же ν равно целому числу n ($\nu=n$), то

$$J_{-n}(z)\equiv(-1)^n J_n(z).$$

Докажем это. Имеем

$$J_{-n}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}}{\Gamma(k-n+1)\,\Gamma(k+1)}=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}}{\Gamma(k-n+1)\,\Gamma(k+1)},$$

поскольку $\Gamma(k-n+1)=\infty$ для всех $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$.

В последней сумме произведем замену переменной суммирования $k=s+n$. Получим

$$J_{-n}(z)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+s}\left(\frac{z}{2}\right)^{2s+n}}{\Gamma(s+1)\,\Gamma(s+n+1)}=(-1)^n J_n(z).$$

2. Сказанное выше о поведении функций Бесселя $J_\nu(z)$ и $J_{-\nu}(z)$ для нецелых ν в окрестности $z=0$ является проявлением свойства, присущего линейно независимым решениям целого класса уравнений (с особыми точками)

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dy}{dx}\right]-q(x)\,y=0, \tag{4}$$

в которых $k(x)=(x-a)\,\varphi(x)$, $\varphi(a)\neq 0$; $\varphi(x)$ — дифференцируема в точке $x=a$ и в некоторой ее окрестности. Этим свойством впоследствии мы будем часто пользоваться. Сформулируем его точнее.

Теорема. *Если решение $y_1(x)$ уравнения* (4) *ограничено в окрестности $x=a$, то всякое другое решение $y_2(x)$ уравнения* (4), *линейно независимое с $y_1(x)$, не ограничено в окрестности $x=a$. При этом:* 1) *если* $y_1(x)=$

$=(x-a)^m u_1(x)$ *и* $u_1(a)\neq 0$, *то* $y_2(x)$ *имеет в точке* $x=a$ *особенность вида* $(x-a)^{-m}$; 2) *если* $y_1(a)\neq 0$, *то* $y_2(x)$ *в точке* $x=a$ *имеет логарифмическую особенность.*

Доказательство. По формуле Остроградского для определителя Вронского имеем

$$y_2'(x)y_1(x)-y_2(x)y_1'(x)\equiv\frac{C}{k(x)},\quad C\not\equiv 0\,^{1)},$$

откуда

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{y_2}{y_1}\right]\equiv\frac{C}{k(x)y_1^2(x)}.$$

Интегрируя это тождество по отрезку $[x, x_1]$, $a<x<x_1$, получим

$$y_2(x)=y_1(x)\left[\frac{y_2(x_1)}{y_1(x_1)}-\int\limits_x^{x_1}\frac{C\,dt}{k(t)\,y_1^2(t)}\right].$$

Здесь x_1 — такое фиксированное число, что на промежутке $[a, x_1]$ функции $\varphi(x)$ и $u_1(x)$ не обращаются в нуль.

Рассмотрим первый случай: $y_1(x)=(x-a)^m u_1(x)$. Тогда

$$y_2(x)=y_1(x)\left[\frac{y_2(x_1)}{y_1(x_1)}-C\int\limits_x^{x_1}\frac{dt}{(t-a)^{2m+1}\varphi(t)\,u_1^2(t)}\right].$$

Применим к этому интегралу теорему о среднем значении. Получим

$$y_2(x)=\frac{y_2(x_1)}{y_1(x_1)}y_1(x)-\frac{Cy_1(x)}{\varphi(\xi_1)\,u_1^2(\xi_1)}\int\limits_x^{x_1}\frac{dt}{(t-a)^{2m+1}},$$

или

$$y_2(x)=\frac{y_2(x_1)}{y_1(x_1)}y_1(x)+\frac{Cu_1(x)\,(x-a)^m}{2m\varphi(\xi_1)\,u_1^2(\xi_1)}(t-a)^{-2m}\Big|_x^{x_1}.$$

Здесь

$$x\leqslant\xi_1\leqslant x_1;\qquad \xi_1=\xi_1(x).$$

Таким образом,

$$y_2(x)=A_1(x)\,y_1(x)+B_1(x)\,(x-a)^{-m},$$

---

1) См. Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, М., Физматгиз, 1959.

где

$$A_1(x)=\frac{y_2(x_1)}{y_1(x_1)}+\frac{C}{2m(x_1-a)^{2m}\varphi(\xi_1)u_1^2(\xi)};$$

$$B_1(x)=\frac{-Cu_1(x)}{2m\varphi(\xi_1)u_1^2(\xi_1)}.$$

Поскольку $A_1(x)$ и $B_1(x)$ не имеют особенностей в точке $x=a$, для первого случая теорема доказана. Во втором случае аналогичные вычисления приводят нас к следующему результату:

$$y_2(x)=A_2(x)y_1(x)+B_2(x)\ln(x-a),$$

где

$$A_2(x)=\frac{y_2(x_1)}{y_1(x_1)}-\frac{C\ln(x_1-a)}{\varphi(\xi_2)u_1^2(\xi_2)};\quad B_2(x)=\frac{C}{\varphi(\xi_2)u_1^2(\xi_2)};$$

$$x\leqslant\xi_2\leqslant x_1;\qquad \xi_2=\xi_2(x).$$

Поскольку функции $A_2(x)$ и $B_2(x)$ не имеют особенностей в точке $x=a$, теорема доказана и для этого случая. Установленный доказанной теоремой факт имеет существенное значение при постановке краевых задач для уравнения (4) на отрезке $[a, b]$, один или оба конца которого являются особыми точками рассмотренного вида этого уравнения. Если по самому смыслу задачи требуется найти ограниченное на отрезке $[a, b]$ решение $y_1(x)$, то, записывая общее решение в виде

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x),$$

мы найдем одну из произвольных постоянных из условия ограниченности: $C_2=0$. Таким образом, в таких случаях условие ограниченности играет роль краевого условия и потому его надо формулировать как одно из краевых условий.

3. *Функции Бесселя $J_\nu(\lambda x)$ обладают свойством ортогональности с весом $\rho(x)=x$. Точнее, для всякого $\nu>-1$*

$$\int_0^l xJ_\nu\left(\frac{\alpha}{l}x\right)J_\nu\left(\frac{\beta}{l}x\right)dx=0,\ \text{если}\ \alpha\neq\beta, \tag{5}$$

где оба числа, α и β, суть корни одного из трех уравнений:

$$J_\nu(\gamma)=0,\qquad J'_\nu(\gamma)=0,\qquad \gamma J'_\nu(\gamma)+hJ_\nu(\gamma)=0.$$

Замечание. Уравнение

$$x^2y'' + xy' + (\lambda^2x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{6}$$

заменой переменной $\lambda x = z$ приводится к уравнению (1). Следовательно, решением уравнения (6) является функция Бесселя $J_\nu(\lambda x)$.

Доказательство ортогональности. Напишем два тождества:

$$x\frac{d^2}{dx^2}J_\nu(\lambda x) + \frac{d}{dx}J_\nu(\lambda x) + \left(\lambda^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right)J_\nu(\lambda x) \equiv 0,$$

$$x\frac{d^2}{dx^2}J_\nu(\mu x) + \frac{d}{dx}J_\nu(\mu x) + \left(\mu^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right)J_\nu(\mu x) \equiv 0.$$

Первое из них умножим на $J_\nu(\mu x)$, второе — на $J_\nu(\lambda x)$, затем вычтем почленно одно из другого и результат проинтегрируем (по x) по отрезку $[0, l]$. Получим

$$\int_0^l x\left\{J_\nu(\mu x)\frac{d^2}{dx^2}J_\nu(\lambda x) - J_\nu(\lambda x)\frac{d^2}{dx^2}J_\nu(\mu x)\right\}dx +$$
$$+ \int_0^l \left\{J_\nu(\mu x)\frac{d}{dx}J_\nu(\lambda x) - J_\nu(\lambda x)\frac{d}{dx}J_\nu(\mu x)\right\}dx =$$
$$= (\mu^2 - \lambda^2)\int_0^l xJ_\nu(\lambda x)J_\nu(\mu x)\,dx,$$

или

$$\int_0^l \frac{d}{dx}\left\{x\left[J_\nu(\mu x)\frac{d}{dx}J_\nu(\lambda x) - J_\nu(\lambda x)\frac{d}{dx}J_\nu(\mu x)\right]\right\}dx =$$
$$= (\mu^2 - \lambda^2)\int_0^l xJ_\nu(\lambda x)J_\nu(\mu x)\,dx.$$

Произведя интегрирование, получим

$$\left\{x\left[J_\nu(\mu x)\frac{d}{dx}J_\nu(\lambda x) - J_\nu(\lambda x)\frac{d}{dx}J_\nu(\mu x)\right]\right\}_0^l =$$
$$= (\mu^2 - \lambda^2)\int_0^l xJ_\nu(\lambda x)J_\nu(\mu x)\,dx. \tag{7}$$

Покажем, что при $\nu > -1$ и $\lambda = \frac{\alpha}{l}$, $\mu = \frac{\beta}{l}$ левая часть равенства (7) обращается в нуль. Для этого заметим, что, пользуясь формулой (3), $J_\nu(\lambda x)$ и $\frac{d}{dx} J_\nu(\lambda x)$ можно записать в виде

$$J_\nu(\lambda x) = \frac{\left(\frac{\lambda x}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} + x^{\nu+2} P_\lambda(x), \qquad (8)$$

$$\frac{d}{dx} J_\nu(\lambda x) = \frac{\nu}{x} \frac{\left(\frac{\lambda x}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} + x^{\nu+1} Q_\lambda(x),$$

где $P_\lambda(x)$ и $Q_\lambda(x)$ — степенные ряды. Используя эти формулы, находим

$$xJ_\nu(\mu x) \frac{d}{dx} J_\nu(\lambda x) - xJ_\nu(\lambda x) \frac{d}{dx} J_\nu(\mu x) =$$
$$= \left[\frac{(\mu x)^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} + x^{\nu+2} P_\mu(x)\right]\left[\nu \frac{(\lambda x)^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} + x^{\nu+2} Q_\lambda(x)\right] -$$
$$- \left[\frac{(\lambda x)^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} + x^{\nu+2} P_\lambda(x)\right]\left[\nu \frac{(\mu x)^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} + x^{\nu+2} Q_\mu(x)\right] =$$
$$= x^{2\nu+2} R_1(x) + x^{2\nu+4} R_2(x),$$

где $R_1(x)$ и $R_2(x)$ — степенные ряды. При $\nu > -1$ последнее выражение обращается в нуль для $x = 0$. Полагая в равенстве (7) $\lambda = \frac{\alpha}{l}$, $\mu = \frac{\beta}{l}$, получим

$$\int_0^l xJ_\nu\left(\frac{\alpha}{l} x\right) J_\nu\left(\frac{\beta}{l} x\right) dx =$$
$$= \frac{l^2}{\beta^2 - \alpha^2}\left[\alpha J_\nu(\beta) \frac{d}{d\alpha} J_\nu(\alpha) - \beta J_\nu(\alpha) \frac{d}{d\beta} J_\nu(\beta)\right]. \qquad (9)$$

Из равенства (9) немедленно следует ортогональность при указанных выше значениях α и β[1]).

---

[1]) Для третьего случая в правой части формулы (9) произведения $\alpha \frac{dJ_\nu(\alpha)}{d\alpha}$ и $\beta \frac{dJ_\nu(\beta)}{d\beta}$ надо заменить соответственно на $-hJ_\nu(\alpha)$ и $-hJ_\nu(\beta)$.

Вычислим квадрат нормы $\left\| J_\nu\left(\frac{\alpha}{l}x\right)\right\|^2$. Для этого воспользуемся формулой (9). Переходя в ней к пределу при $\beta \to \alpha$, получим

$$\left\| J_\nu\left(\frac{\alpha}{l}x\right)\right\|^2 = \int_0^l xJ_\nu^2\left(\frac{\alpha}{l}x\right)dx =$$
$$= \lim_{\beta\to\alpha}\frac{l^2}{\beta^2-\alpha^2}\left[\alpha J_\nu(\beta)J_\nu'(\alpha) - \beta J_\nu(\alpha)J_\nu'(\beta)\right].$$

По правилу Лопиталя находим

$$\left\| J_\nu\left(\frac{\alpha}{l}x\right)\right\|^2 = \frac{l^2}{2\alpha}\left[\alpha J_\nu'(\alpha)J_\nu'(\alpha) - J_\nu(\alpha)J_\nu'(\alpha) - \alpha J_\nu(\alpha)J_\nu''(\alpha)\right]. \quad (10)$$

Далее из тождества

$$z^2J_\nu''(z) + zJ_\nu'(z) + (z^2-\nu^2)J_\nu(z) \equiv 0$$

находим

$$-J_\nu''(\alpha) = \frac{1}{\alpha}J_\nu'(\alpha) + \left(1-\frac{\nu^2}{\alpha^2}\right)J_\nu(\alpha).$$

Подставляя это значение производной $J_\nu''(\alpha)$ в формулу (10), получим

$$\left\| J_\nu\left(\frac{\alpha}{l}x\right)\right\|^2 = \frac{l^2}{2}\left\{[J_\nu'(\alpha)]^2 + \left(1-\frac{\nu^2}{\alpha^2}\right)J_\nu^2(\alpha)\right\}^{1)}. \quad (11)$$

---

[1]) Квадрат нормы на отрезке $[a, b]$ любой функции $Y_\nu(\lambda x)$, удовлетворяющей уравнению (6), вычисляется по формуле

$$\int_a^b xY_\nu^2(\lambda x)\,dx = \frac{z^2}{2\lambda^2}\left\{\left[\frac{dY_\nu(z)}{dz}\right]^2 + \left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)Y_\nu^2(z)\right\}\Bigg|_{a\lambda}^{b\lambda},$$

где $z=\lambda x$. Для доказательства этого надо использовать очевидное соотношение

$$\int_a^b xY_\nu(\lambda x)Y_\nu(\mu x)\,dx =$$
$$= \left\{\frac{x}{\mu^2-\lambda^2}\left[Y_\nu(\mu x)\frac{d}{dx}Y_\nu(\lambda x) - Y_\nu(\lambda x)\frac{d}{dx}Y_\nu(\mu x)\right]\right\}_a^b$$

и перейти в нем к пределу при $\mu\to\lambda$. При вычислении предела правой части следует воспользоваться правилом Лопиталя и уравнением (6), как и при вычислении нормы $\left\| J_\nu\left(\frac{\alpha}{l}x\right)\right\|$.

4. Как мы видели в пункте **3**, ортогональность функций Бесселя связана с нулями функций Бесселя и их производных. О нулях функций Бесселя мы докажем следующие утверждения:

1) *Все нули функции Бесселя простые, кроме, может быть,* $z=0$.

2) *Все нули функций Бесселя* $J_\nu(z)$ *с вещественным индексом* $\nu>-1$ *вещественны.*

3) *Всякая функция Бесселя имеет бесконечное множество нулей.*

Справедливость этих утверждений следует из теорем.

Теорема 1. *Нули всякой цилиндрической функции простые, кроме, может быть,* $z=0$.

Теорема 2. *Все нули функций Бесселя* $J_\nu(z)$ *с вещественным индексом* $\nu>-1$ *вещественны.*

Теорема 3. *Всякая вещественная цилиндрическая функция имеет бесконечное множество нулей.*

Доказательство теоремы 1. Пусть $z_0\neq 0$ есть нуль кратности $n\,(n\geqslant 2)$ решения $y_\nu(z)$ уравнения (1), неравного тождественно нулю. Тогда $y_\nu(z_0)=y'_\nu(z_0)=0$. В силу теоремы единственности решения задачи Коши[1]) для уравнения (1) $y_\nu(z)\equiv 0$. Это противоречит условию. Поэтому предположение о кратности нуля z_0 неверно.

Следствие. *Все нули цилиндрических функций являются изолированными нулями.*

Доказательство. Изолированность нуля $z_0=0$ следует из определения функции Бесселя $J_\nu(z)$ и из теоремы пункта **2**.

Действительно, любая цилиндрическая функция $y_\nu(z)$ может быть представлена в виде

$$y_\nu(z)=C_1J_\nu(z)+C_2N_\nu(z),$$

где $N_\nu(z)$ — решение уравнения (1), линейно независимое с $J_\nu(z)$. Если $y_\nu(z)=C_1J_\nu(z)$, то, пользуясь формулой (3), эту функцию можно записать в виде $y_\nu(z)=C_1z^\nu\varphi(z)$, где $\varphi(0)\neq 0$. Отсюда и следует, что $z=0$ является изолированным нулем функции $y_\nu(z)$. Если $y_\nu(z)=C_1J_\nu(z)+C_2N_\nu(z)$, где $C_2\neq 0$, то $z=0$ не может быть нулем такой функции, так как функ-

---

[1]) См. Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, М., Физматгиз, 1959.

ция $N_\nu(z)$ по теореме п. 2 обращается в бесконечность в точке $z=0$.

Пусть $z_0 \neq 0$ является точкой накопления нулей цилиндрической функции $y_\nu(z)$ и $y_\nu(z_0)=0$. Тогда можно выделить сходящуюся к z_0 последовательность нулей $\{z_n\} \to z_0$. Очевидно,

$$y'_\nu(z_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{y_\nu(z_n)-y_\nu(z_0)}{z_n-z_0}=0.$$

Таким образом, имеем $y_\nu(z_0)=0$ и $y'_\nu(z_0)=0$. Это означает, что z_0 является нулем второй кратности, чего не может быть по теореме 1.

Очевидно, указанное утверждение эквивалентно следующему: *в любой ограниченной области переменного z всякая цилиндрическая функция $y_\nu(z)$ имеет конечное число нулей.*

Для доказательства второй теоремы докажем лемму.

Лемма. *Если $\alpha=re^{i\varphi}$ есть корень уравнения $J_\nu(\gamma)=0$, то и сопряженное ему число $\bar\alpha=re^{-i\varphi}$ является корнем того же уравнения.*

Доказательство. Функцию Бесселя, очевидно, можно записать в следующем виде:

$$J_\nu(z)=z^\nu\sum_{k=0}^{\infty}b_kz^{2k},\quad \text{где}\quad b_k=\frac{(-1)^k}{2^{\nu+2k}\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)}.$$

Тогда

$$J_\nu(re^{i\varphi})=r^\nu e^{i\nu\varphi}\sum_{k=0}^{\infty}b_kr^{2k}e^{i2k\varphi}=$$
$$=r^\nu e^{i\nu\varphi}\left(\sum_{k=0}^{\infty}b_kr^{2k}\cos 2k\varphi+i\sum_{k=0}^{\infty}b_kr^{2k}\sin 2k\varphi\right),$$

или

$$\left.\begin{aligned}J_\nu(re^{i\varphi})&=r^\nu e^{i\nu\varphi}[A_\nu(r,\varphi)+iD_\nu(r,\varphi)],\\ J_\nu(re^{-i\varphi})&=r^\nu e^{-i\nu\varphi}[A_\nu(r,\varphi)-iD_\nu(r,\varphi)],\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

где

$$A_\nu(r,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kr^{2k}\cos 2k\varphi,\qquad D_\nu(r,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kr^{2k}\sin 2k\varphi.$$

Из формул (12) лемма следует немедленно. Действительно, пусть $\alpha = re^{i\varphi}$ есть корень уравнения $J_\nu(\gamma) = 0$. Тогда

$$J_\nu(\alpha) = J_\nu(re^{i\varphi}) = r^\nu e^{i\nu\varphi}[A_\nu(r, \varphi) + iD_\nu(r, \varphi)] = 0.$$

Следовательно, $A_\nu(r, \varphi) = D_\nu(r, \varphi) = 0$. Тогда и $J_\nu(\bar{\alpha}) = 0$.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\alpha = re^{i\varphi}$ есть нуль функции Бесселя $J_\nu(z)$. По лемме $\bar{\alpha} = re^{-i\varphi}$ также является нулем этой функции. Тогда по свойству ортогональности имеем

$$\int_0^l xJ_\nu\left(\frac{\alpha}{l}x\right)J_\nu\left(\frac{\bar{\alpha}}{l}x\right)dx = 0,$$

или

$$0 = \int_0^l xJ_\nu\left(\frac{r}{l}xe^{i\varphi}\right)J_\nu\left(\frac{r}{l}xe^{-i\varphi}\right)dx =$$
$$= \int_0^l x\left(\frac{rx}{l}\right)^{2\nu}[A_\nu^2(r, \varphi) + D_\nu^2(r, \varphi)]\,dx. \qquad (13)$$

Мы воспользовались при этом формулами (12). Однако подынтегральная функция в последнем интеграле непрерывна и не равна тождественно нулю. Следовательно, и интеграл не может быть равен нулю. Таким образом, предположение о существовании комплексных корней у функции Бесселя приводит к противоречию.

Теорема 3 будет доказана на стр. 268.

Замечание. Из формулы (3) следует, что корни уравнения $J_\nu(z) = 0$ расположены на плоскости z симметрично относительно $z = 0$. Пользуясь тождествами

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{J_\nu(z)}{z^\nu}\right] \equiv \frac{-J_{\nu+1}(z)}{z^\nu} \quad \text{и} \quad \frac{d}{dz}[z^\nu J_\nu(z)] \equiv z^\nu J_{\nu-1}(z), \qquad (14)$$

которые проверяются непосредственно, читатель легко может доказать следующую теорему.

Теорема 4. *Функции $J_\nu(z)$ и $J_{\nu+1}(z)$ не имеют общих нулей (кроме, может быть, $z = 0$)*[1].

---

[1] Читатель легко может доказать, что нули функции $J_\nu(z)$ $J_{\nu+1}(z)$ разделяют друг друга.

Производя в формулах (14) дифференцирование и исключая затем $J'_\nu(z)$, получим рекуррентную формулу

$$J_{\nu+1}(z) \equiv -J_{\nu-1}(z) + \frac{2\nu}{z} J_\nu(z). \tag{15}$$

Если ν равно целому числу n, то по рекуррентной формуле мы сможем последовательно выразить все функции $J_n(z)$, $n \geqslant 2$, через $J_0(z)$ и $J_1(z)$. Ввиду этого в таблицах приводятся лишь значения функций $J_0(z)$, $J_1(z)$, $N_0(z)$, $N_1(z)$, $I_0(z)$, $I_1(z)$, $K_0(z)$, $K_1(z)$ (см. стр. 250, 256 и 271)[1]).

На основании доказанных теорем положительные корни уравнения $J_\nu(\gamma) = 0$ (где ν — вещественное число) можно перенумеровать в порядке их роста натуральными числами

$$\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_m < \gamma_{m+1} < \ldots$$

Очевидно, эти корни являются функциями индекса ν, т. е.

$$\gamma_m = \gamma_m(\nu).$$

Теорема 5. *$\gamma_m(\nu)$ суть возрастающие функции переменного ν, если $\nu > 0$.*

Доказательство. Для любого фиксированного m имеем

$$J_\nu[\gamma_m(\nu)] \equiv 0. \tag{16}$$

Дифференцируя это тождество по ν и опуская для упрощения записи индекс m, получим

$$J'_\nu(z)\,|_{z=\gamma} \frac{d\gamma}{d\nu} + \frac{\partial}{\partial\nu} J_\nu(z)\,|_{z=\gamma} = 0. \tag{17}$$

Штрихом мы будем обозначать производную по z. Далее, из первой формулы (14) находим

$$zJ'_\nu(z) - \nu J_\nu(z) \equiv -zJ_{\nu+1}(z),$$

откуда, с учетом тождества (16), получаем

$$J'_\nu(z)\,|_{z=\gamma} = -J_{\nu+1}(\gamma). \tag{18}$$

Обращаясь теперь к соотношению (17), получим

$$\frac{d\gamma}{d\nu} = \frac{1}{J_{\nu+1}(\gamma)} \cdot \frac{\partial}{\partial\nu} J_\nu(z)\,|_{z=\gamma}. \tag{19}$$

---

[1]) Аналогичные рекуррентные формулы справедливы и для функций $N_\nu(z)$, $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$, $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$ (см. стр. 253, 256 и 271).

Дифференцируя тождество

$$\frac{d}{dz}[zJ'_\nu(z)]+\left(z-\frac{\nu^2}{z}\right)J_\nu(z)\equiv 0 \tag{20}$$

по ν, получим

$$\frac{d}{dz}\left[z\frac{\partial}{\partial\nu}J'_\nu(z)\right]-\frac{2\nu}{z}J_\nu(z)+\left(z-\frac{\nu^2}{z}\right)\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(z)\equiv 0. \tag{21}$$

Тождества (20) и (21) умножаем соответственно на $\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(z)$ и $J_\nu(z)$. Затем вычтем почленно одно из другого и результат проинтегрируем (по z) от 0 до γ. Получим

$$\int_0^\gamma \frac{d}{dz}\left\{z\left[J'_\nu(z)\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(z)-J_\nu(z)\frac{\partial}{\partial\nu}J'_\nu(z)\right]\right\}dz=-2\nu\int_0^\gamma\frac{J_\nu^2(z)}{z}dz,$$

или

$$\left\{zJ'_\nu(z)\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(z)-zJ_\nu(z)\frac{\partial}{\partial\nu}J'_\nu(z)\right\}_0^\gamma=-2\nu\int_0^\gamma\frac{1}{z}J_\nu^2(z)\,dz.$$

Поскольку

$$J'_\nu(z)=b_2z^{\nu-1}+z^{\nu+1}P_2(z),\qquad J_\nu(z)=b_1z^\nu+z^{\nu+2}P_1(z),$$
$$\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(z)=b_3z^\nu\ln z+C_3z^\nu+z^{\nu+2}\ln z\cdot P_3(z)+z^{\nu+2}P_4(z),$$
$$\frac{\partial}{\partial\nu}J'_\nu(z)=b_4z^{\nu-1}\ln z+C_4z^{\nu-1}+z^{\nu+1}\ln z\cdot P_5(z)+z^{\nu+1}P_6(z),$$

где $P_k(z)$ — степенные ряды, $k=1, 2, 3, 4, 5, 6$, то результат подстановки нижнего предела интегрирования, $z=0$, дает нуль. Поэтому, учитывая тождества (16) и (18), получим

$$2\nu\int_0^\gamma\frac{1}{z}J_\nu^2(z)\,dz=\gamma J_{\nu+1}(\gamma)\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(z)\big|_{z=\gamma}.$$

Используя эту формулу и формулу (19), находим

$$\frac{d\gamma_m}{d\nu}=\frac{2\nu}{\gamma_m J_{\nu+1}^2(\gamma_m)}\int_0^{\gamma_m}\frac{1}{z}J_\nu^2(z)\,dz>0.$$

Теорема доказана.

Непосредственной проверкой устанавливается справедливость формул

$$J_{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z \text{ и } J_{-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z.$$

5. Пример. Решить задачу об остывании однородного бесконечного круглого стержня радиуса R, на поверхности которого все время поддерживается нулевая температура. Начальная температура внутренних точек стержня задана и равна $\varphi(r)$.

Математическая постановка задачи: требуется найти решение $u(r, t)$ уравнения $\Delta u=\frac{1}{a^2}u_t$ для $t>0$ и $0\leqslant r<R$, удовлетворяющее следующим начальным и краевым условиям:

$$u(r, 0)=\varphi(r), \quad u(R, t)=0, \quad |u(0, t)|<\infty.$$

Решение. Разделяя переменные $u(r, t)=\Phi(r)\Psi(t)$, находим

$$\Phi''+\frac{1}{r}\Phi'+\lambda\Phi=0, \quad \Phi(R)=0, \quad |\Phi(0)|<\infty,$$

$$\Psi(t)=Ce^{-\lambda a^2 t}, \text{ где } \lambda>0.$$

Общее решение уравнения для $\Phi(r)$ можно записать в виде

$$\Phi(r)=AJ_0(\sqrt{\lambda}r)+BN_0(\sqrt{\lambda}r).$$

Здесь $N_0(\sqrt{\lambda}r)$ — линейно независимое с $J_0(\sqrt{\lambda}r)$ решение уравнения для $\Phi(r)$.

По теореме на стр. 236 $N_0(\sqrt{\lambda}r)$ неограниченно в окрестности $r=0$. Поэтому из условия ограниченности искомого решения находим $B=0$.

Следовательно, $\Phi(r)=AJ_0(\sqrt{\lambda}r)$. Очевидно, можно положить $A=1$. Из краевого условия при $r=R$ находим уравнение для определения собственных значений

$$J_0(\mu)=0, \quad \mu=\sqrt{\lambda}R.$$

По теоремам 1—3 (стр. 242) это уравнение имеет бесконечное число простых вещественных корней

$$\mu_1<\mu_2<\ldots<\mu_n<\ldots$$

По ним определяем собственные значения

$$\lambda_n = \frac{\mu_n^2}{R^2}$$

и собственные функции задачи $J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right)$.

Мы будем предполагать полноту этой системы собственных функций и разложимость функции $\varphi(r)$ в ряд по собственным функциям $J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right)$.

Решение исходной задачи ищем в форме ряда

$$u(r,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2 \frac{\mu_n^2}{R^2} t} J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right).$$

Коэффициенты ряда C_n находим, используя начальные условия и свойство ортогональности функций Бесселя:

$$u(r,\ 0) = \varphi(r) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right).$$

Умножаем это тождество на $rJ_0\left(\frac{\mu_k}{R} r\right)$ и полученный результат интегрируем по r на промежутке $[0,\ R]$. С учетом ортогональности функций Бесселя и формул для квадрата их нормы получим

$$\int_0^R r\varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k}{R} r\right) dr = C_k \frac{R^2}{2} [J_0'(\mu_k)]^2.$$

Следовательно,

$$C_k = \frac{2}{R^2 [J_0'(\mu_k)]^2} \int_0^R r\varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k}{R} r\right) dr.$$

Замечание. Для приближенного решения задачи достаточно ограничиться несколькими первыми членами ряда, например

$$u(r,\ t) \approx C_1 e^{-a^2 \frac{\mu_1^2}{R^2} t} J_0\left(\frac{\mu_1}{R} r\right) + C_2 e^{-\frac{a^2\mu_2^2}{R_2} t} J_0\left(\frac{\mu^2}{R} r\right),$$

μ_1 и μ_2 находим в таблицах значений $J_0(x)$

$$\mu_1 = 2{,}4048, \qquad \mu_2 = 5{,}5201.$$

§ 2. Функции Ганкеля

1. Второй класс цилиндрических функций мы построим следующим образом. Будем искать решение уравнения (1) в виде контурного интеграла

$$w(z)=\int_C K(z,\ \xi)\, v(\xi)\, d\xi, \tag{22}$$

где $K(z,\ \xi)$ — некоторая заданная функция, а $v(\xi)$ — неизвестная функция. Подставляя эту функцию $w(z)$ в левую часть уравнения (1), получим

$$L[w]=\int_C \{ z^2K_{zz}+zK_z+z^2K-\nu^2K \}\, v(\xi)\, d\xi. \tag{23}$$

Мы полагаем при этом, что контур C и функция $K(z,\ \xi)$ выбраны так, что все проделанные выше операции были выполнимы.

Если в качестве $K(z,\ \xi)$ выбрать решение уравнения

$$z^2K_{zz}+zK_z+z^2K+K_{\xi\xi}=0, \tag{24}$$

то $L[w]$ можно записать в следующем виде:

$$L[w]=-\int_C (\nu^2K+K_{\xi\xi})\, v(\xi)\, d\xi=$$
$$=-\int_C K\{ v''+\nu^2v \}\, d\xi+\{ Kv'-K_{\xi}v \}_A^B.$$

Эта формула получена путем двукратного интегрирования по частям второго слагаемого; A и B — концы контура интегрирования.

Возьмем в качестве $K(z,\ \xi)$ функцию $\frac{1}{\pi}e^{-iz\sin\xi}$, а в качестве $v(\xi)$ — решение уравнения

$$v''+\nu^2v=0,$$

например $e^{i\nu\xi}$. Контур C выберем так, чтобы все упомянутые выше операции были законными и чтобы выражение $Kv'-K_{\xi}v$ на концах контура C, т. е. в точках A и B, обращалось в нуль. Тогда

$$w(z)=\frac{1}{\pi}\int_C e^{-iz\sin\xi+i\nu\xi}\, d\xi. \tag{25}$$

2. Принимая за C контуры C_1 и C_2 (рис. 27), мы получим две цилиндрические функции

$$H_\nu^{(1)}(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{C_1} e^{-iz\sin\xi+i\nu\xi}\,d\xi,$$
$$H_\nu^{(2)}(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{C_2} e^{-iz\sin\xi+i\nu\xi}\,d\xi, \tag{26}$$

называемые *функциями Ганкеля.*

Выкладки, приведшие нас к определению функций Ганкеля, носили формальный характер. Поэтому нам надо показать, что функции $H_\nu^{(1)}(z)$ и $H_\nu^{(2)}(z)$, определенные формулами (26), действительно являются решениями уравнения (1), т. е. имеют производные первого и второго порядка, и что при подстановке функций $H_\nu^{(1)}(z)$ и $H_\nu^{(2)}(z)$ в уравнение (1) дифференцирование (первого и второго порядков) можно производить под знаком интеграла. Надо доказать также, что при указанном выборе контуров C_1 и C_2 выражение $Kv'-K_zv$ обращается в нуль на концах этих контуров.

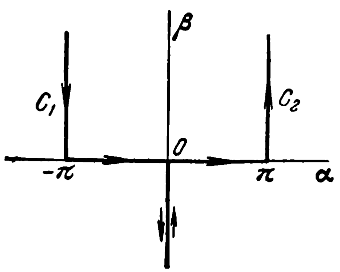

Рис. 27.

Докажем ряд свойств функций Ганкеля.

1) *Функции Ганкеля определены и непрерывны в области* $\operatorname{Re} z>0$.

Для доказательства этого достаточно[1]) установить равномерную сходимость интегралов, определяющих функции Ганкеля, в области $\operatorname{Re} z\geqslant\delta>0$, где δ — любое положительное число.

Рассмотрим для определенности функцию $H_\nu^{(1)}(z)$.

На верхней части контура C_1

$$\xi=-\pi+i\beta\ (\beta>0),\qquad \sin\xi=-i\operatorname{sh}\beta.$$

На нижней части контура C_1

$$\xi=i\beta\ (\beta<0),\qquad \sin\xi=i\operatorname{sh}\beta.$$

[1]) См. Фихтенгольц Г. М., Основы математического анализа, т. II, гл. 18, М., Физматгиз, 1964.

Следовательно, на этих частях контура C_1 функции $e^{-\delta \operatorname{sh}\beta - s\beta + \pi q}$ и $e^{\delta \operatorname{sh}\beta - \beta s}$ соответственно будут мажорантными для модуля подынтегральной функции ($\nu = s + iq$). Вместе с тем интегралы от этих функций $\int\limits_0^\infty e^{-\delta \operatorname{sh}\beta - s\beta + \pi q}\,d\beta$ и $\int\limits_{-\infty}^0 e^{\delta \operatorname{sh}\beta - s\beta}\,d\beta$ сходятся. Следовательно, исходный интеграл по контуру C_1 равномерно сходится в области $\operatorname{Re} z \geqslant \delta > 0$. Аналогично устанавливается равномерная сходимость интегралов

$$\int\limits_{C_p} K_z v\,d\xi, \quad \int\limits_{C_p} K_{zz} v\,d\xi, \quad \int\limits_{C_p} K_{\xi\xi} v\,d\xi \qquad (p = 1,\ 2).$$

2) *Функции Ганкеля аналитичны в области* $\operatorname{Re} z > 0$.

Для доказательства этого заметим, что $\int\limits_L H_\nu^{(1)}(z)\,dz$, взятый по любому кусочно-гладкому замкнутому контуру L, лежащему в области $\operatorname{Re} z \geqslant \delta > 0$, равен нулю, так как

$$\int\limits_L H_\nu^{(1)}(z)\,dz = \int\limits_{C_1}\int\limits_L e^{-iz\sin\xi + i\nu\xi}\,dz\,d\xi = 0.$$

Перестановка порядка интегрирования здесь была законной в силу равномерной сходимости интеграла по контуру C_1, функция $e^{-iz\sin\xi}$ аналитична всюду. Тогда по теореме Морера $H_\nu^{(1)}(z)$ аналитична. Аналогично доказывается аналитичность $H_\nu^{(2)}(z)$.

Поскольку интегралы $\int\limits_{C_p} K_z v\,d\xi$ и $\int\limits_{C_p} K_{zz} v\,d\xi$ сходятся равномерно в области $\operatorname{Re} z \geqslant \delta$ ($\delta > 0$), то при вычислении производных функций Ганкеля дифференцирование можно производить под знаком интеграла.

3) *Справедливы предельные соотношения:*

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\xi = -\pi + i\beta \to -\pi + i\infty} \{K(z, \xi)\,v'(\xi) - K_\xi(z, \xi)\,v(\xi)\} = 0. \\ &\lim_{\xi = i\beta \to -i\infty} \{K(z, \xi)\,v'(\xi) - K_\xi(z, \xi)\,v(\xi)\} = 0. \end{aligned}\right\} \operatorname{Re} z > 0. \tag{27}$$

Докажем первое из них. На верхней части контура C_1

$$|K(z,\ \xi)v'(\xi)| = |e^{-iz\sin\xi + i\nu\xi} i\nu| = |\nu|\, e^{-x\operatorname{sh}\beta - s\beta + \pi q} \to 0,\quad \beta \to \infty$$

$$|K_\xi(z,\ \xi)v(\xi)| = |-iz\cos\xi e^{-iz\sin\xi - i\nu\xi}| = \\ = |z|\operatorname{ch}\beta e^{-x\operatorname{sh}\beta - s\beta + \pi q} \to 0,\ \beta \to \infty.$$

Отсюда следует справедливость первого соотношения.

Второе доказывается аналогично. Таким образом, функции Ганкеля являются решениями уравнения (1), аналитическими в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$.

4) *Функции Ганкеля линейно независимы.*

Для доказательства этого достаточно показать существование такой последовательности $\{z_n\}$ из области определения функций Ганкеля, по которой одна из функций стремится к бесконечности, а другая ограничена. Обратимся к формулам (26). На верхней и нижней частях контура C_1 имеем $\xi = -\pi + i\beta$ и, соответственно, $\xi = -i\beta$ $(\beta > 0)$. Поэтому интегралы по этим частям контура C_1 можно записать в виде

$$\frac{-i}{\pi}\int_0^\infty e^{-z\operatorname{sh}\beta - \nu\beta}\cdot e^{-i\nu\pi} d\beta \quad \text{и} \quad \frac{-i}{\pi}\int_0^\infty e^{-z\operatorname{sh}\beta + \nu\beta}\, d\beta.$$

Следовательно, функцию Ганкеля $H_\nu^{(1)}(z)$ можно записать в виде

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{-i}{\pi} e^{-i\pi\nu}\int_0^\infty e^{-z\operatorname{sh}\beta - \nu\beta}\, d\beta - \frac{i}{\pi}\int_0^\infty e^{-z\operatorname{sh}\beta + \nu\beta} d\beta + \\ + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^0 e^{-iz\sin\xi + i\nu\xi}\, d\xi,$$

или

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{-i}{\pi} e^{-i\nu\pi}\int_0^\infty e^{-z\operatorname{sh}\beta - \nu\beta}\, d\beta - \frac{i}{\pi}\int_0^\infty e^{-z\operatorname{sh}\beta + \nu\beta} d\beta + \\ + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{iz\sin\xi - i\nu\xi}\, d\xi. \qquad (26_1)$$

Аналогично

$$H_\nu^{(2)}(z)=\frac{i}{\pi}e^{i\pi\nu}\int_0^\infty e^{-z\operatorname{sh}\beta-\nu\beta}\,d\beta+\frac{i}{\pi}\int_0^\infty e^{-z\operatorname{sh}\beta+\nu\beta}\,d\beta+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{-iz\sin\xi+i\nu\xi}\,d\xi. \qquad (26_2)$$

При стремлении z к бесконечности по последовательности $z_n=x_0+iy_n$, где x_0 — фиксировано, $x_0>0$, $y_n>0$ и $y_n\to\infty$, первые два интеграла в формулах (26_1) и (26_2) остаются ограниченными, так как

$$\left|\int_0^\infty e^{-z_n\operatorname{sh}\beta\mp\nu\beta}\,d\beta\right|\leqslant\int_0^\infty e^{-x_0\operatorname{sh}\beta\mp\nu\beta}\,d\beta.$$

Интеграл

$$\int_0^\pi e^{iz_n\sin\xi-i\nu\xi}\,d\xi=\int_0^\pi e^{-y_n\sin\xi}e^{ix_0\sin\xi-i\nu\xi}\,d\xi$$

также остается ограниченным при $y_n\to\infty$. Следовательно, $H_\nu^{(1)}(z_n)$ остается ограниченной при $z_n\to\infty$. Интеграл

$$\int_0^\pi e^{-iz_n\sin\xi+i\nu\xi}\,d\xi=\int_0^\pi e^{y_n\sin\xi}e^{-ix_0\sin\xi+i\nu\xi}\,d\xi$$

формулы (26_2) стремится к бесконечности при $y_n\to+\infty$, так как $\sin\xi>0$ внутри промежутка интегрирования. Следовательно, $H_\nu^{(2)}(z_n)\to\infty$ при $z_n\to\infty$. Таким образом, линейная независимость функций Ганкеля доказана.

3. Путем непосредственного вычисления убеждаемся в справедливости рекуррентных формул:

$$H_{\nu+1}^{(k)}(z)+H_{\nu-1}^{(k)}(z)\equiv\frac{2\nu}{z}H_\nu^{(k)}(z)\qquad(k=1,\ 2). \quad (28)$$

$$H_{\nu+1}^{(k)}(z)-H_{\nu-1}^{(k)}(z)\equiv-2\frac{d}{dz}H_\nu^{(k)}(z)\quad(k=1,\ 2). \quad (29)$$

Действительно,

$$H_{\nu+1}^{(k)}(z)+H_{\nu-1}^{(k)}(z)=\frac{1}{\pi}\int_{C_k}e^{-iz\sin\xi}\left(e^{i(\nu+1)\xi}+e^{i(\nu-1)\xi}\right)d\xi=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{C_k}e^{-iz\sin\xi+i\nu\xi}\left(e^{i\xi}+e^{-i\xi}\right)d\xi=\frac{2}{\pi}\int_{C_k}e^{-iz\sin\xi+i\nu\xi}\cos\xi\,d\xi.$$

Произведем интегрирование по частям, получим

$$-\frac{2}{i\pi z}\int_{C_1} e^{i\nu\xi}\, d\left(e^{-iz\sin\xi}\right)=\frac{-2}{i\pi z}\, e^{-iz\sin\xi+i\nu\xi}\Big|_{\xi=-\pi+i\infty}^{\xi=-i\infty}+$$

$$+\frac{2\nu}{z}\frac{1}{\pi}\int_{C_1} e^{-iz\sin\xi+i\nu\xi}\,d\xi=\frac{2\nu}{z}\frac{1}{\pi}\int_{C_1} e^{-iz\sin\xi+i\nu\xi}\,d\xi=\frac{2\nu}{z}H_\nu^{(1)}(z),$$

так как подстановка пределов в проинтегрированную часть дает нуль (см. стр. 251). Для $H_\nu^{(2)}(z)$ выкладки те же.

Далее,

$$H_{\nu+1}^{(k)}(z)-H_{\nu-1}^{(k)}(z)=\frac{1}{\pi}\int_{C_k} e^{-iz\sin\xi+i\nu\xi}\,2i\sin\xi\,d\xi.$$

С другой стороны,

$$2\frac{d}{dz}H_\nu^{(k)}(z)=\frac{2}{\pi}\int_{C_k} e^{-iz\sin\xi+i\nu\xi}(-i\sin\xi)\,d\xi.$$

Следовательно, верна и формула (29).

Для $\operatorname{Re} z>0$ имеет место формула

$$J_\nu(z)=\frac{H_\nu^{(1)}(z)+H_\nu^{(2)}(z)}{2}. \tag{30}$$

Поскольку функции $J_\nu(z)$ и $H_\nu^{(k)}(z)$ $(k=1,\ 2)$ аналитичны в области $\operatorname{Re} z>0$, нам достаточно доказать формулу (30) для $z=x>0$.

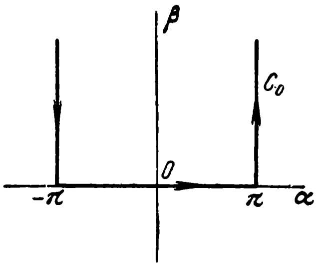

Рис. 28.

Доказательство. Обозначим через $j_\nu(z)$ правую часть формулы (30). Тогда

$$j_\nu(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{C_0} e^{-ix\sin\xi+i\nu\xi}\,d\xi, \tag{31}$$

где C_0 — контур, изображенный на рис. 28.

Произведем в этом интеграле замену переменной

$$a=\frac{x}{2}e^{i(\xi-\pi)}.$$

При этом полупрямая $(-\pi+i\infty,\ -\pi)$ контура C_0 перейдет в полупрямую $\left(+\infty,\ \frac{x}{2}\right)$ вещественной оси (в ее нижний берег), полупрямая $(\pi,\ \pi+i\infty)$ — в ту же полупрямую $\left(\frac{x}{2},\ +\infty\right)$ вещественной оси, но проходимую в противоположном направлении (в ее верхний берег); отрезок $[-\pi,\ \pi]$ — в окружность $|a|=\frac{x}{2}$.

Таким образом, при выбранной замене переменной контур C_0 перейдет в контур γ (глава X, стр. 229), обходимый в обратном направлении. Следовательно,

$$J_\nu(x)=\frac{-i}{2\pi}\int\limits_\gamma e^{\frac{x^2}{4a}-a}e^{i\pi\nu}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\frac{da}{a^{\nu+1}}=$$

$$=\frac{-e^{i\pi\nu}}{2\pi}i\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\int\limits_\gamma e^{-a}a^{-\nu-1}e^{\frac{x^2}{4a}}da.$$

Разлагая $e^{\frac{x^2}{4a}}$ в ряд Лорана по степеням a и производя почленное интегрирование ряда, получим

$$J_\nu(x)=\frac{ie^{i\nu\pi}}{2\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\frac{1}{k!}\int\limits_\gamma e^{-a}a^{-k-\nu-1}da=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+\nu+1)\,\Gamma(k+1)}=J_\nu(x).$$

Здесь мы воспользовались формулой (7) главы X.

Таким образом,

$$J_\nu(x)=\frac{1}{2}\left[H_\nu^{(1)}(x)+H_\nu^{(2)}(x)\right].$$

Мы получили интегральное представление функции Бесселя $J_\nu(z)$

$$J_\nu(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_0}e^{-iz\sin\xi+i\nu\xi}d\xi. \qquad (32)$$

Разбивая этот интеграл на три интеграла, получим

$$J_\nu(z) = \frac{i}{2\pi}\int_0^\infty e^{iz\sin(i\beta)+i\nu\pi-\nu\beta}\,d\beta - \frac{i}{2\pi}\int_0^\infty e^{iz\sin(i\beta)-i\pi\nu-\nu\beta}\,d\beta +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iz\sin\alpha+i\nu\alpha}\,d\alpha \qquad (\xi=\alpha+i\beta),$$

или

$$J_\nu(z) = \frac{i}{2\pi}\left(e^{i\pi\nu} - e^{-i\nu\pi}\right)\int_0^\infty e^{-z\,\mathrm{sh}\,\beta-\nu\beta}\,d\beta + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iz\sin\alpha+i\nu\alpha}\,d\alpha,$$

или

$$J_\nu(z) = \frac{-\sin\pi\nu}{\pi}\int_0^\infty e^{-z\,\mathrm{sh}\,\beta-\nu\beta}\,d\beta + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iz\sin\alpha+i\nu\alpha}\,d\alpha. \qquad (33)$$

В частности, при $\nu=n$ (целое) получим

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iz\sin\alpha+in\alpha}\,d\alpha. \qquad (34)$$

Из этих формул немедленно следует, что

$$|J_n(z)| \leqslant \mathrm{ch}\,y \qquad (z=x+iy)$$

и

$$|J_n(x)| \leqslant 1.$$

4. Функции

$$N_\nu(z) = \frac{H_\nu^{(1)}(z) - H_\nu^{(2)}(z)}{2i} \qquad (35)$$

называются *функциями Неймана*. Они аналитичны в области, где $\mathrm{Re}\,z>0$, поскольку функции $H_\nu^{(1)}(z)$ и $H_\nu^{(2)}(z)$ аналитичны в той же области. Очевидно, функция $N_\nu(z)$ является решением уравнения (1).

Из формул (30) и (35) следует, что

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(z) &= J_\nu(z) + iN_\nu(z),\\ H_\nu^{(2)}(z) &= J_\nu(z) - iN_\nu(z). \end{aligned} \qquad (35_1)$$

Нетрудно показать, что функции $J_\nu(z)$ и $N_\nu(z)$ линейно независимы. Если бы это было не так, то существовала бы такая константа C, что в области $\operatorname{Re} z > 0$ выполнялось бы тождество $N_\nu(z) \equiv C J_\nu(z)$. Но тогда из формул ($35_1$) мы получили бы

$$H_\nu^{(1)}(z) = (1 + iC) J_\nu(z) \quad \text{и} \quad H_\nu^{(2)}(z) = (1 - iC) J_\nu(z),$$

откуда $H_\nu^{(2)}(z) \equiv D H_\nu^{(1)}(z)$, где $D = \frac{1 - iC}{1 + iC}$, что противоречит линейной независимости функций Ганкеля, доказанной ранее.

Таким образом, функции $J_\nu(z)$ и $N_\nu(z)$, как и функции $H_\nu^{(1)}$ и $H_\nu^{(2)}$, образуют фундаментальную систему решений уравнения (1). Из формул (35_1) следует, что рекуррентные соотношения (28) и (29) данной главы справедливы и для функций $J_\nu(z)$, $N_\nu(z)$:

$$J_{\nu+1}(z) + J_{\nu-1}(z) \equiv \frac{2\nu}{z} J_\nu(z), \quad J_{\nu+1}(z) - J_{\nu-1}(z) \equiv -2J'_\nu(z);$$

$$N_{\nu+1}(z) + N_{\nu-1}(z) \equiv \frac{2\nu}{z} N_\nu(z), \quad N_{\nu+1}(z) - N_{\nu-1}(z) \equiv -2N'_\nu(z).$$

§ 3. Асимптотические представления цилиндрических функций

1. Во многих задачах физики требуется изучать установившиеся режимы явлений. Математически это приводит к изучению поведения функций при больших значениях аргументов — к изучению асимптотического поведения функций.

При изучении асимптотического поведения функций на множестве $\mathscr{E}$ их заменяют более простыми функциями, имеющими те же основные свойства. Чаще всего в качестве простых функций берут суммы

$$c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots + \frac{c_n}{z^n}.$$

Определение. Ряд $c_0 + \frac{c_1}{z} + \ldots + \frac{c_n}{z^n} + \ldots$ называют *асимптотическим разложением функции* $f(z)$ *на множестве* $\mathscr{E}$, содержащем последовательности, сходящиеся к бесконечности, если

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in \mathscr{E}}} z^n \left\{ f(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{z^k} \right\} = 0 \quad \text{для } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Употребляют запись:

$$f(z) \sim c_0 + \frac{c_1}{z} + \ldots + \frac{c_n}{z^n} + \ldots$$

или

$$f(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \ldots + \frac{c_n}{z^n} + o\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right).$$

Легко показать, что если асимптотическое разложение существует, то оно единственно.

В самом деле, из определения следует, что при $n=0$ $\lim\limits_{z\to\infty}\{f(z)-c_0\}=0$, откуда $c_0=\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$. При $n=1$ имеем

$$\lim_{z\to\infty} z\left\{f(z) - c_0 - \frac{c_1}{z}\right\} = 0,$$

откуда

$$c_1 = \lim_{z\to\infty} z\,\{f(z) - c_0\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_n = \lim_{z\to\infty} z^n \left\{f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{z^k}\right\}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Однако различные функции могут иметь одно и то же асимптотическое разложение. Действительно, если

$$f(x) \sim c_0 + \frac{c_1}{x} + \ldots + \frac{c_n}{x^n} + \ldots,$$

то и

$$f(x) + e^{-x} \sim c_0 + \frac{c_1}{x} + \ldots + \frac{c_n}{x^n} + \ldots \quad (\text{для } x > 0).$$

Если

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{\varphi(z)} = c_0 + \frac{c_1}{z} + \ldots + \frac{c_n}{z^n} + o\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right),$$

то

$$\psi(z) = \varphi(z)\left[c_0 + \frac{c_1}{z} + \ldots + \frac{c_n}{z^n} + o\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right)\right]$$

будем называть *асимптотическим представлением функции* $\psi(z)$.

2. Найдем асимптотическое представление интеграла ошибок

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

при больших $x>0$. Очевидно,

$$\Phi(x)=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}dt.$$

Поэтому достаточно найти асимптотическое представление функции $f(x)=\int_x^\infty e^{-t^2}dt$. Имеем:

$$e^{x^2}f(x)=\int_x^\infty e^{x^2-t^2}dt=\frac{1}{2}\int_x^\infty \frac{e^{x^2-t^2}}{t}d(t^2)=\frac{-1}{2}\int_x^\infty \frac{d(e^{x^2-t^2})}{t}.$$

Применяя несколько раз интегрирование по частям, получим

$$e^{x^2}f(x)=\frac{1}{2x}-\frac{1}{2^2x^3}+\frac{1\cdot 3}{2^3x^5}-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2^nx^{2n-1}}+R_n(x).$$

Для остатка

$$R_n(x)=(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n}\int_x^\infty \frac{e^{x^2-t^2}}{t^{2n}}dt$$

получаем оценку

$$|R_n(x)|<\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^{n+1}x^{2n+1}}=o\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right).$$

Следовательно,

$$f(x)=e^{-x^2}\left\{\frac{1}{2x}-\frac{1}{2^2x^3}+\frac{1\cdot 3}{2^3x^5}-\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^nx^{2n-1}}+o\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right)\right\}$$

и

$$\Phi(x)=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\left\{\frac{1}{2x}-\frac{1}{2^2x^3}+\frac{1\cdot 3}{2^3x^5}-\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^nx^{2n-1}}+o\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right)\right\}.$$

3. Одним из наиболее употребительных методов получения асимптотических представлений является **метод перевала**. Сущность этого метода состоит в том, что при больших значениях переменного x величина интеграла

$$f(x)=\int\limits_C \psi(\xi)\, e^{x\varphi(\xi)}\, d\xi$$

определяется главным образом тем участком C_{II} контура интегрирования C, на котором $|e^{x\varphi(\xi)}|=e^{x\,\mathrm{Re}\,\varphi(\xi)}$ велик по сравнению со значениями этого модуля на остальной части контура C. При этом интеграл по участку C_{II} оценивается тем легче, чем меньше этот участок и чем круче падает величина $x\,\mathrm{Re}\,\varphi(\xi)$. При применении метода перевала стараются деформировать путь интегрирования C в наиболее выгодный, в указанном выше смысле, контур $\tilde{C}$. По теореме Коши такая деформация, если она не выводит за пределы области аналитичности функций $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$ и области существования интеграла, не меняет значения интеграла. В силу аналитичности функции $\varphi(\xi)=u(\alpha,\ \beta)+iv(\alpha,\ \beta)$, $\xi=\alpha+i\beta$, направление наибыстрейшего изменения функции $u(\alpha,\ \beta)$ совпадает с направлением линии $v(\alpha,\ \beta)=\mathrm{const}$. Контур $\tilde{C}_{II}$ должен содержать точку $\xi_0=\alpha_0+i\beta_0$, в которой $u(\alpha,\ \beta)$ достигает наибольшего значения (среди значений этой функции на $\tilde{C}$).

Нетрудно показать, что $\varphi'(\xi_0)=0$. Действительно, производная от $u(\alpha,\ \beta)$ вдоль линии $\tilde{C}$, взятая в точке ξ_0, равна нулю, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial s}\right|_{\xi=\xi_0}=0$, так как в точке ξ_0 функция $u(\alpha,\ \beta)$ достигает максимального значения (вдоль $\tilde{C}$).

Далее, $\left.\dfrac{\partial v}{\partial s}\right|_{\xi=\xi_0}=0$, поскольку в окрестности точки $\xi=\xi_0$ имеем $v=\mathrm{const}$ вдоль $\tilde{C}$. Поэтому

$$\varphi'(\xi_0)=\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{\xi=\xi_0}+i\left.\frac{\partial v}{\partial s}\right|_{\xi=\xi_0}=0.$$

Точка ξ_0 для поверхности $u=u(\alpha,\ \beta)$ является, очевидно, точкой перевала (седловой точкой).

Таким образом, при применении метода перевала к асимптотической оценке интеграла $\int\limits_C \psi(\xi)\, e^{x\varphi(\xi)}\, d\xi$ путь интегрирования C надо деформировать в путь $\tilde{C}$, проходящий через точку ξ_0, в которой $\varphi'(\xi_0)=0$, и в окрестности этой точки совпадающий с линией $v(\alpha, \beta)=\text{const}=v(\alpha_0, \beta_0)$[1]).

4. Мы применим описанный метод для получения асимптотического представления функций Ганкеля $H_\nu^{(1)}(x)$ и $H_\nu^{(2)}(x)$ при больших значениях аргумента x $(x>0)$.

Предварительно докажем следующую теорему.

Теорема. *Всякое вещественное решение уравнения*

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0 \qquad (\operatorname{Im}\nu=0)$$

имеет асимптотическое представление вида

$$y(x)=\frac{A_0}{\sqrt{x}}\sin(x+\delta_0)\left[1+O\left(\frac{1}{x}\right)\right],$$

где A_0 и δ_0 — постоянные.

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию $y_1(x)$ по формуле

$$y(x)=\frac{y_1(x)}{\sqrt{x}}.$$

Для $y_1(x)$ получим дифференциальное уравнение

$$y_1''+\left(1-\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{x^2}\right)y_1=0. \tag{36}$$

При больших значениях x это уравнение мало отличается от уравнения

$$\frac{d^2w}{dx^2}+w=0,$$

общее решение которого имеет вид

$$w=A\sin(x+\delta), \tag{37}$$

где A и δ — постоянные.

---

[1]) Заметим, что окрестность точки перевала ξ_0 разбивается линией уровня $u(\alpha, \beta)=u(\alpha_0, \beta_0)$ на $2n$ секторов ($n\geqslant 2$, где $(n-1)$ — кратность нуля функции $\varphi'(\xi)$ в точке ξ_0), над которыми поверхность $u=u(\alpha, \beta)$ находится попеременно то выше, то ниже своей касательной плоскости в точке (α_0, β_0, u_0). Линия $v(\alpha, \beta)=v(\alpha_0, \beta_0)$ в окрестности точки ξ_0 состоит из n линий, проходящих через точку ξ_0 в направлении биссектрис упомянутых секторов. Одну из таких линий и следует взять в качестве $\tilde{C}$. Если $u=u(\alpha, \beta)$ имеет несколько точек перевала ξ_0, то в качестве $\tilde{C}$ надо выбрать линию наиболее крутого перевала.

Поэтому при больших значениях x будем искать решение уравнения (36) в виде

$$y_1(x) = A(x) \sin [x + \delta(x)],$$

где $A(x)$ и $\delta(x)$ — искомые функции.

Поскольку искомых функций две, а связаны они лишь одним условием (требованием, чтобы $A(x) \sin [x + \delta(x)]$ удовлетворяла уравнению (36)), мы можем подчинить их еще одному условию. Выберем это условие таким образом, чтобы производная от $y_1(x)$ вычислялась так, как если бы $A(x)$ и $\delta(x)$ были постоянными. Поскольку

$$y_1' = A \cos(x + \delta) + A\delta' \cos(x + \delta) + A' \sin(x + \delta),$$

то полагаем

$$A\delta' \cos(x + \delta) + A' \sin(x + \delta) \equiv 0. \tag{38}$$

Тогда

$$y_1' = A \cos(x + \delta). \tag{39}$$

Вычисляя производную y_1'' и подставляя ее в уравнение (36), получим

$$A' \cos(x + \delta) - A\left(\delta' + \frac{\gamma}{x^2}\right) \sin(x + \delta) \equiv 0, \tag{40}$$

где

$$\gamma = \nu^2 - \frac{1}{4}.$$

Исключая из соотношений (38) и (40) A и A', получим

$$\delta'(x) = \frac{-\gamma}{x^2} \sin^2(x + \delta), \tag{41}$$

откуда

$$\delta(b) = \delta(x) - \int_x^b \frac{\gamma}{\xi^2} \sin^2[\xi + \delta(\xi)]\, d\xi. \tag{42}$$

При фиксированном x и при $b \to \infty$ правая часть формулы (42) имеет предел; следовательно, и левая часть имеет предел

$$\lim_{b \to \infty} \delta(b) = \delta_0.$$

Таким образом, имеем

$$\delta(x) = \delta_0 + \int_x^\infty \frac{\gamma}{\xi^2} \sin^2[\xi + \delta(\xi)]\, d\xi.$$

Но

$$\left|\int_x^\infty \frac{\gamma}{\xi^2}\sin^2(\xi+\delta)\,d\xi\right| \leqslant |\gamma| \int_x^\infty \frac{d\xi}{\xi^2} = \frac{|\gamma|}{x} = O\left(\frac{1}{x}\right),$$

поэтому

$$\delta(x) = \delta_0 + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Из соотношений (38) и (41) находим

$$(\ln A)' = \frac{A'}{A} = \frac{\gamma}{2x^2}\sin 2(x+\delta)$$

и, следовательно,

$$\ln A(b) = \ln A(x) + \frac{\gamma}{2}\int_x^b \frac{\sin 2(\xi+\delta)}{\xi^2}\,d\xi.$$

Повторяя рассуждения, приведенные для $\delta(x)$ и $\delta(b)$, приходим к заключению, что существует предел

$$\lim_{b\to\infty} \ln A(b) = \ln A_0$$

и

$$\ln A(x) = \ln A_0 + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Следовательно,

$$A(x) = A_0\left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

Поэтому

$$y_1(x) = A_0\left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right]\sin\left[x + \delta_0 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right] = \\ = A_0 \sin(x+\delta_0)\left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right],$$

и

$$y(x) = \frac{A_0}{\sqrt{x}}\sin(x+\delta_0)\left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

5. Вернемся к рассмотрению функций Ганкеля. Рассмотрим для определенности

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{C_1} e^{-ix\sin\xi + i\nu\xi}\,d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{C_1} e^{i\nu\xi}e^{-ix\sin\xi}\,d\xi.$$

Здесь $\varphi(\xi) = -i \sin \xi$. Седловые точки ξ_0 находим из уравнения

$$\varphi'(\xi_0) = -i \cos \xi_0 = 0, \qquad \xi_0 = \frac{\pi}{2}(2k+1),$$

где k — целое. Поскольку контур C_1 лежит в полосе $-\pi \leqslant \operatorname{Re} \xi \leqslant 0$, нас будет интересовать только $\xi_0 = -\frac{\pi}{2}$:

$$\varphi(\xi) = -i \sin \xi = -i \sin(\alpha + i\beta) = -i \sin \alpha \operatorname{ch} \beta + \cos \alpha \operatorname{sh} \beta.$$

Таким образом, $v(\alpha, \beta) = -\sin \alpha \operatorname{ch} \beta$. В окрестности точки ξ_0 деформированный контур $\tilde{C}_1$ имеет уравнение

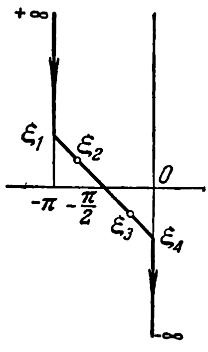

Рис. 29.

$$-\sin \alpha \operatorname{ch} \beta = -\sin \alpha_0 \operatorname{ch} \beta_0 = 1,$$

или

$$\sin \alpha \operatorname{ch} \beta = -1.$$

Направление этой кривой в точке $\xi_0 = -\frac{\pi}{2}$ определяется угловым коэффициентом

$$\left.\frac{d\beta}{d\alpha}\right|_{\alpha = -\frac{\pi}{2}} = \left.\frac{1}{\sin \alpha}\right|_{\alpha = \frac{-\pi}{2}} = -1.$$

Поэтому в качестве контура $\tilde{C}_1$ мы можем взять ломаную $(+\infty, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, -\infty)$, изображенную на рис. 29.

В соответствии с изложенным выше мы разобьем этот контур на три части: $\tilde{C}_{\text{I}}$ — участок $(+\infty, \xi_1, \xi_2)$, $\tilde{C}_{\text{II}}$ — участок (ξ_2, ξ_3) и $\tilde{C}_{\text{III}}$ — участок $(\xi_3, \xi_4, -\infty)$. При этом полагаем

$$\xi_2 = \alpha_2 + i\beta_2 = -\frac{\pi}{2} + x^{-\sigma} e^{i\frac{3}{4}\pi},$$

$$\xi_3 = \alpha_3 + i\beta_3 = -\frac{\pi}{2} + x^{-\sigma} e^{-i\frac{\pi}{4}},$$

где σ — фиксированное число, $\frac{1}{4} < \sigma < \frac{1}{2}$.

6. Оценим интегралы по $\tilde{C}_{\mathrm{I}}$ и $\tilde{C}_{\mathrm{III}}$. Очевидно,

$$\left|\int\limits_{\tilde{C}_{\mathrm{I}}} e^{-ix\sin\xi + i\nu\xi}\,d\xi\right| \leqslant \left|\int\limits_{\tilde{C}_{\mathrm{I}}} e^{-ix(\sin\alpha\,\mathrm{ch}\,\beta + i\cos\alpha\,\mathrm{sh}\,\beta) + i\nu(\alpha + i\beta)}\,d\xi\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\tilde{C}_{\mathrm{I}}} e^{x\cos\alpha\,\mathrm{sh}\,\beta - \nu\beta}\,|d\xi| =$$

$$= e^{x\cos\alpha_2\,\mathrm{sh}\,\beta_2}\int\limits_{\tilde{C}_{\mathrm{I}}} e^{x(\cos\alpha\,\mathrm{sh}\,\beta - \cos\alpha_2\,\mathrm{sh}\,\beta_2) - \nu\beta}\,|d\xi| =$$

$$= e^{x\cos\alpha_2\,\mathrm{sh}\,\beta_2}\Bigg\{\int\limits_{(+\infty,\,\xi_1)} e^{x(\cos\alpha\,\mathrm{sh}\,\beta - \cos\alpha_2\,\mathrm{sh}\,\beta_2) - \nu\beta}\,d\beta +$$

$$+ \int\limits_{(\xi_1,\,\xi_2)} e^{x(\cos\alpha\,\mathrm{sh}\,\beta - \cos\alpha_2\,\mathrm{sh}\,\beta_2) - \nu\beta}\,|d\xi|\Bigg\}.$$

Каждый из этих двух интегралов ограничен, поскольку $\cos\alpha\,\mathrm{sh}\,\beta - \cos\alpha_2\,\mathrm{sh}\,\beta_2 < 0$ при $\xi \neq \xi_2$, и убывает с ростом x. Следовательно,

$$\int\limits_{\tilde{C}_{\mathrm{I}}} = O\left(e^{x\cos\alpha_2\,\mathrm{sh}\,\beta_2}\right) = O\left(e^{-\frac{1}{2}x^{1-2\sigma}}\right),$$

так как

$$\alpha_2 = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x^{\sigma}\sqrt{2}}, \qquad \beta_2 = \frac{1}{x^{\sigma}\sqrt{2}}$$

и

$$\cos\alpha_2\,\mathrm{sh}\,\beta_2 = \left(\frac{-1}{x^{\sigma}\sqrt{2}} + \frac{x^{-3\sigma}}{2\sqrt{2}\cdot 3!} - \ldots\right)\times$$

$$\times\left(\frac{x^{-\sigma}}{\sqrt{2}} + \frac{x^{-3\sigma}}{3!\,2\sqrt{2}} + \ldots\right) = \frac{-1}{2x^{2\sigma}} + \frac{1}{6!\,x^{6\sigma}} + \ldots$$

Аналогично находим

$$\left|\int\limits_{\tilde{C}_{\mathrm{III}}} e^{-ix\sin\xi + i\nu\xi}\,d\xi\right| \leqslant e^{x\cos\alpha_3\,\mathrm{sh}\,\beta_3}\times$$

$$\times\Bigg\{\int\limits_{(\xi_3,\,\xi_4)} e^{x(\cos\alpha\,\mathrm{sh}\,\beta - \cos\alpha_3\,\mathrm{sh}\,\beta_3) - \nu\beta}\,|d\xi| +$$

$$+ \int\limits_{(\xi_4,\,-\infty)} e^{x(\cos\alpha\,\mathrm{sh}\,\beta - \cos\alpha_3\,\mathrm{sh}\,\beta_3) - \nu\beta}\,d\beta\Bigg\} = O\left(e^{-\frac{x^{1-2\sigma}}{2}}\right).$$

7. Оценим интеграл по $\tilde{C}_{II}$. На $\tilde{C}_{II}: \xi = -\frac{\pi}{2} + re^{i\frac{3\pi}{4}}$ на участке $\left(\xi_2, -\frac{\pi}{2}\right)$, $0 \leqslant r \leqslant x^{-\sigma}$; и $\xi = -\frac{\pi}{2} + re^{-i\frac{\pi}{4}}$ на участке $\left(-\frac{\pi}{2}, \xi_3\right)$, $0 \leqslant r \leqslant x^{-\sigma}$. Эти две формулы можно объединить в одну

$$\xi = -\frac{\pi}{2} + re^{-i\frac{\pi}{4}},$$

где $-x^{-\sigma} \leqslant r \leqslant x^{-\sigma}$. Поэтому

$$\int\limits_{\tilde{C}_{II}} e^{-xi\sin\xi + i\nu\xi}\,d\xi =$$

$$= \int\limits_{-x^{-\sigma}}^{x^{-\sigma}} e^{ix\cos\left(re^{-i\frac{\pi}{4}}\right) - i\frac{\pi}{2}\nu + i\nu re^{-i\frac{\pi}{4}}}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}\,dr =$$

$$= e^{i\left(x - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \int\limits_{-x^{-\sigma}}^{x^{-\sigma}} e^{ix\left[\cos\left(re^{-i\frac{\pi}{4}}\right) - 1\right] + i\nu re^{-i\frac{\pi}{4}}}\,dr.$$

Разлагая $\cos\left(re^{-i\frac{\pi}{4}}\right)$ в ряд по степеням r, получим

$$R = \int\limits_{-x^{-\sigma}}^{x^{-\sigma}} e^{ix\left[\cos\left(re^{-i\frac{\pi}{4}}\right) - 1\right] + i\nu re^{-i\frac{\pi}{4}}}\,dr =$$

$$= \int\limits_{-x^{-\sigma}}^{x^{-\sigma}} e^{-\frac{xr^2}{2}}\, e^{m_1(x,\,r)} \cdot e^{im_2(x,\,r)}\,dr,$$

где

$$m_1(x, r) = \frac{\nu r}{\sqrt{2}} + x\left[\frac{r^6}{6!} - \frac{r^{10}}{10!} + \frac{r^{14}}{14!} - \ldots + \right.$$

$$\left. + (-1)^{n+1}\frac{r^{2+4n}}{(2+4n)!} + \ldots\right];$$

$$m_2(x, r) = \frac{\nu r}{\sqrt{2}} - x\left[\frac{r^4}{4!} - \frac{r^8}{8!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{r^{4n}}{(4n)!} + \ldots\right],$$

или

$$R = \int\limits_{-x^{-\sigma}}^{x^{-\sigma}} e^{-\frac{xr^2}{2}} e^{m_1}(\cos m_2 + i\sin m_2)\,dr,$$

Применяя к каждому из этих двух интегралов теорему о среднем значении, получим

$$R=\{e^{m_1(x,\ \theta_1 x^{-\sigma})}\cos m_2(x,\ \theta_1 x^{-\sigma})+$$
$$+ie^{m_1(x,\ \theta_2 x^{-\sigma})}\sin m_2(x,\ \theta_2 x^{-\sigma})\}\int\limits_{-x^{-\sigma}}^{x^{-\sigma}} e^{-\frac{xr^2}{2}}dr.$$

При $x\to\infty$ функции $m_k(x,\ \theta_j x^{-\sigma})(k,\ j=1,\ 2)$ стремятся к нулю как $x^{-\sigma}$. Следовательно,

$$R=\{1+[\rho_1(x)+i\rho_2(x)]x^{-\sigma}\}\int\limits_{-x^{-\sigma}}^{x^{-\sigma}} e^{-\frac{xr^2}{2}}dr,$$

где $\rho_1(x)$ и $\rho_2(x)$ ограничены при $x\to\infty$. Полагая $r\sqrt{\frac{x}{2}}=\gamma$, получим

$$R=\{1+(\rho_1+i\rho_2)x^{-\sigma}\}\,2\sqrt{\frac{2}{x}}\int\limits_{0}^{\sqrt{\frac{x}{2}}x^{-\sigma}} e^{-\gamma^2}d\gamma.$$

Воспользуемся асимптотическим представлением интеграла ошибок (см. п. 2). Получим

$$R=\sqrt{\frac{2}{x}}\{1+\rho(x)x^{-\sigma}\}\sqrt{\pi}\,\{1-O(e^{-\frac{1}{2}x^{1-2\sigma}})\}=$$
$$=\sqrt{\frac{2\pi}{x}}[1+\rho_3(x)x^{-\sigma}O(e^{-0,5x^{1-2\sigma}})\},$$

где

$$\rho(x)=\rho_1(x)+i\rho_2(x),\qquad \rho_3(x)=\rho(x)+x^{\sigma}O(e^{-0,5x^{1-2\sigma}}),$$

а $\rho_3(x)$ ограничена по модулю при больших $x>0$. Таким образом, при больших $x>0$ имеем

$$H_\nu^{(1)}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{i\left(x-\nu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\{1+\rho_3(x)x^{-\sigma}\}. \qquad (43)$$

Аналогично можно получить формулу

$$H_\nu^{(2)}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{-i\left(x-\nu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\{1+\tilde{\rho}(x)x^{-\sigma}\}, \qquad (44)$$

где $\tilde{\rho}(x)$ ограничена при $x\to\infty$.

8. Из формул (43), (44), (30), (35) следуют формулы:

$$J_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\nu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\{1+a_1(x)x^{-\sigma}\},\quad (45)$$

$$N_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\nu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\{1+a_2(x)x^{-\sigma}\},\quad (46)$$

$$a_1(x)=\frac{\rho_3(x)-\tilde{\rho}(x)}{2},\quad a_2(x)=\frac{1}{2i}[\rho_3(x)-\tilde{\rho}(x)].$$

Используя теорему об асимптотическом представлении вещественных цилиндрических функций (см. п. **4**) и единственность асимптотического представления, мы приходим к заключению, что $a_1(x)x^{-\sigma}$ и $a_2(x)x^{-\sigma}$ являются малыми порядка $O\left(\frac{1}{x}\right)$. Следовательно, $\rho(x)x^{-\sigma}$ и $\tilde{\rho}(x)x^{-\sigma}$ являются малыми того же порядка.

Таким образом, мы получаем уточнение формул (43) — (46):

$$H_\nu^{(1)}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{i\left(x-\nu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left\{1+O\left(\frac{1}{x}\right)\right\},\quad (47)$$

$$H_\nu^{2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{-i\left(x-\nu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left\{1+O\left(\frac{1}{x}\right)\right\},\quad (48)$$

$$J_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\nu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left\{1+O\left(\frac{1}{x}\right)\right\},\quad (49)$$

$$N_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\nu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left\{1+O\left(\frac{1}{x}\right)\right\}.\quad (50)$$

Это и есть искомые асимптотические представления.

Заметим, что эти формулы справедливы для любых z: $|z|\gg 1$, $|\arg z|<\pi-\delta$, где δ — произвольное малое число, а не только для $z=x>0$.

9. Из формул (49) и (50) и из линейной независимости функций $J_\nu(z)$ и $N_\nu(z)$ следует справедливость теоремы 3 на стр. 242.

Действительно, в силу линейной независимости функций $J_\nu(z)$ и $N_\nu(z)$ произвольная вещественная цилиндрическая функция $y_\nu(z)$ может быть получена по формуле

$$y_\nu(z)=D_1J_\nu(z)+D_2N_\nu(z).$$

Следовательно, она будет иметь следующее асимптотическое представление:

$$y_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[D_1 \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + \right.$$
$$\left. + D_2 \sin\left(z - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]\left\{1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right\}.$$

Полагая $\frac{D_1}{D_2} = \operatorname{tg}\omega$, получим

$$y_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sqrt{D_1^2 + D_2^2}\sin\left(z - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \omega\right)\left\{1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right\}.$$

Из этого асимптотического представления непосредственно следует теорема 3 (стр. 242), а также утверждение: расстояние между двумя соседними нулями функций Бесселя $J_\nu(z)$ (а также функций Неймана) стремится к π с неограниченным ростом абсолютных величин нулей.

На рис. 30 приводятся графики функций Бесселя, а на рис. 31 — графики функций Неймана.

10. Пользуясь асимптотическими представлениями функций $J_\nu(z)$, $J_{-\nu}(z)$, $N_\nu(z)$, $H_\nu^{(1)}(z)$ и $H_\nu^{(2)}(z)$, легко доказать справедливость формул

$$N_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}$$

и

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{i}{\sin\nu\pi}\left[e^{-i\pi\nu}J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)\right],$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \frac{-i}{\sin\nu\pi}\left[e^{i\pi\nu}J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)\right].$$

Если ν — целое число, правые части этих формул теряют смысл, ибо они принимают вид $\frac{0}{0}$. В этом случае правые части надо рассматривать как пределы при ν, стремящемся к целому значению n. Эти формулы можно принять как определения функций Неймана и Ганкеля.

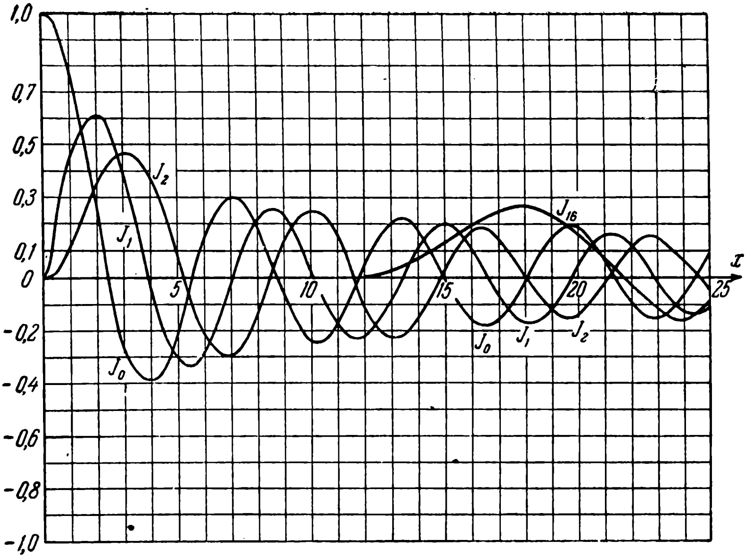
1,0
0,7
0,5
0,3
0,1
0
-0,2
-0,4
-0,6
-0,8
-1,0
5
10
15
20
25
x
J_0
J_1
J_2
J_{16}

Рис. 30.

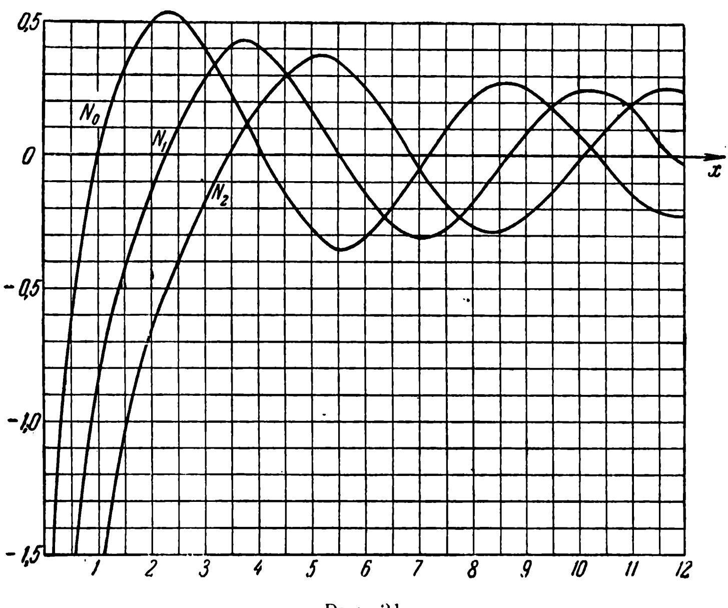
0,5
0
-0,5
-1,0
-1,5
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
x
N_0
N_1
N_2

Рис. 31.

§ 4. Функции $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ и др.

1. Третий класс цилиндрических функций можно определить следующим образом:

$$I_\nu(z)=i^{-\nu}J_\nu(iz), \tag{51}$$

$$K_\nu(z)=\frac{\pi}{2}H_\nu^{(1)}(iz)\,e^{i\frac{\pi}{2}(\nu+1)}. \tag{52}$$

Из линейной независимости функций $J_\nu(z)$ и $H_\nu^{(1)}(z)$ следует линейная независимость функций $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$. Они являются решениями уравнения

$$w''+\frac{1}{z}w'-\left(1+\frac{\nu^2}{z^2}\right)w=0, \tag{53}$$

получающегося из уравнения (1) § 1, гл. XI заменой переменной $z=i\xi$. Очевидно,

$$I_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+\nu+1)\,\Gamma(k+1)}. \tag{54}$$

Если воспользоваться формулами (47) и (49) § 3, то легко получить следующие асимптотические представления функций $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ при больших $|z|$ и $|\arg z|<\frac{\pi}{2}-\delta$:

$$I_\nu(z)=\sqrt{\frac{1}{2\pi z}}\,e^z\left\{1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right\}, \tag{55}$$

$$K_\nu(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}\left\{1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right\}. \tag{56}$$

Из ранее установленных фактов о нулях функций Бесселя следует, что $I_\nu(z)$ имеет лишь простые, чисто мнимые нули в бесконечном числе; $K_\nu(z)$ в точке $z=0$ имеет особенность вида $z^{-\nu}$ при $\nu\neq 0$ и логарифмическую особенность при $\nu=0$. Для этих функций имеют место рекуррентные формулы, аналогичные соответствующим формулам для $J_\nu(z)$ и $H_\nu^{(1)}(z)$.

На рис. 32 и 33 приведены графики функций $K_\nu(x)$ и $I_\nu(x)$.

2. В приложениях встречаются также следующие цилиндрические функции:

$$\operatorname{ber}_n(z),\qquad \operatorname{bei}_n(z),\qquad \operatorname{ker}_n(z),\qquad \operatorname{kei}_n(z).$$

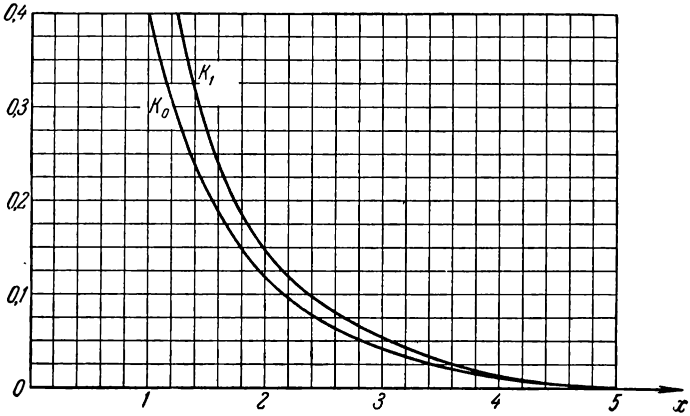

Рис. 32.

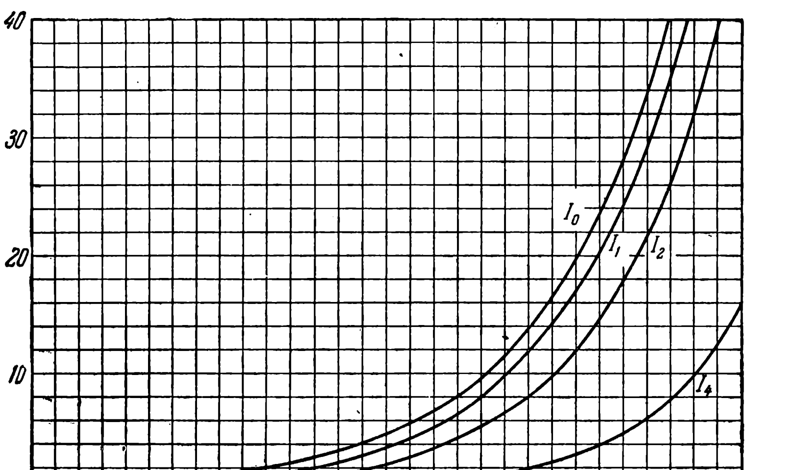

Рис. 33.

Для вещественных значений аргумента x они определяются следующим образом:

$$\operatorname{ber}_n(x) = \operatorname{Re}[I_n(x\sqrt{-i})], \quad \operatorname{bei}_n(x) = \operatorname{Im}[I_n(x\sqrt{-i})], \tag{57}$$

$$\operatorname{ker}_n(x) = \operatorname{Re}[K_n(x\sqrt{-i})], \quad \operatorname{kei}_n(x) = \operatorname{Im}[K_n(x\sqrt{-i})], \tag{58}$$

а затем аналитически продолжаются на всю плоскость переменного z.

Из этих определений легко вывести свойства, аналогичные соответствующим свойствам функций $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$. Читатель легко может сделать это сам.

Приведем представления некоторых из этих функций степенными рядами:

$$\operatorname{ber}_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{4n}}{[(2n)!]^2}, \tag{59}$$

$$\operatorname{bei}_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1}}{[(2n+1)!]^2}, \tag{60}$$

$$\operatorname{ber}_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{E\left[\frac{n}{2}\right]} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1}}{n!\,(n+1)!}, \tag{61}$$

$$\operatorname{bei}_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{E\left[\frac{n+1}{2}\right]} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1}}{n!\,(n+1)!}, \tag{62}$$

$E[y]$ — целая часть числа y.

3. Пример 1. Определить установившую температуру однородного круглого цилиндрического стержня длины h и радиуса R, если его основания все время поддерживаются при нулевой температуре, а боковая поверхность — при температуре, равной $f(z)$.

Математическая постановка задачи: требуется найти решение $u(r, z)$ уравнения $\Delta u = 0$ в области $0 \leqslant r < R$, $0 < z < h$, удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(r, 0) = u(r, h) = 0, \qquad |u(0, z)| < \infty, \qquad u(R, z) = f(z).$$

Ищем решения, удовлетворяющие первым трем краевым условиям, в виде $u = \Phi(r)\Psi(z)$. Для функций $\Phi(r)$ и $\Psi(z)$

будем иметь следующие задачи:

$$\Psi'' + \lambda\Psi = 0, \ \Psi(0) = \Psi(h) = 0 \ \text{(следовательно, } \lambda > 0);$$

$$\Phi'' + \frac{1}{r}\Phi' - \lambda\Phi = 0, \qquad |\Phi(0)| < \infty. \tag{63}$$

Очевидно,

$$\Psi_n(z) = \sin\frac{n\pi}{h}z, \qquad \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{h^2}.$$

Общее решение уравнения (63) (при $\lambda = \lambda_n$) можно записать в виде

$$\Phi_n(r) = C_n I_0\left(\frac{\pi n}{h}r\right) + D_n K_0\left(\frac{\pi n}{h}r\right).$$

Поскольку функция $K_0\left(\frac{\pi n}{h}r\right)$ при $r = 0$ обращается в бесконечность, то надо положить $D_n = 0$. Таким образом,

$$\Phi_n(r) = C_n I_0\left(\frac{\pi n}{h}r\right).$$

Решение исходной задачи ищем в виде

$$u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n I_0\left(\frac{\pi n}{h}r\right)\sin\frac{\pi n}{h}z,$$

где C_n определяем из последнего краевого условия (предполагая разложимость функции $f(z)$ в ряд Фурье по собственным функциям $\sin\frac{\pi n}{h}z$ на интервале $(0, h)$):

$$C_n = \frac{2}{h I_0\left(\frac{\pi n}{h}R\right)}\int_0^h f(z)\sin\frac{\pi n}{h}z\,dz.$$

Пример 2. Определить установившуюся температуру неограниченной однородной плоской пластины толщины h, имеющей круглое отверстие радиуса R, если грани пластины поддерживаются при нулевой температуре, а стенки отверстия — при температуре $f(z)$.

Математическая постановка задачи: требуется найти решение $u(r, z)$ уравнения $\Delta u = 0$ в области $R \leqslant r < \infty$, $0 < z < h$, удовлетворяющее граничным условиям:

$$u(r, 0) = u(r, h) = 0, \qquad |u(\infty, z)| < \infty, \qquad u(R, z) = f(z).$$

Ищем решения, удовлетворяющие первым трем краевым условиям, в виде $u = \Phi(r)\Psi(z)$. Для функций $\Phi(r)$ и $\Psi(z)$ будем иметь следующие задачи:

$$\Psi'' + \lambda\Psi = 0, \quad \Psi(0) = \Psi(h) = 0 \quad (\text{следовательно, } \lambda > 0);$$

$$\Phi'' + \frac{1}{r}\Phi' - \lambda\Phi = 0, \qquad |\Phi(\infty)| < \infty. \tag{64}$$

Очевидно,

$$\Psi_n(z) = \sin\frac{\pi n}{h}z, \qquad \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{h^2}.$$

Общее решение уравнения (64) (при $\lambda = \lambda_n$) можно записать в виде

$$\Phi_n(r) = D_n I_0\left(\frac{\pi n}{h}r\right) + C_n K_0\left(\frac{\pi n}{h}r\right).$$

Поскольку искомое решение должно быть ограниченным в области $R \leqslant r < \infty$, а функция $I_0\left(\frac{\pi n}{h}r\right)$ в этой области изменения r не ограничена, ибо при больших значениях r ведет себя как $\sqrt{\frac{h}{2\pi^2 nr}}\,e^{\frac{\pi n}{h}r}\left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right)$, то надо положить $D_n = 0$. Таким образом,

$$\Phi_n(r) = C_n K_0\left(\frac{\pi n}{h}r\right).$$

Решение исходной задачи ищем в виде

$$u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n K_0\left(\frac{\pi n}{h}r\right)\sin\frac{\pi n}{h}z,$$

где

$$C_n = \frac{2}{hK_0\left(\frac{\pi n}{h}R\right)}\int_0^h f(z)\sin\frac{\pi n}{h}z\,dz.$$

§ 5. Функции Эйри

Ряд задач физики (например, задача о движении заряженной частицы в однородном электрическом поле и др.) приводит к уравнению

$$y'' - xy = 0. \tag{65}$$

Произведем замену неизвестной функции по формулам:

$$y(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\,z(x) & \text{для } x\geqslant 0,\\ \sqrt{-x}\,z(x) & \text{для } x<0.\end{cases}$$

Для функции $z(x)$ получим уравнение

$$z''+\frac{1}{x}z'(x)-\left(\frac{1}{4x^2}+x\right)z=0. \tag{66}$$

Для построения общего решения этого уравнения произведем в нем замену независимой переменной по формулам:

$$t=\begin{cases}\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} & \text{для } x\geqslant 0,\\ \frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}} & \text{для } x<0.\end{cases}$$

При этом уравнение (66) перейдет в уравнения:

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{1}{t}\cdot\frac{dz}{dt}-\left[\frac{\frac{1}{9}}{t^2}+1\right]z=0 \quad \text{для } x\geqslant 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{1}{t}\cdot\frac{dz}{dt}+\left[1-\frac{\frac{1}{9}}{t^2}\right]z=0 \quad \text{для } x<0.$$

Это — уравнения цилиндрических функций. Их общие решения можно записать в следующем виде:

$$z(t)=C_1I_{-\frac{1}{3}}(t)+C_2I_{\frac{1}{3}}(t) \quad \text{для } x\geqslant 0,$$

$$z(t)=D_1J_{-\frac{1}{3}}(t)+D_2J_{\frac{1}{3}}(t) \quad \text{для } x<0.$$

Следовательно, общее решение уравнения (65) можно записать в виде

$$y(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\left[C_1I_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)+C_2I_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\right] & \text{для } x\geqslant 0,\\ \sqrt{|x|}\left[D_1J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}}\right)+\right.\\ \qquad\left.+D_2J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}}\right)\right] & \text{для } x<0.\end{cases}$$

Если произвольные постоянные C_1, C_2, D_1, D_2 взять равными

$$C_1=-C_2=D_1=D_2=\frac{1}{3}$$

и

$$C_1=C_2=D_1=-D_2=\frac{1}{3},$$

получим *функции Эйри* $Ai(x)$ и $Bi(x)$:

$$Ai(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x}}{3}\left[I_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)-I_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\right] & \text{для } x\geqslant 0,\\ \frac{\sqrt{|x|}}{3}\left[J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}}\right)+J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}}\right)\right] & \text{для } x<0;\end{cases}$$

$$Bi(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x}}{3}\left[I_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)+I_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\right] & \text{для } x\geqslant 0,\\ \frac{\sqrt{|x|}}{3}\left[J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}}\right)-J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}}\right)\right] & \text{для } x<0.\end{cases}$$

Из представления функций $I_\nu(t)$ и $J_\nu(t)$ в виде обобщенных степенных рядов следует, что

$$\underset{x\to 0}{Ai(x)\to}\frac{1}{\sqrt[3]{18}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)},\quad \underset{x\to 0}{Bi(x)\to}\frac{1}{\sqrt[3]{18}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}.$$

Применяя приведенные в п. **5** § 3 гл. XI рассуждения (с очевидными несущественными изменениями) к функциям $I_{-\nu}(t)\mp I_\nu(t)$ и $J_{-\nu}(t)\pm J_\nu(t)$, нетрудно получить следующие асимптотические представления функций Эйри:

$$Ai(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}x^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}\left[1+O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)\right] \text{ для } x\to+\infty,$$

$$Ai(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}x^{-\frac{1}{4}}\sin\left(\frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}}+\frac{\pi}{4}\right)\left[1+O\left(|x|^{-\frac{7}{4}}\right)\right]$$
$$\text{для } x\to-\infty;$$

$$Bi(x)=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}x^{-\frac{1}{4}}e^{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}\left[1+O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)\right] \text{ для } x\to+\infty,$$

$$Bi(x)=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}x^{-\frac{1}{4}}\sin\left(\frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}}+\frac{\pi}{4}\right)\left[1+O\left(|x|^{-\frac{7}{4}}\right)\right]$$
$$\text{для } x\to-\infty.$$

Имеются таблицы функций Эйри.

Задачи

1. Найти температуру бесконечного круглого цилиндра, начальная температура которого равна $u(r, 0) = A\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$, а на поверхности его поддерживается температура, равная нулю.

2. Цилиндрический однородный проводник радиуса R длительное время нагревался постоянным током силы I. Исследовать процесс остывания проводника после выключения тока, если в течение всего процесса на поверхности проводника происходил теплообмен по закону Ньютона со средой нулевой температуры.

3. Вне бесконечного круглого проводящего цилиндра $0 \leqslant r \leqslant R$ в момент $t = 0$ мгновенно установилось постоянное магнитное поле H_0, параллельное оси цилиндра. Найти напряженность магнитного поля внутри цилиндра при нулевых начальных данных. Найти поток магнитной индукции через поперечное сечение цилиндра.

4. Найти температуру цилиндрической трубы $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, если с момента $t = 0$ через ее внешнюю поверхность подается снаружи тепловой поток плотности q, а внутренняя поверхность поддерживается при нулевой температуре. Начальная температура нулевая.

5. Решить задачу о колебаниях круговой мембраны с закрепленными краями под действием равномерно распределенной нагрузки $Q = \text{const}$, приложенной с одной стороны с момента $t = 0$.

6. Решить задачу **5** для случаев: а) $Q = A \sin \omega t$, б) $Q = A \cos \omega t$, в) нагрузка Q распределена по площади кольца $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$ (рассмотреть также случай $R_1 = R_2$).

7. Решить задачу о колебаниях круглой мембраны $0 \leqslant r \leqslant R$, вызванных движением ее края для $t > 0$ по законам: а) $u(R, t) = A \sin \omega t$, б) $u(R, t) = A \cos \omega t$. Начальное возбуждение отсутствует.

8. Решить задачу о колебаниях круглой мембраны $0 \leqslant r \leqslant R$ с закрепленным краем под действием точечного импульса P, сообщенного мембране в момент $t = 0$ в точке (r_0, φ_0).

9. Найти распределение потенциала электростатического поля внутри полого цилиндра радиуса R и высоты h, нижнее основание $(z = 0)$ и боковая поверхность которого имеют потенциал V_0, а верхнее основание — потенциал V_1.

10. Постоянный ток силы I поступает через один торец цилиндрического проводника, изготовленного из материала с проводимостью σ, и отводится с противоположного торца. Определить распределение токового потенциала внутри проводника, считая, что подводящие контакты суть диски радиуса $R_1 < R$ (R — радиус цилиндра) и ток по ним распределен с постоянной плотностью.

11. Через цилиндрический образец радиуса R и высоты h пропущена тонкая проволока, нагреваемая постоянным током, выделяющим тепло Q на единицу длины. Найти распределение температуры в образце, считая, что боковая поверхность цилиндра поддерживается при нулевой температуре, а на его основаниях происходит теплообмен по закону Ньютона со средой нулевой температуры.

12. Найти температуру бесконечного круглого цилиндра $0 \leqslant r \leqslant R$, если его начальная температура равна $u_0 = \text{const}$, а на его

поверхность с момента $t=0$ извне подается постоянный тепловой поток плотности q.

13. Решить задачу о собственных колебаниях (т. е. найти с. з. и с. ф.) круглого цилиндра длины h при граничных условиях: а) типа I, б) типа II, в) типа III.

14. Решить задачу о собственных колебаниях мембраны, имеющей форму кругового сектора ($r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha$) при условиях: а) типа I, б) типа II, в) типа III.

15. Найти температуру бесконечного цилиндрического сектора $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha$, если на его поверхности поддерживается нулевая температура, а начальная температура произвольна.

16. Найти температуру конечного круглого цилиндра, поверхность которого поддерживается при нулевой температуре, а начальная температура произвольна.

17. Круглая мембрана радиуса R нагружена сосредоточенной массой m в ее центре. Найти собственные значения λ_n этой мембраны. Сравнить их с собственными значениями ненагруженной мембраны. Рассмотреть два случая: а) m мало, б) m велико.

18. Найти коэффициенты разложения функции $e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}$ по целым степеням t.

19. Вычислить $I_{\pm\frac{1}{2}}(x), K_{\pm\frac{1}{2}}(x)$, $H^{(1)}_{\pm\frac{1}{2}}(x)$, $H^{(2)}_{\pm\frac{1}{2}}(x), N_{\pm\frac{1}{2}}(x)$.

20. Найти стационарное распределение концентрации неустойчивого газа внутри бесконечного круглого цилиндра, если на его поверхности поддерживается постоянная концентрация u_0.

21. Решить задачу 20 для области, внешней к цилиндру.

22. Найти электростатическое поле внутри цилиндра ($0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant z \leqslant h$), торцы и боковая поверхность которого имеют соответственно потенциалы u_1, u_2 и u_0.

23. Найти стационарную температуру круглого цилиндра высоты h, нижнее основание которого теплоизолировано, на верхнем происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой нулевой температуры, а боковая поверхность поддерживается при температуре $u|_{r=R}=f(z)$.

24. Стенка цилиндрического канала, просверленного в неограниченной плоской пластине толщины h, поддерживается при температуре $u_0=\text{const}$. Найти стационарное распределение температуры в пластине, если ее грани поддерживаются при нулевой температуре.

25. Найти температуру в цилиндре ($0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant z \leqslant h$), если его начальная температура равна нулю, и начиная с момента $t=0$ основание цилиндра $z=h$ поддерживается при температуре $u_0=$ $=\text{const}$, а остальная часть поверхности — при нулевой температуре.

ГЛАВА XII

СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Простейшим классом сферических функций являются многочлены Лежандра от $\cos\theta$, $P_n(\cos\theta)$, к изложению основных свойств которых мы и обращаемся.

§ 1. Многочлены Лежандра

1. Мы определим эти многочлены несколько формальным способом — через производящую функцию, но это позволит нам проще и короче получить их основные свойства.

Функцию $\Psi(x, t) = (1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}}$ разложим в степенной ряд по степеням t. Получим

$$\Psi(x, t) = P_0(x) + P_1(x)t + \ldots + P_n(x)t^n + \ldots \tag{1}$$

Ниже будет показано, что коэффициенты этого разложения $P_n(x)$ являются многочленами, называемыми *многочленами Лежандра.*

Функция $\Psi(x, t)$ называется *производящей функцией многочленов Лежандра.*

Полагая в разложении (1) $x = 1$, получим

$$\Psi(1, t) = \frac{1}{1-t} = 1 + t + \ldots + t^n + \ldots$$

Следовательно, $P_n(1) = 1$. Полагая в разложении (1) $x = -1$, получим

$$\Psi(-1, t) = \frac{1}{1+t} = 1 - t + \ldots + (-1)^n t^n + \ldots$$

Следовательно, $P_n(-1) = (-1)^n$. Очевидно,

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot \left.\frac{\partial^n \Psi}{\partial t^n}\right|_{t=0}. \tag{2}$$

С другой стороны, производная n-го порядка $\frac{\partial^n \Psi}{\partial t^n}$ от функции Ψ при $t=0$ вычисляется по формуле[1])

$$\left.\frac{\partial^n \Psi}{\partial t^n}\right|_{t=0}=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\Psi(x, \xi)}{\xi^{n+1}}\,d\xi, \tag{2_1}$$

где C — замкнутый контур, охватывающий точку $\xi=0$. В интеграле (2_1) произведем замену переменной интегрирования:

$$\sqrt{1-2x\xi+\xi^2}=1-\xi z.$$

Получим

$$P_n(x)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{\frac{1}{2^n n!}(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}\,dz. \tag{3}$$

Здесь C_1 — замкнутый контур, охватывающий точку $z=x$.

Используя формулу для n-й производной интеграла Коши, получим

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]. \tag{4}$$

Таким образом, $P_n(x)$ действительно является многочленом и притом n-го порядка.

Из формулы (4) следует свойство четности многочленов Лежандра: $P_{2k}(z)$ — четная функция, $P_{2k+1}(z)$ — нечетная. Очевидно,

$$P_0(x)\equiv 1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}.$$

2. Нетрудно получить дифференциальное уравнение, решением которого является $P_n(x)$. Для этого рассмотрим функцию $w=(x^2-1)^n$.

Очевидно,

$$w'\equiv 2nx(x^2-1)^{n-1}\equiv\frac{2nxw}{(x^2-1)}$$

или

$$(x^2-1)w'-2nxw=0.$$

Дифференцируя это тождество $n+1$ раз, получим

$$(x^2-1)[w^{(n)}]''+2x[w^{(n)}]'-n(n+1)w^{(n)}\equiv 0.$$

[1]) Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, гл. I, М., Физматгиз, 1958.

Таким образом, функция $w^{(n)}(x)$, а следовательно, и $P_n(x)$ $\left(\text{поскольку } P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} w^{(n)}(x)\right)$, удовлетворяет уравнению

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \qquad (\text{при } \lambda = n(n+1)). \quad (5)$$

Оно называется *уравнением Лежандра.* Его можно написать также в следующем виде:

$$\frac{d}{dx}[(1 - x^2) y'] + \lambda y = 0. \quad (5_1)$$

Второе, линейно независимое с $P_n(x)$ решение уравнения (5) по теореме на стр. 236 имеет в точках $x = \pm 1$ логарифмическую особенность.

Замечание. К построению полиномов Лежандра можно подойти и иначе: искать ограниченное на отрезке $[-1, 1]$ решение уравнения (5) в виде степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. При $\lambda = n(n+1)$ этот ряд обрывается на члене с n-й степенью, т. е. при $\lambda = n(n+1)$ решением будет полином n-й степени $\tilde{P}_n(x)$. Он отличается от полинома Лежандра n-й степени лишь постоянным множителем. Этот множитель выбирается так, чтобы иметь $\tilde{P}_n(1) = 1$.

3. Многочлены Лежандра ортогональны на отрезке $[-1,1]$ с весом $\rho(x) \equiv 1$, т. е.

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_k(x)\, dx = 0, \qquad \text{если } n \neq k.$$

Действительно, напишем два тождества:

$$\frac{d}{dx}[(1 - x^2) P_n'] + n(n+1) P_n(x) \equiv 0,$$
$$\frac{d}{dx}[(1 - x^2) P_k'] + k(k+1) P_k(x) \equiv 0.$$

Первое из них умножим на $P_k(x)$, второе — на $P_n(x)$; результаты вычтем один из другого и полученную разность проинтегрируем (по x) по промежутку $[-1, 1]$. Получим:

$$\int_{-1}^{1} \left\{P_k \frac{d}{dx}[(1 - x^2) P_n'] - P_n \frac{d}{dx}[(1 - x^2) P_k']\right\} dx =$$
$$= [k(k+1) - n(n+1)] \int_{-1}^{1} P_n(x) P_k(x)\, dx$$

или

$$\int_{-1}^{1} \frac{d}{dx} \{(1 - x^2)(P_n' P_k - P_n P_k')\}\, dx =$$

$$= (k - n)(k + n + 1) \int_{-1}^{1} P_n(x) P(x)\, dx.$$

Следовательно,

$$\int_{-1}^{1} P_k(x) P_n(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{(k-n)(k+n+1)} \{(1 - x^2)(P_n' P_k - P_n P_k')\}_{-1}^{1} = 0$$

при $n \neq k$.

4. Прежде чем вычислить квадрат нормы, мы докажем справедливость двух рекуррентных соотношений

$$(n+1) P_{n+1}(x) - (2n+1) x P_n(x) + n P_{n-1}(x) \equiv 0, \qquad (6)$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2n+1} [P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x)]. \qquad (7)$$

Для этого продифференцируем по переменным t и x разложение (1). Получим тождества:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{(x-t)\Psi}{1 - 2xt + t^2} \equiv P_1 + 2P_2 t + \ldots + nP_n t^{n-1} \ldots,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{t\Psi}{1 - 2xt + t^2} \equiv P_0' + P_1' t + \ldots + P_n' t^n + \ldots \text{[1]},$$

или

$$(x - t)(P_0 + P_1 t + \ldots + P_n t^n + \ldots) \equiv$$

$$\equiv (1 - 2xt + t^2)(P_1 + 2P_2 t + \ldots + nP_n t^{n-1} + \ldots),$$

$$t(P_0 + P_1 t + \ldots + P_n t^n + \ldots) \equiv$$

$$\equiv (1 - 2xt + t^2)(P_0' + P_1' t + \ldots + P_n' t^n + \ldots).$$

Сравнивая в последних тождествах коэффициенты при одинаковых степенях t, получим тождества

$$(n+1) P_{n+1}(x) - (2n+1) x P_n(x) + n P_{n-1}(x) \equiv 0 \qquad (6)$$

[1]) Читателю предлагается самому доказать законность почленного дифференцирования разложения (1) по переменной x.

и

$$P_n(x) \equiv P'_{n+1}(x) - 2xP'_n(x) + P'_{n-1}(x). \tag{8}$$

Дифференцируя тождество (6), получим

$$(n+1)P'_{n+1}(x) - (2n+1)P_n(x) - \\ - (2n+1)xP'_n(x) + nP'_{n-1}(x) \equiv 0.$$

Исключая из этого соотношения и соотношения (8) произведение $xP'_n(x)$, получим тождество (7).

Замечание 1. С помощью соотношения (6) и формул

$$P_0(x) \equiv 1, \qquad P_1(x) = x,$$

очевидно, можно определить все многочлены Лежандра.

Замечание 2. Соотношение (7) позволяет выразить интеграл от многочлена Лежандра $\int P_n(x)\,dx$ через многочлены $P_{n+1}(x)$ и $P_{n-1}(x)$.

5. Вычислим квадрат нормы $\|P_n\|^2 = \int\limits_{-1}^{1} P_n^2(x)dx$. Для этого один из множителей подынтегральной функции $P_n(x)$ выразим через P_{n-1} и P_{n-2} по формуле (6), заменив в ней n на $n-1$. Получим

$$\|P_n\|^2 = \int\limits_{-1}^{1} P_nP_n\,dx = \int\limits_{-1}^{1} P_n\left\{\frac{2n-1}{n}xP_{n-1} - \frac{n-1}{n}P_{n-2}\right\}dx = \\ = \frac{2n-1}{n}\int\limits_{-1}^{1} xP_nP_{n-1}\,dx.$$

Мы здесь воспользовались ортогональностью многочленов P_n и P_{n-2}. В последнем интеграле произведение xP_n выразим по формуле (6) через P_{n+1} и P_{n-1}. Получим

$$\|P_n\|^2 = \frac{2n-1}{n}\int\limits_{-1}^{1} P_{n-1}\left\{\frac{n+1}{2n+1}P_{n+1} + \frac{n}{2n+1}P_{n-1}\right\}dx = \\ = \frac{2n-1}{2n+1}\int\limits_{-1}^{1} P_{n-1}^2\,dx,$$

или

$$\|P_n\|^2 = \frac{2n-1}{2n+1}\|P_{n-1}\|^2. \tag{9}$$

При этом мы снова воспользовались ортогональностью многочленов P_{n-1} и P_{n+1}.

Если соотношения (9) написать для $n=2, 3, \ldots, k$ и затем перемножить их, получим

$$\|P_k\|^2 = \frac{3 \cdot \|P_1\|^2}{2k+1} = \frac{2}{2k+1}, \tag{10}$$

так как $\|P_1\|^2 = \frac{2}{3}$.

6. Справедлива теорема: *все нули многочленов Лежандра простые и расположены на интервале* $(-1, 1)$.

Мы докажем более общую теорему.

Будем говорить, что многочлены $\{q_n(x)\}$ образуют *нормальную* систему, если среди них имеются многочлены всех неотрицательных степеней.

Теорема. *Если многочлены* $\{q_n(x)\}$ $(q_0(x) \equiv 1)$ *ортогональны на промежутке* (a, b) *с весом* $\rho(x) > 0$ *и образуют нормальную систему, то все нули многочлена* $q_n(x)$ *простые и расположены на промежутке* (a, b).

Доказательство. В силу ортогональности многочленов $q_n(x)$ имеем (для $n > 0$)

$$\int_a^b 1 \cdot q_n(x) \rho(x)\, dx = 0.$$

Следовательно, $q_n(x)$ меняет знак на промежутке (a, b) k раз $(k \geqslant 1)$.

Пусть это происходит в точках $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Тогда $q_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k)\varphi_n(x)$, где $\varphi_n(x)$ не меняет знак на (a, b). Очевидно, для доказательства теоремы достаточно показать, что $k=n$.

Предположим, что $k < n$. Справедливо разложение

$$R_k(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k) =$$
$$= a_0 q_0 + a_1 q_1(x) + \ldots + a_k q_k(x),$$

в котором $a_k \neq 0$. Очевидно, $\int_a^b q_n(x) R_k(x) \rho(x)\, dx = 0$ в силу ортогональности q_n и q_r $(r=0, 1, 2, \ldots, k)$. С другой стороны,

$$0 = \int_a^b q_n(x) R_k(x) \rho(x)\, dx = \int_a^b R_k^2(x) \varphi_n(x) \rho(x)\, dx > 0.$$

Получили противоречие. Следовательно, $k=n$. Из этой теоремы следует теорема о нулях многочленов Лежандра. Кроме того, нули многочленов Лежандра расположены симметрично относительно $x=0$.

7. Для многочленов Лежандра справедливо также интегральное представление

$$P_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}[x+i\sqrt{1-x^2}\sin\varphi]^n\,d\varphi. \qquad (11)$$

Для получения его в формуле (3) настоящей главы в качестве контура C_1 возьмем окружность радиуса R, $R=\sqrt{1-x^2}$ ($|x|<1$), с центром в точке $z=x$ и произведем замену

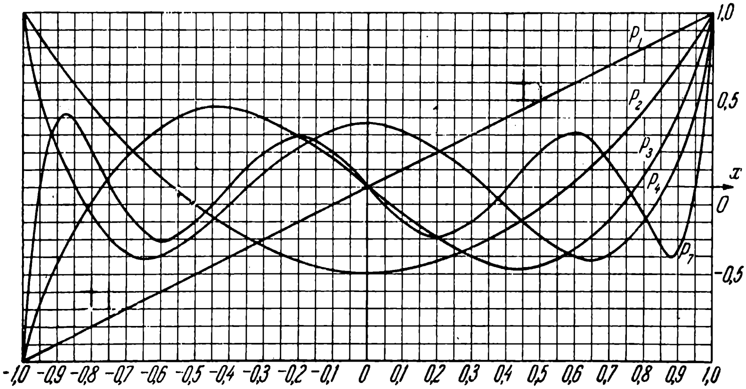

Рис. 34.

переменной в интеграле $z=x+\sqrt{1-x^2}\,e^{i\varphi}$, при этом $dz=i\sqrt{1-x^2}\,e^{i\varphi}\,d\varphi$,

$$z^2-1=x^2-1+(1-x^2)\,e^{2i\varphi}+2x\sqrt{1-x^2}\,e^{i\varphi}=$$
$$=\sqrt{1-x^2}\,e^{i\varphi}\,[2x+\sqrt{1-x^2}\,(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})]=$$
$$=2\sqrt{1-x^2}\,e^{i\varphi}\,[x+i\sqrt{1-x^2}\sin\varphi].$$

Подставляя значения $z-x$, z^2-1 и dz в формулу (3), получим

$$P_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}[x+i\sqrt{1-x^2}\sin\varphi]^n\,d\varphi.$$

Из этой формулы непосредственно следует оценка

$$|P_n(x)| < 1 \quad \text{для} \quad x \in (-1,\ 1). \tag{12}$$

На рис. 34 приведены графики полиномов Лежандра.

8. Пример 1. Определить потенциал внутри полой сферы радиуса R, составленной из двух полусфер, изолированных друг от друга тонкой прокладкой и заряженных до потенциалов v_1 и v_2.

Математическая постановка задачи: требуется найти решение $u(r,\ \theta)$ уравнения $\Delta u = 0$ в области $0 \leqslant r < R$, удовлетворяющее краевым условиям:

$$|u(0,\ \theta)| < \infty, \quad u(R,\ \theta) = \begin{cases} v_1, & 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}, \\ v^2, & \frac{\pi}{2} < \theta < \pi. \end{cases}$$

Решение. Сначала найдем решения уравнения $\Delta u = 0$ вида $u = f(r)\psi(\theta)$, удовлетворяющие только условию ограниченности. Разделяя переменные, получим

$$\frac{\frac{d}{dr}(r^2 f')}{f} = \frac{-\frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{d}{d\theta}(\psi' \sin\theta)}{\psi} = \lambda.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dr}(r^2 f') - \lambda f = 0, \qquad \frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{d}{d\theta}(\psi' \sin\theta) + \lambda\psi = 0.$$

В последнем уравнении произведем замену переменной $\xi = \cos\theta$. Получим уравнение

$$(1 - \xi^2)\frac{d^2\psi}{d\xi^2} - 2\xi\frac{d\psi}{d\xi} + \lambda\psi = 0,$$

которое при $\lambda = n(n+1)$ имеет ограниченное на $[-1,\ 1]$ решение в виде многочлена Лежандра $P_n(\xi)$. При таких значениях λ уравнение для $f(r)$ имеет ограниченное решение вида $f(r) = r^n$. Решение исходной задачи ищем в виде

$$u(r,\ \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n P_n(\cos\theta). \tag{13}$$

Коэффициенты c_n определяем из второго краевого условия, пользуясь свойством ортогональности многочленов Лежандра:

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} u(R, \theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta =$$

$$= \frac{2n+1}{2} \left\{ v_2 \int_{-1}^{0} P_n(\xi) \, d\xi + v_1 \int_0^1 P_n(\xi) \, d\xi \right\}.$$

Последние интегралы вычисляем, пользуясь формулами (7) и (6) этой главы. Получим

$$c_n = \frac{v_2 - v_1}{2} \cdot \frac{2n+1}{n} P_{n+1}(0).$$

В этой задаче мы воспользовались следующей теоремой разложимости функции $\varphi(\xi)$ в ряд Фурье по многочленам Лежандра:

Если функция $\varphi(\xi)$ кусочно-непрерывна вместе с производной первого порядка $\varphi'(\xi)$, то в каждой точке непрерывности $\varphi(\xi)$ ее ряд Фурье по многочленам Лежандра сходится к этой функции.

Мы не будем приводить доказательства этой теоремы.

Пример 2. Разложить плоскую волну $v = e^{i\lambda z}$ в ряд по многочленам Лежандра и функциям Бесселя.

Решение. Функция $v = e^{i\lambda z} = e^{i\lambda r \cos\theta}$ является решением уравнения

$$\Delta v + \lambda^2 v = 0.$$

В сферических координатах оно запишется в виде

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta \sin\theta) + \lambda^2 v = 0.$$

Будем искать решение этого уравнения в классе функций вида $v = f(r)\psi(\theta)$. Разделяя в последнем уравнении переменные, получим

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr}(r^2 f') + \left(\lambda^2 - \frac{\mu}{r^2}\right) f = 0,$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{d}{d\theta}(\psi' \sin\theta) + \mu\psi = 0.$$

Ограниченные решения уравнения для ψ будем иметь при $\mu = n(n+1)$ в виде многочленов Лежандра

$$\psi(\theta) = P_n(\cos\theta).$$

Уравнение для $f(r)$ после замены переменной

$$f(r) = \frac{\varphi(r)}{\sqrt{r}}$$

примет вид

$$\varphi'' + \frac{1}{r}\varphi' + \left[\lambda^2 - \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{r^2}\right]\varphi = 0.$$

Ограниченным решением этого уравнения будет функция $J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r)$. Таким образом, уравнение, которому удовлетворяет рассматриваемая бегущая волна, имеет семейство решений $\frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r) P_n(\cos\theta)$. Поэтому естественно положить

$$e^{i\rho\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\sqrt{\rho}} J_{n+\frac{1}{2}}(\rho) P_n(\cos\theta). \tag{14}$$

Пользуясь ортогональностью многочленов Лежандра, находим

$$c_n \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(\rho)}{\sqrt{\rho}} = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} e^{i\rho\xi} P_n(\xi)\, d\xi.$$

Производя n раз интегрирование по частям в правой части, получим

$$\frac{2c_n}{2n+1} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(\rho)}{\sqrt{\rho}} = \frac{1}{i\rho} e^{i\rho\xi} P_n(\xi) \Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{(i\rho)^2} [e^{i\rho\xi} (P_n'(\xi)]_{-1}^{1} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n \frac{1}{(i\rho)^n} [e^{i\rho\xi} P_n^{(n)}(\xi)]_{-1}^{1}.$$

Это соотношение справедливо при любых ρ. Для больших ρ

мы можем заменить функцию $J_{n+\frac{1}{2}}(\rho)$ ее асимптотическим представлением. Получим

$$\frac{2c_n}{2n+1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\rho\sqrt{\pi}}\left\{\cos\left[\rho-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right]+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right\}=$$
$$=\frac{2\sqrt{2}c_n}{\sqrt{\pi}(2n+1)}\cdot\frac{1}{\rho}\left\{\sin\left(\rho-n\frac{\pi}{2}\right)+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right\}=$$
$$=\frac{1}{i\rho}e^{i\rho\xi}P_n(\xi)\Big|_{-1}^{1}+\ldots+\frac{(-1)^n}{(i\rho)^n}[e^{i\rho\xi}P_n^{(n)}(\xi)]_{-1}^{1}.$$

Из этого соотношения следует равенство главных членов:

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{c_n\sin\left(\rho-n\frac{\pi}{2}\right)}{2n+1}=\frac{1}{i}[e^{i\rho}-(-1)^n e^{-i\rho}],$$

или

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{c_n\sin\left(\rho-n\frac{\pi}{2}\right)}{2n+1}=\frac{i^n}{i}[i^{-n}e^{i\varphi}-i^n e^{-i\rho}]=$$
$$=\frac{i^n}{i}\left[e^{i\left(\rho-n\frac{\pi}{2}\right)}-e^{-i\left(\rho-n\frac{\pi}{2}\right)}\right]=2i^n\sin\left(\rho-n\frac{\pi}{2}\right).$$

Отсюда находим

$$c_n=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,i^n(2n+1)=\sqrt{2\pi}\,i^n\left(n+\frac{1}{2}\right). \tag{15}$$

Пример 3. Решить задачу о возмущении плоской акустической волны $u_0(M, t)$, обусловленном наличием сферы радиуса R с абсолютно твердыми стенками, т. е. задачу о рассеянии звука на сфере.

Будем полагать, что центр сферы находится в начале координат. Движение вне сферы будет описываться функцией $u(M, t)$, равной $u(M, t)=u_0(M, t)+v(M, t)$, где $v(M, t)$ — искомое возмущение. Поскольку функции $u(M, t)$ и $u_0(M, t)$ являются решениями уравнения

$$a^2\Delta u=u_{tt},$$

то $v(M, t)$ будет также решением этого уравнения. Функции u, u_0 и v будем интерпретировать как потенциалы скоростей. Тогда на поверхности сферы должно выполняться условие

$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=R}=0$. Таким образом, задача для v ставится следующим образом:

$$a^2\Delta v=v_{tt} \quad \text{для} \quad r>R,$$
$$\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{r=R}=-\left.\frac{\partial u_0}{\partial n}\right|_{r=R}, \quad |v|<\infty.$$

Очевидно, декартову систему координат можно выбрать так, чтобы плоская волна u_0 записывалась в виде

$$u_0=e^{ikz}\cdot e^{-ikat}.$$

Будем искать $v(M, t)$ в виде $v=\Phi(M)e^{-ikat}$. Тогда для $\Phi(M)$ задача будет ставиться следующим образом:

$$\Delta\Phi+k^2\Phi=0 \quad \text{для} \quad r>R,$$
$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_{r=R}=-\left.\frac{\partial \varphi_0}{\partial n}\right|_{r=R}, \quad |\Phi|<\infty,$$

где $\varphi_0=e^{ikz}$.

Имея в виду разложение (14) плоской волны φ_0 (без временного фактора), естественно искать $\Phi(M)$ в виде ряда

$$\Phi=\sum_{m=0}^{\infty}\Phi_m(M);$$

$\Phi_m(M)$ будет решением следующей задачи:

$$\Delta\Phi_m+k^2\Phi_m=0 \quad \text{для} \quad r>R, \qquad (15_1)$$
$$\left.\frac{\partial \Phi_m}{\partial n}\right|_{r=R}=-\frac{\partial}{\partial r}\{A_m(r)P_m(\cos\theta)\}_{r=R}, \quad |\Phi_m|<\infty, \qquad (15_2)$$

где $A_m(r)P_m(\cos\theta)$ — член номера m в разложении (14). Ищем $\Phi_m(M)$ в виде произведения $\Phi_m=B_m(r)\Psi_m(\theta)$. Тогда, очевидно, в силу краевого условия (15_2), функция $\Psi_m(\theta)$ должна быть равной $P_m(\cos\theta)$.

Подставляя $\Phi_m=B_m(r)P_m(\cos\theta)$ в уравнение (15_1), получим уравнение для $B_m(r)$

$$B_m''+\frac{2}{r}B_m'+\left(k^2-\frac{m(m+1)}{r^2}\right)B_m=0.$$

Если положить $B_m=\frac{D_m}{\sqrt{r}}$, то для $D_m(r)$ получим уравнение

$$D_m''+\frac{1}{r}D_m'+\left[k^2-\frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2}{r^2}\right]D_m=0. \qquad (15_3)$$

Это — уравнение цилиндрических функций с индексом $\nu = m + \frac{1}{2}$. По физическому смыслу задачи функция $v(M, t)$ должна представляться в виде суперпозиции сферических расходящихся волн $\frac{1}{r} e^{ik(r-at)}$. Поскольку при больших значениях r подходящую асимптотику имеет только функция Ганкеля $H_\nu^{(1)}(kr)$:

$$H_\nu^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi r}} e^{ik\left(r - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}\left[1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right],$$

то общее решение уравнения (15_3) надо написать в виде

$$D_m(r) = \alpha_m H^{(1)}_{m+\frac{1}{2}}(kr) + \beta_m H^{(2)}_{m+\frac{1}{2}}(kr)$$

и сохранить лишь член с функцией $H^{(1)}_{m+\frac{1}{2}}(kr)$ [1]). Таким образом, получим

$$B_m(r) = \alpha_m h_m(kr), \quad \text{где} \quad h_\nu(kr) = \frac{1}{\sqrt{kr}} H^{(1)}_{\nu+\frac{1}{2}}(kr).$$

Коэффициент α_m находим из краевого условия (15_2), которое дает нам

$$B'_m(R) = -A'_m(R).$$

Отсюда находим

$$\alpha_m = \frac{-A'_m(R)}{h'_m(kR)\,k} = -c_m \frac{j'_m(kR)}{h'_m(kR)} = -\sqrt{2\pi}\, i^m \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{j'_m(kR)}{h'_m(kR)},$$

где $j_m(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} J_{m+\frac{1}{2}}(\rho)$. Следовательно,

$$\Phi(M) = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m(M) = -\sqrt{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left(m + \frac{1}{2}\right) i^m \frac{j'_m(kR)}{h'_m(kR)} h_m(kr).$$

Функции $P_n(\cos\theta)$ являются подклассом более широкого класса сферических функций, для определения которых нам потребуются присоединенные функции Лежандра. К рассмотрению этих функций мы и обращаемся в следующем параграфе.

---

[1]) Функция $H^{(2)}_{m+\frac{1}{2}}(kr)$ дает сходящуюся волну.

§ 2. Присоединенные функции Лежандра

1. В § 1 данной главы было показано, что многочлены Лежандра являются решениями уравнения (5) при $\lambda = n(n+1)$. В настоящем параграфе мы будем рассматривать более общее уравнение, а именно:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left(\lambda - \frac{k^2}{1-x^2}\right)y = 0, \tag{16}$$

где k — целое неотрицательное число.

Определение. Ограниченные на отрезке $[-1, 1]$ решения уравнения (16) называются *присоединенными функциями Лежандра.*

Для отыскания их произведем замену переменной

$$y = (1-x^2)^{\frac{k}{2}} z(x). \tag{17}$$

Для функции $z(x)$ получим уравнение

$$(1-x^2)z'' - 2x(k+1)z' + [\lambda - k(k+1)]z = 0, \tag{18}$$

или

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)^{k+1} z'] + [\lambda - k(k+1)](1-x^2)^k z = 0. \tag{18$_1$}$$

Такое же уравнение мы получим из уравнения (5), если продифференцируем его k раз. Поэтому ограниченным на отрезке $[-1, 1]$ решением уравнения (18) и (18$_1$) при $\lambda = n(n+1)$ будет функция $z(x) = \frac{d^k}{dx^k} P_n(x)$.

Таким образом, справедливо тождество

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^{k+1} \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} P_n(x)\right] \equiv$$

$$\equiv -[n(n+1) - k(k+1)](1-x^2)^k \frac{d^k}{dx^k} P_n(x) \equiv$$

$$\equiv (n-k)(n+k+1)(1-x^2)^k \frac{d^k}{dx^k} P_n(x). \tag{19}$$

Следовательно, ограниченное на $[-1, 1]$ решение уравнения (16) при $\lambda = n(n+1)$, т. е. присоединенная функция Лежандра $P_n^k(x)$, имеет вид

$$P_n^k(x) = (1-x^2)^{\frac{k}{2}} \frac{d^k}{dx^k} P_n(x), \quad 0 \leqslant k \leqslant n. \tag{20}$$

Очевидно, $P_n^0(x) = P_n(x)$.

2. В дальнейшем нам понадобится только одно свойство этих функций — ортогональность.

Присоединенные функции Лежандра ортогональны на промежутке $[-1,\ 1]$ *с весом* $\rho(x)\equiv 1$

$$\int_{-1}^{1} P_n^k(x)\,P_s^k(x)\,dx=0 \quad \text{при} \quad n\neq s. \tag{21}$$

Доказательство. Введем следующее обозначение:

$$A_{n,\,s}^k=\int_{-1}^{1} P_n^k(x)\,P_s^k(x)\,dx.$$

Используя формулу (20) для $P_n^k(x)$ и $P_s^k(x)$, получим

$$A_{n,\,s}^k=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^k\frac{d^k}{dx^k}P_n(x)\frac{d^k}{dx^k}P_s(x)\,dx=$$

$$=(1-x^2)^k\frac{d^k}{dx^k}P_n(x)\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}P_s(x)\Big|_{-1}^{1}-$$

$$-\int_{-1}^{1}\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}P_s(x)\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^k\frac{d^k}{dx^k}P_n(x)\right]dx.$$

Мы здесь произвели интегрирование по частям. Результат подстановки пределов интегрирования в первом слагаемом, очевидно, равен нулю. Поэтому

$$A_{n,\,s}^k=-\int_{-1}^{1}\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}P_s(x)\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^k\frac{d^k}{dx^k}P_n(x)\right]dx.$$

Второй множитель подынтегрального выражения преобразуем, пользуясь тождеством (19) (заменив в нем k на $k-1$). Получим

$$A_{n,\,s}^k=(n-k+1)(n+k)\times$$

$$\times\int_{-1}^{1}\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}P_s(x)\,(1-x^2)^{k-1}\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}P_n(x)\,dx,$$

или

$$A_{n,\,s}^k=(n-k+1)(n+k)\,A_{n,\,s}^{k-1}. \tag{22}$$

Применяя формулу (22) к $A_{n,\,s}^{k-1}$, $A_{n,\,s}^{k-2}$ и т. д., получим

$$A_{n,\,s}^k=\frac{(n+k)!}{(n-k)!}A_{n,\,s}^0. \tag{23}$$

Поскольку

$$A_{n,s}^{0} = \int_{-1}^{1} P_n(x) P_s(x)\,dx = 0, \quad \text{если} \quad n \neq s, \tag{24}$$

и

$$A_{n,n}^{0} = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1},$$

то

$$A_{n,s}^{k} = \int_{-1}^{1} P_n^k(x) P_s^k(x)\,dx = 0 \quad \text{при} \quad n \neq s$$

и

$$A_{n,n}^{k} = \| P_n^k \|^2 = \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \cdot \frac{2}{2n+1}.$$

Замечание. Из формул (21) и (20) следует, что производные k-го порядка многочленов Лежандра ортогональны на промежутке $[-1, 1]$ с весом $\rho(x) = (1-x^2)^k$.

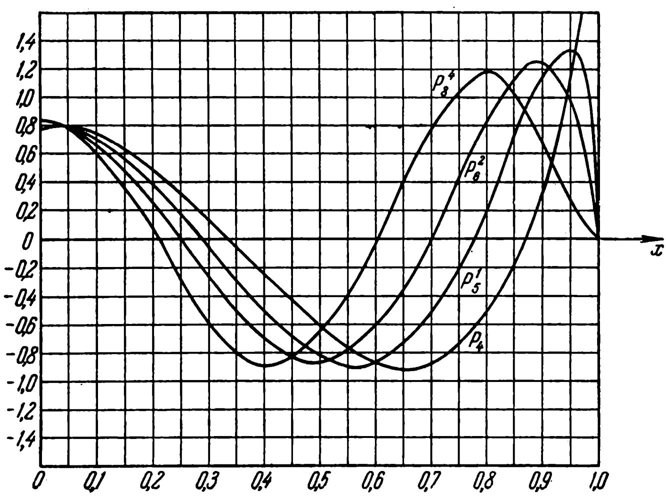

Рис. 35.

На рис. 35 приведены графики присоединенных функций Лежандра.

§ 3. Сферические функции

1. Если мы будем искать решения уравнения Лапласа $\Delta u = 0$, записанного в сферических переменных r, θ, φ, в классе функций вида $F(r)\,Y(\theta, \varphi)$, то для функций $F(r)$, $Y(\theta, \varphi)$ получим уравнения:

$$\frac{d}{dr}(r^2F') - \lambda F = 0, \tag{25}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda Y = 0. \tag{26}$$

Определение. Ограниченные в области $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ решения уравнения (26), такие что $Y(\theta, \varphi + 2\pi) \equiv Y(\theta, \varphi)$, называются *сферическими функциями.*

Если ограниченные решения уравнения (26) искать в классе функций вида $\Psi(\theta)\,\Phi(\varphi)$, $\Phi(\varphi + 2\pi) \equiv \Phi(\varphi)$, то для функций $\Psi(\theta)$ и $\Phi(\varphi)$ получим уравнения

$$\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}(\Psi'\sin\theta) + \left(\lambda - \frac{\mu}{\sin^2\theta}\right)\Psi = 0, \tag{27}$$

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0. \tag{28}$$

Из условия периодичности функции $\Phi(\varphi)$ находим $\mu = k^2$ (где k — целое число). Поэтому

$$\Phi(\varphi) = A\cos k\varphi + B\sin k\varphi.$$

В уравнении (27) произведем замену переменной

$$\cos\theta = \xi.$$

Получим уравнение

$$(1 - x^2)\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} - 2\xi\frac{d\Psi}{d\xi} + \left[\lambda - \frac{k^2}{1-\xi^2}\right]\Psi = 0, \tag{29}$$

совпадающее с уравнением (16). При $\lambda = n(n+1)$ оно имеет ограниченное на отрезке $[-1, 1]$ решение $\Psi = P_n^k(\xi)$. Следовательно, сферическими функциями вида $\Psi(\theta)\,\Phi(\varphi)$, где $\Phi(\varphi + 2\pi) \equiv \Phi(\varphi)$, будут следующие функции:

$$Y_n^k(\theta, \varphi) = P_n^k(\cos\theta)\sin k\varphi$$

и

$$\begin{aligned} Y_n^{-k}(\theta, \varphi) &= P_n^k(\cos\theta)\cos k\varphi, \\ Y_n^0(\theta, \varphi) &= P_n^0(\cos\theta) = P_n(\cos\theta). \end{aligned} \tag{30}$$

Эти функции называют *фундаментальными сферическими функциями n-го порядка.* Очевидно, что функции

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{k=-n}^{n} C_k Y_n^k(\theta, \varphi) \tag{31}$$

будут также сферическими функциями. Они называются сферическими функциями n-го порядка. При $\lambda = n(n+1)$ уравнение (25) имеет решения

$$F_1(r) = r^n \text{ и } F_2(r) = \frac{1}{r^{n+1}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u_1(r, \theta, \varphi) &= r^n Y_n(\theta, \varphi), \\ u_2(r, \theta, \varphi) &= \frac{1}{r^{n+1}} Y_n(\theta, \varphi) \end{aligned} \tag{32}$$

являются гармоническими функциями. Они называются *шаровыми функциями n-го порядка.*

Таким образом, сферические функции n-го порядка, $Y_n(\theta, \varphi)$, являются значениями шаровых функций n-го порядка на единичной сфере.

2. Сферические функции обладают свойством ортогональности на единичной сфере:

$$\iint_{S_{\text{ед}}} Y_n(\theta, \varphi) Y_s(\theta, \varphi)\, d\sigma = 0, \text{ если } n \neq s,$$

или

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_n(\theta, \varphi) Y_s(\theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 0. \tag{33}$$

Для доказательства этого заметим, что свойством ортогональности обладают фундаментальные сферические функции:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_n^k(\theta, \varphi) Y_s^p(\theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 0 \text{ при } (n, k) \not\equiv (s, p), \tag{34}$$

ибо

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_n^k(\theta, \varphi) Y_s^p(\theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos k\varphi \cos p\varphi \, d\varphi \int_{-1}^{1} P_n^k(\xi) P_s^p(\xi)\, d\xi = 0$$

при $(n, k) \neq (s, p)$ (мы для определенности положили $k > 0$, $p > 0$). Если $k \neq p$, то первый интеграл правой части равенства равен нулю. Если же $k = p$, но $n \neq s$, то второй интеграл равен нулю.

Из ортогональности фундаментальных сферических функций и из формулы (31) следует ортогональность (33).

Вычислим квадрат нормы

$$\| Y_n^k \|^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} [Y_n^k(\theta, \varphi)]^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^2 k\varphi \, d\varphi \int_{-1}^{1} [P_n^k(\xi)]^2 \, d\xi.$$

Следовательно,

$$\| Y_n^k \|^2 = \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \varepsilon, \qquad \varepsilon = \begin{cases} 1, & k \neq 0, \\ 2, & k = 0. \end{cases} \tag{34'}$$

3. Теорема. *Шаровые функции $r^n Y_n(\theta, \varphi)$ являются однородными гармоническими многочленами n-й степени по переменным x, y, z.*

Доказательство. Поскольку

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{k=-n}^{n} C_k Y_n^k(\theta, \varphi),$$

нам достаточно доказать теорему для функций $r^n Y_n^k(\theta, \varphi)$. Для определенности полагаем $k > 0$. Тогда

$$Y_n^k(\theta, \varphi) = P_n^k(\xi) \cos k\varphi = (1-\xi^2)^{\frac{k}{2}} \frac{d^k}{d\xi^k} P_n(\xi) \cos k\varphi =$$

$$= (1-\xi^2)^{\frac{k}{2}} \frac{d^k}{d\xi^k} \sum_{q=0} a_q \xi^{n-2q} \cos k\varphi =$$

$$= (1-\xi^2)^{\frac{k}{2}} \sum_{q=0} b_q \xi^{n-2q-k} \cos k\varphi,$$

где $\xi = \cos\theta$. Очевидно, достаточно доказать теорему для функций вида $r^n \sin^k\theta (\cos\theta)^{n-2q-k} \cos k\varphi$. Для таких функций мы имеем

$$r^n \sin^k\theta (\cos\theta)^{n-2q-k} \cos k\varphi =$$

$$= r^k \sin^k\theta \operatorname{Re}(e^{ik\varphi}) \, r^{2q} \, r^{n-2q-k} (\cos\theta)^{n-2q-k} =$$

$$= \operatorname{Re}(x+iy)^k (x^2+y^2+z^2)^{2q} z^{n-2q-k}.$$

Очевидно, это однородный многочлен n-й степени, Пример. Определить температуру внутренних точек однородного шара радиуса R, если на поверхности его поддерживается нулевая температура, а начальная температура равна $f(r, \theta, \varphi)$.

Математическая постановка задачи: требуется найти решение уравнения $\Delta u = \frac{1}{a^2} u_t$ в области $0 \leqslant r < R$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $t > 0$, удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(R, \theta, \varphi, t) = 0, \quad |u(0, \theta, \varphi, t)| < \infty,$$
$$u(r, \theta, \varphi + 2\pi, t) \equiv u(r, \theta, \varphi, t)$$

и начальным условиям: $u(r, \theta, \varphi, 0) = f(r, \theta, \varphi)$.

Решение. В классе функций вида $A(r)\,Y(\theta, \varphi)\,B(t)$ найдем решения уравнения $\Delta u = \frac{1}{a^2} u_t$, удовлетворяющие только краевым условиям. Разделяя переменные, находим

$$B' + a^2 \alpha B = 0, \tag{35}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda Y = 0, \\ &|Y(\theta, \varphi)| < \infty, \quad Y(\theta, \varphi + 2\pi) \equiv Y(\theta, \varphi), \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

$$\frac{d}{dr}(r^2 A') + (\alpha r^2 - \lambda) A = 0; \quad |A(0)| < \infty, \quad A(R) = 0. \tag{37}$$

Решениями задачи (36) при $\lambda = n(n+1)$ являются сферические функции $Y_n(\theta, \varphi)$. Если в уравнении для $A(r)$ произвести замену функции по формуле $A(r) = \frac{z(r)}{\sqrt{r}}$, то для $z(r)$ получим уравнение

$$z'' + \frac{1}{r} z' + \left[\alpha - \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}{r^2}\right] z = 0,$$

общее решение которого можно записать в виде

$$z(r) = M J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\alpha}\, r) + N J_{-n-\frac{1}{2}}(\sqrt{\alpha}\, r).$$

Следовательно,

$$A(r) = M \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\alpha}\, r)}{\sqrt{r}} + N \frac{J_{n-\frac{1}{2}}(\sqrt{\alpha}\, r)}{\sqrt{r}}.$$

Из условия ограниченности $A(0)$ находим: $N=0$; M можно положить равным 1.

Таким образом,

$$A(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\alpha}\,r).$$

Из условия $A(R)=0$ получим уравнение для определения α:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(\mu)=0, \qquad \mu=\sqrt{\alpha}\,R.$$

Пусть положительные корни этого уравнения суть:

$$\mu_{1,n},\ \mu_{2,n},\ \ldots,\ \mu_{s,n},\ \ldots$$

Тогда $\alpha_{s,n}=\frac{\mu_{s,n}^2}{R^2}$. Решения задачи (37) имеют вид

$$A_{n,s}(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{s,n}}{R}r\right).$$

Обращаясь к уравнению (35), находим:

$$B_{s,n}=C_{s,n}e^{-\frac{a^2\mu_{s,n}^2}{R^2}t}.$$

Следовательно, искомыми частными решениями исходной задачи, удовлетворяющими только краевым условиям, будут функции

$$C_{s,n}e^{-\frac{a^2\mu_{s,n}^2}{R^2}t}\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{s,n}}{R}r\right)Y_n(\theta,\ \varphi).$$

Решение исходной задачи можно написать в виде

$$u(r,\ \theta,\ \varphi,\ t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{s,n}}{R}r\right)\times$$

$$\times\left[C_{s,n,k}Y_n^k(\theta,\ \varphi)+D_{s,n,k}Y_n^{-k}(\theta,\ \varphi)\right]e^{-\frac{a^2\mu_{s,n}^2}{R^2}t}.$$

Коэффициенты $C_{s,n,k}$ и $D_{s,n,k}$ определяем из начальных условий, используя ортогональность функций $Y_n^k(\theta, \varphi)$ и функций Бесселя. Получим

$$C_{s,n,k} = \frac{(n-k)!\,(2n+1)}{\pi\varepsilon\,(n+k)!\,[J'_{n+\frac{1}{2}}(\mu_{s,n})]^2 R^2} \times$$

$$\times \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} r^{\frac{3}{2}} f(r, \theta, \varphi)\, J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{s,n}}{R} r\right) Y_n^k(\theta, \varphi) \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi,$$

$$D_{s,n,k} = \frac{(n-k)!\,(2n+1)}{\pi\varepsilon R^2\,(n+k)!\,[J'_{n+\frac{1}{2}}(\mu_{s,n})]^2} \times$$

$$\times \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} r^{\frac{3}{2}} f(r, \theta, \varphi)\, J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{s,n}}{R} r\right) Y_n^{-k}(\theta, \varphi) \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi.$$

Задачи

1. Вычислить $P_n(0)$.

2. Ортогональны ли на отрезке $[0, 1]$ производные k-го порядка полиномов Лежандра $P_{2n}(x)$ (k — фиксировано). Если да, то с каким весом?

3. Решить задачу 6 гл. II при произвольных начальных данных, поместив начало координат в закрепленный конец струны.

4. Найти напряженность электростатического поля внутри и вне полой сферы, верхняя половина которой заряжена до потенциала V_1, а нижняя — до потенциала V_2.

5. Найти разложение по сферическим функциям поверхностных зарядов, индуцированных на идеально проводящей заземленной сфере точечным зарядом e, находящимся: а) внутри сферы, б) вне сферы.

6. Решить задачу о поляризации диэлектрического шара радиуса R в поле точечного заряда, если диэлектрическая постоянная $\varepsilon = \varepsilon_1$ при $r < R$ и $\varepsilon = \varepsilon_2$ при $r > R$.

7. Найти потенциал простого слоя, равномерно распределенного по круглому диску.

8. Вычислить потенциал во всех точках проводящего шара с проводимостью σ в случае, когда ток I входит в один его полюс $(\theta = 0)$ и вытекает из полюса $\theta = \pi$.

9. Внутри сферы, на поверхности которой происходит теплообмен со средой нулевой температуры, помещен точечный источник мощности Q. Найти стационарное распределение температуры внутри сферы.

10. Найти потенциал точечного заряда, помещенного между проводящими заземленными концентрическими сферами $r = R_1$ и $r = R_2$. Определить также плотность поверхностных зарядов.

11. Найти стационарное распределение температуры в шаре радиуса R, часть поверхности которого S_1 ($\theta \leqslant \alpha$) имеет температуру $u_0 = \mathrm{const}$, а остальная часть S_2 — нулевую температуру.

12. Шар радиуса R нагревается плоскопараллельным потоком тепла плотности q, падающим на его поверхность, и отдает тепло в среду с нулевой температурой по закону Ньютона. Найти стационарное распределение температуры.

13. Решить задачу о колебаниях газа в сферическом сосуде, вызванных малыми колебаниями его стенки, начавшихся с момента $t = 0$, если скорости частиц стенки направлены по радиусам и величина их равна $P_n(\cos\theta) f(t)$, где $f(0) = f'(0) = 0$.

14. Найти собственные колебания сферы при краевых условиях: а) типа I, б) типа II, в) типа III.

15. Решить задачу об остывании шара радиуса R, на поверхности которого поддерживается нулевая температура. Начальная температура равна $f(r, \theta, \varphi)$.

ГЛАВА XIII

МНОГОЧЛЕНЫ ЧЕБЫШЕВА—ЭРМИТА И ЧЕБЫШЕВА—ЛАГЕРРА

§ 1. Многочлены Чебышева—Эрмита

Мы определим два новых класса ортогональных многочленов, имеющих многочисленные приложения. Их можно определить несколькими способами. Мы воспользуемся таким методом, который позволяет проще всего получить основные свойства определяемых многочленов. Этому требованию удовлетворяет определение с помощью производящей функции.

1. Возьмем в качестве производящей функции функцию $H(x, t) = e^{2xt - t^2}$ и разложим ее в степенной ряд по степеням t:

$$H(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}. \qquad (1)$$

Ниже будет показано, что коэффициенты разложения $H_n(x)$ являются многочленами, называемыми *многочленами Чебышева—Эрмита*. Очевидно,

$$H_n(x) = \left.\frac{\partial^n H(x, t)}{\partial t^n}\right|_{t=0}.$$

С другой стороны, производная n-го порядка $\frac{\partial^n H}{\partial t^n}$ функции H при $t = 0$ вычисляется по формуле

$$\left.\frac{\partial^n H}{\partial t^n}\right|_{t=0} = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_C \frac{e^{2xt - t^2}}{t^{n+1}} dt,$$

где замкнутый контур C охватывает точку $t = 0$, или

$$H_n(x) = e^{x^2} \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_C \frac{e^{-(x-t)^2}}{t^{n+1}} dt.$$

Произведем в последнем интеграле замену переменной интегрирования $x-t=\xi$. Получим

$$H_n(x)=e^{x^2}\frac{n!}{2\pi i}(-1)^n\int\limits_{C_1}\frac{e^{-\xi^2}}{(\xi-x)^{n+1}}\,d\xi,$$

где контур C_1 охватывает точку $\xi=x$. Используя формулу для n-й производной интеграла Коши[1]), получим

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}). \tag{2}$$

Из этой формулы следует, что $H_n(x)$ есть многочлен n-й степени, обладающий свойством четности:

$H_{2k}(x)$ — четная функция, $H_{2k+1}(x)$ — нечетная функция.

Очевидно, $H_0(x)\equiv 1$, $H_1(x)=2x$, $H_2(x)=4x^2-2$. И т. д.

2. Покажем, что многочлен $H_n(x)$ является решением уравнения

$$y''-2xy'+\lambda y=0 \quad \text{при} \quad \lambda=2n. \tag{3}$$

Действительно, продифференцировав функцию $w=e^{-x^2}$ один раз, $w'=-2xe^{-x^2}$, находим тождество $w'+2xw\equiv 0$. Дифференцируя это тождество $n+1$ раз, получим

$$[w^{(n)}]''+2x[w^{(n)}]'+2nw^{(n)}\equiv 0. \tag{4}$$

Теперь, подставляя в это тождество, согласно формуле (2),

$$w^{(n)}=(-1)^n H_n(x)e^{-x^2},$$

получим следующее тождество:

$$H_n''(x)-2xH_n'(x)+2nH_n(x)\equiv 0,$$

и. т. д. Уравнение (3) можно записать в виде

$$\frac{d}{dx}(e^{-x^2}y')+\lambda e^{-x^2}y=0. \tag{5}$$

Рассмотрим некоторые свойства многочленов $H_n(x)$.

3. Теорема. *Многочлены Чебышева—Эрмита ортогональны на промежутке* $(-\infty,\infty)$ *с весом* $\rho(x)=e^{-x^2}$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}H_n(x)H_p(x)e^{-x^2}\,dx=0 \quad \text{если} \quad n\neq p. \tag{6}$$

---

[1]) Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, гл. I, М., Физматгиз, 1958 г.

Доказательство. Напишем два тождества:

$$\frac{d}{dx}[e^{-x^2}H_n'(x)] + 2ne^{-x^2}H_n(x) \equiv 0,$$

$$\frac{d}{dx}[e^{-x^2}H_p'(x)] + 2pe^{-x^2}H_p(x) \equiv 0.$$

Первое из них умножим на $H_p(x)$, второе — на $H_n(x)$, результаты вычтем один из другого и полученную разность проинтегрируем (по x) по промежутку $(-\infty, \infty)$. Получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{H_p \frac{d}{dx}(e^{-x^2}H_n') - H_n \frac{d}{dx}(e^{-x^2}H_p')\right\} dx =$$

$$= 2(p-n) \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)\, H_p(x)\, e^{-x^2}\, dx.$$

Левую часть этого равенства, очевидно, можно записать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx}\{(H_pH_n' - H_nH_p')\, e^{-x^2}\}\, dx.$$

Следовательно,

$$2(p-n) \int_{-\infty}^{\infty} H_nH_pe^{-x^2}\, dx = (H_pH_n' - H_nH_p')\, e^{-x^2}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Поскольку $p \neq n$, то отсюда непосредственно следует равенство (6).

Найдем норму $\| H_n \|$. Предварительно докажем справедливость двух рекуррентных соотношений:

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) \equiv 0, \tag{7}$$

$$H_n'(x) \equiv 2nH_{n-1}(x). \tag{8}$$

Для этого установим связь между производящей функцией $H(x, t)$ и ее частными производными $\frac{\partial H}{\partial t}$ и $\frac{\partial H}{\partial x}$. Непосредственным вычислением находим

$$\frac{\partial H}{\partial t} \equiv 2(x-t)\, H$$

и

$$\frac{\partial H}{\partial x} \equiv 2tH.$$

Подставляя в эти тождества вместо $H(x, t)$ ее разложение (1), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_n(x) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \equiv 2(x-t) \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}, \tag{9}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n'(x) \frac{t^n}{n!} \equiv 2t \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}. \tag{10}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t в тождествах (9) и (10), получим соответственно рекуррентные формулы (7) и (8).

Тождество (8) позволяет вычислить интеграл

$$\int H_n(x)\,dx = \frac{1}{2(n+1)} H_{n+1}(x).$$

Тождеством (7) мы воспользуемся для вычисления квадрата нормы $\|H_n\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2 dx$:

$$\|H_n\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_n(x) e^{-x^2}\,dx.$$

Один множитель $H_n(x)$ в подынтегральном выражении выразим по формуле (7) через H_{n-1} и H_{n-2}, заменив в ней n на $n-1$. Получим

$$\|H_n\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) \{2xH_{n-1}(x) - 2(n-1) H_{n-2}(x)\}\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{n-1}(x)\, 2xH_n(x)\,dx.$$

При этом мы воспользовались ортогональностью многочленов H_{n-2} и H_n. Выразим $2xH_n(x)$ через $H_{n-1}(x)$ и $H_{n+1}(x)$ по формуле (7), получим

$$\|H_n\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{n-1}(x) \{H_{n+1}(x) + 2nH_{n-1}(x)\}\,dx =$$

$$= 2n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{n-1}^2(x)\,dx,$$

или

$$\|H_n\|^2 = 2n\,\|H_{n-1}\|^2. \tag{11}$$

При этом мы воспользовались ортогональностью многочленов H_{n-1} и H_{n+1}. Из формулы (11) следует

$$\|H_n\|^2 = 2^{n-1}n!\,\|H_1\|^2 = 2^n\cdot n!\int\limits_{-\infty}^{\infty} 2x^2e^{-x^2}\,dx = 2^n n!\,\sqrt{\pi}. \tag{11_1}$$

Таким образом,

$$\|H_n\|^2 = 2^n n!\,\sqrt{\pi}. \tag{12}$$

4. Очевидно, многочлены Чебышева—Эрмита образуют нормальную систему многочленов. Следовательно, к многочленам Чебышева—Эрмита приложима теорема на стр. 285.

Таким образом, все нули многочленов $H_n(x)$ — простые и вещественные.

5. В приложениях чаще применяются функции Чебышева—Эрмита

$$\psi_n(x) = \frac{H_n(x)}{\|H_n\|}e^{-\frac{x^2}{2}}, \tag{13}$$

обращающиеся в нуль на бесконечности. Эти функции, очевидно, образуют ортогональную систему с весом $\rho(x) = 1$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x)\,\psi_p(x)\,dx = 0, \quad \text{если} \quad n \neq p; \tag{14}$$

$$\|\psi_n\| = 1. \tag{15}$$

Из уравнения (5) для многочленов $H_n(x)$ легко получается дифференциальное уравнение для функций $\psi_n(x)$:

$$\psi'' + (\lambda - x^2)\,\psi = 0 \qquad (\lambda = 2n+1). \tag{16}$$

Пример. Определить, при каких значениях E уравнение Шредингера для линейного гармонического осциллятора

$$\psi'' + \left\{\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{m^2\omega_0^2}{\hbar^2}x^2\right\}\psi = 0 \tag{17}$$

имеет ограниченное на промежутке $-\infty < x < \infty$ решение. Здесь m, ω_0, E — масса, собственная частота и полная энергия осциллятора, $\hbar$ — постоянная Планка.

Заменой переменной $z=\sqrt{\frac{\omega_0 m}{\hbar}}\,x$ уравнение (17) приводится к виду (16), в котором $\lambda=\frac{2E}{\omega_0\hbar}$:

$$\frac{d^2\psi}{dz^2}+\left(\frac{2E}{\omega_0\hbar}-z^2\right)\psi=0. \tag{18}$$

При $\frac{2E}{\omega_0\hbar}=2n+1$, где n — целое число, т. е. при $E=\omega_0\hbar\left(n+\frac{1}{2}\right)=E_n$, уравнение (17) имеет ограниченное на промежутке $-\infty<z<\infty$ решение $\psi_n(z)=\psi_n\left(\sqrt{\frac{\omega_0 m}{\hbar}}\,x\right)$.

Функции Чебышева—Эрмита появляются при решении уравнения Лапласа $\Delta u=0$ методом разделения переменных в параболических координатах. Действительно, если ввести параболические координаты α, β, z, связанные с декартовыми координатами x, y, z соотношениями

$$x=\frac{c}{2}(\alpha^2-\beta^2),\quad y=c\alpha\beta,\quad z=z \tag{19}$$

(здесь c — размерный множитель, $-\infty<\alpha<\infty$, $0\leqslant\beta<\infty$, $-\infty<z<\infty$), то $\Delta u=0$ в этих переменных будет иметь вид

$$\Delta u=\frac{1}{c^2(\alpha^2+\beta^2)}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}+c^2(\alpha^2+\beta^2)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right\}=0. \tag{20}$$

Будем искать решение уравнения (20) в классе функций вида $u=A(\alpha)B(\beta)D(z)$. Разделяя переменные, получим уравнения:

$$A''+(\mu-\lambda^2c^2\alpha^2)A=0, \tag{21}$$

$$B''-(\mu+\lambda^2c^2\beta^2)B=0, \tag{22}$$

$$D''+\lambda^2 D=0,$$

где λ^2 и μ — неизвестные параметры. В переменных $\xi=\sqrt{\lambda c}\,\alpha$ и $\eta=i\sqrt{\lambda c}\,\beta$ уравнения (21) и (22) принимают вид

$$\frac{d^2A}{d\xi^2}+\left(\frac{\mu}{\lambda c}-\xi^2\right)A=0 \tag{23}$$

и

$$\frac{d^2B}{d\eta^2}+\left(\frac{\mu}{\lambda c}-\eta^2\right)B=0,$$

совпадающий с уравнением (17).

§ 2. Многочлены Чебышева—Лагерра

1. Как было указано в § 1, мы определим многочлены Чебышева — Лагерра с помощью производящей функции. Возьмем в качестве производящей функцию

$$L^{\alpha}(x, t) = \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} e^{\frac{-xt}{1-t}}, \qquad \alpha > -1,$$

и разложим ее в степенной ряд по степеням t:

$$L^{\alpha}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(x)\, t^n. \tag{24}$$

Ниже будет показано, что коэффициенты разложения $L_n^{\alpha}(x)$ являются многочленами, называемыми *многочленами Чебышева — Лагерра*[1]). Очевидно,

$$L_n^{\alpha}(x) = \frac{1}{n!} \cdot \left.\frac{\partial^n L^{\alpha}(x, t)}{\partial t^n}\right|_{t=0} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{L^{\alpha}(x, t)}{t^{n+1}}\, dt,$$

где C — замкнутый контур, охватывающий точку $t=0$. Произведем в этом интеграле замену переменной интегрирования $t = 1 - \frac{x}{z}$. Получим

$$L_n^{\alpha}(x) = x^{-\alpha} e^x \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_1} \frac{z^{n+\alpha} e^{-x}}{(z-x)^{n+1}}\, dz = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\alpha} e^{-x}).$$

Контур C_1 охватывает точку $z = x$. Мы при этом воспользовались формулой для производной интеграла Коши. Таким образом,

$$L_n^{\alpha}(x) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\alpha} e^{-x}). \tag{25}$$

Из этой формулы следует, что $L_n^{\alpha}(x)$ действительно является многочленом n-й степени. Очевидно, $L_0^{\alpha}(x) \equiv 1$, $L_n^{\alpha}(x) = 1 + \alpha - x$.

2. Покажем, что многочлен $L_n^{\alpha}(x)$ является решением уравнения

$$xy'' + (\alpha + 1 - x) y' + \lambda y = 0, \tag{26}$$

---

[1]) Иногда эти многочлены называют обобщенными многочленами Чебышева — Лагерра, а многочлены $L_n^0(x) \equiv L_n(x)$ — многочленами Чебышева — Лагерра.

или

$$\frac{d}{dx}(x^{\alpha+1}e^{-x}y') + \lambda x^{\alpha}e^{-x}y = 0 \text{ при } \lambda = n. \qquad (26_1)$$

Действительно, продифференцировав функцию $w = x^{n+\alpha}e^{-x}$ один раз:

$$w' = (n+\alpha)\,x^{n+\alpha-1}e^{-x} - x^{n+\alpha}e^{-x},$$

находим тождество

$$xw' - (n+\alpha-x)\,w \equiv 0.$$

Дифференцируем это тождество $n+1$ раз. Получим

$$x\,[w^{(n)}]'' + (x+1-\alpha)\,[w^{(n)}]' + (n+1)\,w^{(n)} \equiv 0.$$

Подставляя в это тождество вместо $w^{(n)}$ его значение, согласно формуле (25),

$$w^{(n)} = x^{\alpha}e^{-x}L_n^{\alpha}(x)\,n!,$$

получим тождество

$$x\,(L_n^{\alpha})'' + (\alpha+1-x)\,(L_n^{\alpha})' + nL_n^{\alpha} \equiv 0.$$

Рассмотрим некоторые свойства многочленов $L_n^{\alpha}(x)$.

3. Теорема. *Многочлены Чебышева—Лагерра ортогональны на промежутке* $(0, \infty)$ *с весом* $\rho(x) = x^{\alpha}e^{-x}$:

$$\int_0^{\infty} L_n^{\alpha}(x)\,L_p^{\alpha}(x)\,x^{\alpha}e^{-x}dx = 0, \text{ если } n \neq p \text{ и } \alpha > -1. \qquad (27)$$

Доказательство. Напишем два тождества:

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\alpha+1}e^{-x}\frac{dL_n^{\alpha}(x)}{dx}\right] + nx^{\alpha}e^{-x}L_n^{\alpha}(x) \equiv 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\alpha+1}e^{-x}\frac{dL_p^{\alpha}(x)}{dx}\right] + px^{\alpha}e^{-x}L_p^{\alpha}(x) \equiv 0.$$

Первое из них умножим на $L_p^{\alpha}(x)$, второе — на $L_n^{\alpha}(x)$, результаты вычтем один из другого и полученную разность проинтегрируем (по x) по промежутку $(0, \infty)$. Получим

$$\int_0^{\infty}\left\{L_p^{\alpha}\frac{d}{dx}\left[x^{\alpha+1}e^{-x}\frac{dL_n^{\alpha}}{dx}\right] - L_n^{\alpha}\frac{d}{dx}\left[x^{\alpha+1}e^{-x}\frac{dL_p^{\alpha}}{dx}\right]\right\}dx =$$

$$= (p-n)\int_0^{\infty} L_n^{\alpha}(x)\,L_p^{\alpha}(x)\,x^{\alpha}e^{-x}dx.$$

Левую часть этого равенства, очевидно, можно записать в виде

$$\int_0^\infty \frac{d}{dx}\{x^{\alpha+1}e^{-x}[L_p^\alpha (L_n^\alpha)' - (L_p^\alpha)' L_n^\alpha]\}\,dx.$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty L_n^\alpha(x)\,L_p^\alpha(x)\,x^\alpha e^{-x}dx =$$

$$= \frac{1}{p-n}\{x^{\alpha+1}e^{-x}[(L_n^\alpha)' L_p^\alpha - (L_p^\alpha)' L_n^\alpha]\}_0^\infty = 0.$$

При $x=0$ проинтегрированная часть обращается в нуль за счет $x^{\alpha+1}$ $(\alpha > -1)$, а при $x=\infty$ — за счет e^{-x}.

Поскольку $p \neq n$, то отсюда непосредственно следует равенство (27).

4. Найдем норму $\|L_n^\alpha\|$. Предварительно докажем справедливость двух рекуррентных соотношений:

$$(n+1)\,L_{n+1}^\alpha(x) - (2n+1+\alpha-x)\,L_n^\alpha(x) + (n+\alpha)\,L_{n-1}^\alpha(x) \equiv 0, \quad (28)$$

$$\frac{d}{dx}L_n^\alpha(x) \equiv -L_{n-1}^{\alpha+1}(x). \quad (29)$$

Для этого установим связь между производящей функцией и ее частными производными $\frac{\partial L^\alpha}{\partial x}$ и $\frac{\partial L^\alpha}{\partial t}$. Непосредственным вычислением находим

$$(1-2t+t^2)\frac{\partial L^\alpha(x,t)}{\partial t} \equiv [\alpha+1-x-(\alpha+1)t]\,L^\alpha(x,t)$$

и

$$\frac{\partial L^\alpha(x,t)}{\partial x} \equiv -tL^{\alpha+1}(x,t).$$

Подставляя в эти тождества вместо $L^\alpha(x,t)$ и $L^{\alpha+1}(x,t)$ их разложения (24), получим

$$(1-2t+t^2)\sum_{n=1}^\infty nL_n^\alpha(x)\,t^{n-1} \equiv$$

$$\equiv [\alpha+1-x-(\alpha+1)t]\sum_{n=0}^\infty L_n^\alpha(x)\,t^n \quad (30)$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{dL_n^\alpha(x)}{dx} \equiv -t \sum_{n=0}^{\infty} t^n L_n^{\alpha+1}(x). \tag{31}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t в тождествах (30) и (31), получим соответственно формулы (28) и (29).

Из формулы (29) следует, что

$$\int L_n^\alpha(x)\,dx = -L_{n+1}^{\alpha-1}(x). \tag{32}$$

Соотношением (28) мы воспользуемся для вычисления $\| L_n^\alpha \|^2$:

$$\| L_n^\alpha \|^2 = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} [L_n^\alpha(x)]^2\,dx = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} L_n^\alpha(x)\, L_n^\alpha(x)\,dx.$$

Один множитель $L_n^\alpha(x)$ в подынтегральном выражении выразим по формуле (28), заменив в ней n на $n-1$. Получим

$$\| L_n^\alpha \|^2 = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} L_n^\alpha(x) \{(2n-1+\alpha-x)\, L_{n-1}^\alpha(x) -$$
$$-(n-1+\alpha)\, L_{n-2}^\alpha(x)\} \frac{1}{n}\,dx =$$
$$= \frac{1}{n} \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} L_{n-1}^\alpha(x)\, [-x L_n^\alpha(x)]\,dx.$$

Мы при этом воспользовались ортогональностью многочленов L_n^α и L_{n-2}^α, а также L_n^α и L_{n-1}^α. Выразим $-xL_n^\alpha(x)$ через $L_{n+1}^\alpha(x)$, $L_n^\alpha(x)$ и $L_{n-1}^\alpha(x)$ по формуле (28). Получим

$$\| L_n^\alpha \|^2 = \frac{1}{n} \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} L_{n-1}^\alpha(x) \{(n+1)\, L_{n+1}^\alpha(x) -$$
$$-(2n+1+\alpha)\, L_n^\alpha(x) + (n+\alpha)\, L_{n-1}^\alpha(x)\}\,dx =$$
$$= \frac{n+\alpha}{n} \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} [L_{n-1}^\alpha(x)]^2\,dx = \frac{n+\alpha}{n} \| L_{n-1}^\alpha \|^2,$$

или

$$\| L_n^\alpha \|^2 = \frac{n+\alpha}{n} \| L_{n-1}^\alpha \|^2. \tag{33}$$

При этом мы воспользовались ортогональностью многочленов

$$L_{n-1}^{\alpha} \text{ и } L_{n+1}^{\alpha}, \quad L_{n-1}^{\alpha} \text{ и } L_{n}^{\alpha}.$$

Из формулы (33) следует:

$$\| L_n^{\alpha} \|^2 = \frac{(n+\alpha)(n+\alpha-1)\dots(\alpha+2)}{n!} \| L_1^{\alpha} \|^2 =$$

$$= \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+2)} \int_0^{\infty} (1+\alpha-x)^2 x^{\alpha} e^{-x} dx =$$

$$= \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+2)} \Gamma(\alpha+2) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}.$$

Таким образом,

$$\| L_n^{\alpha} \|^2 = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}. \tag{34}$$

Очевидно, многочлены Чебышева—Лагерра образуют нормальную систему многочленов. Следовательно, к многочленам Чебышева—Лагерра приложима теорема на стр. 285.

Таким образом, все нули многочленов $L_n^{\alpha}(x)$ — простые, вещественные и расположены на интервале $(0, \infty)$.

5. В приложениях чаще применяются функции

$$\Phi_n^{\alpha}(x) = \frac{L_n^{\alpha}(x)}{\| L_n^{\alpha} \|} x^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{x}{2}}, \tag{35}$$

обращающиеся в нуль на бесконечности $(x = +\infty)$. Эти функции обладают следующим свойством ортогональности:

$$\int_0^{\infty} \Phi_n^{\alpha}(x) \Phi_p^{\alpha}(x)\, dx = 0, \text{ если } n \neq p \text{ и } \alpha > -1. \tag{36}$$

Из уравнения (26_1) для многочленов $L_n^{\alpha}(x)$ легко следует, что функции $\Phi_n^{\alpha}(x)$ являются решениями уравнения

$$\frac{d}{dx}(xy') + \left(\lambda - \frac{x}{4} - \frac{\alpha^2}{4x}\right) y = 0 \tag{37}$$

при

$$\lambda = n + \frac{\alpha+1}{2}.$$

Многочлены Чебышева—Лагерра применяются при решении задач о распространении электромагнитных волн вдоль длинных линий, о движении электрона в кулоновом поле и в других задачах.

Пример. Разложить функцию $f(x)=e^{-x}$ в ряд Фурье по многочленам Чебышева—Лагерра.

Решение. В искомом разложении

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n^{\alpha}(x)$$

коэффициенты c_n вычисляются по формулам

$$c_n=\frac{1}{\| L_n^{\alpha}\|^2}\int_0^{\infty} x^{\alpha}e^{-2x}L_n^{\alpha}(x)\,dx=\frac{1}{\|L_n^{\alpha}\|^2}\int_0^{\infty} e^{-x}\frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\alpha}e^{-x})\,dx.$$

Производя n-кратное интегрирование по частям, получим

$$c_n=\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\left\{e^{-x}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^{n+\alpha}e^{-x})\Big|_0^{\infty}+\right.$$
$$\left.+e^{-x}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^{n+\alpha}e^{-x})\Big|_0^{\infty}+\ldots+\int_0^{\infty} x^{n+\alpha}e^{-2x}dx\right\}.$$

Подстановка пределов в проинтегрированные слагаемые дает нуль. Поскольку

$$\int_0^{\infty} x^{n+\alpha}e^{-2x}dx=\frac{1}{2^{n+\alpha+1}}\Gamma(n+\alpha+1),$$

то

$$c_n=\frac{n!}{2^{n+\alpha+1}}.$$

ДОПОЛНЕНИЕ

ПОНЯТИЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ. δ-ФУНКЦИЯ.

1. Мы введем понятие обобщенных функций методом, аналогичным методу введения действительных чисел с помощью последовательностей рациональных чисел. Введение действительных чисел имеет целью выполнимость таких операций, как извлечение корня и взятие логарифма. Введение обобщенных функций имеет целью сделать всегда выполнимой операцию дифференцирования.

Последовательность рациональных чисел $\{a_n\}$ называется *фундаментальной*, если для любого рационального $\varepsilon > 0$ существует такое n_0, что для всех n и $m > n_0$

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Фундаментальные последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ называются *эквивалентными*, если

$$\lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| = 0.$$

Эквивалентные последовательности определяют действительное число. Представителем этого числа является любая из эквивалентных последовательностей.

2. При определении обобщенных функций мы за исходные возьмем непрерывные функции, определенные в интервале (A, B), $-\infty \leqslant A < B \leqslant \infty$. Последовательность $\{f_n(x)\}$ непрерывных на (A, B) функций называется *фундаментальной* на (A, B), если существует целое число $k \geqslant 0$ и другая последовательность непрерывных на (A, B) функций $\{F_n(x)\}$ такие, что выполняются следующие два свойства:

1) $F_n^{(k)}(x) = f_n(x)$;

2) Последовательность $\{F_n(x)\}$ равномерно сходится на всяком отрезке $[\alpha, \beta] \subset (A, B)$ $(F_n(x) \rightrightarrows)$.

Из определения фундаментальной последовательности следует

Теорема 1. *Если последовательность непрерывных на (A, B) функций $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на всяком отрезке $[\alpha, \beta] \subset (A, B)$, то она фундаментальна.*

В самом деле, здесь $F_n(x) \equiv f_n(x)$ и $k = 0$.

Теорема 2. *Если $\{f_n(x)\}$ — фундаментальная последовательность функций, обладающих непрерывными производными m-го порядка $f_n^{(m)}(x)$, то последовательность $\{f_n^{(m)}(x)\}$ также является фундаментальной.*

Доказательство. Для $\{f_n(x)\}$ существует число $k \geqslant 0$ и последовательность $\{F_n(x)\}$, обладающие свойствами 1) и 2). Для $\{f_n^{(m)}(x)\}$ вместо k берем $k+m$ и ту же последовательность $\{F_n(x)\}$. Они, очевидно, обладают свойствами 1) и 2). Следовательно, $\{f_n^{(m)}(x)\}$ — фундаментальная последовательность.

Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ называется *равномерно ограниченной* на (A, B), если существует такое число M, что $|f_n(x)| \leqslant M$ для всех n и для всех $x \in (A, B)$.

Теорема 3. *Если последовательность непрерывных на (A, B) функций равномерно ограничена на (A, B) и равномерно сходится на всяком отрезке $[\alpha, \beta] \subset (A, x_0)$ и на всяком отрезке $[\alpha, \beta] \subset (x_0, B)$, то она фундаментальна на (A, B).* Здесь $x_0 \in (A, B)$.

Доказательство. Возьмем в качестве $F_n(x)$ интеграл $F_n(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt$, а $k = 1$. Тогда свойство 1), очевидно, будет выполнено. Докажем справедливость свойства 2). Возьмем $\varepsilon > 0$ и $[\alpha, \beta] \subset (A, B)$. Если $[\alpha, \beta] \subset (A, x_0)$ или $[\alpha, \beta] \subset (x_0, B)$, то для таких отрезков свойство 2) выполняется по условию теоремы. Пусть $[\alpha, \beta] \subset (A, B)$ и $A < \alpha < x_0 < \beta < B$. По условию $|f_n(t)| \leqslant M$. Нам надо доказать равномерную сходимость последовательности $\{F_n(x)\}$ на отрезке $[\alpha, \beta]$. Следовательно, надо рассматривать $x \in [\alpha, \beta]$.

Для таких x имеем

$$|F_n(x)-F_m(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}\{f_n(t)-f_m(t)\}\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f_n(t)-f_m(t)|\,dt\right|\leqslant\int_{\alpha}^{\beta}|f_n(t)-f_m(t)|\,dt=$$

$$=\int_{\alpha}^{x_0-\frac{\varepsilon}{6M}}|f_n-f_m|\,dt+\int_{x_0-\frac{\varepsilon}{6M}}^{x_0+\frac{\varepsilon}{6M}}|f_n-f_m|\,dt+\int_{x_0+\frac{\varepsilon}{6M}}^{\beta}|f_n-f_m|\,dt.$$

В силу равномерной сходимости последовательности $\{f_n(t)\}$ на отрезках $\left[\alpha, x_0-\frac{\varepsilon}{6M}\right]$ и $\left[x_0+\frac{\varepsilon}{6M}, \beta\right]$ найдется такое целое положительное число n_0, что на этих отрезках будут выполняться неравенства

$$|f_n(t)-f_m(t)|<\frac{\varepsilon}{3(\beta-\alpha)}\ \text{для всех}\ m,\ n\geqslant n_0.$$

Тогда для $n,\ m\geqslant n_0$

$$|F_n(x)-F_m(x)|<\frac{\varepsilon}{3(\beta-\alpha)}\left(x_0-\frac{\varepsilon}{6M}-\alpha\right)+$$

$$+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3(\beta-\alpha)}\left(\beta-x_0-\frac{\varepsilon}{6M}\right)<\varepsilon.$$

Следовательно, последовательность $\{F_n(x)\}$ равномерно сходится на всяком отрезке $[\alpha,\beta]\subset(A, B)$. Таким образом, свойство 2) выполняется. Теорема доказана.

Замечание. Если последовательность $\{f_n(x)\}$ фундаментальна, то и последовательность $\left\{\int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt\right\}$ фундаментальна.

Пример 1. Рассмотрим последовательность функций $\{g_n(x)\}$,

$$g_n(x)=\frac{1}{1+e^{-nx}},$$

и интервал $(-\infty, \infty)$ (рис. 36).

Эта последовательность равномерно ограничена числом 1. На всяком отрезке $[\alpha,\beta]\subset(-\infty, 0)$ она равномерно сходится к нулю. На всяком отрезке $[\alpha,\beta]\subset(0, \infty)$ она равномерно сходится к единице. Таким образом, выполняются условия теоремы 3. Следовательно, последовательность $\{g_n(x)\}$ фундаментальна.

Пример 2. Рассмотрим последовательность функций $\{f_n(x)\}$,

$$f_n(x)=\sqrt{\frac{n}{\pi}}\,e^{-nx^2},$$

и интервал $(-\infty, \infty)$ (рис. 37). На всяком отрезке $[\alpha, \beta]\subset(-\infty, 0)$ или $[\alpha, \beta]\subset(0, \infty)$ эта последовательность равномерно сходится к нулю. Однако она не является равномерно ограниченной. Последовательность функций $\{F_n(x)\}$, где $F_n(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f_n(t)\,dt$, также равномерно сходится на всяком отрезке $[\alpha, \beta]$, принадлежащем интервалам $(-\infty, 0)$ или $(0, \infty)$, и равномерно ограничена (числом 1) на интервале

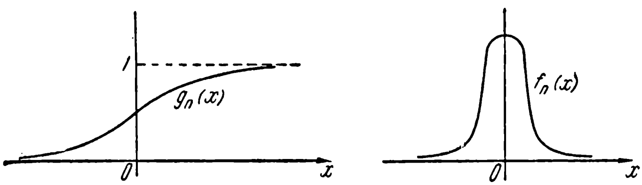

Рис. 36. Рис. 37.

$(-\infty, \infty)$. Следовательно, по теореме 3, она фундаментальна. А тогда, по теореме 2, последовательность $\{f_n(t)\}$ также фундаментальна.

Пример 3. Рассмотрим последовательность функций $\{\varphi_n(x)\}$, где $\varphi_n(x)$ — кусочно-линейная непрерывная функция, равная нулю вне интервала $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ (рис. 38). На всяком отрезке $[\alpha, \beta]$, принадлежащем интервалам $(-\infty, 0)$ или $(0, \infty)$, она равномерно сходится к нулю. Однако она не является равномерно ограниченной. Последовательность функций $\{\Phi_n(x)\}$, $\Phi_n(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi_n(t)\,dt$, также равномерно сходится на всяком отрезке $[\alpha, \beta]$, принадлежащем интервалам $(-\infty, 0)$ или $(0, \infty)$ и равномерно ограничена (числом 1) на интервале $(-\infty, \infty)$. Следовательно, по теореме 3 она фундаментальна.

А тогда, по теореме 2, последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ также фундаментальна.

Пример 4. Рассмотрим последовательность функций $\{\psi_n(x)\}$,

$$\psi_n(x)=\frac{\frac{\pi}{2}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+x^2},$$

и интервал $(-\infty, \infty)$ (рис. 39). Поскольку последовательность функций $\{\Psi_n(x)\}$, где $\Psi_n(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\psi_n(t)\,dt$, удовлетворяет условиям теоремы 3, она фундаментальна. Следовательно, по теореме 2, фундаментальна и последовательность $\{\psi_n(x)\}$.

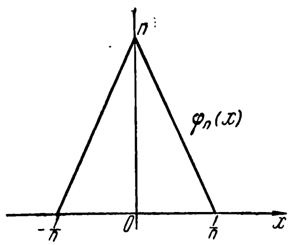

Рис. 38.

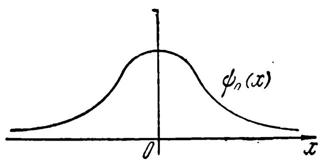

Рис. 39.

3. Две фундаментальные последовательности $\{f_n(x)\}$ и $\{g_n(x)\}$ называются *эквивалентными*, $\{f_n(x)\}\sim\{g_n(x)\}$, если существует целое число $k\geqslant 0$ и две другие последовательности $\{F_n(x)\}$, $\{G(x)\}$ такие, что

1) $F_n^{(k)}(x)=f_n(x)$, $\quad G_n^{(k)}(x)=g_n(x)$;

2) на всяком отрезке $[\alpha, \beta]\subset(A, B)$ последовательность $\{F_n(x)-G_n(x)\}$ равномерно сходится к нулю:

$$F_n(x)-G_n(x)\rightrightarrows 0.$$

Так, последовательности примеров 2, 3, 4 эквивалентны друг другу. Они эквивалентны также последовательности $\{g_n'(x)\}$ (пример 1).

Определение. Каждый класс эквивалентных фундаментальных последовательностей определяет *обобщенную функцию* $f(x)$, представителем которой является любая из последовательностей этого класса. Мы будем также говорить, что фундаментальная последовательность $\{f_n(x)\}$ определяет обобщенную функцию $f(x)$, и писать: $f(x) \equiv \{f_n(x)\}$.

Так, последовательность $\{g_n(x)\}$ (пример 1) определяет единичную функцию $\eta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$ Следовательно, единичная функция $\eta(x)$ является обобщенной функцией.

В силу леммы на стр. 324 и теоремы 1 всякая непрерывная на (A, B) функция также является обобщенной функцией.

Последовательности $\{g'_n(x)\}$, $\{f_n(x)\}$, $\{\varphi_n(x)\}$, $\{\psi_n(x)\}$ примеров 1—4 определяют обобщенную функцию $\delta(x)$ (с особенностью в точке $x = 0$), которая называется *δ-функцией Дирака*. Очевидно, δ-функция $\delta(x)$ является четной функцией: $\delta(-x) = \delta(x)$.

4. *Линейной комбинацией* $\alpha f + \beta\varphi$ (α и β — постоянные) *двух обобщенных функций* $f(x)$ и $\varphi(x)$, определяемых фундаментальными последовательностями $\{f_n(x)\}$ и $\{\varphi_n(x)\}$, называется обобщенная функция $F(x)$, определяемая фундаментальной последовательностью $\{\alpha f_n(x) + \beta\varphi_n(x)\}$. В частности, сумма и разность двух обобщенных функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ есть также обобщенная функция.

Произведением обобщенной функции $\eta(x - x_0)$ (т. е. единичной функции) *на непрерывную на отрезке* $[a, b]$ функцию $\varphi(x)$, $\eta(x - x_0)\varphi(x)$, будем называть обобщенную функцию, определяемую фундаментальной последовательностью $\{g_n(x - x_0)\tilde{\varphi}(x)\}$, где $g_n(x)$ — функции примера 1, а

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(b), & x \geqslant b, \\ \varphi(x), & a \leqslant x \leqslant b, \\ \varphi(a), & x \leqslant a. \end{cases}$$

Очевидно,

$$\eta(x - x_0)\varphi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > x_0, \\ 0, & x < x_0. \end{cases}$$

Произвольную кусочно-непрерывную на $[a, b]$ функцию $\varphi(x)$ с точками разрыва $x_1, x_2, \ldots, x_k$ $(a < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < b)$ можно записать в виде

$$\varphi(x) = [\eta(x - a) - \eta(x - x_1)]\tilde{\varphi}_0(x) + \ldots + \\ + [\eta(x - x_i) - \eta(x - x_{i+1})]\tilde{\varphi}_i(x) + \ldots + [\eta(x - x_k) - \\ - \eta(x - b)]\tilde{\varphi}_k(x),$$

где

$$\tilde{\varphi}_i(x)=\begin{cases}\varphi(x_{i+1}), & x\geqslant x_{i+1},\\ \varphi(x), & x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1},\\ \varphi(x_i), & x\leqslant x_i\end{cases}\qquad \begin{matrix}(i=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,k)\\ x_0=a,\ x_{k+1}=b,\end{matrix}$$

$\tilde{\varphi}_i(x)$ — непрерывные на всей прямой $(-\infty,\ \infty)$ функции. Их произведения на единичные функции $\eta(x-x_i)$ суть обобщенные функции. Следовательно, произвольная кусочно-непрерывная функция есть линейная комбинация обобщенных функций и потому также является обобщенной функцией.

5. Пусть $\{\varepsilon_n\}$ — последовательность положительных чисел, стремящихся к нулю.

Определение. Последовательность непрерывных функций $\{\delta_n(x)\}$ называется *δ-последовательностью*, если эти функции обладают следующими свойствами:

а) $\delta_n(x)>0$ в интервале $(-\varepsilon_n,\ \varepsilon_n)$ и равна нулю вне его;

б) $\delta_n(x)$ имеет всюду производные всех порядков;

в) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta_n(t)\,dt=1.$

Приведем пример δ-последовательности. Определим функцию $\alpha(x)$ следующим образом:

$$\alpha(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

Эта функция имеет производные всех порядков. Функция

$$\beta_n(x)=\alpha(x+\varepsilon_n)\cdot\alpha(\varepsilon_n-x)$$

положительна на интервале $(-\varepsilon_n,\ \varepsilon_n)$, равна нулю вне его и имеет производные всех порядков. Пусть

$$\|\beta_n\|=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\beta_n(t)\,dt.$$

Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\|\beta_n\|}\beta_n(t)\,dt=1.$$

Следовательно, последовательность $\left\{\frac{\beta_n(x)}{\|\beta_n\|}\right\}$ есть δ-последовательность.

Теорема 4. *Всякая δ-последовательность фундаментальна.*

Доказательство. Последовательность функций

$$\gamma_n(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta_n(t)\,dt$$

равномерно ограничена, так как $0 \leqslant \gamma_n(x) \leqslant 1$, и на всяком отрезке $[\alpha, \beta]$, не содержащем точку $x = 0$, равномерно сходится к нулю, если $[\alpha, \beta] \subset (-\infty, 0)$, и к единице, если $[\alpha, \beta] \subset (0, \infty)$. В самом деле, в первом случае ($[\alpha, \beta] \subset (-\infty, 0)$) найдется такое n_0, что для всех $n > n_0$ имеем $\varepsilon_n < |\beta|$. Следовательно, отрезок $[\alpha, \beta]$ будет лежать левее всех интервалов $(-\varepsilon_n, \varepsilon_n)$, $n > n_0$. Поэтому все функции $\delta_n(x)$ с $n > n_0$ будут равны нулю на $[\alpha, \beta]$. Отсюда следует, что $\gamma_n(x) \equiv 0$ на $[\alpha, \beta]$ для $n > n_0$. Во втором случае ($[\alpha, \beta] \subset (0, \infty)$) найдется такое n_0, что для всех $n > n_0$ имеем $\varepsilon_n < \alpha$. Следовательно, отрезок $[\alpha, \beta]$ будет лежать правее всех интервалов $(-\varepsilon_n, \varepsilon_n)$, $n > n_0$. Поэтому для $x \in [\alpha, \beta]$ и $n > n_0$

$$\gamma_n(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta_n(t)\,dt = \int_{-\varepsilon_n}^{\varepsilon_n} \delta_n(t)\,dt = 1.$$

Таким образом, мы находимся в условиях применимости теоремы 3, согласно которой последовательность $\{\gamma_n(x)\}$ фундаментальна. А тогда по теореме 2 последовательность $\{\delta_n(x)\}$ также фундаментальна. Теорема доказана.

Замечание. Очевидно, какова бы ни была константа C, последовательности $\{C\delta_n(x)\}$ также фундаментальны.

Легко показать, что все δ-последовательности эквивалентны друг другу и последовательностям примеров 2—4[1]). Следовательно, всякая δ-последовательность $\{\delta_n(x)\}$ определяет δ-функцию $\delta(x)$; δ-последовательность $\{\delta_n(x - x_0)\}$ определяет δ-функцию $\delta(x - x_0)$.

Многомерные δ-последовательности определяются аналогично. Например, δ-последовательность в трехмерном пространстве определяется как последовательность вида

$$\{\delta_n(x) \cdot \delta_n(y) \cdot \delta_n(z)\},$$

[1]) Читателю рекомендуется провести доказательство этого утверждения самостоятельно.

составленная из произведений $\delta_n(x)\cdot\delta_n(y)\cdot\delta_n(z)$; а δ-функция в трехмерном пространстве определяется δ-последовательностями такого вида. Поэтому, по самому определению, $\delta(M)=\delta(x)\cdot\delta(y)\cdot\delta(z)$ и

$$\delta(M, M_0)\equiv\{\delta_n(x-x_0)\,\delta_n(y-y_0)\,\delta_n(z-z_0)\}=$$
$$=\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(z-z_0).$$

Здесь x, y, z — координаты точки M, x_0, y_0, z_0 — координаты точки M_0.

Выше мы показали, что последовательности $\{A\delta_n(x-x_0)\}$ фундаментальны. Можно доказать более общее утверждение: *какова бы ни была функция* $\varphi(x)$, *непрерывная в окрестности* $O(x_0)$ *точки* $x=x_0$, *последовательность* $\{\varphi(x)\cdot\delta_n(x-x_0)\}$ *фундаментальна на* $O(x_0)$ *и эквивалентна последовательности* $\{\varphi(x_0)\cdot\delta_n(x-x_0)\}$.

Доказательство. Рассмотрим функции

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,\delta_n(t-x_0)\,dt \quad\text{и}\quad \Phi_n(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(x_0)\,\delta_n(t-x_0)\,dt.$$

Очевидно, $F_n'(x)=\varphi(x)\,\delta_n(x-x_0)$, $\Phi_n'(x)=\varphi(x_0)\,\delta_n(x-x_0)$ для всех точек окрестности $O(x_0)$. Для всякого $\varepsilon>0$ найдется такое $n_0(\varepsilon)$, что

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\varepsilon \text{ для } x\in(x_0-\varepsilon_n, x_0+\varepsilon_n) \text{ и } n>n_0.$$

Тогда для всякого $x\in O(x_0)$ и для $n>n_0$

$$|F_n(x)-\Phi_n(x)|=\left|\int_{-\infty}^{x}\{\varphi(t)-\varphi(x_0)\}\,\delta_n(t-x_0)\,dt\right|\leqslant$$
$$\leqslant\int_{-\infty}^{x}|\varphi(t)-\varphi(x_0)|\,\delta_n(t-x_0)\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\int_{x_0-\varepsilon_n}^{x_0+\varepsilon_n}|\varphi(t)-\varphi(x_0)|\,\delta_n(t-x_0)\,dt<$$
$$<\varepsilon\int_{x_0-\varepsilon_n}^{x_0+\varepsilon_n}\delta_n(t-x_0)\,dt=\varepsilon,$$

т. е. $|F_n(x)-\Phi_n(x)|<\varepsilon$. (1)

Так как последовательность $\{\Phi_n(x)\}$ равномерно сходится ($\Phi_n(x)=\varphi(x_0)\cdot\gamma_n(x-x_0)$, см. доказательство теоремы 4), то и последовательность $\{F_n(x)\}$ равномерно сходится на всяком отрезке $[\alpha, \beta]\subset O(x_0)$. Отсюда и из неравенства (1) следует, что последовательность $\{\varphi(x)\delta_n(x-x_0)\}$ фундаментальна на $O(x_0)$ и эквивалентна последовательности $\{\varphi(x_0)\times\times\delta_n(x-x_0)\}$.

Произведением непрерывной в окрестности точки $x=x_0$ функции $\varphi(x)$ на δ-функцию $\delta(x-x_0)$ будем называть обобщенную функцию $\varphi(x)\delta(x-x_0)$, определяемую фундаментальной последовательностью $\{\varphi(x)\delta_n(x-x_0)\}$.

Доказанное выше утверждение означает, что

$$\varphi(x)\delta(x-x_0)=\varphi(x_0)\delta(x-x_0).$$

6. Теорема 5. *Среди эквивалентных фундаментальных последовательностей, определяющих обобщенную функцию $f(x)$, имеются фундаментальные последовательности дифференцируемых функций (полиномов!).*

Докажем сначала лемму.

Лемма. *Для любой непрерывной на (A, B) функции $F(x)$ существует последовательность полиномов $\{P_n(x)\}$, которая равномерно сходится к $F(x)$ на всяком отрезке $[\alpha, \beta]\subset(A, B)$.*

Доказательство. Пусть $\{A_n\}$ — убывающая последовательность чисел, сходящаяся к A, $\{B_n\}$ — возрастающая последовательность чисел, сходящаяся к B. По теореме Вейерштрасса существует такой полином $P_n(x)$, что $|F(x)-P_n(x)|<\frac{1}{n}$ для всех точек x отрезка $[A_n, B_n]$. Последовательность таких полиномов обладает указанным в лемме свойством. Действительно, каковы бы ни были положительное число ε и отрезок $[\alpha, \beta]\subset(A, B)$, найдется такое целое положительное число n_0, что для всех $n>n_0$

$$\frac{1}{n}<\varepsilon \text{ и } [\alpha, \beta]\subset[A_n, B_n].$$

Тогда по самому выбору полиномов $P_n(x)$ для всех $n>n_0$ и для всех $x\in[\alpha, \beta]$ будет выполняться неравенство

$$|P_n(x)-F(x)|<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

означающее равномерную сходимость последовательности $\{P_n(x)\}$ к функции $F(x)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $\{f_n(x)\}$ — фундаментальная последовательность, определяющая обобщенную функцию $f(x)$. Тогда по определению фундаментальной последовательности существует целое число $k \geqslant 0$ и сходящаяся на (A, B) к некоторой функции $F(x)$ последовательность непрерывных функций $\{F_n(x)\}$ таких, что

$$F_n^{(k)}(x) = f_n(x).$$

Функция $F(x)$ непрерывна на (A, B), так как последовательность $\{F_n(x)\}$ равномерно сходится к $F(x)$ на всяком отрезке $[\alpha, \beta] \subset (A, B)$. По лемме существует последовательность полиномов $\{P_n(x)\}$, равномерно сходящаяся к $F(x)$ на всяком отрезке $[\alpha, \beta] \subset (A, B)$. Поэтому согласно определению эквивалентных фундаментальных последовательностей последовательность полиномов

$$\{p_n(x)\}, \text{ где } p_n(x) = P_n^{(k)}(x),$$

будет фундаментальной последовательностью, эквивалентной последовательности $\{f_n(x)\}$. Теорема доказана.

Таким образом, мы всегда можем считать, что обобщенная функция $f(x)$ определяется фундаментальной последовательностью дифференцируемых функций $\{f_n(x)\}$.

Определение. *Производной m-го порядка обобщенной функции* $f(x) \equiv \{f_n(x)\}$ называется обобщенная функция

$$f^{(m)}(x) \equiv \{f_n^{(m)}(x)\},$$

определяемая фундаментальной последовательностью производных m-го порядка $\{f_n^{(m)}(x)\}$. Так, в частности, δ-функция $\delta(x)$ имеет производные всех порядков. Например, $\delta'(x)$ определяется фундаментальной последовательностью $\{\delta_n'(x)\}$. Производная единичной функции $\eta(x)$ есть обобщенная функция, равная $\delta(x)$:

$$\eta'(x) = \delta(x),$$

так как последовательность $\{g_n'\}$ примера 1 эквивалентна последовательности $\{f_n(x)\}$ примера 2, определяющей δ-функцию. Следовательно, мы можем написать, что

$$\eta(x)=\int_{-\infty}^{x}\delta(t)\,dt.$$

7. *Интегралом произведения δ-функции* $\delta(x-x_0)$ *на произвольную непрерывную функцию* $\varphi(x)$.

$$\int_a^b \varphi(x)\,\delta(x-x_0)\,dx,$$

мы будем называть предел

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi(x)\,\delta_n(x-x_0)\,dx,$$

где $\{\delta_n(x-x_0)\}$ — любая δ-последовательность, определяющая δ-функцию $\delta(x-x_0)$. Покажем, что этот предел существует и что справедлива формула[1])

$$\int_a^b \varphi(x)\,\delta(x-x_0)\,dx=\begin{cases}\varphi(x_0), & \text{если } x_0\in(a,\ b),\\ 0, & \text{если } x_0\notin[a,\ b].\end{cases}$$

Пусть $x_0\notin[a,b]$. Тогда найдется такое n_0, что для всех $n>n_0$ имеем $\varepsilon_n<\min\{|x_0-a|,|x_0-b|\}$. Следовательно, для $n>n_0$ имеем $\delta_n(x-x_0)\equiv 0$ на $[a,\ b]$.

Поэтому $\int\limits_a^b \varphi(x)\,\delta_n(x-x_0)\,dx=0$. Следовательно,

$$\int_a^b \varphi(x)\,\delta(x-x_0)\,dx=0.$$

Пусть $x_0\in(a,\ b)$. Тогда найдется такое n_0, что для $n>n_0$ интервалы $(x_0-\varepsilon_n,\ x_0+\varepsilon_n)$ будут целиком лежать на отрезке

[1]) Можно полагать, что функции $\delta_n(x-x_0)$, составляющие δ-последовательность, четны относительно $x=x_0$. Тогда для $x_0=a$ или $x_0=b$

$$\int_a^b \varphi(x)\,\delta(x-x_0)\,dx=\frac{1}{2}\varphi(x_0)\ \text{(доказать!)}$$

$[a, b]$. Следовательно, для таких n

$$\int_a^b \varphi(x)\,\delta_n(x-x_0)\,dx = \int_{x_0-\varepsilon_n}^{x_0+\varepsilon_n} \varphi(x)\,\delta_n(x-x_0)\,dx.$$

Применим к последнему интегралу теорему о среднем значении. Получим

$$\int_{x_0-\varepsilon_n}^{x_0+\varepsilon_n} \varphi(x)\,\delta_n(x-x_0)\,dx = \varphi(\xi_n)\int_{x_0-\varepsilon_n}^{x_0+\varepsilon_n} \delta_n(x-x_0)\,dx = \varphi(\xi_n),$$

где $\xi_n \in [x_0-\varepsilon_n,\ x_0+\varepsilon_n]$. При $n\to\infty$ имеем $\xi_n \to x_0$. Поэтому, учитывая непрерывность функции $\varphi(x)$ на $[a, b]$, получим

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi(x)\,\delta_n(x-x_0)\,dx = \lim_{n\to\infty}\varphi(\xi_n) = \varphi(x_0).$$

Утверждение доказано. В частности, для $\varphi(x)\equiv 1$ имеем

$$\int_a^b \delta(x-x_0)\,dx = \begin{cases} 1, & x_0 \in [a, b], \\ 0, & x_0 \notin [a, b]. \end{cases}$$

Совершенно аналогично доказывается формула

$$\int_D \varphi(M)\,\delta(M, M_0)\,d\tau_M = \begin{cases} \varphi(M_0), & \text{если } M_0 \in D, \\ 0, & \text{если } M_0 \notin \bar{D} \end{cases} \qquad (*)$$

для всякой непрерывной в D функции $\varphi(M)$.

З а м е ч а н и е. Если обратиться к последовательностям $\{f_n\}$, $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$ примеров 2—4, определяющим δ-функцию $\delta(x)$, то каждая из них сходится к н у л ю в любой точке $x\neq 0$ и к бесконечности в точке $x=0$. Имея это в виду, можно написать, что

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x\neq 0, \\ \infty, & x=0. \end{cases}$$

При этом $\delta(x)$ в точке $x=0$ обращается в бесконечность так, что $\int_{-a}^{a}\delta(x)\,dx = 1$ для любого $a>0$. Часто выражение $(*)$ кладут в основу определения δ-функций как функционала[1]).

[1]) См. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов, Обобщенные функции и действия над ними, М., 1958.

8. Функцию $\omega(x)$ будем называть *финитной*, если она тождественно равна нулю вне некоторого интервала (a, b). Финитную функцию будем называть *вполне гладкой*, если она всюду непрерывна и имеет всюду непрерывные производные всех порядков.

Определим понятие свертки двух функций, имеющее многочисленные применения. Пусть $f(x)$ — непрерывная или локально-интегрируемая (т. е. интегрируемая на всяком конечном промежутке) функция.

Тогда *сверткой* $f(x)$ с $\varphi(x)$ называют функцию

$$f(x) * \varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{2}$$

Очевидно,

$$f(x) * \varphi(x) = \varphi(x) * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi(x-t)\,dt. \tag{3}$$

Поскольку $\varphi(x)$ — финитная функция, то свертку можно также записать в виде интеграла

$$f * \varphi = \int_{a}^{b} f(x-t)\,\varphi(t)\,dt \tag{4}$$

по промежутку, вне которого $\varphi(x) \equiv 0$. Отметим простейшие свойства свертки.

Свойство 1. *Если функция $\varphi(x)$ имеет всюду непрерывные производные до k-го порядка, то и свертка $f * \varphi$ имеет всюду производные до k-го порядка и*

$$\frac{d^p}{dx^p}[f(x) * \varphi(x)] = [f * \varphi]^{(p)} = f(x) * \varphi^{(p)}(x)$$
$$(p = 1, 2, \ldots, k). \tag{5}$$

Это прямо следует из формулы (3) и финитности функции $\varphi(x)$. Если функция $f(x)$ имеет непрерывные всюду производные до k-го порядка, а $\varphi(x)$ — интегрируема и финитна, то

$$(f * \varphi)^{(p)} = f^{(p)}(x) * \varphi(x) \qquad (p = 1, 2, \ldots, k). \tag{6}$$

Свойство 2. *Если последовательность непрерывных функций $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на отрезке $a_0 - b \leqslant x \leqslant b_0 - a$ к функции $f(x)$, то для всякой* *непрерывной финитной функции* $\varphi(x)$, *тождественно равной нулю вне интервала* (a, b), *последовательность* $\{f_n(x) * \varphi(x)\}$ *равномерно сходится на отрезке* $[a_0, b_0]$ *к функции* $f(x) * \varphi(x)$.

Справедливость этого непосредственно следует из формулы (4).

Обозначим через (A', B') интервал, состоящий из таких точек x', что отрезок $[x' - b, x' - a] \subset (A, B)$.

Свойство 3. *Если последовательность* $\{f_n(x)\}$ *фундаментальна на* (A, B), *а* $\varphi(x)$ — *финитная и непрерывная функция* ($\varphi(x) \equiv 0$ *вне* (a, b)), *то последовательность* $\{f_n(x) * \varphi(x)\}$ *фундаментальна на* (A', B').

Доказательство. Пусть $[\alpha, \beta] \subset (A', B')$. Тогда отрезок $[\alpha - b, \beta - a]$ принадлежит (A, B). Так как $\{f_n(x)\}$ — фундаментальная последовательность, то существует целое число $k \geqslant 0$ и другая последовательность $\{F_n(x)\}$ такие, что $F_n^{(k)}(x) = f_n(x)$ и $\{F_n(x)\}$ равномерно сходится на отрезке $[\alpha - b, \beta - a]$. Вычислим $f_n(x) * \varphi(x)$. Имеем

$$f_n(x) * \varphi(x) = F_n^{(k)}(x) * \varphi(x).$$

Применяя формулу (6), получим

$$f_n(x) * \varphi(x) = [F_n(x) * \varphi(x)]^{(k)}. \tag{7}$$

По свойству 2 последовательность $\{F_n(x) * \varphi(x)\}$ равномерно сходится на отрезке $[\alpha, \beta]$. Отсюда и из соотношения (7) следует, что последовательность $\{f_n(x) * \varphi(x)\}$ фундаментальна.

Замечание. Если $\varphi(x)$ вполне гладкая функция, то формулу (7) можно записать в виде

$$f_n(x) * \varphi(x) = F_n(x) * \varphi^{(k)}(x). \tag{8}$$

Поскольку последовательность $\{F_n(x)\}$ равномерно сходится на всяком отрезке $[\alpha, \beta] \subset (A, B)$, то по свойству 2 последовательность $\{F_n(x) * \varphi^{(k)}(x)\}$ равномерно сходится на всяком отрезке $[\alpha + b, \beta + a]$, принадлежащем (A', B'). Таким образом, справедливо

Свойство 4. *Если последовательность* $\{f_n(x)\}$ *фундаментальна на* (A, B), *а* $\varphi(x)$ — *вполне гладкая финитная функция* ($\varphi(x) \equiv 0$ *вне* (a, b)), *то последовательность* $\{f_n(x) * \varphi(x)\}$ *равномерно сходится на всяком отрезке* $[\alpha', \beta'] \subset (A', B')$.

Теперь естественно принять следующее

Определение. *Сверткой произвольной обобщенной функции* $f(x)$, определяемой фундаментальной последовательностью $\{f_n(x)\}$, *с финитной непрерывной функцией* $\varphi(x)$ будем называть обобщенную функцию $f(x)*\varphi(x)$, определяемую фундаментальной последовательностью $\{f_n(x)*\varphi(x)\}$. Очевидно,

$$f(x)*\varphi(x)=\varphi(x)*f(x).$$

Так же определяется свертка обобщенной функции $f(x)$ с произвольной финитной интегрируемой функцией $\varphi(x)$. При этом справедлива формула для производных $(f*\varphi)^{(p)}=f^{(p)}*\varphi$, где $f^{(p)}$ — производная p-го порядка обобщенной функции. В частности, определена свертка δ-функции и произвольной финитной всюду непрерывной функции $\varphi(x)$

$$\delta(x)*\varphi(x)=\varphi(x)*\delta(x).$$

Свойство 5. *Для финитной и всюду непрерывной функции* $\varphi(x)$ *справедливо тождество*

$$\varphi(x)*\delta(x)\equiv\varphi(x).$$

Предварительно докажем лемму.

Лемма. *Пусть* $\{\delta_n(x)\}$ *есть* δ-*последовательность, а* $\varphi(x)$ — *непрерывная на* (A, B) *функция. Тогда последовательность* $\{\varphi(x)*\delta_n(x)\}$ *сходится к* $\varphi(x)$ *равномерно на всяком отрезке* $[\alpha, \beta]\subset(A, B)$.

Доказательство. Пусть $[\alpha, \beta]\subset(A, B)$. Для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $n_0(\varepsilon)$, что при $n>n_0$ для всех x из $[\alpha, \beta]$ и всех t из $(-\varepsilon_n, \varepsilon_n)$ выполняется неравенство

$$|\varphi(x-t)-\varphi(x)|<\varepsilon.$$

Оценим разность $\varphi(x)*\delta_n(x)-\varphi(x)$:

$$|\varphi(x)*\delta_n(x)-\varphi(x)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x-t)\,\delta_n(t)\,dt-\varphi(x)\right|=$$

$$=\left|\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x-t)\,\delta_n(t)\,dt-\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,\delta_n(t)\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x-t)-\varphi(x)|\,\delta_n(t)\,dt=$$

$$=\int_{-\varepsilon_n}^{\varepsilon_n}|\varphi(x-t)-\varphi(x)|\,\delta_n(t)\,dt.$$

Для указанных выше $n > n_0(\varepsilon)$ и любых $x \in [\alpha, \beta]$ последний интеграл меньше, чем

$$\varepsilon \int_{-\varepsilon_n}^{\varepsilon_n} \delta_n(t)\, dt = \varepsilon.$$

Таким образом, для $n > n_0(\varepsilon)$ и $x \in [\alpha, \beta])$

$$|\varphi(x) * \delta_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Доказательство свойства 5. Поскольку функции $\varphi(x) * \delta_n(x)$ непрерывны на (A, B) и по лемме последовательность $\{\varphi(x) * \delta_n(x)\}$ равномерно сходится к функции $\varphi(x)$ на всяком отрезке $[\alpha, \beta] \subset (A, B)$, то по теореме 1 она фундаментальна и определяет обобщенную функцию, равную $\varphi(x)$. С другой стороны, по определению свертки фундаментальная последовательность $\{\varphi(x) * \delta_n(x)\}$ определяет свертку $\varphi(x) * \delta(x)$. Поэтому

$$\varphi(x) * \delta(x) = \varphi(x).$$

Кроме того,

$$\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} [\varphi(x) * \delta_n(x)] = \lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x - t)\, \delta_n(t)\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x - t)\, \delta(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, \delta(x - t)\, dt.$$

Мы при этом воспользовались определением интеграла от произведения непрерывной функции на δ-функцию.

Таким образом, свертка δ-функции с произвольной непрерывной функцией $\varphi(x)$ может быть записана в виде интегралов:

$$\varphi(x) * \delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x - t)\, \delta(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, \delta(x - t)\, dt.$$

Свойство 6. *Свертка произвольной обобщенной функции $f(x)$ с вполне гладкой функцией $\varphi(x)$* имеет непрерывные производные всех порядков.

Доказательство. Пусть обобщенная функция $f(x)$ определяется фундаментальной последовательностью $\{f_n(x)\}$.

По свойству 4 последовательность $\{f_n(x) * \varphi(x)\}$ равномерно сходится на всяком отрезке $[\alpha', \beta'] \subset (A', B')$ к непрерывной функции. Из формулы (8) и свойства 4 следует, что последовательности $\{(f_n * \varphi)^{(l)}\}$ из производных l-го порядка ($l = 1, 2, \ldots$) также равномерно сходятся к непрерывным функциям. Тогда по теореме о почленном дифференцировании последовательностей[1]) отсюда и следует свойство 6.

Можно определить свертку произвольной обобщенной функции $f(x)$ и δ-функции как обобщенную функцию $f(x) * \delta(x)$, определяемую фундаментальной последовательностью

$$\{f(x) * \delta_n(x)\},$$

где $\{\delta_n(x)\}$ — произвольная δ-последовательность. При этом справедлива формула

$$f(x) * \delta(x) = f(x).$$

Приведем сводку наиболее употребительных формул и соотношений, содержащих δ-функцию. Доказательства многих из них читатель легко проведет самостоятельно или найдет в специальной литературе[2]).

1. $\delta(-x) = \delta(x)$.

2. $\delta(\alpha x) = \dfrac{1}{\alpha}\delta(x)$.

3. $\delta(\varphi(x)) = \sum\limits_n \dfrac{\delta(x - x_n)}{|\varphi'(x_n)|}$, если $\varphi(x)$ имеет только простые нули x_n.

4. $x\delta(x) = 0$, $\varphi(x)\delta(x) = \varphi(0)\delta(x)$, $\varphi(a \pm x)\delta(x) = \varphi(a)\delta(x)$.

5. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta(x - x_0)\,dx = \varphi(x_0)$.

6. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x - t)\delta(s - t)\,dt = \delta(x - s)$.

---

[1]) См. Фихтенгольц Г. М., Основы математического анализа, т. II гл. XVI, М., Гостехиздат, 1956, см. также 1964 г.

[2]) Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е., Обобщенные функции и действия над ними, М., 1958. Микусинский Я., Сикорский Р., Элементарная теория обобщенных функций, вып. II, ИЛ, 1963.

7. $\delta'(x) = \frac{-1}{x}\delta(x)$.

8. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\delta'(x-x_0)\,dx = -\varphi'(x_0)$, если $\varphi'(x)$ непрерывна при $x = x_0$.

9. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta'(x-t)\,\delta(s-t)\,dt = \delta'(x-s)$.

10. $\frac{d^n}{dx^n}\delta(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^n}\delta(x)$.

11. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\frac{\partial^n}{\partial x^n}\delta(x-s)\,dx = (-1)^n\varphi^{(n)}(s)$, если $\varphi^{(n)}(x)$ непрерывна при $x = s$.

12. $\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(M)\,\delta(M, M_0)\,d\tau_M = \varphi(M_0)$.

13. Фурье-преобразование δ-функции $\delta(x-x_0)$ имеет вид

$$\tilde{\delta}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)\,e^{i\xi x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\xi x_0},$$

следовательно,

$$\delta(x-x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{\delta}(\xi)\,e^{-i\xi x}\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi(x-x_0)}\,d\xi.$$

Для трехмерного случая

$$\delta(M, M_0) =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i[\xi(x-x_0)+\eta(y-y_0)+\zeta(z-z_0)]}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi(x-x_0)}\,d\xi \cdot \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\eta(y-y_0)}\,d\eta \cdot \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\zeta(z-z_0)}\,d\zeta =$$

$$= \delta(x-x_0)\cdot\delta(y-y_0)\cdot\delta(z-z_0).$$

Таким образом,

$$\delta(M, M_0) = \delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(z-z_0)$$

в декартовых координатах.

14. $\delta(M, M_0) = \frac{1}{r}\delta(r-r_0)\,\delta(\varphi-\varphi_0)$ в полярных координатах на плоскости.

15. $\delta(M, M_0) = \frac{1}{r^2}\delta(r - r_0)\frac{1}{\sin\theta}\delta(\theta - \theta_0)\delta(\varphi - \varphi_0)$ в сферических координатах.

16. $\delta(M, M_0) = \frac{\delta(q_1 - q_1^0)\delta(q_2 - q_2^0)\delta(q_3 - q_3^0)}{h_1 \cdot h_2 \cdot h_3}$ в произвольных ортогональных криволинейных координатах (q_1, q_2, q_3). Здесь h_1, h_2, h_3 — коэффициенты Ламэ.

Встречаются также обобщенные функции $\delta_+(x)$ и $\delta_-(x)$, которые мы определим формально с помощью представления

$$\delta_+(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-i\xi x}\,d\xi, \quad \delta_-(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^0 e^{-i\xi x}\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{i\xi x}\,d\xi.$$

Очевидно, $\delta_+(x) + \delta_-(x) = \delta(x)$ и $\delta_+(-x) = \delta_-(x)$.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

ГЛАВА I

1. а) $u_{\xi\eta} - 0{,}5\,\frac{1}{\xi}\,u_\xi = 0$ $\left(\xi = xy,\ \eta = \frac{y}{x}\right)$; б) $\Delta u - u_\xi - u_\eta = 0$ $(\xi = y^2,\ \eta = x^2)$; в) $u_{\eta\eta} = 0$ $\left(\xi = \frac{y}{x},\ \eta = y\right)$; г) $u_{\xi\eta} + \frac{0{,}5}{\xi - \eta}(u_\xi - u_\eta) = 0$ в области $y < 0$ $(\xi = x + 2\sqrt{-y},\ \eta = x - 2\sqrt{-y})$; $\Delta u = 0$ в области $y > 0$ $(\xi = x,\ \eta = 2\sqrt{y})$.

2. а) $v_{\eta\eta} - 2v_\xi = 0$, $u = ve^{\mu\xi + \nu\eta}$, $\mu = 1{,}1875$, $\nu = 0{,}25$ $(\xi = y - x,\ \eta = y + x)$; б) $v_{\xi\eta} + \frac{1}{32}v = 0$, $u = v \cdot e^{\mu\xi + \nu\eta}$, $\mu = -0{,}25$, $\nu = \frac{-7}{8}$ $(\xi = y - 3x,\ \eta = y - x)$; в) $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} - 1{,}5\,v = 0$, $u = v \cdot e^{-\xi - \eta}$ $(\xi = 2y - x,\ \eta = x)$.

ГЛАВА II

1. $a^2 u_{xx} + g = u_{tt}$; $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = v_0$; $u(0, t) = u_x(l, t) = 0$.

2. $a^2 u_{xx} - \beta u_t = u_{tt}$; $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \varphi_1(x)$; $u(0, t) = u(l, t) = 0$.

3. $\frac{\partial}{\partial x}(E \cdot S \cdot u_{xx}) = \rho S u_{tt}$; $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \varphi_1(x)$; $\alpha_1 u_x(0, t) - \beta_1 u(0, t) = 0$, $\alpha_2 u_x(l, t) + \beta_2 u(l, t) = 0$.

4. $\frac{\partial}{\partial x}[(l - x)\,u_x] = \frac{1}{g}\,u_{tt}$; $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \varphi_1(x)$; $u(0, t) = 0$, $|u(l, t)| \leqslant M$.

5. $g\,\frac{\partial}{\partial x}[(l - x)\,u_x] + \omega^2 u = u_{tt}$, дополнительные условия задачи 4.

6. $\omega^2\,\frac{\partial}{\partial x}[(l^2 - x^2)\,u_x] = \rho u_{tt}$, дополнительные условия задачи 4.

7. $a^2\theta_{xx} = \theta_{tt}$, $\theta(x, 0) = \varphi(x)$, $\theta_t(x, 0) = \varphi_1(x)$; $\theta(0, t) = \theta(l, t) = 0$.

8. $a^2 u_{xx} + \frac{H}{c\rho}\,I(t) = u_{tt}$; $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$; $u(0, t) = u(l, t) = 0$, c — скорость света.

9. $u(x, t) = \begin{cases} u_1(x, t), & x < 0, \\ u_2(x, t), & x > 0, \end{cases} \quad a_i^2 (u_i)_{xx} = (u_i)_{tt} \qquad (i = 1, 2);$

$u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \varphi_1(x)$; $a_i^2 = \dfrac{E_i}{\rho_i}$ $\quad (i = 1;\ 2)$; $u_1(0, t) = u_2(0, t)$, $E_1 u_{1x}(0, t) = E_2 u_{2x}(0, t)$.

10. $T u_{xx} = [\rho + m_0 \delta(x - x_0)] u_{tt}$; $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \varphi_1(x)$; $u(0, t) = u(l, t) = 0$.

Или:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1(x, t), & x < x_0 \\ u_2(x, t), & x > x_0, \end{cases} \quad a^2 (u_i)_{xx} = (u_i)_{tt} \qquad (i = 1, 2),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$u_t(x, 0) = \varphi_1(x); \quad u_1(0, t) = 0, \quad u_2(l, t) = 0;$$

$$u_1(x_0, t) = u_2(x_0, t), \quad T[u_{2x}(x_0, t) - u_{1x}(x_0, t)] = m_0 u_{tt}(x_0, t).$$

11. $T u_{xx} + F(t)\delta(x - v_0 t) = \rho u_{tt}$; $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$.

12. $v_x + L \cdot i_t + R \cdot i = 0$, $\quad i_x + C \cdot v_t + Gv = 0$; $\quad v(x, 0) = \varphi(x)$, $i(x, 0) = \varphi_1(x)$.

13. $v_x + L \cdot i_t = 0$, $i_x + C \cdot v_t = 0$; $v(x, 0) = \varphi(x)$, $i(x, 0) = \varphi_1(x)$; $-v(0, t) = R_0 i(0, t)$, $c_0 v_t(l, t) = i(l, t)$.

14. $v_x + L \cdot i_t = 0$, $\quad i_x + C v_t = 0$; $v(x, 0) = \varphi(x)$, $i(x, 0) = \varphi_1(x)$; $-v(0, t) = L_0^{(1)} i_t(0, t)$, $v(l, t) - E(t) = L_0^{(2)} i_t(l, t)$.

15. $v(x, t) = \begin{cases} v_1(x, t), & x < 0 \\ v_2(x, t), & x > 0, \end{cases} \quad i(x, t) = \begin{cases} i_1(x, t), & x < 0, \\ i_2(x, t), & x > 0; \end{cases}$

$(v_k)_x + L_k (i_k)_t + R_k \cdot i_k = 0$, $(i_k)_x + C_k (v_x)_t = 0$, $v(x, 0) = \varphi(x)$, $i(x, 0) = \varphi_1(x)$, $i_1(0, t) = i_2(0, t)$, $v_{2t}(0, t) - v_{1t}(0, t) =$

$$= \frac{1}{c_0} i_1(0, t) \qquad (k = 1, 2).$$

Для силы тока $i(x, t)$:

$$(i_k)_{xx} = C_k L_k (i_k)_{tt} + C_k R_k i_k; \qquad i_1(0, t) = i_2(0, t);$$

$$\frac{1}{C_1} i_{1x}(0, t) - \frac{1}{C_2} i_{2x}(0, t) = \frac{1}{C_0} i_1(0, t); \qquad i_k(x, 0) = \varphi(x),$$

$$i_{kt}(x, 0) = \frac{R_k \varphi(x) - \varphi_1'(x)}{L_k}.$$

16. $k \cdot u_{xx} - h[u - \varphi(t)] = c\rho u_t$; $u(x, 0) = f(x)$;

$$u(0, t) = f_1(t), \quad k u_x(l, t) = q(t).$$

17. $k \cdot u_{xx} - hu + Q \cdot I^2 = c\rho u_t$, $u(x, 0) = f(x)$;

$$k u_x(0, t) = C_1 u_t(0, t), \; k u_x(l, t) = C_2 u_t(l, t),$$

где C_1, C_2 — теплоемкости клемм.

18. $\dfrac{\partial}{\partial x}(D u_x) - \dfrac{\partial}{\partial x}(v \cdot u) = c u_t$.

19. а) $\dfrac{\partial}{\partial x}(D u_x) - \beta u = c u_t$; б) $\dfrac{\partial}{\partial x}(D \cdot u_x) + \beta u = c u_t$.

20. $u(x, t)=\begin{cases} u_1(x, t), & x<0, \\ u_2(x, t), & x>0, \end{cases}$ $a_i^2(u_i)_{xx}=(u_i)_t \qquad (i=1, 2);$

$$u(x, 0)=\varphi(x); \quad u_1(0, t)=u_2(0, t);$$

а) $k_2u_{2x}(0,t)-k_1u_{1x}(0, t)=0$; б) $k_2u_{2x}(0, t)-k_1u_{1x}(0, t)=C_0u_t(0, t)$.

21. $\frac{\partial}{\partial x}(ku_x)=c\rho u_t; \quad u(x, 0)=0; \quad u(vt, t)=\varphi(t)$.

22. $\frac{\partial}{\partial x}(ku_x)+Q\delta(x-v_0t)=c\rho u_t; \; u(x, 0)=\varphi(x)$.

23. $a^2u_{\theta\theta}-h(u-u_0)=u_t; \; u(\theta, 0)=\varphi(\theta); \; u(\theta+2\pi, t)=u(\theta, t)$, θ — полярный угол, $a^2=\frac{k}{c\rho R^2}$, R — радиус кольца.

24. $\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}=\frac{c^2}{4\pi\sigma\mu}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial\xi^2}; \; \frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}=\frac{c^2}{4\pi\sigma\mu}\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial\xi^2}$, где c — скорость света, σ — проводимость среды, μ — магнитная проницаемость, ξ — расстояние, отсчитываемое от фиксированной плоскости, $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(\xi, t)$, $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}(\xi, t)$.

25. а) $\Delta u=-4\pi\rho$; б) $\Delta u=0$.

ГЛАВА III

1. См. рис. 40. Указание. Воспользоваться формулой Даламбера.

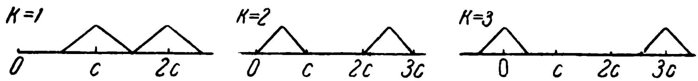

Рис. 40.

2. См. рис. 41.

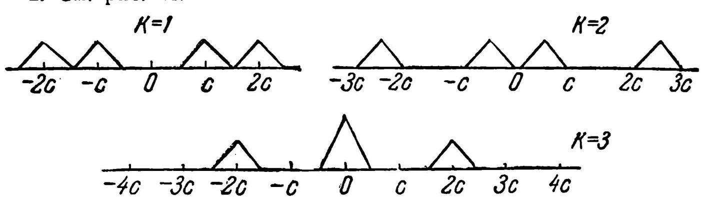

Рис. 41.

3. $u(x, t)=\frac{1}{2a}\{F(x+at)-F(x-at)\}$,

$$\text{где } F(z)=\begin{cases} 0, & z\leqslant -c, \\ v_0(z+c), & -c\leqslant z\leqslant c, \\ 2v_0c, & z\geqslant c. \end{cases}$$

4. См. рис. 42.

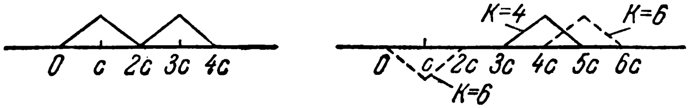

Рис. 42.

5. $u(x, t) = \frac{1}{2a}\{F(x+at) - F(x-at)\}$, где $F(z) = $

$$= \frac{p}{\rho}\{\eta(z-x_0) - \eta(z+x_0)\}.$$

Указание. Решать задачу: $a^2 u_{xx} = u_{tt}$; $u(0, t) = 0$;

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \frac{p}{\rho}\delta(x-x_0), \quad 0 \leqslant x < \infty.$$

6. Для $-\infty < x < 0$ имеем $u_1(x, t) = f\left(t - \frac{x}{a_1}\right) +$

$$+ \frac{\sqrt{\rho_1 E_1} - \sqrt{\rho_2 E_2}}{\sqrt{\rho_1 E_1} + \sqrt{\rho_2 E_2}} f\left(t + \frac{x}{a_1}\right);$$

преломленная волна: $u_2(x, t) = \frac{2\sqrt{\rho_1 E_1}}{\sqrt{\rho_1 E_1} + \sqrt{\rho_2 E_2}} f\left(t - \frac{x}{a_2}\right)$,

отраженная волна: $u_{\text{отр}} = \frac{\sqrt{\rho_1 E_1} - \sqrt{\rho_2 E_2}}{\sqrt{\rho_1 E_1} + \sqrt{\rho_2 E_2}} f\left(t + \frac{x}{a_1}\right)$,

$u_{\text{отр}}$ отсутствует при $\rho_1 E_1 = \rho_2 E_2$.

7. $v(x, 0) = E_0 e^{-\sqrt{GR}\,x}$, $i(x, 0) = E_0\sqrt{\frac{G}{L}}\, e^{-\sqrt{GR}\,x}$;

$v(x, t) = E_0 e^{-\sqrt{GR}\,x}\eta(x-at)$, $0 < x$, $t < \infty$; $i(x, t) =$

$$= E_0\sqrt{\frac{G}{L}}\, e^{-\sqrt{GR}\,x}\eta(x-at).$$

8. $u(x, t_1) \equiv 0$, $u(x, t_2) = -u(x, 0)$, $u(x, t_4) \equiv u(x, 0)$.

9. $$u_1(x, t) = \begin{cases} \dfrac{a^2 - v_0^2}{2aT_0} \displaystyle\int_0^{\frac{x+at}{a+v_0}} F(\xi)\, d\xi, & -at < x < v_0 t, \\ 0, & x > at, \end{cases}$$

$$u_2(x, t) = \frac{a^2 - v_0^2}{2aT_0}\begin{cases} \displaystyle\int_0^{\frac{at-x}{a-v_0}} F(\xi)\, d\xi, & v_0 t < x < at, \\ 0, & x > at, \end{cases}$$

T_0 — начальное натяжение струны.

10. $u(x,\ t)=\eta\left(t-\frac{x}{a}\right)f\left(t-\frac{x}{a}\right),\quad a=\frac{1}{\sqrt{LC}}.$

11. $I(x,\ t)=\eta\left(t-\frac{x}{a}\right)V\cdot\sqrt{\frac{C}{L}}\,e^{-\alpha\left(t-\frac{x}{a}\right)},$

где $a=\frac{1}{\sqrt{LC}},\quad \alpha=\frac{1}{C_0}\sqrt{\frac{C}{L}}.$

12. $S(M,\ t)=S_0\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\sigma_t}{4\pi a^2 t}\right\}=\frac{S_0}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sigma_t}{t}\right).$

13. Только уравнения гиперболического типа вида

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xt}+a_{22}u_{tt}=0.$$

Скорость a определяется из уравнения

$$a_{22}a^2-2a_{12}a+a_{11}=0.$$

14. Только уравнения гиперболического типа с коэффициентами, удовлетворяющими соотношениям:

$$a_{22}a^2-2a_{12}a+a_{11}=0,\quad b_1-b_2a-2\mu(a_{12}-a_{22}a)=0,$$
$$a_{22}a^2-\mu b_2+c=0.$$

ГЛАВА IV

1. $u(x,\ t)=\frac{-2hl^2}{\pi^2x_0(l-x_0)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi n}{l}x_0\sin\frac{\pi n}{l}x\cos\frac{\pi na}{l}t,$

где $h=\frac{1}{lT}F_0\cdot x_0(l-x_0).$

2. $u(x,\ t)=\frac{2P}{\pi a\rho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{l}x_0\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\sin\frac{\pi an}{l}t.$

Указание: $u(x,\ 0)=0,\ u_t(x,\ 0)=\frac{P}{\rho}\delta(x-x_0).$

3. $u\ (x,\ t)=\frac{8lF_0}{\pi^2E\cdot S}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x\cdot\cos\frac{2n+1}{2l}a\pi t.$

Указание: $u(x,\ 0)=\frac{F_0}{ES}x,\ u_t(x,\ 0)=0.$

4. $u(x,\ t)=\frac{2P}{a\rho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\mu_n}{l}x\cdot\sin\frac{\mu_n}{l}at}{\mu_n\left\{1+\frac{h}{l\left(h^2+\frac{\mu_n^2}{l^2}\right)}\right\}},$

где μ_n — положительные корни уравнения $\mu\operatorname{tg}\mu=h\cdot l.$

5. $u(r, t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2\lambda_n t}\ \frac{1}{r}\sin\frac{\mu_n}{R}r$, где $\mu_n=\sqrt{\lambda_n}R$,

$$C_n=\frac{2}{R}\ \frac{R^2\mu_n^2+(Rh-1)^2 l^2}{R^2\mu_n^2+(Rh-1)Rhl^2}\int_0^R rf(r)\sin\frac{\mu_n}{R}r\,dr,$$

μ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{tg}\mu=\frac{\mu}{1-hR}$.

Указание: $u=\frac{v}{r}$ и $a^2v_{rr}=v_{tt}$.

6. $u(r, t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2\lambda_n t}\frac{1}{r}\Phi_n(r)$, где $\Phi_n(r)=(1-h_1R_1)\times$ $\times\sin\sqrt{\lambda_n}\,r+\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}\,r$,

$$C_n=\frac{1}{\|\Phi_n\|^2}\int_{R_1}^{R_2} rf(r)\,\Phi_n(r)\,dr,\quad \|\Phi_n\|^2=\int_{R_1}^{R_2}\Phi_n^2(r)\,dr,$$

λ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}(R_2-R_1)=$ $=\frac{R_2(1-h_1R_1)-(1-h_2R_2)}{R_2\lambda+(1-h_1R_1)(1-h_2R_2)}$.

7. а) $R_{\text{кр}}=\frac{\pi a}{\sqrt{\beta}}$; б) $R_{\text{кр}}=0$; в) $R_{\text{кр}}$ равно наименьшему положительному корню уравнения $(1-hR)\operatorname{tg}\frac{\sqrt{\beta}}{a}R=\frac{\sqrt{\beta}}{a}R$.

8. Для краевых условий типа I:

$$\lambda_{n,p}=\pi^2\left(\frac{n^2}{l^2}+\frac{p^2}{k^2}\right),\quad \Phi_{n,p}(x, y)=\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi p}{k}y\quad (n, p=1, 2, \ldots).$$

В случае квадрата $(l=k)$, $\lambda_{n,p}=\frac{\pi^2}{l^2}(n^2+p^2)$.

$$\lambda_{1,2}=\lambda_{2,1}=\frac{5\pi^2}{l^2},$$

но

$$\Phi_{1,2}(x, y)=\sin\frac{2\pi}{l}x\sin\frac{\pi}{l}y\neq\Phi_{2,1}=\sin\frac{\pi}{l}x\sin\frac{2\pi}{l}y.$$

Таким образом, одному собственному значению $\lambda=\frac{5\pi^2}{l^2}$ соответствуют две линейно независимые собственные функции.

Для краевых условий типа II:

$$\lambda_{n,p}=\pi^2\left(\frac{n^2}{l^2}+\frac{p^2}{k^2}\right),\quad \Phi_{n,p}(x, y)=\cos\frac{\pi n}{l}x\cos\frac{\pi p}{k}y\ (n, p=0, 1, 2, \ldots);$$

типа III:

$$\lambda_{n,p}=\mu_n+\alpha_p,$$

$$\Phi_{n,p}(x, y)=(\sqrt{\mu_n}\cos\sqrt{\mu_n}\,x+h_1\sin\sqrt{\mu_n}\,x)\times$$
$$\times(\sqrt{\alpha_p}\cos\sqrt{\alpha_p}\,y+h_3\sin\sqrt{\alpha_p}\,y),$$

μ_n и α_p являются положительными корнями уравнений

$$\operatorname{tg}\sqrt{\mu}\,l=\frac{-(h_1+h_2)\sqrt{\mu}}{h_1h_2-\mu},\quad \operatorname{tg}\sqrt{\alpha}\,k=\frac{-(h_3+h_4)\sqrt{\alpha}}{h_3h_4-\alpha}.$$

9. Для краевых условий типа I:

$$\lambda_{n,p,q}=\pi^2\left(\frac{n^2}{l^2}+\frac{p^2}{k^2}+\frac{q^2}{m^2}\right),$$

$$\Phi_{n,p,q}(x, y, z)=\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi p}{k}y\sin\frac{\pi q}{m}z\qquad(n, p, q=1, 2, \ldots);$$

типа II:

$$\lambda_{n,p,q}=\pi^2\left(\frac{n^2}{l^2}+\frac{p^2}{k^2}+\frac{q^2}{m^2}\right),$$

$$\Phi_{n,p,q}(x, y, z)=\cos\frac{\pi n}{l}x\cos\frac{\pi p}{k}y\cos\frac{\pi q}{m}z\qquad(n, p, q=0, 1, 2, \ldots);$$

типа III:

$$\lambda_{n,p,q}=\mu_n+\alpha_p+\beta_q,$$

$$\Phi_{n,p,q}(x, y, z)=$$
$$=(\sqrt{\mu_n}\cos\sqrt{\mu_n}\,x+h_1\sin\sqrt{\mu_n}\,x)(\sqrt{\alpha_p}\cos\sqrt{\alpha_p}\,y+h_3\sin\sqrt{\alpha_p}\,y)\times$$
$$\times(\sqrt{\beta_q}\cos\sqrt{\beta_q}\,z+h_5\sin\sqrt{\beta_q}\,z),$$

μ_n, α_p, β_q — положительные корни уравнений:

$$\operatorname{tg}\sqrt{\mu}\,l=\frac{-(h_1+h_2)\sqrt{\mu}}{h_1h_2-\mu},\quad \operatorname{tg}\sqrt{\alpha}\,k=\frac{-(h_3+h_4)\sqrt{\alpha}}{h_3h_4-\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\sqrt{\beta}\,m=\frac{-(h_5+h_6)\sqrt{\beta}}{h_5h_6-\beta}.$$

10. а) $\omega_{n,p,q}=a\sqrt{\lambda_{n,p,q}}=a\pi\sqrt{\frac{n^2}{l^2}+\frac{p^2}{k^2}+\frac{q^2}{m^2}}$

$(n, p, q=1, 2, \ldots);$

б) $\omega_{n,p}=a\mu_{n,p}\frac{1}{R}$, где $\mu_{n,p}$ — корень номера p уравнения

$J'_{n+\frac{1}{2}}(\mu)-\frac{1}{2\mu}J_{n+\frac{1}{2}}(\mu)=0$, R — радиус сферы, $n=0, 1, 2, \ldots,$

$p=1, 2, \ldots$. Здесь $J_k(z)$ — бесселевы функции k-го порядка (см. гл. XI).

$$\textbf{11. } u(x, t)=\frac{8l}{a\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{2lg}{\pi a(2n+1)^3}\cos\frac{2n+1}{2l}at+\frac{v_0}{(2n+1)^2}\times\right.$$
$$\left.\times\sin\frac{2n+1}{2l}at\right\}\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x-\frac{g}{a^2}\left(\frac{x^2}{2}-lx\right).$$

$$\textbf{12. } u(x, t)=\frac{F_0}{ES}x-\frac{8F_0l}{ES\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x\cos\frac{2n+1}{2l}\pi at.$$

Указание к задачам 12—23. Искать решение в виде суммы двух функций $u=v(x)+w(x, t)$, где $v(x)$ удовлетворяет уравнению и краевым условиям рассматриваемой неоднородной краевой задачи, а w — решение соответствующей однородной краевой задачи; $v(x)$ описывает стационарный режим, w — отклонение от него.

$$\textbf{13. } u(x, t)=u_3+v(x)+\sum_{n=1}^{\infty}C_ne^{-(a^2\lambda_n+h)t}\cdot\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

где $v(x)=\dfrac{1}{\operatorname{sh}\dfrac{l\sqrt{h}}{a}}\left[(u_1-u_3)\operatorname{sh}\dfrac{\sqrt{h}}{a}(l-x)+(u_2-u_3)\operatorname{sh}\dfrac{\sqrt{h}}{a}x\right]$,

$$\lambda_n=\frac{\pi^2n^2}{l^2},\quad C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\{f(\xi)-v(\xi)-u_3\}\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi.$$

$$\textbf{14. } u(x, t)=u_3+v(x)+\sum_{n=1}^{\infty}C_ne^{-(a^2\lambda_n+h_3)t}\times$$
$$\times(h_1\sin\sqrt{\lambda_n}x+\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x),$$

где $v(x)=A_1e^{\frac{\sqrt{h_3}}{a}x}+A_2e^{-\frac{\sqrt{h_3}}{a}x}$. Коэффициенты A_1 и A_2 определяются из уравнений

$$A_1-A_2=\frac{h_1(u_3-u_1)}{\sqrt{h_3}-ah_1}a,$$

$$A_1\left(h_2+\frac{\sqrt{h_3}}{a}\right)e^{\frac{\sqrt{h_3}}{a}l}+A_2\left(h_2-\frac{\sqrt{h_3}}{a}\right)e^{-\frac{\sqrt{h_3}}{a}l}=h_2u_2,$$

$$C_n=\frac{1}{\|\Phi_n\|^2}\int_0^l\{\varphi(\xi)-u_3-v(\xi)\}\,\Phi_n(\xi)\,d\xi,$$

$$\Phi_n(x)=h_1\sin\sqrt{\lambda_n}x+\sqrt{\lambda_n}\cdot\cos\sqrt{\lambda_n}x.$$

λ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}l=\dfrac{h_1+h_2}{\lambda-h_1h_2}\sqrt{\lambda}$.

15. $Q(t)=S\int\limits_0^l u(x,\ t)\,dx$, где S — площадь поперечного сечения цилиндра, $u(x,\ t)=u_0-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4u_0}{\pi(2n+1)}e^{-a^2\lambda_n t}\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x$,

$$\lambda_n=\frac{\pi^2}{4l^2}(2n+1)^2,\ \text{или}\ Q(t)=-D\int\limits_0^t u_x(0,\ \tau)\,d\tau.$$

16. $Q(t)=S\int\limits_0^l u(x,\ t)\,dx \quad (a^2u_{xx}-\beta u=u_t)$, где $u(x,\ t)=$
$=v(x)+\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n e^{-a^2\lambda_n t}\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x\cdot e^{-\beta t}$,

$$v(x)=\frac{au_0}{\sqrt{\beta}\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\beta}}{a}l}\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\beta}}{a}(l-x),\quad C_n=\frac{-2}{l}\int\limits_0^l v(\xi)\sin\frac{2n+1}{2l}\pi\xi\,d\xi.$$

17. $v(x,\ t)=E_0-\frac{4(E_0-v_0)}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}e^{-a^2\lambda_n t}\cos\frac{2n+1}{2l}\pi x$,
где $\lambda_n=\frac{\pi^2(2n+1)^2}{4l^2}$, $a^2=\frac{1}{RC}$.

18. $v(x,\ t)=\frac{E_0R(l-x)}{R_0+Rl}+2E_0R^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-a^2\lambda_n t}\times$

$$\times\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(l-x)}{\sqrt{\lambda_n}\,[R(R_0+Rl)+lR_0^2\lambda_n]\cos\sqrt{\lambda_n}\,l},$$

где $a^2=\frac{1}{RC}$, λ_n — положительные корни уравнения $R\cdot\operatorname{tg}\sqrt{\lambda_n}\,l=$
$=-R_0\sqrt{\lambda}$.

19. $H(x,\ t)=H_0-\frac{4H_0}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}e^{-a^2\lambda_n t}\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x$, где
$a^2=\frac{c^2}{4\pi\sigma\mu}$, $\lambda_n=\frac{\pi^2(2n+1)^2}{4l^2}$.

20. $u(x,\ t)=\frac{2a^2Q}{k\cdot l}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\lambda_n}\Phi_n(x_0)\left(1-e^{-a^2\lambda_n t}\right)\right\}\Phi_n(x)$, где
$\lambda_n=\frac{\pi^2}{4l^2}(2n+1)^2$, $\Phi_n(x)=\cos\frac{2n+1}{2l}\pi x$, $ku_{xx}+Q\delta(x-x_0)=c\rho u_t$,
k — коэффициент теплопроводности.

21. $u(x,t)=u_0+\frac{ql}{k}\left(1-\frac{x}{l}\right)-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8l}{\pi^2}\left[\frac{q}{k}+(-1)^n\frac{2n+1}{2l}\pi u_0\right]\times$
$\times e^{-a^2\lambda_n t}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{2n+1}{2l}\pi x$, где $\lambda_n=\frac{(2n+1)^2}{4l^2}$, k — коэффициент теплопроводности.

22. $u(x,t)=v(x)+\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-a^2\lambda_n t}\Phi_n(x)$, где

$$v(x)=\frac{-Q}{2k}x+C_0(x+h),\qquad C_0=\frac{Ql}{k}\left(1+\frac{hl}{2}\right)\frac{1}{1+hl+h^2},$$

$$C_n=\frac{-1}{\|\Phi_n\|^2}\int_0^l v(\xi)\,\Phi_n(\xi)\,d\xi,\qquad \Phi_n(x)=\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x+h\sin\sqrt{\lambda_n}x.$$

λ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}\,l=\frac{2h\sqrt{\lambda}}{\lambda-h^2}$.

23. $u(r,t)=u_1+2(u_1-u_0)hR^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{C_n}{r}e^{-a^2\frac{\mu_n^2}{l^2}t}\sin\frac{\mu_n}{R}r$,

где $C_n=\frac{\sqrt{\mu_n^2+(hR-1)^2}}{\mu_n(\mu_n^2+h^2R^2-hR)}$, μ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{tg}\mu=\frac{-\mu}{Rh-1}$, h — коэффициент теплообмена в краевом условии $u_r(R,t)+h[u(R,t)-u_1]=0$.

24. $\Delta u=0$, $u_r(R,\varphi)=\frac{Q}{\pi kR}$, $u_\varphi(r,0)=\frac{Qr}{2kR}$, $u_\varphi(r,\pi)=\frac{-Qr}{2kR}$;

$$u(r,\varphi)=\frac{Qr}{2kR}\sin\varphi+\frac{Q}{2\pi k}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{2n+1}\frac{\cos(2n+1)\varphi}{n(n+1)}.$$

Указание. Сначала найти решение уравнения Лапласа вида $r\cdot v(\varphi)$, удовлетворяющее только условиям: $u_\varphi(r,0)=\frac{Q\cdot r}{2kR}$, $u_\varphi(r,\pi)=\frac{-Qr}{2kR}$, и отклонение $w(r,\varphi)$ от него. Тогда $u=rv(\varphi)+$ $+w(r,\varphi)$.

25. $a^2\theta_{xx}=\theta_{tt}$, $\theta(x,0)=\frac{\alpha x}{l}$, $\theta_t(x,0)=0$;

$$\theta(0,t)=0;\qquad \theta_x(l,t)=\frac{-I_0}{GI}\theta_{tt}(l,t),\qquad a^2=\sqrt{\frac{G}{\rho}}.$$

$$\theta(x, t) = 4\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(I_1 - I_0\mu_n^2)\sin\frac{\mu_n}{l}x}{I_0\mu_n^2(2\mu_n - \sin 2\mu_n)} \cos\frac{a\mu_n}{l}t,$$ где I — полярный момент инерции поперечного сечения стержня; G — модуль сдвига, I_1 — момент инерции стержня, ρ — линейная плотность стержня, μ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{tg}\mu = \frac{I_1}{I_0 \cdot \mu}$.

26. а) $$u(x, t) = \frac{4a\Phi_0 l^2}{\pi^2 T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega l \sin\frac{2n+1}{l}a\pi t - (2n+1)\pi a \sin\omega t}{(2n+1)^2[\omega^2 l^2 - (2n+1)^2\pi^2 a^2]} \times \sin\frac{2n+1}{l}\pi x;$$

б) Заменить в предыдущей формуле $\sin\omega t$ на $\cos\omega t$ $\left(\omega \neq \frac{k\pi}{l},\ k = 1, 2, 3, \ldots\right)$.

27. $$u(x, t) = \frac{2F_0 al}{\pi T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega l \sin\frac{\pi n}{l}at - \pi a n \sin\omega t}{(\omega^2 l^2 - \pi^2 a^2 n^2)\,n} \sin\frac{\pi n}{l}t \sin\frac{\pi n}{l}x$$

$$\left(\omega \neq \frac{\pi n}{l},\quad n = 1, 2, \ldots\right).$$

Аналогично для $F_0\cos\omega t$.

28. $$u(x, t) = \frac{-a^2}{k}\sin\frac{\pi x}{l}\int_0^t e^{-\frac{\pi^2 a^2}{l^2}(t-\tau)}\Phi(\tau)\,d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{\frac{-\pi^2 n^2 a^2}{l^2}t}\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

где k — коэффициент теплопроводности, $C_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi$.

29. $$u(x, t) = \frac{2Al}{c\rho}e^{-ht}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{\pi n v_0}{l}t - \frac{v_0 l}{\pi n}\cos\frac{\pi n v_0}{l}t + \frac{v_0 l}{\pi n}\right) \times \frac{\sin\frac{\pi n}{l}x}{l^2 v_0^2 + \pi^2 n^2 a^2}.$$

Указание. Уравнение для $u(x, t)$ имеет вид

$$a^2 u_{xx} - hu + \frac{A}{c\rho}\delta(x - v_0 t) = u_t, \qquad 0 < t < \frac{l}{v_0}.$$

30. а) При $\omega \neq \frac{2n+1}{2l}\pi a \quad (n=0, 1, 2, \ldots)$

$$u(x, t) = v(x)\sin\omega t + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin\frac{2n+1}{2l}\pi a t \cdot \sin\frac{2n+1}{2l}x,$$

$$v(x) = \frac{Aa}{ES}\frac{\sin\frac{\omega}{a}x}{\cos\frac{\omega}{a}l}, \quad C_n = \frac{-4\omega}{\pi a(2n+1)}\int_0^l v(\xi)\sin\frac{2n+1}{2l}\pi\xi\, d\xi;$$

б) при $\omega = \frac{2n_0+1}{2l}\pi a$

$$u(x, t) = v_1(x)\sin\omega t + v_2(x)\cdot t\cos\omega t + \sum_{\substack{n=0\\ n\neq n_0}}^{\infty} C_n \sin\frac{2n+1}{2l}\pi a t \cdot \sin\frac{2n+1}{2l}\pi x,$$

где

$$C_n = \frac{-4}{\pi a(2n+1)}\int_0^l [\omega v_1(\xi) + v_2(\xi)]\sin\frac{2n+1}{2l}\pi\xi\, d\xi,$$

$$v_1(x) = \frac{A}{lES}(-1)^{n_0+1}\left\{\frac{x}{2}\cos\frac{\omega}{a}x + \frac{5a}{8\omega}\sin\frac{\omega}{a}x + \frac{3a}{8\omega}\sin\frac{3\omega}{a}x\right\},$$

$$v_2(x) = \frac{2aA}{lES}(-1)^{n_0}\sin\frac{\omega}{a}x.$$

Аналогично для $F = A\cos\omega t$.

Указание. Искать решение в случае а) в виде $u = v(x)\sin\omega t + w(x, t)$; в случае б) в виде $u = v_1(x)\sin\omega t + v_2(x)t\cos\omega t + w(x, t)$, где $v(x)\sin\omega t$ (соответственно, $v_1(x)\sin\omega t + v_2(x)t\cos\omega t$) удовлетворяет уравнению и краевым условиям задачи.

31. $$u(r, t) = F_1(r) + t\cdot F_2(r) - \frac{2qR^2}{k_1 r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^2\cos\mu_n}e^{-\frac{a^2\mu_n^2}{R^2}t} \times$$

$\times \sin\frac{\mu_n}{R}r$, μ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{tg}\mu = \mu$,

$$F_1(r) = u_0 + \frac{qR}{k_1}\frac{3R^2-5r^2}{10R^2}, \quad F_2(r) = \frac{3qa^2}{k_1 R}.$$

Указание. Искать решение задачи

$$a^2 v_{rr} = v_t, \quad v(r, 0) = u_0 r, \quad k_1[Rv_r(R, t) - v(R, t)] = q \quad \left(u = \frac{v}{r}\right)$$

в виде $v = f_1(r) + t\cdot f_2(r) + w(r, t)$, где $\frac{f_1 + tf_2}{r}$ — установившийся режим, удовлетворяющий уравнению и краевым условиям задачи, а $\frac{w}{r}$ — отклонение от него; w есть решение однородной краевой задачи.

32. $u(x, t)$ есть решение задачи

$$\frac{\partial}{\partial x}[k(x)u_x] = \rho(x)u_t, \quad u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x),$$

где

$$k(x) = \begin{cases} k_1, & 0 < x < x_0, \\ k_2, & x_0 < x < l, \end{cases} \qquad \rho(x) = \begin{cases} \rho_1, & 0 < x < x_0, \\ \rho_2, & x_0 < x < l, \end{cases}$$

или

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1(x, t), & 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\ u_2(x, t), & x_0 \leqslant x \leqslant l, \end{cases}$$

$$a_1^2(u_1)_{xx} = (u_1)_t, \quad a_2^2(u_2)_{xx} = (u_2)_t, \quad a_i^2 = \frac{k_i}{\rho_i} \qquad (i = 1, 2),$$

$$u_1(0, t) = 0, \quad u_2(l, t) = 0, \quad u_1(x_0, t) = u_2(x_0, t);$$

$$k_1 u_{1x}(x_0, t) = k_2 u_{2x}(x_0, t), \quad u(x, 0) = f(x);$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\mu_n^2 t}\Phi_n(x), \text{ где}$$

$$\Phi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sin\frac{\mu_n}{a_1}x_0}\sin\frac{\mu_n}{a_1}x_1, & 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\ \dfrac{1}{\sin\frac{\mu_n}{a_2}(l - x_0)}\sin\frac{\mu_n}{a_2}(l - x_0), & x_0 \leqslant x \leqslant l, \end{cases}$$

$$C_n = \frac{1}{\|\Phi_n\|^2}\int_0^l f(x)\rho(x)\Phi_n(x)\,dx,$$

μ_n — положительные корни уравнения $\frac{k_1}{a_1}\operatorname{ctg}\frac{\mu}{a_1}x_0 = \frac{k_2}{a_2}\operatorname{ctg}\frac{\mu}{a_2}(x_0 - l)$. Собственные функции $\Phi_n(x)$ ортогональны на отрезке $[0, l]$ с весом $\rho(x)$.

33. $u(x, t)$ есть решение задачи

$$a^2 u_{xx} = \left[1 + \frac{C_0}{C}\delta(x - x_0)\right]u_t,$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x),$$

или

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1(x, t), & 0 < x < x_0, \\ u_2(x, t), & x_0 < x < l, \end{cases}$$

$$a^2(u_i)_{xx} = (u_i)_t \qquad (i = 1,2), \quad u_1(0, t) = 0 = u_2(l, t),$$

$$u_1(x_0, t) = u_2(x_0, t), \quad u(x, 0) = f(x);$$

$$k u_{2x}(x_0, t) - k u_{1x}(x_0, t) = C_0 u_t(x_0, t),$$

$$u(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2\mu_n^2 t}\Phi_n(x),\quad \text{где}\quad C_n=\frac{1}{\|\Phi_n\|^2}\int_0^l \rho(x) f(x)\Phi_n(x)\,dx,$$

$$\Phi_n(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\mu_n x}{\sin\mu_n x_0}, & 0\leqslant x\leqslant x_0\\ \dfrac{\sin\mu_n(l-x)}{\sin\mu_n(l-x_0)}, & x_0\leqslant x\leqslant l,\end{cases}$$ μ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{ctg}\mu x_0-\operatorname{ctg}\mu(l-x_0)=\dfrac{C_0}{C\rho}\mu$.

Собственные функции $\Phi_n(x)$ ортогональны на отрезке $[0, l]$ с весом $\rho(x)=1+\dfrac{C_0}{C}\delta(x-x_0)$.

34. $u(x, t)=$

$$=E_0+2lE_0C\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\mu_n^2 t}{l^2RC}}\frac{C_0\mu_n\sin\mu_n\left(1-\frac{x}{l}\right)-Cl\cos\mu_n\left(1-\frac{x}{l}\right)}{(l\cdot C\cdot C_0+l^2C^2+C_0^2\mu_n^2)\mu_n\sin\mu_n},$$

где μ_n — положительные корни уравнения $\mu\operatorname{tg}\mu=\dfrac{Cl}{C_0}$.

Указание. Собственные функции задачи ортогональны на отрезке $[0, l]$ с весом $\rho(x)=1+\dfrac{C_0}{C}\delta(x-l)$.

35. а) $u(r, \varphi)=\dfrac{A}{R}r\cos\varphi=\dfrac{A}{R}x$, б) $u=A+\dfrac{B}{R}y$, в) $u=Axy$, г) $u=\dfrac{A+B}{2}+\dfrac{B-A}{2R^2}(x^2-y^2)$.

Указание к задачам 35—41. См. пример 1 гл. VI, § 3.

36. Задача а) поставлена неправильно, так как необходимое условие $\displaystyle\int_C\frac{\partial u}{\partial n}ds=0$ не выполняется; б) $u=ARx+D$; в) $u=\dfrac{A}{2}R(x^2-y^2)$; г) $u=\left(A+\dfrac{3}{4}B\right)y-\dfrac{B}{12R^2}[3(x^2+y^2)y-4y^3]+D$, где D — произвольная постоянная.

37. $u=u(r)=u_1+(u_2-u_1)\dfrac{\ln\frac{r}{R_1}}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$. Емкость единицы длины цилиндрического конденсатора равна $C=\dfrac{1}{\ln R_2-\ln R_1}$.

Указание. Емкость C проводника, ограниченного поверхностью S, равна для трех измерений

$$C=\frac{-1}{4\pi u_0}\int_S\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma,$$

для двух измерений $C=\frac{-1}{2\pi u_0}\int\limits_L \frac{\partial u}{\partial n}\,ds$, где L — контур, u_0 — потенциал проводника; $\frac{\partial u}{\partial n}=E_n$ есть нормальная составляющая вектора напряженности электрического поля.

38. $C=\dfrac{\varepsilon_1}{u_0\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{c}-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right]}$.

Указание. Решать задачу
$\Delta u_1=0$ для $a<r<c$, $\Delta u_2=0$ для $c<r<b$, $u_1(a)=u_0$, $u_2(b)=0$, $u_1(c)=u_2(c)$,

$$\varepsilon_1\frac{\partial u_1}{\partial n}\bigg|_{r=c}=\varepsilon_2\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{r=c},$$

u_0 — разность потенциалов на обкладках конденсатора.

39. $$u=u_0\frac{\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2}\frac{1}{c}}{\frac{1}{R}+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2}\frac{1}{c}}\quad \text{для } R<r<c,$$

$$u=u_0\frac{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{1}{r}}{\frac{1}{R}+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2}\frac{1}{c}}\quad \text{для } r>c.$$

40. а) $u=u_2+\frac{A}{4}(r^2-R_2^2)+\frac{u_1-u_2+0{,}25A(R_2^2-R_1^2)}{\ln R_2-\ln R_1}\ln\frac{R_2}{r}$;

б) $u=u_1+\frac{A}{4}(r^2-R_1^2)+R_2\left(u_2-\frac{A}{2}R_2\right)\ln\frac{R_2}{r}$.

41. $u=\frac{1}{6}(r^2-R_1^2)-\frac{1}{6}R_1R_2(R_1+R_2)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{r}\right)$.

42. $$u(x,y)=\frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\operatorname{ch}\frac{2n+1}{2b}\pi x\cdot\cos\frac{2n+1}{2b}\pi y}{(2n+1)\operatorname{ch}\frac{2n+1}{2b}\pi a}.$$

Указание. См. пример 2 гл. VI, § 3.

ГЛАВА V

1. $$u(x,t)=\frac{E_0}{2}e^{-x\sqrt{RG}}\left\{1-\Phi\left(x\sqrt{\frac{RC}{4t}}-\sqrt{\frac{Gt}{C}}\right)\right\}+$$
$$+\frac{E_0}{2}e^{x\sqrt{RG}}\left\{1-\Phi\left(x\sqrt{\frac{RC}{4t}}-\sqrt{\frac{Gt}{C}}\right)\right\}.$$

2. $$G(r,r_0;t)=\frac{1}{8\pi rr_0\sqrt{\pi t}}\left[e^{-\frac{(r-r_0)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(r+r_0)^2}{4a^2t}}\right].$$

Указание. Заменой $u=\frac{v}{r}$ свести задачу к одномерной:

$$a^2v_{rr}=v_t, \quad v(r, 0)=\frac{r}{4\pi}\cdot\frac{\delta(r-r_0)}{r_0^2}.$$

3. $u(r, t)=\frac{u_0}{2}\left[\Phi\left(\frac{r+R}{\sqrt{4Dt}}\right)-\Phi\left(\frac{r-R}{\sqrt{4Dt}}\right)\right]+$

$$+\frac{u_0}{r}\sqrt{\frac{Dt}{\pi}}\left[e^{-\frac{(r-R)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(r+R)^2}{4a^2t}}\right].$$

4. а) $u(x,y,z,t)=u(\sqrt{x^2+y^2+(z-z_0)^2}, t)+u(\sqrt{x^2+y^2+(z+z_0)^2}, t)$,

б) $u(x,y,z,t)=u(\sqrt{x^2+y^2+(z-z_0)^2}, t)-u(\sqrt{x^2+y^2+(z+z_0)^2}\, t)$,

где $u(r, t)$ — решение предыдущей задачи.

5. $u(x, t)=\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t}\left\{\Phi\left(\frac{b-x}{\sqrt{4a^2(t-\tau)}}\right)+\Phi\left(\frac{b+x}{\sqrt{4a^2(t-\tau)}}\right)-\right.$

$$\left.-\Phi\left(\frac{a+x}{\sqrt{4a^2(t-\tau)}}\right)-\Phi\left(\frac{a-x}{\sqrt{4a^2(t-\tau)}}\right)\right\}Q(\tau)\,d\tau.$$

6. $u(r, t)=\frac{1}{\sqrt{4a^2\pi t}}\frac{1}{r}\int\limits_0^\infty \xi^2\varphi(\xi)\left[e^{-\frac{(r-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(r+\xi)^2}{4a^2t}}\right]d\xi+$

$$+\frac{1}{r\sqrt{4\pi a^2}}\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty\frac{\xi^2}{\sqrt{t-\tau}}f(\xi, \tau)\left[e^{-\frac{(r-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(r+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\xi\,d\tau.$$

7. $G(r, r_0; t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty e^{-a^2\lambda^2t}J_0(\lambda r)J_0(\lambda r_0)\lambda\,d\lambda=$

$$=\frac{1}{4\pi a^2t}e^{-\frac{r^2+r_0^2}{4a^2t}}I_0\left(\frac{rr_0}{2a^2t}\right).$$

Указание. Решить задачу $a^2\left(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r\right)=u_t, \quad u(r, 0)=$
$=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{r_0}\delta(r-r_0), \; |u|<\infty.$

Решение ищется в виде $u(r, t)=$

$$=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty U(\rho, t)J_0(\lambda\rho)J_0(\lambda r)\lambda\,d\lambda\,d\rho \quad \text{(см. главу XI)}.$$

8. $u(r, t)=\frac{1}{2a^2t}e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}\int\limits_0^\infty\xi\varphi(\xi)e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}I_0\left(\frac{r\xi}{2a^2t}\right)d\xi+$

$$+\frac{1}{2a^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty\frac{\xi f(\xi, \tau)}{t-\tau}e^{-\frac{r^2+\xi^2}{4a^2(t-\tau)}}I_0\left(\frac{r\xi}{2a^2(t-\tau)}\right)d\xi\,d\tau.$$

9. $G(x, x_0; t)=\frac{e^{-ht}}{\sqrt{4\pi a^2t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}.$

ГЛАВА VI

1. а) $G(M, P)=\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r_{MP}}-\ln\frac{R}{r_0 r_{MP_1}}\right)$, где P_1 — точка, симметричная точке P относительно окружности, r_0 — расстояние точки P от центра круга; б) $G(M, P)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{MP}}-\frac{R}{r_0 r_{MP_1}}\right)$.

2. $G(M, P)=\sum_{m=0}^{n-1}[G_{\text{кр}}(M, P_m)-G_{\text{кр}}(M, \bar{P}_m)]$, где $G_{\text{кр}}(M, P)$ — функция Грина для внутренности круга, P_m и $\bar{P}_m$ — точки с полярными координатами $\left(r_0, \varphi_0+\frac{2m}{n}\pi\right)$ и $\left(r_0, \frac{2m}{n}\pi-\varphi_0\right)$ соответственно; (r_0, φ_0) — координаты точки P.

3. а) $G(M, P)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4\pi}\left(\frac{e_n}{r_{MP_n}}-\frac{e_n'}{r_{MP_n'}}\right)$, где P_n — точки с координатами $(\rho_n, \theta_0, \varphi_0)$, P_n' — точки с координатами $(\rho_n', \theta_0, \varphi_0)$, $(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$ — координаты точки P,

$$e_n=\begin{cases}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k & \text{при } n=2k,\\ \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{k+1} & \text{при } n=2k+1,\end{cases}\qquad e_n'=\begin{cases}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k\frac{R_1}{\rho_0} & \text{при } n=2k,\\ \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k\frac{R_2}{\rho_0} & \text{при } n=2k+1,\end{cases}$$

$$\rho_n=\begin{cases}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2k}\rho_0 & \text{при } n=2k,\\ \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2k+2}\rho_0 & \text{при } n=2k+1,\end{cases}\qquad \rho_n'=\begin{cases}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2k}\frac{R_1^2}{\rho_0} & \text{при } n=2k,\\ \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2k}\frac{R_2}{\rho_0} & \text{при } n=2k+1.\end{cases}$$

б) $G(M, P)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\ln\frac{e_n}{r_{MP_n}}-\ln\frac{e_n'}{r_{MP_n'}}\right)$, где P_n — точки с координатами (ρ_n, φ_0), P_n' — точки с координатами (ρ_n', φ_0), (ρ_0, φ_0) — координаты точки P; ρ_n, ρ_n', e_n и e_n' определяются по тем же формулам, что и в случае а).

4. $G(M, P)=\frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{r_{MP_n}}-\frac{1}{r_{MP_n'}}\right\}$, где P_n — точки с координатами (x_0, y_0, z_0+2nh), P_n' — точки с координатами $(x_0, y_0, z_0-(2n+1)h)$, (x_0, y_0, z_0) — координаты точки P.

ГЛАВА VII

1. $$u(r)=\begin{cases} B, \ r\leqslant R_1, \\ -4\pi\int\limits_{R_1}^{r}\left(\frac{1}{\xi}-\frac{1}{r}\right)\xi^2\rho(\xi)\,d\xi+C, \qquad R_1\leqslant r\leqslant R_2, \\ \frac{D}{r}, \qquad R_2\leqslant r, \end{cases}$$

где $D=4\pi\int\limits_{R_1}^{R_2}\xi^2\rho(\xi)\,d\xi$, $B=C=\frac{D}{R_2}+4\pi\int\limits_{R_1}^{R_2}\left(\frac{1}{\xi}-\frac{1}{R_2}\right)\xi^2\rho(\xi)\,d\xi$.

2. $$u(r)=\begin{cases} 4\pi R\rho_0, & r\leqslant R, \\ \frac{4\pi R^2\rho_0}{r}, & r\geqslant R. \end{cases}$$

3. $$u(r)=\begin{cases} 2\pi\rho_0\left(R^2-\frac{r^2}{3}\right)-\frac{M}{r_1}, & r\leqslant R, \\ M\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right), & r\geqslant R, \end{cases}$$

где $M=\frac{4}{3}\pi R^3\rho_0$, $r=\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}$, $r_1=\sqrt{x^2+y^2+(z+h)^2}$, ρ_0 — плотность зарядов, $(0,\ 0,\ h)$ — координаты центра шара радиуса R.

Указание. Для вычисления влияния идеально проводящей плоскости $z=0$ надо зеркально отразить исходную сферу относительно плоскости $z=0$. Решение в этом случае представится в виде

$$u(r)=\begin{cases} C-\frac{2}{3}\pi\rho_0 r^2-\frac{M}{r_1}, & r<R, \\ M\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right), & r>R, \end{cases}$$

C определится из условия сопряжения решений при $r=R$.

4. $$u(r)=\begin{cases} M\left(\frac{1}{2}-\ln R-\frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2}\right), & r\leqslant R, \\ M\ln\frac{1}{r}, & r\geqslant R, \end{cases}$$

где $M=\pi R^2\rho_0$, ρ_0 — плотность зарядов, R — радиус круга.

5. Потенциал простого слоя отрезка $0\leqslant x\leqslant l$ с плотностью ρ_0 равен

$$v(x,\ y)=\rho_0\int\limits_0^l\ln\frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2+y^2}}\,d\xi.$$

6. $$w(M)=\nu_0\int\limits_0^l\frac{\cos\varphi}{r_{MP}}\,d\xi_P=\nu_0 y\int\limits_0^l\frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-x)^2+y^2}}.$$

7. а) $w(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{(\rho^2 - R^2) f(\theta)\, d\theta}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\theta - \varphi)}$;

б) $w(x, y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{y f(\xi)\, d\xi}{(\xi - x)^2 + y^2}$.

ГЛАВА XI

1. $u(r, t) = 8A \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^3 J_1(\alpha_n)} e^{-\frac{a^2\alpha_n^2}{R^2} t} J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right)$, где α_n — положительные корни уравнения $J_0(\alpha) = 0$.

2. $u(r, t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{a^2\alpha_n^2}{R^2} t} J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right)$, где α_n — положительные корни уравнения $\alpha J_0'(\alpha) + hRJ_0(\alpha) = 0$; $C_n = \frac{1}{\left\| J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right) \right\|^2} \times$ $\times \int\limits_0^R f(\xi) \xi J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} \xi\right) d\xi$; $f(r)$ — ограниченное решение задачи $\Delta f +$ $+ \frac{J \cdot Q}{k} = 0$, $f'(R) + hf(R) = 0$, $f(r) = \frac{Q_1}{6}(R^3 - r^3) + \frac{Q_1 R^2}{2h}$, $Q_1 = \frac{J \cdot Q}{k}$.

3. $H(r, t) = H_0 - 2H_0 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n J_1(\alpha_n)} e^{-\frac{a^2\alpha_n^2 t}{R^2}} J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right)$, где α_n — положительные корни уравнения $J_0(\alpha) = 0$. Поток магнитной индукции через поперечное сечение цилиндра равен $\Phi = \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} \mu H(r, t) \times$ $\times r\, dr\, d\varphi$, где μ — магнитная проницаемость.

4. $u(r, t) = f(r) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n \cdot e^{-a^2 \lambda_n t} \Phi_n(r)$, где $\Phi_n(r) =$ $= J_0(\sqrt{\lambda_n} R_1) N_0(\sqrt{\lambda_n} r) - N_0(\sqrt{\lambda_n} R_1) J_0(\sqrt{\lambda_n} r)$, $C_n = \frac{1}{\|\Phi_n(r)\|^2} \times$ $\times \int\limits_{R_1}^{R_2} r f(r) \Phi_n(r)\, dr$, $f(r) = \frac{qR_2}{k} \ln \frac{r}{R_1}$; λ_n — положительные корни уравнения $\Phi_n'(R_2) = 0$.

5. $a^2\Delta u+\frac{Q}{\rho}=u_{tt},\ u(R,\ t)=0,\ \ u(r,\ 0)=u_t(r,\ 0)=0,\ |u|<\infty,$

$u(r,\ t)=f(r)-\frac{2R^2Q}{\rho a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^2 J_1(\alpha_n)}J_0\left(\frac{\alpha_n}{R}r\right)\cos\frac{a\alpha_n}{R}t$, где α_n — положительные корни уравнения $J_0(\alpha)=0$, $f(r)=\frac{R^2-r^2}{4a^2\rho}Q$ — стационарный режим.

6. а) $u(r,\ t)=f(r)\sin\omega t+\frac{2A\omega R^2}{a\rho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\alpha_n}{R}r\right)\sin\frac{\alpha_n}{R}at}{\alpha_n^2(\omega^2R^2-a^2\alpha_n^2)J_1(\alpha_n)}$

$\left(\omega\right.$ не совпадает ни с одним из собственных значений $\left.\frac{\alpha_n}{R}a\right)$,

$$f(r)=\frac{A}{\rho\omega^2}\left\{\frac{J_0\left(\frac{\omega}{a}r\right)}{J_0\left(\frac{\omega}{a}R\right)}-1\right\}.$$

б) $u(r,\ t)=f(r)\cos\omega t+\frac{2AR}{\rho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\alpha_n}{R}r\right)\cos\frac{\alpha_n a}{R}t}{\alpha_n(\omega^2R^2-a^2\alpha_n^2)J_1(\alpha_n)}$;

в) $u(r,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}J_0\left(\frac{\alpha_n}{R}r\right)\Psi_n(t)$, где

$$\Psi_n(t)=B_n\int_0^t\sin\frac{a\alpha_n}{R}(t-\tau)\sin\omega\tau\,d\tau,$$

$B_n=\frac{2A}{a\alpha_n J_1^2(\alpha_n)}\left[R_2J_1\left(\frac{\alpha_n}{R}R_2\right)-R_1J_1\left(\frac{\alpha_n}{R}R_1\right)\right]$; в случае $R_1=R_2$

$$B_n=\frac{2A}{Ra\alpha_n}\frac{J_0\left(\frac{\alpha_n}{R}R_1\right)}{J_1^2(\alpha_n)}.$$

7. а) $u(r,\ t)=f(r)\sin\omega t-\sum_{n=1}^{\infty}C_nJ_0\left(\frac{\alpha_n r}{R}\right)\sin\frac{a\alpha_n}{R}t,$

где $C_n=\frac{2A\omega}{a\alpha_nRJ_0\left(\frac{\omega}{a}R\right)J_1^2(\alpha_n)}\int_0^R rJ_0\left(\frac{\omega}{a}r\right)J_0\left(\frac{\alpha_n}{R}r\right)dr,$

$f(r)=A\frac{J_0\left(\frac{\omega}{a}r\right)}{J_0\left(\frac{\omega}{a}R\right)}$, α_n — положительные корни уравнения $J_0(\alpha)=0$;

б) $u(r, t) = f(r)\cos\omega t - \sum_{n=1}^{\infty} D_n J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right)\cos\frac{a\alpha_n}{R} t,$

где $D_n = C_n \frac{aR\alpha_n}{\omega}$.

8. $u(r, \varphi, t)$ есть решение задачи:

$$a^2\Delta u = u_{tt}, \quad u(R, \varphi, t) = 0, \quad u(r, \varphi, 0) = 0,$$
$$u_t(r, \varphi, 0) = P\cdot\frac{1}{r}\delta(r - r_1)\,\delta(\varphi - \varphi_1),$$

$$u(r, \varphi, t) = \frac{2P}{\pi a R}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos n(\varphi - \varphi_1)\, J_n\left(\frac{\alpha_k^{(n)}}{R} r_1\right)}{\varepsilon_n \alpha_k^{(n)}\left[J_n'(\alpha_k^{(n)})\right]^2} J_n\left(\frac{\alpha_k^{(n)}}{R} r\right)\sin\frac{a\alpha_k^{(n)}}{R} t,$$

где $\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n \neq 0, \\ 2, & n = 0, \end{cases}$ $\alpha_k^{(n)}$ — положительные корни уравнений $J_n(\alpha) = 0$.

9. $u(r, z) = V_0 - 2(V_0 - V_1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\frac{\alpha_n}{R} z\, J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right)}{\operatorname{sh}\frac{\alpha_n}{R} h\cdot\alpha_n J_1(\alpha_n)}$, где α_n — положительные корни уравнения $J_0(\alpha) = 0$.

10. $u(r, z) = \frac{Iz}{\pi R^2\sigma} + \frac{2I}{\pi R_1\sigma}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\frac{\alpha_n}{R} z J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} R_1\right) J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right)}{\operatorname{ch}\frac{\alpha_n}{R}\cdot h\cdot\alpha_n^2\cdot J_0^2(\alpha_n)} + \mathrm{const},$

где α_n — положительные корни уравнения $J_1(\alpha) = 0$.

11. $u(r, z) = \frac{Q}{2\pi k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^2 J_1^2(\alpha_n)}\left[1 - \frac{R\cdot h_1\operatorname{ch}\frac{\alpha_n}{R} z}{\alpha_n\operatorname{sh}\frac{\alpha_n}{2R} h + Rh_1\operatorname{ch}\frac{\alpha_n}{2R} h}\right]\times$
$\times J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right)$, где α_n — корни уравнения $J_0(\alpha) = 0$. Указание. Искать решение $u(r, z)$ в виде $u = v(r) + w(r, z)$. Постановка задач для $v(r)$ и $w(r, z)$:

v: $\quad \Delta v + \frac{Q}{2\pi}\frac{\delta(r)}{r} = 0, \quad |v| < \infty, \quad v(R) = 0;$

w: $\quad \Delta w = 0, \quad |w| < \infty, \quad m(R, z) = 0,$

$$w_z\left(r, \frac{-h}{2}\right)-h_1 w\left(r, \frac{-h}{2}\right)=h_1 v(r),$$

$$w_z\left(r, \frac{h}{2}\right)+h_1 w\left(r, \frac{h}{2}\right)=-h_1 v(r).$$

Начало координат взять в центре цилиндра.

12. $$u(r, t)=F_0(r)+t\cdot F_1(r)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2qR}{k}\,\frac{J_0\left(\frac{\alpha_n}{R}r\right)}{\alpha_n^2 J_0(\alpha_n)}\,e^{-\frac{a^2\alpha_n^2}{R^2}t},$$

где $F_0(r)=u_0-\frac{q\cdot R}{4k}\left(1-2\frac{r^2}{R^2}\right)$, $F_1(r)=2qa^2\frac{1}{kR}$, α_n — положительные корни уравнения $J_1(\alpha)=0$.

13. *а*) $\lambda_{n,m,k}=\left(\frac{\pi k}{h}\right)^2+\left(\frac{\alpha_m^{(n)}}{R}\right)^2$, $\alpha_m^{(n)}$ — положительные корни уравнений $J_n(\alpha)=0$,

$$\Phi_{n,m,k}(r, \varphi, z)=\sin\frac{\pi k}{h}z\cdot J_n\left(\frac{\alpha_m^{(n)}}{R}r\right)\begin{cases}\sin n\varphi,\\ \cos n\varphi;\end{cases}$$

б) $\lambda_{n,m,k}=\left(\frac{\pi k}{h}\right)^2+\left(\frac{\alpha_m^{(n)}}{R}\right)^2$, $\alpha_m^{(n)}$ — положительные корни уравнений $J_n'(\alpha)=0$,

$$\Phi_{n,m,k}(r, \varphi, z)=\cos\frac{\pi k}{h}z\cdot J_n\left(\frac{\alpha_m^{(n)}}{R}r\right)\cdot\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \sin n\varphi;\end{cases}$$

в) $\lambda_{n,m,k}=\nu_k^2+\left(\frac{\alpha_m^{(n)}}{R}\right)^2$, $\alpha_m^{(n)}$ — положительные корни уравнения $\alpha J_n'(\alpha)+RhJ_n(\alpha)=0$, ν_k — положительные корни уравнения $\operatorname{tg}\nu h=\frac{(h_1+h_2)\nu}{\nu^2-h_1h_2}$.

$$\Phi_{n,m,k}(r, \varphi, z)=\Psi_k(z)\cdot J_n\left(\frac{\alpha_m^{(n)}}{R}r\right)\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \sin n\varphi,\end{cases}$$

$$\Psi_k(z)=\nu_k\cos\nu_k z+h_1\sin\nu_k z.$$

14. *а*) $\Phi_{n,m}(r,\varphi)=J_{\frac{n\pi}{\alpha}}\left(\frac{\gamma_m^{(n)}}{R}r\right)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\varphi$, $\lambda_{n,m}=\left(\frac{\gamma_m^{(n)}}{R}\right)^2$,

$\gamma_m^{(n)}$ — положительные корни уравнений $J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\gamma)=0$;

б) $\Phi_{n,m}(r, \varphi)=J_{\frac{\pi n}{\alpha}}\left(\frac{\gamma_m^{(n)}}{R}r\right)\cos\frac{\pi n}{\alpha}\varphi$, $\lambda_{n,m}=\left(\frac{\gamma_m^{(n)}}{R}\right)^2$,

$\gamma_m^{(n)}$ — положительные корни уравнений $J'_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\gamma)=0$;

в) $\Phi_{n,m}(r, \varphi) = J_{\nu_n}\left(\frac{\gamma_m^{(n)}}{R} r\right)\psi_n(\varphi)$, $\lambda_{n,m} = \left(\frac{\gamma_m^{(n)}}{R}\right)^2$,

$\gamma_m^{(n)}$ — положительные корни уравнений

$$\gamma J'_{\nu_n}(\gamma) + R \cdot hJ_{\nu_n}(\gamma) = 0,$$

ν_n — положительные корни уравнения

$$\operatorname{tg} \nu\alpha = \frac{(h_1 + h_2)}{\nu^2 - h_1 h_2}\nu.$$

15. $u(r, \varphi, t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_{n,k}\, e^{-a^2\lambda_k^{(n)} t} J_{\frac{n\pi}{\alpha}}\left(\frac{\gamma_k^{(n)}}{R} r\right)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\varphi$,

$$C_{n,k} = \frac{4}{R^2\alpha\,[J'_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\gamma_k^{(n)})]^2}\int_0^R\int_0^\alpha f(r, \varphi)\, rJ_{\frac{n\pi}{\alpha}}\left(\frac{\gamma_k^{(n)}}{R} r\right)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\varphi\, dr\, d\varphi,$$

$\gamma_k^{(n)}$ — положительные корни уравнений $J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\gamma) = 0$, $\lambda_k^{(n)} = \left(\frac{\gamma_k^{(n)}}{R}\right)^2$.

16. $u(r, \varphi, z, t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}(C_{n,m,k}\cos n\varphi +$

$+ D_{n,m,k}\sin n\varphi)\, J_n\left(\frac{\gamma_k^{(n)}}{R} r\right)\sin\frac{\pi m}{h} z \cdot e^{-a^2\lambda_{n,m,k} t}$, где

$$C_{n,m,k} = \frac{4}{\varepsilon_n \cdot \pi R^2 h\,[J'_n(\gamma_k^{(n)})]^2}\int_0^R\int_0^h\int_0^{2\pi} rf(r, \varphi, z)\, J_n\left(\frac{\gamma_k^{(n)}}{R} r\right)\sin\frac{\pi m}{h} z \times$$

$$\times \cos n\varphi\, dr\, dz\, d\varphi,$$

$$D_{n,m,k} = \frac{4}{\varepsilon_n \pi R^2 h\,[J'_n(\gamma_k^{(n)})]^2}\int_0^R\int_0^h\int_0^{2\pi} rf(r, \varphi, z)\, J_n\left(\frac{\gamma_k^{(n)}}{R} r\right)\sin\frac{\pi m}{h} z \times$$

$$\times \sin n\varphi\, dr\, dz\, d\varphi,$$

$\gamma_k^{(n)}$ и $\lambda_{n,m,k}$ определяются, как в задаче **13**.

19. $I_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\operatorname{sh} x$; $I_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\operatorname{ch} x$;

$K_{\pm\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x}$; $N_{\frac{1}{2}}(x) = -J_{-\frac{1}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$;

$N_{-\frac{1}{2}}(x) = J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$; $H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(x) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{ix}$,

$$H^{(1)}_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{ix};$$

$$H^{(2)}_{\frac{1}{2}}(x) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-ix},$$

$$H^{(2)}_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-ix}.$$

20. $u(r) = \dfrac{u_0}{I_0(\beta R)} I_0(\beta r), \quad \Delta u - \beta^2 u = 0, \quad u|_{r=R} = u_0.$

21. $u(r) = \dfrac{u_0}{K_0(\beta R)} K_0(\beta r).$

22. $u(r, z) = \dfrac{u_2 - u_1}{h} z + u_1 + \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n I_0\left(\dfrac{\pi n}{h} r\right)\sin\dfrac{\pi n}{h} z,$

где

$$C_n = \frac{1}{n}\left\{(u_0 - u_1)\left[(-1)^n - 1\right] + (-1)^n (u_2 - u_1)\right\}\frac{1}{I_0\left(\frac{\pi n}{h} R\right)};$$

$u(r, z)$ — потенциал поля E, т. е. $E = -\nabla u$.

Указание. Искать решение в виде

$$u = A(z) + B(r, z), \quad \Delta A = 0, \quad A(0) = u_1, \quad A(h) = u_2.$$

23. $u(r, z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n I_0\left(\dfrac{\alpha_n}{h} r\right)\cos\dfrac{\alpha_n}{h} z$, где

$$C_n = \frac{1}{I_0\left(\frac{\alpha_n}{h} R\right)\left\|\cos\frac{\alpha_n}{h} z\right\|^2}\int_0^h f(z)\cos\frac{\alpha_n}{h} z\, dz.$$

24. $u(r, z) = \dfrac{4u_0}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{K_0\left(\frac{\pi(2n-1)}{h} r\right)}{K_0\left(\frac{\pi(2n-1)}{h} R\right)}\sin\dfrac{\pi(2n-1)}{h} z.$

25. $u(r, z, t) = v(r, z) + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_{n,k}\, e^{-a^2\left(\alpha_n^2 + \frac{\pi^2 k^2}{h^2}\right)t} \times$

$$\times J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right)\sin\frac{\pi k}{h} z,$$

$$C_{n,k} = \frac{-2}{hJ_1^2(\alpha_n)} \int_0^R \int_0^h v(r, z)\, r\, J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right) \sin \frac{\pi n}{h} z\, dz\, dr,$$

где α_n — положительные корни уравнения $J_0(\alpha) = 0$;

$$v(r, z) = \frac{u_0}{h} z + \frac{2u_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{I_0\left(\frac{\pi n}{h} R\right)} I_0\left(\frac{\pi n}{h} r\right) \sin \frac{\pi n}{h} z.$$

Указание. Искать решение в виде:

$$u(r, z, t) = v(r, z) + w(r, z, t),$$

где $v(r, z)$ есть решение задачи (см. задачу 22):

$$\Delta v = 0, \quad v(R, z) = 0, \quad v(r, 0) = 0, \quad v(r, h) = u_0, \quad |v| < \infty.$$

ГЛАВА XII

1. $P_{2k}(0) = (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$, $P_{2k+1}(0) = 0$.

2. Ортогональны с весом $(1 - x^2)^k$. Это следует из ортогональности присоединенных функций Лежандра.

3. $$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_n \cos a\sqrt{2n(2n-1)}\, t + D_n \sin a\sqrt{2n(2n-1)}\, t \right\} P_{2n-1}\left(\frac{x}{l}\right),$$

$$C_n = (4n-1) \int_0^l \varphi(\xi) P_{2n-1}\left(\frac{\xi}{l}\right) d\xi,$$

$$D_n = \frac{4n-1}{a\sqrt{2n(2n-1)}} \int_0^l \varphi_1(\xi) P_{2n-1}\left(\frac{\xi}{l}\right) d\xi.$$

4. $E = -\nabla u$, где $u(r, \theta)$ — потенциал поля:

$$u(r, \theta) = \begin{cases} V_2 + \dfrac{V_1 - V_2}{2} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\frac{r}{R}\right)^{2n+1} P_{2n+1}(\cos\theta), & r \leqslant R, \\ V_2 + \dfrac{V_1 - V_2}{2} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\frac{R}{r}\right)^{2n+2} P_{2n+1}(\cos\theta), & r \geqslant R, \end{cases}$$

$$C_n = \frac{4n+3}{2n+2} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2}.$$

5. а) $u(r, \theta) = -e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0^n r^n}{R^{2n+1}} P_n(\cos\theta);$

б) $u(r, \theta) = -e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{2n+1}}{r_0^{n+1} r^{n+1}} P_n(\cos\theta).$

Указание. Искать суммарный потенциал $V(r, \theta)$, созданный точечным зарядом и индуцированными зарядами, в виде суммы

$$V(r, \theta) = \frac{e}{r_1} + u(r, \theta),$$

где

$$u(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos\theta), & r < R, \\ \sum_{n=0}^{\infty} D_n \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\cos\theta), & r > R. \end{cases}$$

Здесь r_1 — расстояние от точки (r, θ) до точки $(r_0, 0)$, где расположен заряд. Воспользоваться разложением

$$\frac{1}{r_1} = \begin{cases} \frac{1}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos\theta), & r < r_0, \\ \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\cos\theta), & r > r_0. \end{cases}$$

Коэффициенты C_n и D_n находятся из условия $V(R, \theta) = 0$:

$$C_n = -\frac{e r_0^n}{R^{n+1}},$$

$$D_n = \frac{e R^n}{r_0^{n+1}}.$$

6. а) Если заряд находится вне сферы в точке $(r_0, 0)$, $r_0 > R$, то потенциал электростатического поля равен

$$u(r, \theta) = \begin{cases} u_1(r, \theta), & r \leqslant R, \\ u_2(r, \theta), & r \geqslant R, \end{cases}$$

где

$$u_1(r,\ \theta)=e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n\varepsilon_1+(n+1)\varepsilon_2}\frac{r^n}{r_0^{n+1}}P_n(\cos\theta),$$

$$u_2(r,\ \theta)=\frac{e}{\varepsilon_2 r_1}+e\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n\varepsilon_1+(n+1)\varepsilon_2}\frac{R^{2n+1}}{r_0^{n+1}r^{n+1}}P_n(\cos\theta).$$

Указание. Коэффициенты разложения находятся из условий сопряжения

$$u_1(R,\ \theta)=u_2(R,\ \theta),\quad \varepsilon_1\frac{\partial u_1}{\partial r}\bigg|_{r=R}=\varepsilon_2\frac{\partial u_2}{\partial r}\bigg|_{r=R};$$

r_1 — расстояние от точки $(r,\ \theta)$ до точки $(r_0,\ 0)$, где расположен заряд;

б) если заряд находится внутри сферы $(r_0<R)$, то

$$u_1(r,\ \theta)=\frac{e}{\varepsilon_1 r_1}+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1}e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n\varepsilon_1+(n+1)\varepsilon_2}\frac{r_0^n r^n}{R^{2n+1}}P_n(\cos\theta),$$

$$u_2(r,\ \theta)=e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n\varepsilon_1+(n+1)\varepsilon_2}\frac{r_0^n}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta).$$

7.

$$v(r,\ \theta)=\begin{cases}\dfrac{2e}{R}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n[P_n(0)+P_{n-2}(0)]\,P_n(\cos\theta)-\frac{2er}{R^2}P_1(\cos\theta), & r\leqslant R,\\[2ex] \dfrac{2e}{R}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}[P_n(0)+P_{n-2}(0)]\,P_n(\cos\theta), & r\geqslant R.\end{cases}$$

Указание. Решать задачу методом разделения переменных. Тогда

$$v(r,\ \theta)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}C_n r^n P_n(\cos\theta), & r\leqslant R,\\[2ex] \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}D_n\frac{1}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta), & r\geqslant R.\end{cases}$$

Коэффициенты C_n и D_n находятся из сравнения этих формул с разложением по степеням z потенциала в точках оси z (перпендикулярной диску и проходящей через его центр), который вычисляется непосредственно:

$$V(z, 0) = \frac{2e}{R}\{\sqrt{z^2 + R^2} - z\}.$$

8. $$v(r, \theta) = \frac{I}{2\pi\sigma R}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n+3}{2n+1}\left(\frac{r}{R}\right)^{2n+1} P_{2n+1}(\cos\theta).$$

Указание. В силу симметрии задачи $v\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 0$. Поэтому в разложении

$$v(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_k r^k P_k(\cos\theta)$$

коэффициенты C_{2n} с четными индексами должны обращаться в нуль. Остальные коэффициенты определяются из условия

$$-\sigma v_r(R, \theta) = \frac{1}{2\pi R^2}\frac{\delta(\theta)}{\sin\theta} I.$$

9. $$u(r, \theta) = \frac{Q}{4\pi k r_1} + \frac{Q}{4\pi k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1-Rh}{n+Rh}\frac{r_0^n r^n}{R^{2n+1}} P_n(\cos\theta),$$

где r_1 — расстояние от точки (r, θ) до источника $(r_0, 0)$.

Указание. Искать решение в виде суммы

$$u(r, \theta) = \frac{Q}{4\pi k r_1} + v(r, \theta),$$

где $v(r, \theta)$ есть решение задачи

$$\Delta v = 0,\ k v_r(R, \theta) + h v(R, \theta) = \frac{-Q}{4\pi k}\left\{k\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r_1}\right) + \frac{h}{r_1}\right\}_{r=R}.$$

Воспользоваться разложением $\frac{1}{r_1}$ в ряд по многочленам Лежандра.

10. $$u(r, \theta) = \frac{e}{r_1} - e\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{r_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}}{R_2^{2n+1} - R_1^{2n+1}}\frac{r^n}{r_0^{n+1}} + \frac{R_2^{2n+1} - r_0^{2n+1}}{R_2^{2n+1} - R_1^{2n+1}}\frac{R_1^{2n+1}}{(r_0 r)^{n+1}}\right\} P_n(\cos\theta).$$

Плотность индуцированных зарядов

$$\sigma_1 = \sigma\,|_{r=R_1} = \frac{-e}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)\,(R_2^{2n+1}-r_0^{2n+1})}{R_2^{2n+1}-R_1^{2n+1}}\,\frac{R_1^{n-1}}{r_0^{n+1}}\,P_n(\cos\theta),$$

$$\sigma_2 = \sigma\,|_{r=R_2} = \frac{e}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)\,(r_0^{2n+1}-R_1^{2n+1})}{R_2^{2n+1}-R_1^{2n+1}}\,\frac{R_2^{n-1}}{r_0^{n+1}}\,P_n(\cos\theta).$$

Здесь r_1 — расстояние от точки (r, θ) до заряда, расположенного в точке $(r_0, 0)$. Указание. Искать решение в виде

$$u = \frac{e}{r_1} + v(r, \theta),$$

$$\sigma_i = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{r=R_i} \qquad (i = 1, 2).$$

11. $$u(r, \theta) = \frac{u_0}{2}\left\{1 - \cos\alpha - \sum_{n=1}^{\infty}\left[P_{n+1}(\cos\alpha) - P_{n-1}(\cos\alpha)\right]\left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos\theta)\right\}.$$

12. $$u(r, \theta) = \frac{qR}{2k}\left\{\frac{1}{2hR} + \frac{r}{R}\,\frac{\cos\theta}{1+Rh} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n+1)\,P_{2n}(0)\,r^{2n}P_{2n}(\cos\theta)}{(2n+hR)(2n-1)(2n+2)R^{2n}}\right\}.$$

Указание. Краевое условие задачи имеет вид

$$u_r(R, \theta) + hu(R, \theta) = \begin{cases} \dfrac{q}{k}\cos\theta, & 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 0\quad, & \dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi. \end{cases}$$

13. $$u(r, \theta, t) = \frac{r^n}{nR^{n-1}}f(t)P_n(\cos\theta) + P_n(\cos\theta)\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(t)\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\alpha_k}{R}r\right),$$

где α_k — положительные корни уравнения

$$\alpha J'_{n+\frac{1}{2}}(\alpha) - \frac{1}{2}J_{n+\frac{1}{2}}(\alpha) = 0,$$

$$\psi_k(t)=\frac{RA_k}{\alpha_k a}\int_0^t f''(\tau)\sin\frac{a\alpha_k}{R}(t-\tau)\,d\tau,$$

$$A_k=\frac{-2}{nR^{n+1}}\frac{\int_0^R r^{n+\frac{3}{2}}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\alpha_k}{R}r\right)dr}{J^2_{n+\frac{1}{2}}(\alpha_k)\left[1-\frac{n(n+1)}{\alpha_k^2}\right]}.$$

Здесь $u(r, \theta, t)$ — потенциал скоростей;

$$a^2\Delta u=u_{tt},\quad u(r, \theta, 0)=u_t(r, \theta, 0)=0,$$
$$u_r(R, \theta, t)=P_n(\cos\theta)f(t),\quad |u|<\infty.$$

14. $\lambda_{n, m, k}=\frac{1}{R^2}[\alpha_m^{(n)}]^2+k^2$ — собственные значения,

$$\Phi_{n,m,k}(r, \theta, \varphi)=\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\alpha_m^{(n)}}{R}r\right)P_n^k(\cos\theta)\begin{cases}\cos k\varphi,\\ \sin k\varphi\end{cases}$$

— собственные функции. Здесь $\alpha_m^{(n)}$ — положительные корни уравнений

а) $J_{n+\frac{1}{2}}(\alpha)=0,$

б) $J'_{n+\frac{1}{2}}(\alpha)-\frac{1}{2\alpha}J_{n+\frac{1}{2}}(\alpha)=0,$

в) $2\alpha J'_{n+\frac{1}{2}}(\alpha)-(1-2Rh)J_{n+\frac{1}{2}}(\alpha)=0,$

h — константа в условии $v_r(R, \theta, \varphi)+hv(R, \theta, \varphi)=0.$

15. $$u(r, \theta, \varphi)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\{C_{n, m, k}\cos k\varphi+D_{n, m, k}\sin k\varphi\}\times$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\alpha_m^{(n)}}{R}r\right)P_n^k(\cos\theta)\cdot e^{-\frac{a^2[\alpha_m^{(n)}]^2}{R^2}t},$$

где $\alpha_m^{(n)}$ — положительные корни уравнения

$$J_{n+\frac{1}{2}}(\alpha)=0;$$

$$C_{n,m,k} = A_{n,m,k} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(r, \theta, \varphi)\, r^{\frac{3}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\alpha_m^{(n)}}{R} r\right) P_n^k(\cos\theta) \cos k\varphi \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, dr,$$

$$D_{n,m,k} = A_{n,m,k} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(r, \theta, \varphi)\, r^{\frac{3}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\alpha_m^{(n)}}{R} r\right) P_n^k(\cos\theta) \sin k\varphi \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, dr,$$

$$A_{n,m,k} = \frac{(2n+1)(n-k)!}{\pi R^2 (n+k)!\, \varepsilon_k J^2_{n+\frac{1}{2}}(\alpha_m^{(n)})},$$

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 2, & k = 0, \\ 1, & k \neq 0. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоусов С. А., Таблицы нормированных присоединенных полиномов Лежандра, М., АН СССР, 1956.
2. Будак, Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н., Сборник задач по математической физике, М., Гостехиздат, 1949.
3. Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, ч. I и II, ИЛ, 1949.
4. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Обобщенные функции и действия над ними, изд. 2-е, М., Физматгиз, 1959.
5. Грэй Э., Мэтьюз Г. Б., Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, изд. 2-е, ИЛ, 1953.
6. Джексон Д., Ряды Фурье и ортогональные полиномы, ИЛ, 1948.
7. Зоммерфельд А., Дифференциальные уравнения в частных производных физики, ИЛ, 1950.
8. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М., Основные дифференциальные уравнения математической физики, М., Физматгиз, 1962.
9. Кузьмин Р. О., Бесселевы функции, изд. 2-е, М.—Л., ОНТИ, 1935.
10. Курант Р., Уравнения с частными производными, М., «Мир», 1964.
11. Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, тт. I и II, Гостехиздат, 1951.
12. Лебедев Н. Н., Специальные функции и их приложения, изд. 2-е, М.-Л., Физматгиз, 1963.
13. Лебедев Н. Н., Скальская И. П., Уфлянд Я. С., Сборник задач по математической физике, М., Гостехиздат, 1955.
14. Ловитт У. В., Линейные интегральные уравнения, М., Гостехиздат, 1957.
15. Люстерник Л. А., Якушский Н. Я., Диткин В. А., Таблицы бесселевых функций, М., Гостехиздат, 1949.
16. Микусинский Я., Сикорский Р., Элементарная теория обобщенных функций, вып. II, ИЛ, 1963.
17. Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, изд. 3-е, М., Физматгиз, 1961.
18. Петровский И. Г., Лекции по теории интегральных уравнений, изд. 3-е, М.—Л., «Наука», 1964.
19. Привалов И. И., Интегральные уравнения, изд. 2-е, М.—Л., ОНТИ, 1937.
20. Розет Т. А., Элементы теории цилиндрических функций с приложениями к радиотехнике, М., «Советское радио», 1956.

21. Смирнов В. И., Курс высшей математики, тт. II и IV, М., Физматгиз, 1958.
22. Снеддон И., Преобразования Фурье, ИЛ, 1955.
23. Соболев С. Л., Уравнения математической физики, М.—Л., изд. 3-е, Гостехиздат, 1954.
24. Сонин Н. Я., Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах, М., Гостехиздат, 1954.
25. Таблицы значений функций Бесселя от мнимого аргумента, под ред. Виноградова И. М. и Четаева Н. Г., М., АН СССР, 1950.
26. Таблицы функций Бесселя дробного индекса, тт. I и II, М., ВЦ АН СССР, 1959.
27. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики. М.—Л., изд. 2-е, Гостехиздат, 1953.
28. Толстов Г. П., Ряды Фурье, изд. 2-е, Физматгиз, 1960.
29. Трантер К. Дж., Интегральные преобразования в математической физике, М., Гостехиздат, 1957.
30. Фадеева В. Н., Гавурин М. К., Таблицы функций Бесселя целых номеров, М., Гостехиздат, 1950.
31. Янке Е., Эмде, Таблицы функций с формулами и кривыми, М., Гостехиздат, 1948.

Василий Яковлевич Арсенин

Математическая физика.
Основные уравнения и специальные функции

(Серия: «Физико-математическая библиотека инженера»)

М., 1966 г., 368 стр. с илл.

Редактор *С. А. Широкова*
Техн. редактор *А. А. Благовещенская*
Корректор *Н. Д. Дорохова*

Сдано в набор 1/II 1966 г. Подписано к печати 24/III 1966 г. Бумага $84\times108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 11,5. Условн. печ. л. 19,32. Уч.-изд. л. 18,83. Тираж 20 000 экз. Т-04627. Цена книги 1 р. 37 к. Заказ № 106.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР. Гатчинская, 26