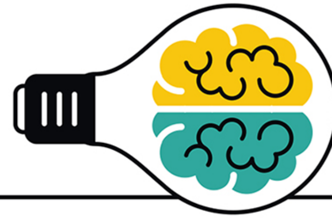
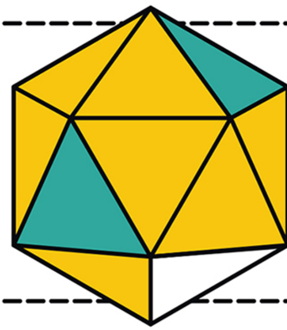
КЬЯРТАН ПОСКИТТ



МАТЕМАТИКА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ



ЛАЙФХАКИ ДЛЯ ПОВСЕДНЕВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Эту книгу хорошо дополняют:

Магия чисел
Артур Бенджамин, Майкл Шермер

Удовольствие от *x*
Стивен Строгац

Красота в квадрате
Алекс Беллос

Теория игр
Авинаш Диксит, Барри Нейлбафф

Kjartan Poskitt

EVERYDAY MATHS FOR GROWN-UPS:

GETTING TO GRIPS WITH THE BASICS

Michael O'Mara Books Limited

Кьяртан Поскитт

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

ЛАЙФХАКИ ДЛЯ ПОВСЕДНЕВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Перевод с английского Станислава Ломакина

Москва
«Манн, Иванов и Фербер»
2016

УДК 512
ББК 22.1я9
П61

Научный редактор Александр Минько

Издано с разрешения Michael O'Mara Books Limited

На русском языке публикуется впервые

Поскитт, Кьяртан

П61 Математика для взрослых. Лайфхаки для повседневных вычислений / Кьяртан Поскитт ; пер. с англ. С. Ломакина ; [науч. ред. А. Минько]. — М. : Манн, Иванов и Фербер, 2016. — 192 с.

ISBN 978-5-00100-126-3

Эта книга — самый дружелюбный и доступный ликбез по математике. После ее прочтения вы разберетесь в большинстве базовых терминов и вычислений, сможете применять их в жизни и даже узнаете несколько математических трюков, которыми можно произвести впечатление на друзей. Глоссарий в конце книги позволит вам быстро освежить в памяти любое определение.

Книга будет полезна широкому кругу читателей.

УДК 512
ББК 22.1я9

ISBN 978-5-00100-126-3

СОДЕРЖАНИЕ

Посвящается Мэрилин Мэлин,
которая более двадцати лет помогает мне
самоорганизовываться и никогда не ошибается
в счете, хотя и не пользуется калькулятором

ПОЧЕМУ Я НАПИСАЛ ЭТУ КНИГУ

Не так давно ко мне подошел Блэйки, мой приятель, и, похоже, он был в отчаянии. Как оказалось, несмотря на то что ему уже почти сорок и он весьма умен, ему никак не удается поступить на курс менеджмента — и все из-за экзамена по арифметике, который он постоянно проваливает. Блэйки признался: «Складывать и вычитать я умею, но совершенно теряюсь, когда дело доходит до умножения: не могу понять, верно ли я сосчитал, даже проверив результат на калькуляторе». Я дал ему почитать мою книгу The Awesome Arithmeticks («Потрясающая арифметика»), написанную для детей-восьмилеток, и через пару недель Блэйки сдал экзамен.

Если вы тоже из числа тех, кому, как и Блэйки, не дается математика, скорее всего, вы упустили что-то важное в самом начале ее изучения, поэтому и в остальном разобраться не получается. Вот почему я сперва остановлюсь на сложении чисел, а затем буду постепенно переходить к вещам посложнее, чтобы вы могли усвоить материал с азов и понять, что и как взаимосвязано. Если первые главы покажутся вам слишком простыми, можете их пропустить; в случае необходимости вы всегда сможете к ним вернуться, если понадобится что-то уточнить.

Не волнуйтесь, это не учебник! Конечно, здесь много чисел, диаграмм и даже некоторых особенных штучек вроде π, x^2 и т. п., но зато нет никаких тестов и экзаменов и никто не станет вас ругать, если во время чтения вы уснете. Главная цель этой книги — дать вам дружеские рекомендации по использованию математики в повседневной жизни. Например, как рассчитать, сколько краски понадобится для ремонта комнаты или сколько времени уйдет на поездку. Я также дам советы по более сложным темам, таким как алгебра и работа с процентами, чтобы вы не чувствовали себя неловко, если дети будут обсуждать при вас домашнее задание по математике. Попутно мы рассмотрим ряд забавных вещей наподобие искривленного пространства и комбинаций в покере и даже несколько фокусов, чтобы вы могли козырнуть ими перед друзьями!

Вот вам один трюк для начала (при желании воспользуйтесь калькулятором).

- ✓ Загадайте любое трехзначное число; все его цифры должны быть разными.
- ✓ Запишите его задом наперед.
- ✓ Вычтите одно из другого.

724 или	564
– 427	– 465
= 297	= 099

Второй цифрой результата всегда будет 9, а первая и третья цифры дадут 9 в сумме (в случае, если получится 99, добавьте спереди ноль, чтобы вышло три знака).

Если у вас есть впечатлительный друг по имени Малькольм, можете сразить его этим фокусом наповал. Попросите Малькольма, ничего ему не объясняя, задумать трехзначное число, чтобы все три знака были разными, затем записать его задом наперед и вычесть одно из другого. Поинтересуйтесь, с какой цифры начинается результат, и вы сможете назвать ему остальные цифры, не зная, какое число он изначально загадал!

Если Малькольм скажет, что первая цифра 9, значит, у него получилось 99, если первая цифра 5, то ответ равен 594. Запомните: в середине всегда будет девятка, а цифры по краям в сумме должны давать 9!

СЛОЖЕНИЕ

Сложение — в числе первых навыков, которым учат в школе, однако не принимайте это как должное! Сложение кажется простым благодаря использованию гениальной индо-арабской системы счисления, которая может оперировать числами любой величины, хотя в ней фигурируют всего десять цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Давайте вспомним, как она устроена.

Система разрядов

Предположим, вы провели три незабываемых дня, торгуя на ярмарке. Ваша выручка соответственно составила 173, 585 и 234 фунта. Но вот досада: вы по ошибке продали свой калькулятор. Так сколько же всего денег вы заработали?

Цифры в числах расположены по системе *разрядов*, так что в числе 173 3 означает три единицы, 7 — семь десятков, а 1 — одну сотню. Для того чтобы подсчитать сумму 173 + 585 + 234, вам нужно просто записать числа так, чтобы сотни, десятки и единицы находились в столбцах друг под другом.

Сперва складываем ЕДИНИЦЫ

3 + 5 + 4 = 12

Записываем 2 в результат и переносим единицу в столбец десятков

$$\begin{array}{rccc} & \text{сотни} & \text{десятки} & \text{единицы} \\ & 1 & 7 & 3 \\ + & 5 & 8 & 5 \\ + & 2 & 3 & 4 \\ & & 1 & \\ \hline & & & 2 \\ \hline \end{array}$$

Далее суммируем ДЕСЯТКИ, не забывая о дополнительном десятке, который появился при сложении единиц

7 + 8 + 3 + 1 = 19

И наконец, складываем СОТНИ

1 + 5 + 2 + 1 = 9

$$\begin{array}{rccc} & \text{сотни} & \text{десятки} & \text{единицы} \\ & 1 & 7 & 3 \\ + & 5 & 8 & 5 \\ + & 2 & 3 & 4 \\ & 1 & 1 & \\ \hline & 9 & 9 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Индо-арабская система против римской

Мы пользуемся индо-арабской системой счисления, которая появилась в Индии около 2400 лет назад. Примерно 1100 лет назад на нее перешли арабские математики и астрономы, а около 800 лет назад Леонардо Фибоначчи из Пизы способствовал ее распространению в Европе (приблизительно в то же время была построена знаменитая Пизанская падающая башня).

Трудно оценить всю элегантность этой числовой системы, пока вы не рассчитаете ту же сумму, записанную римскими цифрами. Цифры у римлян обозначались буквами следующим образом:

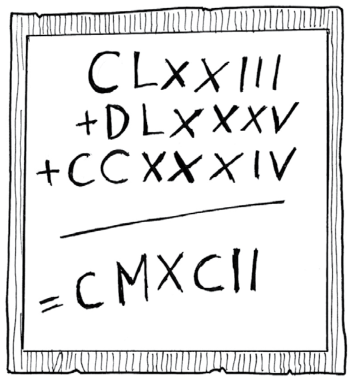
M = 1000	X = 10
D = 500	V = 5
C = 100	I = 1
L = 50	

Обычно числа представляли собой последовательности этих букв, от наибольших значений до наименьших. Например, CLXXIII = 100 + 50 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 = 173. Однако записывать подобным способом такие числа, как 9 (получилось бы VIIII), было неудобно, и тогда меньшие значения ставили перед бо́льшими, при этом их следовало не прибавлять, а вычитать, и 9 записывалось как IX.

Римские цифры до сих пор используются людьми в случае, когда нужно придать чему-то стильный или элегантный вид. На циферблатах старого образца часы обозначаются римскими цифрами от I до XII, а во многих фильмах и телепрограммах после титров римскими цифрами пишут год выпуска, например MMX, то есть 2010-й. В фундаменте известных строений или статуй часто заложен камень с выбитой римскими цифрами датой. Статуя Свободы в Нью-Йорке держит в руке табличку, где вырезана дата принятия Декларации независимости — JULY IV MDCCLXXVI (4 июля 1776 года).

Ноль? Ноль!

У древних римлян не было обозначения для 0. Лишь после введения системы разрядов 0 стал важен для написания таких чисел, как 10 и 100.



Единственное место, где нынче не встретишь римские цифры, — это математика. Представьте, как бы вы рассчитывали выручку на ярмарке во времена древних римлян…

Индо-арабская система счисления сделает самую тяжелую работу за вас, достаточно лишь записать числа так, чтобы единицы, десятки и сотни выстроились в столбцы. Более того, вычисление сумм таким образом поможет вам развить чутье на правильный ответ — способность, которая никогда не появится, если полагаться на калькулятор!

Иногда суммы уже рассчитаны за вас, и это повод проверить свое чутье на практике.

Как быстро проверить кассовый чек

Случалось ли вам, выходя из магазина с длиннющим чеком в руке, испытывать стойкое ощущение, что вас обсчитали? Но когда вы обвешаны переполненными сумками, меньше всего хочется останавливаться и тратить время на подсчеты.

К счастью, есть способ очень быстро узнать приблизительную сумму чека.

Вот чек, от которого оторван кусочек с общей суммой. Нам нужно сделать всего две вещи.

❶ Сложим фунты, не обращая внимания на пенсы, — получится 58.

Магазин «Грошик»	
Сыр	2,79
Стиральный порошок	4,35
Газета	0,4
Набор для ухода за собакой	6,2
Кукурузные хлопья	2,3
Сок	1,49
Яйца	1,2
Бутылка вина	5,79
Краска	3,15
Сосиски	2,69
Чеснок	1,3
Противогаз	7,49
Пластиковые цветы	3,0
Батарейки	3,89
Что-то, работающее от батареек	4,8
Диск «Политота-шоу: лучшие серии»	11,49
Ложка	0,45
Соль для ванн, набор	2,3
Бананы	1,56

❷ Согнем чек так, чтобы разделить перечень покупок пополам, и прибавим 1 к сумме каждой покупки, отображенной на выбранной нами стороне чека.

Магазин «Грошик»	
Сыр	2,79
Стиральный порошок	4,35
Газета	0,4
Набор для ухода за собакой	6,2
Кукурузные хлопья	2,3
Сок	1,49
Яйца	1,2
Бутылка вина	5,79
Краска	3,15
Сосиски	2,69
ИТОГО	**66,64**

У нас получилось 10 покупок, так что прибавляем 10 к 58 — выйдет 68 фунтов. Это число должно приблизительно соответствовать точной сумме. Давайте-ка проверим… Ну, совсем неплохо!

Советы

Если в магазине проходит акция «два по цене одного» или есть еще какие-нибудь скидки, в чеке могут встретиться отрицательные числа. Лучше игнорировать их при первоначальном сложении и вычесть в самом конце. Кроме того, если на кассе ваши покупки раскладывают по пакетам, в некоторых магазинах в чеке пишут «сумму за пакет» – эти числа учитывать не нужно.

Как это работает

Числа в колонке пенсов могут колебаться от 0 до 99. У одних цен число пенсов невелико (например, 25), тогда как у других бывает довольно большим (например, 80). В среднем выходит около 50 пенсов на покупку, поэтому, чтобы получить приблизительную сумму пенсов, можно сосчитать количество покупок и прибавить 50 пенсов на каждую. Однако гораздо проще уменьшить число покупок вдвое (для этого мы и согнули чек пополам) и добавить на каждую покупку по 1 фунту (50 + + 50 пенсов).

Еще больше советов покупателю! Раздел «Деньги и проценты» полностью посвящен процентам, экономии средств и скидкам.

ВЫЧИТАНИЕ

Несмотря на то что складывать можно по несколько чисел одновременно, никогда не пытайтесь вычитать более чем по одному числу за раз. Давайте сначала рассмотрим традиционный способ вычитания, а затем познакомимся с отличным новым способом, который сегодня преподают в школах.

Старый способ

Ключ к вычитанию — помнить о том, что число, скажем 73, это то же самое, что и 70 + 3.

Вычислить, сколько будет 73 – 2, несложно. Достаточно вычесть единицы, чтобы получить 3 – 2 = 1. Вторую часть (70) трогать при этом не надо, она войдет в ответ без изменений (удобно использовать бумагу в клеточку, чтобы видеть, где единицы, десятки и т. д.).

$$\begin{array}{rrr} & 7 & 3 \\ - & & 2 \\ \hline = & 7 & 1 \end{array}$$

Все становится интереснее, если надо от 73 отнять 9. Это то же самое, что и 70 + 3 – 9, однако с 3 – – 9 так просто уже не разделаться.

$$\begin{array}{rrr} & 7 & 3 \\ - & & 9 \\ \hline = & & \end{array}$$

Нам нужно сделать вот что: представим 73 как 60 + 13. Для этого придется поменять 7 на 6 и приписать перед 3 маленькую единичку. Поэтому я и пользуюсь бумагой в клеточку — тогда видно, что число сверху это 60 + 13, а не 613.

$$\begin{array}{rrr} & 6 & \\ & \cancel{7} & {}^{1}3 \\ - & & 9 \\ \hline = & & \end{array}$$

Далее вычисляем 13 – 9 = 4, и с единицами на этом покончено. От 70 же осталось 60, так что окончательный ответ: 60 + 4 = 64.

$$\begin{array}{rcc} & 6 & \\ & \cancel{7} & {}^{1}3 \\ - & & 9 \\ \hline = & 6 & 4 \end{array}$$

Теперь, уяснив основной принцип, перейдем к насущным задачам. Предположим, что вы решили построить модель линкора из 6305 спичек, но на данный момент у вас всего 1847 спичек — сколько еще спичек понадобится?

Вот пример, который нужно решить, и хитрость состоит в том, что начать следует с единиц и двигаться к старшим разрядам. Сначала придется разобраться с 5 – 7. Нам понадобится еще десяток, но у числа 6305 в столбце десятков стоит нуль, так что нам будет нужна еще и тройка в столбце сотен. Тогда мы получим требуемый десяток, вычислив 30 – 1 = 29.

$$\begin{array}{rcccc} & 6 & 3 & 0 & 5 \\ - & 1 & 8 & 4 & 7 \\ \hline = & & & & \end{array}$$

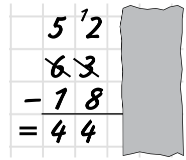
Вы видите, что мы заменили 30 на 29 и добавили 1 перед 5. Теперь можно подсчитать: 15 – – 7 = 8.

$$\begin{array}{rcccc} & & 2 & 9 & \\ & 6 & \cancel{3} & \cancel{0} & {}^{1}5 \\ - & 1 & 8 & 4 & 7 \\ \hline = & & & & 8 \end{array}$$

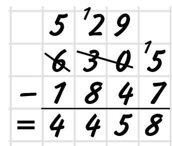
Разделавшись с единицами, закроем их бумажкой и сосредоточимся на остальной части выражения, а именно на вычитании 629 – – 184. Поскольку 9 – 4 = 5, сразу запишем 5 в результат. Получается, что со столбцом десятков мы разобрались без проблем.

$$\begin{array}{rccc} & & 2 & 9 \\ & 6 & \cancel{3} & \cancel{0} \\ - & 1 & 8 & 4 \\ \hline = & & & 5 \end{array}$$

Учитывая, что от 2 восемь так просто не отнять, займем 1 из 6 (в столбце тысяч останется 5) и запишем 1 перед 2. Это даст нам 12 – 8 = = 4. И наконец, в столбце тысяч будет 5 – 1 = 4.



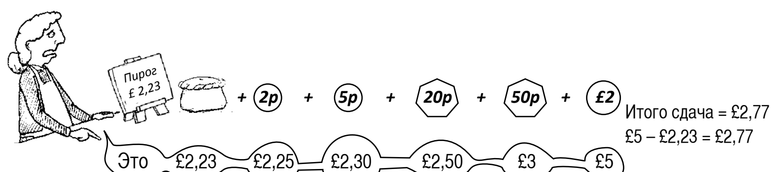
Итак, вот что у нас получилось:



Теперь мы знаем, что, для того чтобы построить линкор, нам понадобится еще 4458 спичек. (И их придется где-то раздобыть или же найти себе другое хобби.)

Новый способ

В наши дни детей учат вычитать, взяв меньшее число и увеличивая его до тех пор, пока оно не сравняется с бóльшим числом. Джанет, продавщица в кондитерской, именно так и поступает, когда выдает сдачу. Если вы дадите ей 5 фунтов за пирог, который стоит 2,23 фунта, она должна будет дать вам 2,77 фунта сдачи (5 – 2,23). Чтобы убедиться, что это так, Джанет комментирует свои подсчеты: сперва она говорит, сколько стоит пирог, затем прибавляет номинал каждой монеты (начиная с самых мелких), отсчитывая их, пока сумма не достигнет 5 фунтов.



Этот подход можно использовать и для вычитания чисел. Давайте опять вернемся к спичкам: нам нужно подсчитать, сколько будет 6305 – 1847. Начнем понемногу прибавлять спички к 1847, по ходу дела отслеживая, что происходит.

1847 + 3 = 1850	➜	прибавили 3
1850 + 50 = 1900	➜	всего прибавили 53
1900 + 100 = 2000	➜	всего прибавили 153
2000 + 4000 = 6000	➜	всего прибавили 4153
6000 + 300 = 6300	➜	всего прибавили 4453
6300 + 5 = 6305	➜	готово, всего прибавили 4458

Это и есть ответ: 6305 – 1847 = 4458. На первый взгляд тут задействовано слишком много чисел, но потренировавшись, вы освоитесь с этим методом. Изящно, не правда ли?

Отрицательные числа

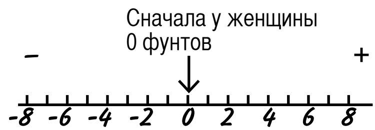
Перед отрицательными числами всегда стоит знак «минус», а перед положительными «плюс» обычно не пишут, разве что в таких выражениях: 3 + 6 – 4 = 5. Здесь числа 3, 6 и 5 — положительные, а 4 — отрицательное.

Всякое число будет либо положительным (+), либо отрицательным (–).

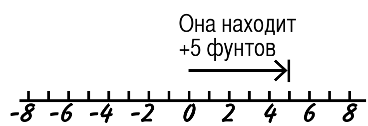
Иногда сумма может давать отрицательный результат, особенно если речь идет о деньгах.

Величина долга всегда вычитается, то есть она отрицательна.

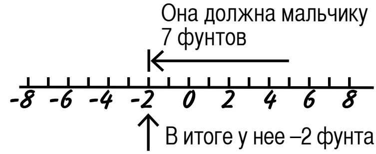
Вычитание большего числа из меньшего поначалу может сбивать с толку. Для простоты понимания представьте себе линейку с нулем посередине. Положительные числа возрастают в одном направлении, отрицательные — в противоположном.



Когда женщина находит 5 фунтов, она продвигается на 5 шагов в положительном направлении.



Но когда мальчик требует 7 фунтов, это отбрасывает ее назад — до нуля и дальше, на отрицательную сторону линейки. Она лишилась своих 5 фунтов и должна еще 2 фунта.



В случае больших чисел уже не столь очевидно, сколько еще вы должны. Предположим, вы играете в «Монополию» и у вас есть 623 фунта. Вы останавливаетесь на Пикадилли, там четыре дома, и с вас причитается арендная плата 1025 фунтов.

Вы отдаете все свои деньги, но понятно, что этого не хватает для полной уплаты аренды. Сколько еще осталось заплатить? Надо вычислить 623 фунта – 1025 фунтов.

Для простоты разобьем вычитание на два шага.

❶ Если отрицательное число больше положительного, ответ будет отрицательным. Поэтому в конце вычислений убедитесь, что перед результатом стоит знак «минус».

❷ Находим *разность* между двумя числами. Для этого вычитаем меньшее число из большего: 1025 – 623 = 402.

Не забудьте поставить знак «минус»! Ответ равен – 402 фунта, именно столько вы должны. Так что либо раскошеливайтесь, либо просто возьмите всю эту «Монополию», швырните ее в стену и любуйтесь, как разлетаются по комнате бумажки и пластиковые фишки. Вас за это, конечно, не похвалят, но зато вы получите определенное удовольствие.

УМНОЖЕНИЕ

Трижды семь — двадцать один, четырежды семь — двадцать восемь… Чего уж скрывать, зазубривание таблицы умножения — на редкость утомительное занятие, однако эта таблица имеет слишком большую практическую ценность, чтобы просто забыть о ней как о страшном сне. Работать с ней будет гораздо легче, если вы освоите несколько трюков, быстрых приемчиков и прочих секретов взаимосвязи чисел в таблице.

Тайны таблицы умножения

В этой таблице показаны все результаты умножения от 1 × 1 до 10 × 10. Всего здесь 100 результатов. Первым делом давайте избавимся от некоторых из них.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

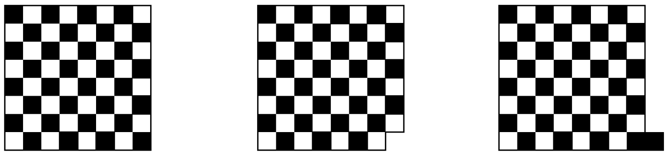
При умножении на 10 в конец числа просто добавляется ноль. Это слишком легко и при переходе к умножению больших чисел нам не понадобится. Так что исключим из таблицы 10-ю строку и 10-й столбец.

Если поменять множители местами, ответ останется тем же. Например, и 3×7 и 7×3 равно 21. Поэтому уберем из таблицы все повторяющиеся результаты.

Итак, мы избавились от более чем половины ячеек. Посмотрим, что осталось.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1								
2	2	4							
3	3	6	9						
4	4	8	12	16					
5	5	10	15	20	25				
6	6	12	18	24	30	36			
7	7	14	21	28	35	42	49		
8	8	16	24	32	40	48	56	64	
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Числа в серых ячейках называются *квадратами целых чисел,* или просто квадратами. Это результаты умножения каждого числа на само себя. Например, вдоль каждой стороны шахматной доски 8 клеток, поэтому полное количество клеток на доске будет равняться восьми в квадрате. Записывают это так: 8^2, что соответствует $8 \times 8 = 64$.

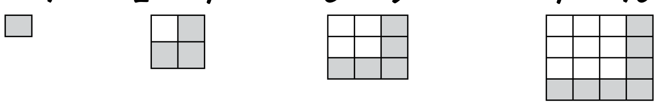


Из 64 маленьких квадратиков можно составить один большой квадрат, поскольку 64 — квадрат целого числа

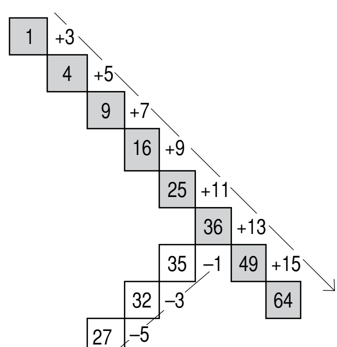
Но сложить ровный квадрат из 63 или 65 квадратиков не получится, так как эти значения не являются квадратами чисел

Если вы ненавидите зубрить таблицу умножения, можете заполнить ее ячейки еще одним способом. Сначала можно просто складывать нечетные числа 1, 3, 5, 7 и т. д. Начинаем с 1 + 3 = 4. Затем прибавляем 5, получаем 9, затем 7, получаем 16… Так вы вычислите квадраты всех чисел.

$1^2 = 1$ $\quad 2^2 = 4$ $\quad 3^2 = 9$ $\quad 4^2 = 16$



1 $\quad 1 + 3$ $\quad 1 + 3 + 5$ $\quad 1 + 3 + 5 + 7$



Если взять любую ячейку с квадратом числа и вычитать из нее нечетные числа, начиная с 1, то получатся значения по диагонали, идущей в другую сторону от исходной ячейки.

Таким образом, начав с 36 и отняв 1, получим 35, отняв 3, получим 32, вычтя 5, получим 27.

(Сравнив эту диаграмму с таблицей умножения, вы убедитесь, что все совпадает.)

Аналогичным способом, но с помощью четных чисел (2, 4, 6, 8…) можно заполнить и остальные ячейки. Посмотрите на диагональ, идущую ниже диагонали квадратов, ту, где стоят числа 2, 6, 12, 20… Эти значения можно получить, начав с 2, затем прибавив 4, затем 6, потом 8 и т. д. А взяв любое из этих чисел (например, 20), можно найти значения вдоль идущей в другую сторону диагонали — вычитая 2, затем 4, потом 6 (например, 20 – 2 = 18, 18 – 4 = 14 и 14 – 6 = 8).

Такие последовательности нечетных и четных чисел позволяют вывести всю таблицу умножения, ни разу при этом не выполнив умножения как такового!

Фокус с тремя числами

Возьмите три любых последовательных числа: при перемножении первого и последнего всегда получится значение на единицу меньше, чем квадрат числа посередине.

Взяв числа 6, 7, 8 и сверившись с таблицей умножения, мы убедимся, что $6 \times 8 = 48$, а 7×7 (или 7^2) $= 49$.

Так будет с любыми последовательно идущими числами. Если известно, что $148^2 = 21\,904$, можете быть уверены, что $147 \times 149 = 21\,903$.

(Почему так происходит? Это одна из тех маленьких загадок, которые мы научимся решать когда перейдем к разделу «Алгебра».)

Простые числа

Простое число делится только на само себя и единицу. Например, число 10 не является простым (оно делится на 1, 2, 5 и 10), число 12 тоже (делится на 1, 2, 3, 4, 6, 12), а вот число

11 — простое (делится только само на себя и на 1). Если попробовать упаковать числа в ящики, не оставляя пустых мест, с простыми числами возникнут сложности, поскольку разделить их на равные части не получится.

Наименьшее простое число — это 2. Также это единственное четное простое число, поскольку все остальные четные числа делятся на 2. Следующие простые числа: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23… и так далее до бесконечности.

Специалисты никак не могут решить, считать ли 1 простым числом. А обычным людям это неважно…

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Здесь представлены все числа от 1 до 100, причем числа в белых квадратиках — простые. Легко понять, где простое число наверняка не встретится: со второй строки и ниже простые числа не могут заканчиваться на 2, 4, 6, 8 или 0 (тогда они делились бы на 2) и на 5 (тогда они делились бы на 5). Что никому до сих пор не удалось выяснить, так это где обязательно должно появиться простое число. Был момент всеобщей радости из-за числа 31, так как поскольку оно простое, простыми также являются 331, 3331, 33 331, 333 331 и т. д. Казалось, любая последовательность троек с единицей в конце даст простое число, и так считали до тех пор, пока кто-то не обнаружил, что 19 607 843 × 17 = 333 333 331. Кстати, если вам удастся найти между простыми числами общую закономерность, ваше имя будут помнить еще долго после того, как имена всех знаменитостей, которыми переполнена сейчас земля, канут в Лету.

Умножение на пальцах

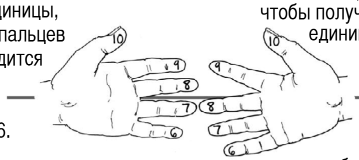
Таблица умножения для числа 9 — одна из самых сложных, но в наши дни почти каждому школьнику знаком изящный способ запоминания.

Поднимите ладони перед собой и представьте, что пальцы пронумерованы от 1 до 10 слева направо. Согните палец, соответствующий числу, которое вы хотите умножить на 9. Посчитайте, сколько пальцев находится слева и справа от согнутого пальца. Это и будет ответ (см. рисунок).

Но есть трюки и похитрее…

Зная таблицу умножения вплоть до 5 × 5, вы можете посчитать на пальцах любое произведение от 6 × 6 до 10 × 10. Сперва представьте, что пальцы каждой руки пронумерованы как 6, 7, 8, 9, 10.

1. Чтобы умножить 7 на 8, соедините соответствующие пальцы.
2. Представьте линию, проведенную чуть выше этих двух пальцев.
3. Чтобы получить единицы, посчитайте, сколько пальцев на каждой руке находится выше линии, и перемножьте эти числа. У нас вышло 3 × 2 = 6.



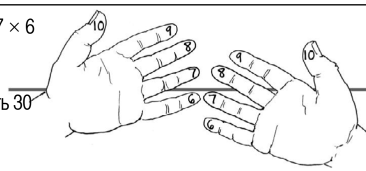
4. Чтобы получить десятки, сложите количество пальцев на обеих руках, которые оказались ниже линии. Итого 5 пальцев, то есть 50.
5. Сложите десятки и единицы: 50 + 6 = 56. Это и есть ответ!

Для верности посчитаем еще 7 × 6

Единицы: 4 × 3 = 12

Десятки: 2 + 1 = 3 десятка, то есть 30

Складываем: 30 + 12 = 42



Умножение больших чисел

Вы проехали 693 мили, чтобы устроить палаточный лагерь где-то у черта на куличках, и по возвращении домой обнаружили, что нет ключей от входной двери, которые вы, скорее всего, выронили, когда разбирали тент. Съездив за ними обратно, вы в итоге проехали по одной и той же дороге четыре раза. Сколько всего миль вы преодолели?

Честно говоря, после таких приключений вряд ли кому-то захочется садиться за подсчеты, но если вы все же решитесь, окажется, что числа выходят далеко за пределы таблицы умножения. Хитрость в том, чтобы умножать небольшими частями, к тому же (о радость!) вам ничего не придется умножать больше чем на 9. Рассмотрим по пунктам, как умножить 693 на 4.

❶ Запишем выражение так:

$$\begin{array}{r} 693 \\ \times \quad 4 \\ \hline = \quad \end{array}$$

❷ Умножим на 4 сначала 3, затем 9 и наконец 6, следя за тем, чтобы результаты были записаны в нужных местах. Начнем справа, с единиц. Считаем: 3 × 4 = 12. Пишем 2 под 4 и ставим маленькую единичку над пустым местом слева.

$$\begin{array}{r} 693 \\ \times \quad 4 \\ \hline {}^{1}\; \\ = \quad 2 \end{array}$$

Так записываем 12

❸ Теперь умножаем 9 × 4 = 36 и, прибавив маленькую единичку, получаем 37. Пишем 7 в ответ, а маленькую тройку ставим над следующим пустым местом.

$$\begin{array}{r} 693 \\ \times \quad 4 \\ \hline {}^{3}\;{}^{1}\; \\ = \quad 72 \end{array}$$

Это 37

❹ И наконец, считаем 6 × 4 = 24. Прибавив маленькую тройку, получаем 27. Больше умножать нечего, так что пишем внизу 27 и получаем ответ! Вышло довольно изящно. (Надеюсь, это поднимет вам настроение после неурядиц с ключами.)

$$\begin{array}{r} 693 \\ \times \quad 4 \\ \hline {}^{3}\;{}^{1}\; \\ = 2772 \end{array}$$

Теперь перейдем к умножению бо́льших чисел. Допустим, нужно умножить 517 на 38. Традиционный способ — умножить 517 на 30, затем 517 на 8 и сложить оба полученных числа. Пусть и неуклюже, но зато работает.

❶ Запишем выражение так, как показано, и проведем внизу несколько дополнительных линий. Сначала умножим 517 на 30. Запишем 0 под 8 для того, чтобы остальная часть ответа оказалась в правильном месте.

$$\begin{array}{r} 517 \\ \times \quad 38 \\ \hline 0 \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

❷ Теперь умножаем 517 на 3. Начнем с $7 \times 3 = 21$. Единицу записываем в тот столбец, где стоит 3, а маленькую двойку добавляем в следующий столбец. Обратите внимание, дальше нужно считать $1 \times 3 = 3$! (По невнимательности легко пропустить цифру.) Прибавляем 2 к 3 и, получив 5, записываем 5 в ответ. Наконец, $5 \times 3 =$ $= 15$: пишем это число спереди.

$$\begin{array}{r} 517 \\ \times\ 38 \\ \hline {}^{2}\ \ \ \\ 15510 \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

❸ Теперь вычисляем 517×8, записывая ответ линией ниже. При умножении $7 \times 8 = 56$ шестерка попадает в тот столбец, где стоит 8.

$$\begin{array}{r} 517 \\ \times\ 38 \\ \hline {}^{2}\ \ \ \\ 15510 \\ \hline {}^{1\ 5}\ \\ 4136 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

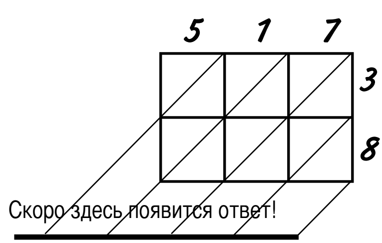
❹ Выяснив, сколько будет 517×30 и 517×8, складываем оба результата. Получается 15 510 + + 4136 = 19 646. Это и есть окончательный ответ!

$$\begin{array}{r} 517 \\ \times\ 38 \\ \hline {}^{2}\ \ \ \\ 15510 \\ \hline {}^{1\ 5}\ \\ 4136 \\ \hline 19646 \\ \hline \end{array}$$

Надежный способ умножения

Хотя этот способ требует большей подготовки, чем традиционный, зато он гарантирует, что все нужные числа будут перемножены, а ответ окажется в правильных столбцах.

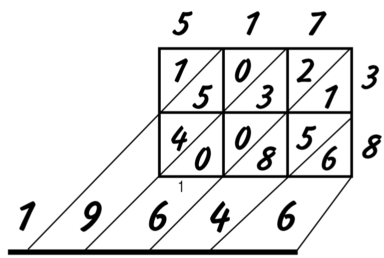
Чтобы вычислить, сколько будет 517×38, нарисуем сетку, через клетки которой проходят диагональные линии. Запишем числа, которые нужно перемножить: одно вдоль верхней стороны, другое сверху вниз вдоль боковой.



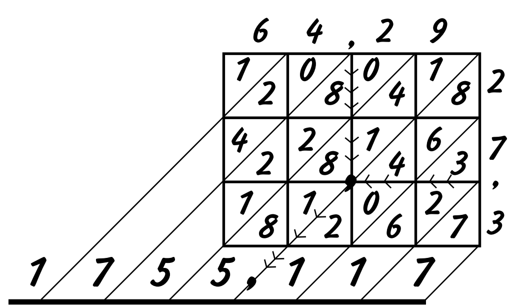
Заполняем каждую ячейку, умножая число над ней на число сбоку. Например, чтобы заполнить верхнюю левую ячейку, посчитаем: 5 × 3 = 15. Записываем результат: 1 над диагональю, 5 под ней.

Если при умножении получается одноразрядное число (например, 1 × 3 = 3), пишем его как 03 — 0 над диагональю, 3 под ней.

После того как заполним все ячейки, просто сложим числа вдоль диагоналей. (Обратите внимание: 8 + 5 + 1 = 14, поэтому пишем внизу 4 и добавляем маленькую единичку в следующую колонку.)



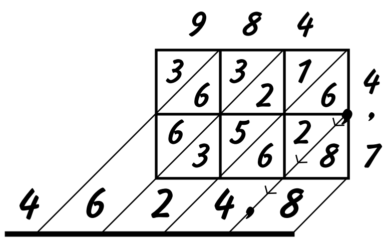
Возможно, приверженцам традиционного подхода милее старый способ, но и они, пожалуй, согласятся, что с ним легко запутаться при умножении неудобных десятичных дробей*, например 64,29 × 27,3. С новым же способом все просто.



* Если от слов «десятичная дробь» вас бросает в дрожь, не переживайте. Немного погодя все прояснится.

Чтобы узнать, где в ответе поставить запятую, ищем место пересечения линий, идущих от запятых в перемножаемых числах, и двигаемся оттуда по диагонали до самого низа.

Если запятая есть только в одном из чисел, записываем его справа и смотрим, куда приходит диагональ, начинающаяся возле этой запятой, у самого края сетки.



Умножение сотен и тысяч

Сколько будет 3000 × 900? Все просто: перемножаем числа, стоящие спереди (3 × 9 = 27), а затем складываем количество нулей в конце обоих чисел и приписываем их в конец ответа. Поскольку здесь нулей пять, получаем 2 700 000.

Но вычисляя, сколько будет 7500 × 80, надо быть чуть осторожнее. Сперва перемножаем 75 × 8 = 600. Теперь добавляем еще три нуля, по числу нулей в обоих первоначальных числах. Ответ: 600 000.

Чтобы 1030 умножить на 50, сперва берем 103 × 5 = 515. Затем добавляем два нуля и получаем 51 500. Ноль между 1 и 3 в числе 1030 учитывать не надо, он уже сыграл свою роль при умножении 103 на 5.

Умножение отрицательных чисел

Если только одно из перемножаемых чисел отрицательное, ответ будет отрицательным. Если отрицательные оба числа, ответ будет положительным.

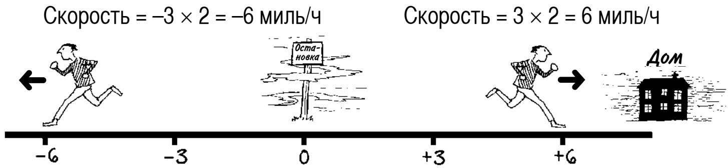
$3 \times 2 = 6$ $3 \times -2 = -6$ $-3 \times 2 = -6$ $-3 \times -2 = +6$

Почему отрицательное × × отрицательное = положительное?

Проще всего объяснить это на наглядном примере… Представьте, что на улице густой туман и вы бежите к дому от автобусной остановки. Ваша скорость: +3 мили/ч. Это положительная скорость, поэтому через час вы приблизитесь к дому на 3 мили.

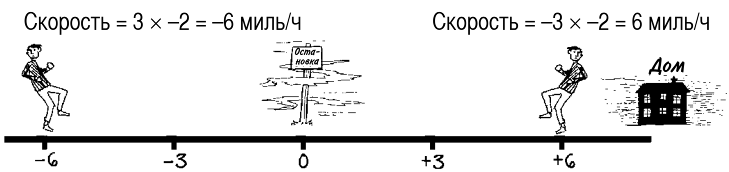
Допустим, что вы бежите со скоростью 3 мили/ч, но в противоположную сторону. Это отрицательная скорость –3 мили/ч, и через час вы окажетесь на 3 мили дальше от дома.

Теперь вы опять стартуете от автобусной остановки, но на этот раз решаете бежать вдвое быстрее. Если вы бежите в сторону дома, ваша скорость: $3 \times 2 = 6$ миль/ч, если — в противоположную, то $-3 \times 2 = -6$ миль/ч.



На сколько миль ближе к дому через 1 час?

Давайте в последний раз устроим забег от остановки, но поскольку — внимание! — на улице до сих пор густой туман, вам приходит в голову, что, возможно, вы бежите не в ту сторону. Поэтому вы решаете не только удвоить скорость, но и бежать *задом наперед*. Это соответствует умножению вашей скорости на –2. Если вы смотрите в сторону дома, то будете удаляться от него с удвоенной скоростью: 3 × –2 = –6 миль/ч. А если смотрите в противоположном от дома направлении, то скорость составит –3 × –2 = +6 миль/ч. Фактически вы будете приближаться к дому вдвое быстрее!



На сколько миль ближе к дому через 1 час?

(Итак, только что мы доказали, что смотреть в сторону, противоположную цели, и бежать задом наперед ничуть не хуже, чем смотреть в правильную сторону и бежать вперед. Однако это лишь математический пример. Автор и издатель не несут ответственности за травмы, полученные при… В общем, вы поняли.)

Отрицательные знаки отменяют друг друга не только в математических расчетах. Порой в газетных заметках содержится столько отрицаний, что и не поймешь, о чем речь. Вот пример:

Миссис Бомонт отрицает, что она отказалась опротестовать апелляцию против отмены запрета футболистам срывать с себя футболки.

Так нравятся миссис Бомонт голые по пояс футболисты или нет? Я подскажу: она хранит свой сезонный абонемент на футбол в той же сумочке, что и бинокль.

Три фокуса с калькулятором

❶ Возьмите калькулятор и введите 12345679 (цифру 8 пропускаете). Теперь умножьте это число на любое число из таблицы умножения для числа 9 (например, 9, 18 или 27...).

❷ Возьмите любое число от 100 до 999 и введите его в калькулятор. Теперь умножайте его, нажимая на следующие кнопки: × 7 × 11 × 13 =

❸ Возьмите любое число от 10 до 99 и введите его в калькулятор. Теперь нажимайте кнопки × 3 × 7 × 13 × 37 =

А если вы знаете лишь таблицу умножения на два...

Невероятно, но факт! Вы можете перемножить два любых числа исключительно путем умножения и деления на 2! Этот способ называют «русским народным умножением», хотя его также использовали древние египтяне, и он до сих пор применяется в некоторых компьютерных системах, а уж инопланетные формы жизни, как известно, вообще жить без него не могут.

Вот как умножить 326 на 28, пользуясь только таблицей умножения на два.

1. Записываем числа, которые нужно перемножить (326 и 28), вверху листа бумаги и проводим между ними вертикальную линию.

2. Делим первое число (326) на 2, игнорируя остаток (если он есть), и записываем ответ ниже. Продолжаем делить на 2 и записывать числа сверху вниз, пока наконец не получим 1.

326	~~28~~
163	56
81	112
40	~~224~~
20	~~448~~
10	~~896~~
5	1792
2	~~3584~~
1	7168
	= 9128

3. Теперь последовательно умножаем второе число (28) на 2, записывая ответы рядом с ответами в первой колонке, пока не дойдем до 1.

4. Вычеркиваем из второй колонки числа, стоящие напротив четных чисел в первой колонке.

5. Складываем оставшиеся во второй колонке числа.

Готово!

Деление

Без деления математические задачи были бы куда проще. Если взять два числа и применить к ним операции +, – и ×, а затем ÷, станет ясно, почему. Давайте возьмем числа 9 и 7.

$9 + 7 = 16$… легко! $9 - 7 = 2$ … проще простого!
$9 \times 7 = 63$… не проблема.

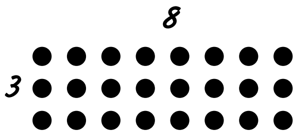
Однако на вопрос, сколько будет $9 \div 7$, можно дать как минимум три ответа:

$9 \div 7 = 1$ и 2 в остатке;
$9 \div 7 = 1\frac{2}{7}$ (а иногда годится и просто 9/7);
$9 \div 7 = 1{,}2857142857$... бpppp!

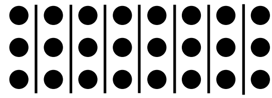
Делим поровну

Не будем пока связываться с дробями и десятичной запятой и начнем с целых чисел, а затем, убедившись, что все поняли, постепенно перейдем и к дробям.

Представим, что на день рождения пришли 8 ребят, а на столе лежат 24 булочки. Сколько булочек достанется каждому? То есть сколько раз по 8 даст в сумме 24? Слова «восемь» и «раз» подсказывают, что нужно заглянуть в таблицу умножения числа 8, где $8 \times 3 = 24$. Значит, $24 \div 8 = 3$, следовательно, каждый ребенок получит по три булочки. Поскольку не всем это очевидно, изобразим задачу с помощью кружочков.



$8 \times 3 = 24$



$\frac{24}{8} = 3$

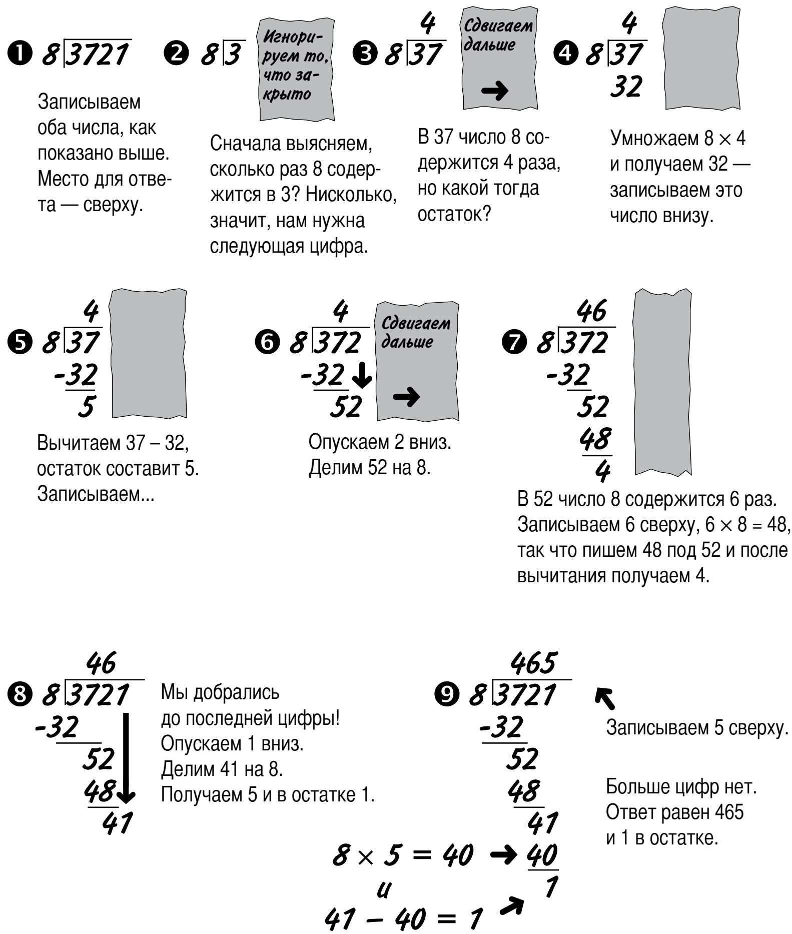
Если разделить 24 на 8 частей, в каждой части будет по 3.

Деление больших чисел

Предыдущая задача была довольно легкой, поскольку 24 есть в таблице умножения числа 8. Но если восьми детишкам нужно поделить между собой 53 воздушных шарика, жизнь заметно усложняется. Сколько раз по 8 даст вместе 53?

Увы, числа 53 в таблице умножения восьмерки нет, так что просто придется искать ответ, максимально близкий к 53. Нужное нам значение: 8 × 6 = 48, стало быть, каждый ребенок получит по 6 шариков. Но учитывая, что 53 – 48 = 5, у нас остается еще 5 шариков. И в этом случае математика оказывается весьма полезной, ибо если вы не хотите, чтобы дети передрались за оставшиеся шарики, тихонечко проткните 5 шаров, прежде чем делить остальные 48.

Ой, а еще у нас есть ведро с 3721 конфетой, и их тоже требуется поделить между восьмью детьми. В таблице умножения таких больших чисел нет, так что придется считать самостоятельно. Это непросто. Наверняка, впервые столкнувшись в школе с делением больших чисел, вы были ошарашены. Но не расстраивайтесь: секрет в том, что мы будем считать частями. Можно воспользоваться бумажкой, чтобы по ходу дела закрывать некоторые цифры. Кроме того, это поможет записывать результат в нужные столбцы. Начнем слева, соблюдая нехитрую последовательность: 1) делим, 2) вычисляем остаток, 3) двигаемся дальше. Готовы? Поехали...



Здесь я подробно описал каждый шаг, но со временем вы научитесь считать в уме выражения вроде $37 \div 8 = 4$ и 5 в остатке, так что внизу писать ничего не придется, и запись будет выглядеть так*.

* Отметим, что в русской традиции используется иная форма записи процесса деления, но по сути она полностью совпадает с приведенной. Какой формой записи пользоваться — дело привычки. *Прим. ред.*

Делим на 8, начиная слева: 8 больше 3, поэтому берем следующую цифру (7) делимого числа.

$$8\overline{)3721}$$

Идем дальше: в 37 число 8 содержится 4 раза с остатком 5. Пишем 4 над 7 и маленькую 5 перед 2.

$$\begin{array}{r}4\\ 8\overline{)37^{5}21}\end{array}$$

Движемся дальше: в 52 число 8 содержится 6 раз с остатком 4. Пишем 6 над 2 и маленькую 4 перед 1.

$$\begin{array}{r}4\;6\\ 8\overline{)37^{5}2^{4}1}\end{array}$$

Следующий шаг: в 41 число 8 содержится 5 раз с остатком 1. Пишем 5 в ответ. Поскольку мы добрались до последней цифры, 1 — окончательный остаток от деления.

$$\begin{array}{r}4\;6\;5\ \text{остаток 1}\\ 8\overline{)37^{5}2^{4}1}\end{array}$$

Как узнать, делится ли число без остатка на...

2 Любое четное число делится на 2.

3 Сложите отдельные цифры числа. Если сумма делится на 3, исходное число тоже делится на 3. Проверим, делится ли 438 на 3: складываем 4 + 3 + 8 = 15. Поскольку 15 делится на 3, число 438 тоже делится на 3.

4 Посмотрите на две последние цифры. Если цифра в разряде десятков четная, а последняя цифра 0, 4 или 8, то число делится на 4. Если в разряде десятков нечетная цифра, то чтобы число делилось на 4, последней должна быть цифра 2 или 6.*

5 Если число заканчивается на 5 или 0, оно делится на 5.

6 Поскольку 6 = 2 × 3, то число будет делиться на 6, если оно четное и при этом делится на 3.

7 Отделите от числа последнюю цифру и умножьте ее на 2. Вычтите результат из исходного числа без последней цифры. Если ответ 0 или делится на 7, то исходное число также делится на 7. Проверим число 364: отделяем 4 и умножаем на 2, получаем 8. Вычитаем 8 из 36, выходит 28. Поскольку 28 делится на 7, число 364 тоже делится на 7.**

---

* Обычно этот признак делимости формулируется так: если число, состоящее из двух последних цифр проверямого числа, делится на 4 (или состоит из нулей), то и все число делится на 4. *Прим. ред.*

** Автор пропустил признак деления на 8. Вот он: если число, составленное из последних трех цифр исходного числа, делится на 8, то и исходное число делится на 8. *Прим. ред.*

9 Так же как и для тройки, сложите отдельные цифры числа. Если сумма делится на 9, то на 9 делится и все число.

10 Число делится на 10, если оно оканчивается на 0 — проще некуда!

11 Это задача похитрее. Запишите число, по очереди ставя перед его цифрами знаки + и –. Теперь складывайте и вычитайте цифры. Если сумма равна 0 или делится на 11, то на 11 делится и исходное число. Проверим, делится ли на 11 число 49 137. Расставим знаки: +4 –9 +1 –3 +7 и подсчитаем сумму: она равна 0. Значит, 49 137 делится на 11.

Деление больших чисел

В жизни есть вещи, делать которые необязательно. Вам необязательно играть в гольф, или расставлять банки на кухне этикетками наружу, или решать до конца газетные кроссворды, а благодаря калькуляторам необязательно и заниматься делением больших чисел. Однако если вас терзает тайное любопытство, способны ли вы сразиться с числами и победить их, не сдерживайте себя. В отличие от таких хобби, как трейнспоттинг*, синхронное плавание или полировка машины, делить большие числа можно, уединившись у себя дома, *так что никто об этом не узнает*.

Нечасто при делении одного большого числа на другое получается ровный и точный ответ, но порой и такое случается...

---

* Популярное в Великобритании и США развлечение, заключающееся в отслеживаним поездов по их номерам. *Прим. перев.*

Итак, в общей сложности на наследство претендуют 356 человек, а значит, чтобы выяснить, сколько достанется лично вам, нужно разделить 103 596 на 356. Если вы усвоили все, о чем я говорил в этой главе, то в целом вам должно быть ясно, что к чему. Что касается больших чисел, то разница лишь в том, что вам придется немного поугадывать и поумножать.

Лишние нули

Запомните следующий прием. Положим, вам нужно посчитать, сколько будет 6000 ÷ 200. Задачу можно существенно упростить, убрав с конца каждого числа одинаковое количество нулей. То есть 6000 ÷ 200 можно упростить до 60 ÷ 2, что равняется 30. Так проще!

Так какую же сумму вы унаследовали?

Запишите числа так же, как мы это делали прежде: ***356 |103596***

Открывайте цифры слева направо, пока не достигнете числа, которое больше 356, вот так:

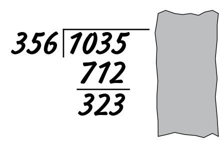
1 больше 356? Нет.
10 больше 356? Нет.
103 больше 356? Нет.
1035 больше 356? Да!

Значит, первая цифра ответа появится над пятеркой.

Чтобы получить первую цифру, надо выяснить, сколько будет 1035 ÷ 356. Для простоты подсчета округлим числа: 1035 это примерно 1000, а 356 —примерно 300. Сколько будет 1000 ÷ 300? Если отбросить по два нуля с конца каждого числа, получится 10 ÷ 3, то есть ответ равен 3 с остатком. Похоже, 3 — хороший вариант, но не будем спешить...

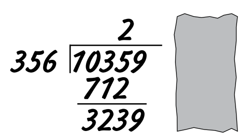
Проверим нашу догадку: умножим 356 × 3 и получим 1068. Результат должен быть меньше 1035, стало быть, наше на глазок подобранное число 3 слишком велико. Попробуем лучше 2: посчитав 356 × 2, выйдет 712.

Записываем 712 под 1035 и вычитаем 1035 – – 712 = 323. Итак, 1035, деленное на 365, дает 2 с остатком 323. Поскольку остаток меньше, чем 356, можно заключить, что двойку мы угадали правильно!



Не без самодовольства записываем 2 в качестве первой цифры ответа.

Пора двигаться дальше, открываем следующую цифру — это 9.



Теперь нам нужно угадать, сколько будет 3239 ÷ 356. Давайте рискнем и навскидку скажем, что это 8. Быть может, мы ошибаемся, но если нет, это потешит наше самолюбие.

Для проверки умножаем 356 × 8 = 2848, записываем это число под 3239 и вычитаем, чтобы оценить остаток.

Выходит, что 3239 – 2848 = 391. Упс! Остаток 391 больше, чем 356, значит, число 8 нам не подходит. В действительности 356 войдет в 3239 еще раз, так что 9 будет в самый раз.

```
        2
356 |10359
      712
     3239
     2848
     0391
Ой!
```

Для проверки умножаем: 356 × 9 = 3204. Придется стереть 2848, записать вместо него 3204 и затем вычесть его из 3239.

(Тут самое время напомнить: никто вам не обещал, что будет легко. Однако сейчас мы специально детально рассматриваем каждый шаг; с опытом вы научитесь считать гораздо быстрее.)

```
       29
356 |10359
      712
     3239
     3204
       35
```

Итак, в самом низу у нас получилось 35. Это меньше, чем 365, стало быть, мы правильно угадали цифру 9 и можем записать ее сверху, после двойки.

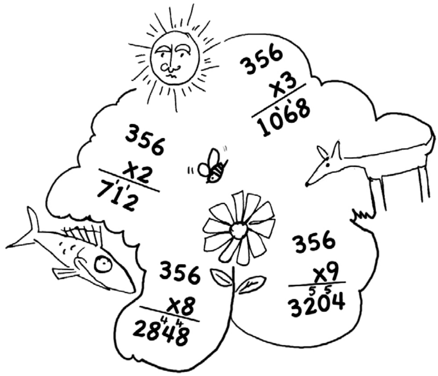
Двигаемся дальше и открываем последнюю цифру 6.

Вычисляем 356 ÷ 356. Ура! Нам повезло, потому что выходит ровная, удобная единица. Можно записать ее в ответ, и если вы из тех, кто расставляет банки этикетками в одну сторону, вам наверняка захочется аккуратно завершить расчеты. Умножаем 356 × 1, пишем результат в самом низу и, вычитая, получаем 356 – 356 = 0, то есть без остатка.

```
        291
356 |103596
      712
     3239
     3204
       356
```

Вот как выглядит завершенный расчет с дополнительными умножениями в сторонке. Как видите, в процессе деления можно даже выкроить время для художественного самовыражения.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 291 \\
356 & 103596 \\
 & \underline{712} \\
 & 3239 \\
 & \underline{3204} \\
 & 356 \\
 & \underline{356} \\
 & 0
\end{array}
$$



После таких приключений вы, должно быть, позабыли, что мы все это делали с одной целью — узнать, сколько денег вы унаследовали от тетушки. Что ж, 291 фунт не так уж много, но зато новость о том, что у вас есть 355 кузин и кузенов, стоит того, чтобы закатить вечеринку!

Загадка про нечестного официанта

Теперь, когда мы разделались с этими огромными противными числами, я предлагаю вам прекрасную старую загадку о дележе денег. Многие ее слышали, но не каждый способен понять, что в ней к чему.

Три женщины приходят в ресторан пообедать и получают счет на 30 фунтов. Каждая из них дает официанту банкноту в 10 фунтов, но тот, дойдя до кассы, понимает, что в счете ошибка: должно быть 25 фунтов, а не 30. Официант отсчитывает 5 монет по 1 фунту, но по дороге к столику решает отдать каждой женщине по 1 фунту сдачи, а оставшиеся 2 фунта тихонечко положить себе в карман.

Итак, первоначальный счет был на 30 фунтов. После того как женщины получили сдачу, выходит, что они заплатили $3 \times 9 = 27$ фунтов, и еще 2 фунта остались в кармане у официанта. $27 + 2 = 29$. Куда же делся еще один фунт?

Эта загадка столь хороша, что я не дам ответ на нее сразу, а припрячу его: читайте внимательно, и вы обнаружите его на одной из последних страниц книги. И нечего делать такое лицо: в конце концов, я без промедлений отвечаю на все остальные вопросы!

ПОРЯДОК ДЕЙСТВИЙ

Когда вы сталкиваетесь с длинным выражением, предполагающим выполнение множества небольших математических операций, важно знать, в каком порядке их осуществлять. Очередность должна быть такой.

❶ Выражения, стоящие в скобках.

❷ Возведение в степень.

❸ Умножение и деление.

❹ Сложение и вычитание.

Разбираемся с длинными выражениями

Давайте посмотрим, для чего это может понадобиться депутату местного совета миссис Бомонт, которая готовится к вечеринке в сельском клубе.

Миссис Бомонт зашла в булочную и купила две банки сливок для взбивания по 80 пенсов каждая и три кекса с вишенкой по 32 пенса каждый. Сколько всего она потратила?

Получается выражение: $2 \times 80 + 3 \times 32$. Если просто выполнять операции по очереди, то сперва мы вычислим $2 \times 80 = 160$, затем $160 + 3 = 163$ и наконец $163 \times 32 = 5216$, или 52 фунта и 16 пенсов. За две банки сливок и три кекса это о-го-го как много! Где же ошибка?

Нужно выполнять умножение и деление до сложения и вычитания.

Поэтому в выражении 2 × 80 + + 3 × 32 сначала нужно умножить 2 на 80 и 3 на 32, что даст 160 + 96. После сложения становится ясно, что миссис Бомонт потратила 256 пенсов, или 2 фунта и 56 пенсов.

Сначала обе операции умножения

$$\underbrace{2 \times 80} + \underbrace{3 \times 32}$$

$$\downarrow \qquad\quad \downarrow$$

Затем сложение

$$\underbrace{160 + 96}$$

$$\downarrow$$

$$256$$

Теперь миссис Бомонт должна позаботиться о костюмах для четырех своих подруг. Каждой из них нужно леопардовое трико за 17 фунтов, две упаковки серпантина и красная шляпа. Кроме того, миссис Бомонт хочет купить себе за 6 фунтов волшебную палочку, как у феи. Еще у миссис Бомонт как у постоянного клиента есть три талона на скидку по 5 фунтов каждый. Сколько же денег ей предстоит потратить?

Сначала выясним, сколько денег понадобится для каждой из четырех подруг:

трико: 17 фунтов;
серпантин: 2 × 3 фунта;
шляпа: 8 фунтов.

Мы можем записать это как 17 + 2 × 3 + 8. А раз эта сумма нужна для каждой из подруг, заключим выражение в скобки: (17 + 2 × 3 + 8).

Подруг всего четверо, стало быть, и полученное выражение следует умножить на 4. Запишем это так: 4(17 + 2 × 3 + 8). Когда перед открывающей скобкой стоит число, это означает, что все находящееся в скобках нужно на него умножить. Еще миссис Бомонт хочет волшебную палочку, тогда получается 4(17 + + 2 × 3 + 8) + 6. Обратите внимание, число 6 стоит за скобками, ведь его умножать на 4 не нужно. И наконец, учитываем и три талона на скидку по 5 фунтов, то есть всего (3 × 5).

Эту сумму нужно отнять от стоимости покупок, поэтому ставим перед скобкой минус. В итоге у нас выходит: $4(17 + 2 \times 3 + 8) + 6 - (3 \times 5)$.

Всегда начинайте вычисления с выражений в скобках!

Начинаем с первой пары скобок: умножаем 2×3, что дает $(17 + 6 + 8)$, а затем складываем числа, получается 31. Результат умножения во второй паре скобок (3×5) составит 15. Теперь все выражение выглядит так: $4(31) + 6 - (15)$.

Вспоминаем, что 4 — это множитель для содержимого скобок и умножение нужно выполнить прежде, чем от них избавляться. Получаем $124 + 6 - 15$. Следовательно, миссис Бомонт потратит 115 фунтов.

Остался последний вопрос: если ее подруги идут на вечеринку в леопардовых трико и красных шляпах, что же наденет сама миссис Бомонт? Ответ прост: себе костюм она купила в булочной.

ГРУБЫЙ ПОДСЧЕТ

Прежде чем приступать к расчетам, связанным с большими числами, имеет смысл сделать грубую прикидку результата. Особенно это важно при использовании калькулятора, ведь нажать не ту кнопку проще простого.

На футбольном матче в Йорке* присутствовали 38 452 зрителя, каждый из них заплатил за вход 27,50 фунта (эти данные позаимствованы из снов футбольного менеджера). Четверо контролеров (по одному на каждый вход) решили выяснить, какой должна быть общая выручка, и посчитали на калькуляторах: 38 452 × 27,50.

Увы, у них получилось четыре разных ответа:

а) 105 930 фунтов
б) 1 057 430 фунтов
в) 3 847 950 фунтов
г) 105 734 000 фунтов

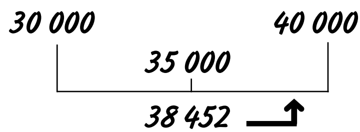
Как думаете, кто посчитал правильно?

Округление

Во-первых, упростим числа, сделав их более удобными для вычислений, и для этого их грубо округлим. Оставим только первую цифру каждого числа, а остальные заменим нулями: например 38 452 превратится в 30 000. Однако чтобы приблизительный результат вышел точнее, *будем прибавлять к первой цифре 1, если вторая цифра равна или больше пяти.* В данном случае вторая цифра 8, поэтому округлим 38 452 до 40 000.

* Йорк — город на севере Англии. *Прим. ред.*

Представив эти числа отмеченными на линейке, мы убедимся, что 38 452 и впрямь ближе к 40 000, чем к 30 000:



27,50 фунта можно было бы округлить до 20, но 7 больше 5, поэтому округляем до 30.

Годится. Теперь умножим 40 000 × 30. По сути, это 4 × 3 плюс общее количество нулей. Всего нулей пять, и наш приблизительный ответ равен 1 200 000. Ближе всего к этому числу вариант б) 1 057 430, так что, скорее всего, именно он правильный.

А вот где ошиблись остальные три контролера: а) пропущена цифра 4, в) вместо кнопки × на калькуляторе нажата кнопка +, г) в числе 27,50 пропущена запятая.

Начиная с этого момента некоторые сложные выражения будут отмечаться таким значком с подсказкой, как можно грубо оценить результат.

ДРОБИ

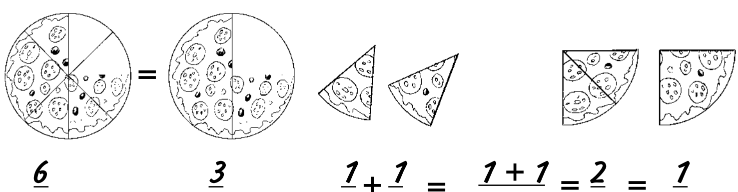
В главе, посвященной делению, мы либо использовали числа, которые делятся полностью, либо оставляли неразделенный остаток. Когда числа необходимо делить на части без остатка, все становится гораздо любопытнее. В таком случае понадобятся дроби, простые или десятичные. Иногда лучше иметь дело с одним видом дробей, иногда с другим — все зависит от ситуации.

Простая дробь — это непосчитанная операция деления. Например, выражение 4 ÷ 7 можно записать как 4/7 (четыре седьмых). У этого подхода есть как приятная сторона — не надо выполнять деление, так и неприятная — вместо одного числа придется иметь дело с двумя.

Сокращение дробей

Предположим, у вас есть пицца с пепперони, разрезанная на восемь частей. Это можно записать как 1 ÷ 8, то есть каждая часть составляет 1/8 (одну восьмую) от всей пиццы. Если вы съедите шесть кусков, получится, что вы съели 6/8 (шесть восьмых) пиццы.

6/8 — вполне нормальная дробь, но вы вряд ли где-нибудь ее встретите, и вот почему:



$$\frac{6}{8} \qquad \frac{3}{4} \qquad \frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{1+1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Из рисунка следует, что 6/8 — то же самое, что и 3/4, поскольку две восьмые вместе составляют одну четверть, а значит, шесть восьмых составят три четверти.

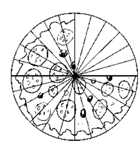
Если у вас под рукой нет пиццы, посмотрим, как это происходит с числами. Начнем с дроби 6/8 и постараемся отыскать число, на которое делятся обе ее части, верхняя и нижняя.

$\frac{6}{8}$ Оба числа делятся на 2, поэтому... $\frac{6 \div 2}{8 \div 2} = \frac{3}{4}$ Готово!

Если умножить или разделить верхнюю и нижнюю часть дроби на одно и то же число, значение дроби не изменится.

Звучит немного странно, однако все, что мы сейчас сделали, — это разделили верхнее и нижнее число дроби на одно и то же число 2, превратив 6/8 в 3/4. Если же вы решите умножить верхнее и нижнее число дроби, скажем на 6, по какой-то непонятной причине (скоро мы увидим, в чем она заключается), то получится 3/4 = 18/24.

И это совершенно нормально, ведь если ваша пицца разрезана на 24 куска и вы съедите 18, количество съеденного все равно останется тем же, просто куски стали гораздо меньше.



$\frac{18}{24}$

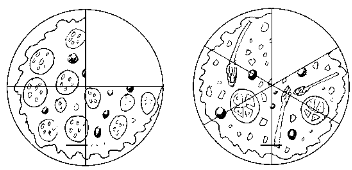
Уменьшение чисел в обеих частях дроби называется *сокращением* и, как правило, улучшает вашу жизнь. Предположим, у вас есть вегетарианская пицца, и какой-то маньяк искромсал ее на 84 куска. Вы съели 70, это сколько от общего количества? Получается дробь 70/84, которая не укладывается у вас в голове, поэтому снова ищем число, чтобы поделить на него верх и низ дроби. Поскольку числа вверху и внизу дроби четные, они делятся на 2. Получив 35/42, мы видим, что оба числа делятся на 7, и теперь нам становится ясно, что вы съели 5/6 вегетарианской пиццы.

И наконец, главный вопрос: какой пиццы вам досталось больше?

Сравнение, сложение и вычитание дробей

Итак, хотелось бы знать, что больше — 3/4 или 5/6?

(Числа тут довольно простые, так что ответ для вас может быть очевиден. От пиццы с пепперони осталась четверть, а от вегетарианской пиццы — одна шестая. Одна шестая меньше, чем четверть, так что вегетарианской пиццы вы съели больше.)



$\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$

Если хотите, чтобы все соответствовало математическим правилам, тогда нужно сделать так, чтобы у обеих дробей, 3/4 и 5/6, внизу стояло одно и то же число. Самый надежный способ — взять каждую дробь и умножить ее верхнее и нижнее число на нижнее число другой дроби. (Если придерживаться терминов, то верхнее число дроби называется *числителем,* а нижнее — *знаменателем*.)

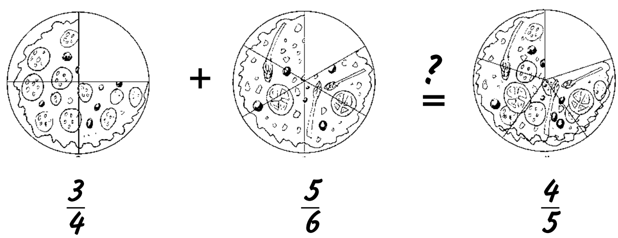
$\frac{3}{4}$ Умножаем верх и низ на низ другой дроби $\frac{5}{6}$ Получается: $\frac{3 \times 6}{4 \times 6} = \frac{18}{24}$

$\frac{5}{6}$ Здесь аналогично $\frac{3}{4}$ Получается: $\frac{5 \times 4}{6 \times 4} = \frac{20}{24}$

Итак, мы выяснили, что 3/4 = 18/24 и 5/6 = 20/24. Следовательно, 5/6 больше, чем 3/4. (Еще дроби можно сравнивать, преобразуя их из простых в десятичные, см. раздел «Десятичные дроби».)

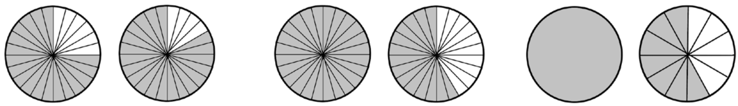
Другой вопрос, который может вас заинтересовать, — сколько пиццы вы съели в общей сложности? Если это 3/4 пиццы с пепперони и 5/6 вегетарианской, значит, нужно сложить 3/4 и 5/6.

Так делать НЕЛЬЗЯ: $\frac{3+5}{4+6} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$



Здравый смысл подсказывает, что вы съели бо́льшую часть как одной, так и другой пиццы, а из ответа следует, что вам досталось меньше, чем целая пицца!

Проблема в том, что четвертые и шестые части — не одно и то же, поэтому так запросто их складывать нельзя. Нужно преобразовать их в дроби с одинаковым знаменателем. К счастью, мы это уже сделали, выяснив, что 3/4 = 18/24 и 5/6 = 20/24. Когда знаменатели одинаковы, числители можно сложить так, как будто мы порезали каждую пиццу на 24 куска.



$$\frac{18}{24} + \frac{20}{24} = \frac{38}{24} = \frac{24}{24} + \frac{14}{24} = 1 + \frac{7}{12}$$

Обратите внимание: когда мы закончили перекладывать куски пиццы, 38/24 превратились в 1 и 7/12. Подозрительно, не правда ли? Уверен, вы не помните, чтобы ели ровно 7 каких-либо частей и уж точно не 12-х, но тем не менее это правильный ответ.

Вычитание дробей производится аналогичным образом. Вот чему равно 2/3 – 3/5 на примере все тех же двух пицц.

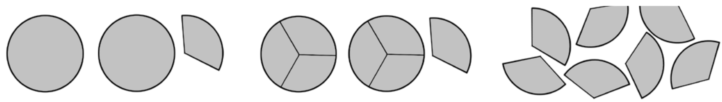
$$\frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} - \frac{3 \times 3}{5 \times 3} = \frac{10}{15} - \frac{9}{15} = \frac{1}{15}$$

Смешанные числа и неправильные дроби

Смешанное число — это целое число с дробью, например $6\frac{1}{2}$.

Неправильной называют дробь, числитель которой больше знаменателя, например 13/2 (кстати, $6\frac{1}{2} = \frac{13}{2}$).

Чтобы преобразовать смешанное число в неправильную дробь, умножьте его целую часть на знаменатель и прибавьте результат к числителю. Запутались? Пора снова браться за пиццы...



$$2\frac{1}{3} = \frac{2 \times 3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{6+1}{3} = \frac{7}{3}$$

Чтобы преобразовать неправильную дробь обратно в смешанное число, относитесь к ней как к операции деления. Конвертируем 7/3: 7 ÷ 3 = 2 и 1 в остатке. В ответ идет 2 целых, а 1 остается над тройкой, что дает $2\frac{1}{3}$.

Преобразование смешанных чисел в неправильные дроби обычно облегчает их умножение и деление, в чем мы сейчас убедимся.

Умножение дробей и значение слова «от»

Складывать и вычитать дроби бывает неудобно, но, к счастью, с умножением и делением все обстоит гораздо проще.

Умножение дробей часто скрывается за словом «от». Если вы говорите «три четверти от двенадцати», на самом деле вы имеете в виду 3/4 × 12. При умножении целого числа на дробь нужно выполнить две операции: умножить число на числитель и разделить на знаменатель. Вот как это будет выглядеть для 3/4 × 12.

$$\frac{3}{4} \times 12 = \frac{3 \times 12}{4} = \frac{36}{4} = 9$$

Чтобы перемножить две дроби, нужно просто перемножить их верхние и нижние части.

Предположим, вы каждые субботу и воскресенье по 7 часов наблюдаете за птицами. Какая это будет часть от целой недели? Суббота и воскресенье составляют 2/7 недели, а поскольку в сутках 24 часа, вы тратите 7/24 от них, пытаясь выследить пеструю камышовку или хохлатого зяблика. Получается выражение

$$\frac{7}{24} \times \frac{2}{7} = \frac{7 \times 2}{24 \times 7} = \frac{14}{168}$$

Наверное, вы заметили, что 14 и 168 делятся на 14, что даст в результате 1/12. А не лучше ли вообще не связываться с такими большими числами? При умножении дробей всегда стоит поискать возможность их по ходу дела сократить. Самое оптимальное — найти одно и то же число в числителе и знаменателе дробей, потому что тогда эти числа *взаимно уничтожаются.*

Вернемся к выражению

$$\frac{7 \times 2}{24 \times 7}$$

Взгляните на две семерки: вверху дроби и внизу. Подсчитав верхнюю и нижнюю части дроби, мы в итоге придем туда, откуда начали, то есть 14/168. Вместо этого зачеркнем обе семерки и заменим их единицами. Давайте посмотрим, что еще можно сделать.

$$\frac{\overset{1}{\cancel{7}} \times 2}{24 \times \cancel{7}^{1}}$$ То же самое, что и $$\frac{2}{24}$$ И 2 вверху, и 24 внизу делятся на 2 $$\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{24}^{12}}$$ И остается... $$\frac{1}{12}$$

Итак, теперь вы знаете, что тратите двенадцатую часть недели на наблюдения за птицами. Это соответствует одной минуте из каждых 12 минут вашей жизни или же целому месяцу в год! (Если вы начнете высчитывать дроби для всех своих регулярных занятий, например для хобби или поездок на работу, результаты могут вас шокировать. К примеру, большинство людей проводят в ванной комнате около 10 дней в году.)

Есть одна старая математическая головоломка, которую время от времени перепечатывают в газетах. Сколько будет 9/10 × 8/9 × 7/8 × 6/7 × 5/6 × 4/5 × 3/4 × 2/3 × 1/2? Тот, кто решает это опубликовать, наверняка сидит в своем кабинете, поглаживая белую кошку, и демонически хохочет, предвкушая, как читатели засядут за вычисления. Однако не тут-то было: эти числа взаимно уничтожаются, и в итоге остается 1/10.

Деление на дробь

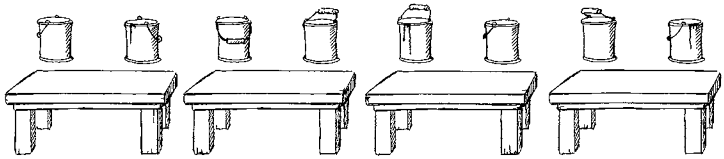
Чтобы поделить что-либо на число или на дробь, просто переверните число или дробь вверх ногами и вместо деления умножайте.

Звучит безумно, но, отправившись в гости к своей тетушке, вы поймете, в чем тут дело. Тетя живет в 10 милях от вас, и вы проехали половину пути — сколько это миль? Требуется вычислить «половину от десяти», и это «от» означает, что нужно умножить: $10 \times 1/2$. Разумеется, тот же ответ вы получите, если разделите 10 на 2.

Целые числа можно записывать как дроби с единицей внизу, тогда наше выражение можно представить как $\frac{10}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{10}{1} \div \frac{2}{1}$. То есть делить на 2 или на 2/1 — это то же самое, что и «перевернуть 2 вверх ногами» и умножать на 1/2.

К задачам, которые связаны с делением на дроби, нужно подходить с умом. Положим, вы обзавелись кучей стульев и знаете, что на покраску одного стула уходит 2/3 банки краски (да, это очень маленькие банки). Если банок у вас 8, сколько всего стульев удастся покрасить?

Быстренько прикинем, что здесь к чему. Представим, что вы красите столы, и на каждый уходит 2 банки краски, а всего банок 8. Сколько столов получится покрасить? Считаем: $8 \div 2 = 4$ стола.



Обратите внимание: мы делим на количество банок, которое уходит на покраску одного стола. Со стульями то же самое: нужно делить на количество банок, которое требуется на каждый стул. Таким образом, число стульев, которые удастся покрасить, будет равно 8 ÷ 2/3. Чтобы посчитать, сколько это, перевернем 2/3 вверх ногами и умножим.

$$8 \div \frac{2}{3} = 8 \times \frac{3}{2} = \frac{8 \times 3}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

Итак, восьми банок хватит на 12 стульев. Обратите внимание, что после деления на правильную дробь число становится больше, чем было вначале.

Грубый подсчет

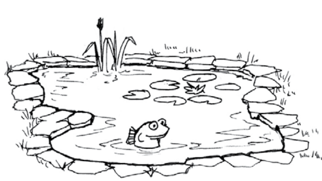
Получив такой ответ, убедитесь, что он соответствует действительности. Если на каждый стул нужно 2/3 банки, тогда одной банки хватит на покраску одного стула и еще немного краски останется. Значит, имея 8 банок, вы точно покрасите 8 стульев плюс еще несколько, так что ответ 12 выглядит вполне резонным.

Рыбья проблема

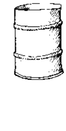
Прежде чем закончить с дробями, давайте-ка из чисто мазохистских побуждений решим по-настоящему зверскую задачку. Сколько бочек нефти понадобится, чтобы доверху наполнить бассейн для рыбок?

В бассейн вмещается $85\frac{1}{2}$ ведер воды

Одна бочка вмещает $11\frac{1}{4}$ ведер нефти



$\times 11\frac{1}{4} =$



Сначала сделаем *грубую прикидку решения*! Это позволит понять, каким должен быть ответ, и заодно поможет правильно составить выражение. В нефтяную бочку помещается около 10 ведер. Чтобы наполнить бассейн, нужно примерно 80 ведер. Значит, количество бочек приблизительно составит $80 \div 10 = 8$. Что ж, похоже на правду.

Теперь перейдем к точным значениям. Вместо $80 \div 10$ посчитаем, сколько будет $85\frac{1}{2} \div 11\frac{1}{4}$.

Сначала преобразуем смешанные числа в неправильные дроби: $85\frac{1}{2} = \frac{85 \times 2 + 1}{2} = \frac{171}{2}$ и $11\frac{1}{4} = \frac{11 \times 4 + 1}{4} = \frac{45}{4}$. Осталось лишь вычислить $\frac{171}{2} \div \frac{45}{4}$. Что ж, поехали…

$$\frac{171}{2} \div \frac{45}{4} = \frac{171}{2} \times \frac{4}{45} = \frac{171}{{}^{1}\cancel{2}} \times \frac{\cancel{4}^{\,2}}{45} = \frac{\cancel{171}^{\,19}}{1} \times \frac{2}{\cancel{45}_{\,5}} = \frac{19 \times 2}{5} = \frac{38}{5} = 7\frac{3}{5}$$

Переворачиваем и умножаем

Сокращение! Верх и низ делятся на 2

Опять сокращение! Верх и низ делятся на 9

Готово!

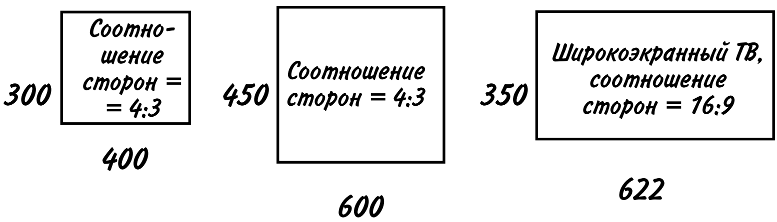
Наш ответ: $7\frac{3}{5}$ бочек нефти. Это похоже на грубо посчитанный результат (8), так что можем не волноваться. А еще можем упиваться радостью, триумфом и самодовольством.

ПРОПОРЦИИ

Пропорции встречаются на каждом шагу: разводите ли вы жидкость для мытья полов, удваиваете объем ингредиентов в рецепте или пытаетесь заставить свой телевизор показывать картинку без искажений. И если вы не хотите, чтобы пол был испорчен, гости отравлены, а телеведущие напоминали борцов сумо, стоит разобраться, что же такое пропорции.

Какой у вас телевизор?

Форма телеэкрана описывается двумя числами, обозначающими соотношение между его шириной и высотой. У обычного телевизора оно составляет 4:3, то есть если ширина равна 400 мм, то высота должна быть 300 мм. В прежние времена при покупке телевизора с экраном побольше было важно, чтобы его форма оставалась такой же, как у вашего старого телевизора, иначе люди на экране выглядели бы слишком тонкими или чересчур толстыми. То есть соотношение сторон должно быть одним и тем же. Допустим, ширина экрана вашего нового телевизора — 600 мм, тогда какой должна быть высота? Можно превратить пропорцию в дробь, либо в 3/4, либо в 4/3, и умножить ее на 600 мм, но какую из двух дробей взять? Вооружимся здравым смыслом: высота экрана должна быть меньше ширины, значит, умножаем 600 мм на 3/4. Получаем 450 мм. И хотя экран у нового телевизора больше, чем у старого, его форма в обоих случаях одинакова.

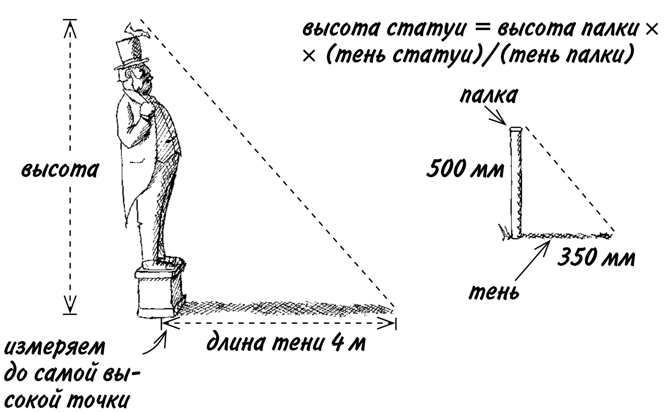


У новых широкоэкранных телевизоров соотношение сторон, как правило, 16:9. Если высота такого экрана 350 мм, то какой будет ширина? Она должна быть больше высоты, поэтому умножаем 350 на 16/9 и получаем 622 мм.

Так математика помогает изображению в вашем телевизоре выглядеть правильно независимо от размера экрана. Жаль только, что она никак не влияет на качество телепередач.

Тень от палки

С помощью пропорций можно рассчитать высоту статуи (или дерева, или дома). Для этого нужна солнечная погода, палка и рулетка. Воткните палку вертикально в землю, а затем измерьте длину палки, длину тени от палки и длину тени от статуи.



Солнечный свет образует два *подобных* друг другу треугольника. Это означает, что они разного размера, но в точности одинаковой формы. Соотношение между высотой палки и длиной ее тени будет таким же, как отношение высоты статуи к длине ее тени.

Высота палки — 500 мм, а длина тени — 350 мм. Это образует пропорцию 500:350, которую можно сократить, как обычную дробь:

500:350 → Оба числа делятся на 10 → **50:35** → Оба числа делятся на 5 → **10:7**
Так-то лучше!

Итак, мы определили, что высота палки относится к длине ее тени как 10:7. Длина тени статуи равна 4 м, и теперь мы можем вычислить высоту статуи. Высота палки больше, чем длина ее тени, а значит, и высота статуи должна быть больше 4 м. Поэтому умножаем длину тени статуи на 10/7 и выясняем, что высота статуи составляет $\frac{40}{7} = 5\frac{5}{7}$ м.

Пропорции ингредиентов

Для того чтобы получился качественный бетон, важно знать, сколько брать цемента, песка и заполнителя (щебня). Типичная смесь имеет приблизительно такие пропорции:

Цемент : песок : заполнитель = 1 : 2 : 4

Положим, у вас есть 3 тонны песка, и вы хотите использовать их без остатка, тогда сколько понадобится цемента и заполнителя?

Согласно пропорции, на каждую тону цемента приходится 2 тонны песка и 4 тонны заполнителя. Числа в пропорции можно менять, умножая их на одно и то же значение. Нам нужно поменять 2 тонны песка на 3 тонны, поэтому умножаем все три числа на 3/2. Получается соотношение 3/2:3:6.

Это значит, что для приготовления бетонной смеси с 3 тоннами песка понадобится $1\frac{1}{2}$ тонны цемента и 6 тонн заполнителя.

Если вам необходимо 10 тонн бетона, то сколько нужно добавить каждого ингредиента? Из 1 тонны цемента, 2 тонн песка и 4 тонн щебня мы, очевидно, получим 7 тонн бетона.

Чтобы получить 10 тонн бетона, умножим каждое из чисел на 10/7. То есть нам понадобится 10/7 тонн цемента, 20/7 тонн песка и 40/7 тонн заполнителя, иначе говоря, $1\frac{3}{7}$ тонны цемента, $2\frac{6}{7}$ тонны песка и $5\frac{5}{7}$ тонны заполнителя.

ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

С помощью простых дробей удобно делить вещи вроде пицц и банок с краской. Однако когда имеешь дело с чем-то численным, например деньгами или замерами, гораздо разумнее использовать десятичные дроби. Кроме того, две совсем непохожие простые дроби, такие как 14/19 и 27/35, намного проще сравнивать, преобразовав в десятичные, в чем мы скоро убедимся.

Что творится по ту сторону запятой

Смешанное число $731\frac{5}{8}$ можно также записать в виде десятичной дроби 731,625. Очевидно, что число 731 одинаково для обоих случаев; мудреным может показаться равенство 5/8 = = 0,625. Чуть позже мы узнаем, как преобразовать 5/8 в десятичную дробь, но сперва давайте посмотрим, что означают в такой дроби разные знаки.

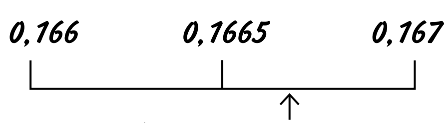
7	3	1	,	6	2	5
100	10	1		$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
Сотни	Десятки	Единицы	Десятичная запятая	Десятые	Сотые	Тысячные

7 считается за 7 сотен, 3 — за 3 десятка, а 1 — за 1 единицу. При движении вдоль линии цифр достоинство каждой следующей цифры в десять раз меньше, чем предыдущей. Переходим за запятую: 6 считается за 6 десятых, 2 — за 2 сотых и 5 — за 5 тысячных. А дальше в десятичных дробях идут десятитысячные, стотысячные и т. д., но это очень усложняет расчеты.

Если при написании десятичной дроби перед запятой целого числа нет, мы просто ставим вместо него ноль, чтобы было понятно, где должен быть десятичный разделитель.

Округление десятичных дробей

Иногда при переводе простых дробей в десятичные после запятой получается всего несколько знаков, а иногда тянется длинный ряд цифр, уходящий в миллионные и миллиардные доли. В таких случаях нужно выбрать приемлемую точность и округлить десятичную дробь. Например, дробь 1/6 в виде десятичной дроби будет выглядеть как 0,166666666… и далее бесконечное количество шестерок. Жизни не хватит такое сосчитать, поэтому ее нужно округлить до трех разрядов после запятой; выйдет нечто среднее между 0,166 и 0,167. Чтобы понять, какое из двух значений правильнее, посмотрим, какой была следующая, четвертая после запятой цифра — это, конечно же, шестерка. *Если очередная цифра равна или больше пяти, то предыдущую цифру увеличиваем на единицу.* Поэтому выбираем 0,167. Если это кажется неочевидным, можно, как мы уже делали, представить числа на линейке.



0,16666... ближе к 0,167 чем к 0,166

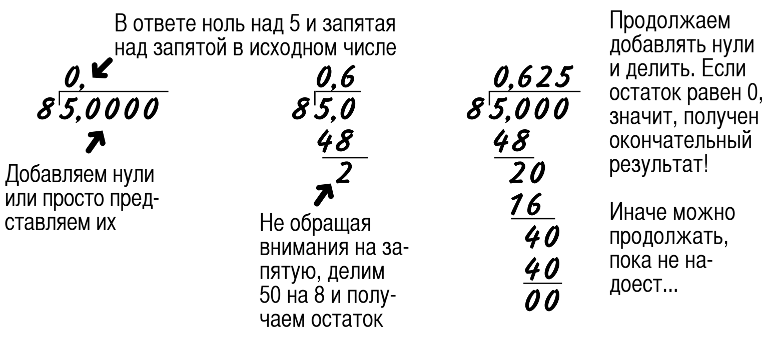
Если при делении одного числа на другое не выходит точный результат, цифры после запятой будут рано или поздно повторяться. Такие дроби называются периодическими, а числа, их содержащие, рациональными.

Преобразование простых дробей в десятичные и наоборот

Как мы уже знаем, простые дроби, такие как 5/8, — это непосчитанные операции деления. Десятичные дроби — это результат выполнения операций деления.

От простых дробей к десятичным

Допустим, вам надо посчитать, сколько будет 5 ÷ 8. Для этого сперва попытаемся разделить 5 на 8 — увы, безуспешно. (Если бы можно было делить с остатком, мы бы сказали, что 8 содержится в 5 ноль раз с остатком 5). Чтобы найти ответ в виде десятичной дроби, нужно представить 5 как 5,000000 и затем делить, как обычно, а перейдя за запятую, использовать нули.



Итак, ответ: 5/8 = 0,625.

Разумеется, вы могли получить такой же результат, посчитав 5 ÷ 8 на калькуляторе. Я просто показал вам, как выполняется деление, чтобы вы в деталях разобрались, что к чему.

От десятичных дробей к простым

Если в десятичной дроби после запятой стоит всего одна цифра, то у простой дроби знаменатель равен 10, то есть 0,6 = 6/10. Дальше эту дробь можно сократить до 3/5.

Если в десятичной дроби после запятой стоят две цифры, то у простой дроби знаменатель будет равен 100, поэтому 0,75 = 75/100, что можно сократить до 3/4. Однако 0,76 сокращается только до 19/25, а 0,77 = 77/100 и сокращению не подлежит. Большинство десятичных дробей сложно преобразовать в простые. К примеру, 0,692308 лучше округлить до 0,7 и сказать, что это примерно 7/10. (Полный ответ: 0,692308 = = 9/13 с округлением до шести знаков после запятой, но вам это уже неважно, так ведь?)

Как десятичные дроби могут помочь в работе с простыми дробями

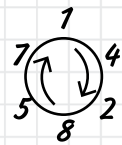
Как мы уже видели, складывать и вычитать простые дроби зачастую проблематично, однако если преобразовать их в десятичные, все значительно упрощается. Помните, как в разделе «Сравнение, сложение и вычитание дробей» мы складывали 3/4 и 5/6, чтобы узнать количество съеденной пиццы?

Калькулятор подсказывает нам, что 3/4 = 0,75 и 5/6 = = 0,83333. Следовательно, 3/4 + 5/6 = 1,58333. Складывать простые дроби с помощью калькулятора в виде десятичных дробей гораздо проще, но представить себе 1,58333 пиццы сможет далеко не каждый.

Еще калькулятор поможет вам сравнивать дроби. Что больше: 14/19, 27/35, 32/41 или 36/47? Преобразуем эти дроби в десятичные, и ответ станет очевиден! Соответственно получим 0,737, 0,771, 0,780 и 0,766. Самая большая десятичная дробь 0,780, а значит, и простая дробь 32/41 больше остальных.

Занятные дроби

- 1/9 = 0,1111111..., 2/9 = 0,2222222..., 3/9 = 0,3333333... и так далее.
- 1/11 = 0,090909...
- 1/7 = 0,142857142857142857… те же повторяющиеся цифры будут в 2/7, 3/7, 4/7, 5/7 и 6/7. Так, 2/7 = 0,2857142857142857.



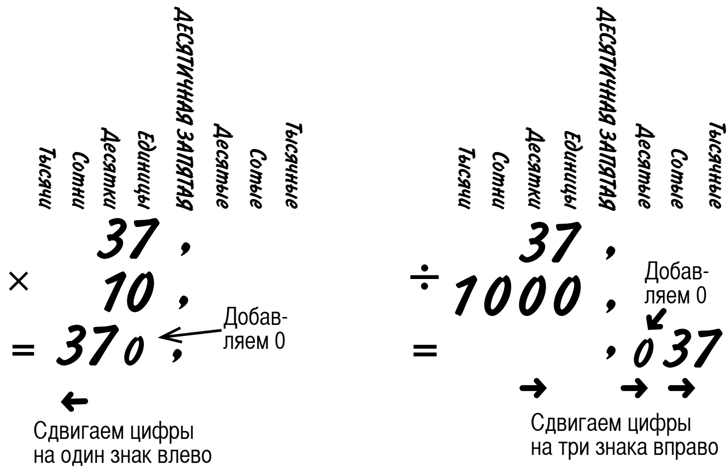
- 1/9801 = 0,00 01 02 03 04 05 06 07 08 09 10 11 12 13 ... и так далее.

Умножение и деление на 10, 100 и 1000

При умножении целых чисел на 10 мы просто добавляем ноль в их конец, например 37 × 10 = 370. Тем не менее будет удобнее и точнее представить, будто мы *сдвигаем* цифры на один знак *влево*.

В случае же *деления* на 10 все цифры *сдвигаем* на один знак *вправо,* то есть 37 ÷ 10 = 3,7. Поскольку в результате цифры сдвигаются за запятую, ее нужно будет приписать. При делении на 100 будем сдвигать цифры на два знака вправо, а при делении на 1000 — на три знака. Когда между цифрами и запятой возникают промежутки, их нужно заполнять нулями: 37 ÷ 1000 = 0,037.

Десятичные дроби можно умножать и делить на 10, 100 и так далее. так же просто, как и целые числа, сдвигая их влево или вправо. Например, 0,0451 × 100 = 4,51 или 0,0023 ÷ 10 = 0,00023.



Операции с десятичными дробями

$$\begin{array}{r} 4{,}070 \\ -\ 0{,}256 \\ \hline =\ 3{,}814 \end{array}$$

Складывать и вычитать десятичные дроби несложно. Записываем их так же, как и целые числа, в столбик (только следите, чтобы запятые находились точно друг под другом). При вычислении 4,07 – 0,256 может показаться, что 6 вычитать не из чего. Не паникуйте! Просто добавьте в конец 4,07 еще один ноль, чтобы цифре 6 не было так одиноко.

Однако маловероятно, что вам понадобится умножать или делить десятичные дроби вручную, разве что вы сдаете экзамен по арифметике или помогаете ребенку с домашним заданием. Но предположим, что у вас нет калькулятора… Миссис Бомонт обожает йогурты «Молочная легкость», поскольку они содержат всего 0,04 жира. Казалось бы, это немного, но если миссис Бомонт слопает 1,2 литра йогурта, сколько жира попадет к ней в желудок?

Надо вычислить 1,2 × 0,04. Перемножать такие небольшие скромные десятичные дроби проще всего так: сперва посчитаем, сколько всего цифр стоит после запятых. В нашем случае три (2, 0 и 4). Теперь перемножим числа без запятых: 12 × × 04 = 48 и добавим запятую: только надо убедиться, что после нее идет столько же цифр, сколько мы посчитали вначале. Поскольку у нас было 3 цифры, ответ равен 0,048.

Миссис Бомонт проглотила 0,048 литра (или 48 миллилитров) жира — этого хватит, чтобы сделать свечку размером с морковь. Фуууу!

Как насчет более сложных дробей?

Когда дело доходит до преобразования единиц измерений, с десятичными дробями возникают сложности. Ниже целый раздел «Единицы измерения и их преобразование» посвящен переводу литров в пинты и метров в дюймы, а пока рассмотрим несколько примеров, чтобы понять, как это происходит. И первым делом, как обычно, грубо прикинем результат.

Итак, вы летите на фестиваль танцев в стиле кантри; багажа на рейсе разрешается провозить не более 23 кг. Ваши старые надежные весы утверждают, что ваш чемодан весит 48,1 фунта — пропустят ли его в аэропорту? Начнем с того, что 1 фунт = = 0,454 кг, значит, вес чемодана в килограммах составит 48,1 × × 0,454.

Грубый подсчет

48,1 — это примерно 50, а 0,454 — приблизительно 0,5. Поэтому в результате должно получиться около 50 × 0,5 = 25 кг.

Ох... По итогам грубых подсчетов чемодан, возможно, тяжеловат, но прежде чем выкладывать из него любимые, разукрашенные монограммами ковбойские сапоги, давайте найдем точный ответ. Для удобства запишем выражение в простых дробях.

$$48{,}1 \times 0{,}454 = \frac{481}{10} \times \frac{454}{1000} = \frac{481 \times 454}{10 \times 1000} = \frac{218374}{10000} = 21{,}8374$$

Слава богу, чемодан весит чуть меньше 22 кг, и сапоги летят с вами. Йи-хо!

Десятичные дроби также можно умножать с помощью сетки с диагональными линиями, как показано в разделе «Надежный способ умножения».

Делить десятичные дроби можно тем же способом. Предположим, что, зайдя в комиссионный магазин, вы увидели потрясающие оранжевые брюки в стиле диско, причем их размер в талии составляет 32 дюйма. Консультант измеряет вашу талию и машинально говорит: «1,14 метра». Если 1 дюйм равен 0,0254 метра, не опозоритесь ли вы, пытаясь влезть в эти брюки? Вот выражение для вычисления обхвата вашей талии в дюймах: 1,14 ÷ 0,0254.

Грубый подсчет

1,14 — это примерно 1, а 0,0254 — около 0,03 или 3/100. Вычисляем приблизительный ответ, разделив 1 ÷ 3/100. Деление на 3/100 аналогично умножению на 100/3 (см. раздел «Деление на дробь»). Тогда 1 × 100/3 = 100/3 = около 33.

Похоже, эти брюки стоит примерить, но чтобы перестраховаться, вычислим размер талии точнее:

$$1{,}14 \div 0{,}0254 = \frac{114}{100} \div \frac{254}{10000} = \frac{114}{100} \times \frac{10000}{254} = \frac{1140000}{25400} = \frac{11400}{254} = 44{,}88$$

Выходит, обхват вашей талии 44,88 дюйма, так что оранжевые брюки, скорее всего, лопнут по швам в примерочной кабинке. Однако не переживайте — это будет меньшим позором, чем пойти в них на танцы.

Можно подумать, что 44,8 сильно отличается от 33 нашего грубого подсчета. Но он здесь нужен в основном для того, чтобы убедиться, что запятая в ответе поставлена там, где надо, а то со всеми этими нулями запутаться ничего не стоит. Если бы получился ответ 4,488 дюйма или 0,04488 дюйма, то было бы ясно, что где-то ошибка!

СТЕПЕНИ И КОРНИ

Большинство из нас никогда не используют степени и корни в повседневной жизни, разве что при расчетах площадей и объемов (о чем мы поговорим немного позже). Однако если вы занимаетесь конструированием гоночных автомобилей или собираетесь слетать в космос, степени и корни понадобятся для расчета скоростей, ускорений, тормозных путей и потребления топлива.

Квадраты и квадратные корни

Мы уже встречались с квадратами чисел в таблице умножения. Квадраты обычно связаны с расчетом геометрических площадей, и обозначают их по-разному: 7 в квадрате — то же самое, что и 7 × 7. Это также можно записать как 7^2, иначе говоря, 7 в *степени* 2. Однако, как ни называй, все равно результат равен 49.

А теперь предположим, что у нас есть число 49 и нужно произвести обратное действие, то есть узнать, какое число, будучи умноженным само на себя, даст 49. Это называется *квадратный корень* из 49 и записывается как $\sqrt{49}$, или как $49^{1/2}$, то есть 49 в степени ½. Но что бы вы ни предпочли, в результате все равно получится 7. (Кроме того, квадратным корнем из 49 может быть число –7, поскольку перемножение двух отрицательных чисел даст положительное число.)

Легче всего извлекать квадратные корни из квадратов целых чисел, таких как 1, 4, 9, 16 и 25, поскольку в этом случае получаются целые значения. С другими числами все куда сложнее. Например, 19 не является квадратом целого числа; тогда какой будет длина каждой стороны квадрата площадью 19 квадратных метров?

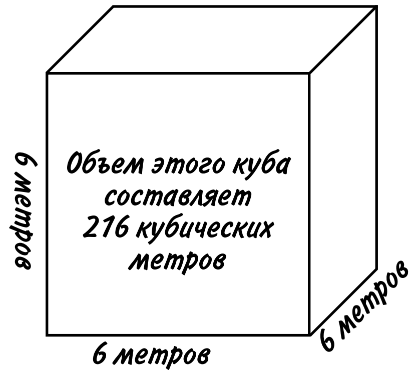
Ответ: $\sqrt{19}$, но сколько это? Мы знаем, что $\sqrt{16} = 4$ и $\sqrt{25} = 5$, следовательно, квадратный корень из 19 должен дать значение где-то между 4 и 5.

Вычисление корня с помощью карандаша и бумаги требует определенной умственной гимнастики, так что вполне простительно вооружиться калькулятором. Нажимаем клавиши <19 √> и получаем 4,3588989… Это десятичная, бесконечно тянущаяся дробь без повторяющихся сочетаний цифр. Такие числа называют *иррациональными.* Все квадратные корни, которые не являются целыми числами, иррациональны.

Другие степени и корни

Степени могут быть любыми. Помимо квадратов вы еще, скорее всего, столкнетесь только с кубами, например 6^3 = *шесть в степени три* = $6 \times 6 \times 6 = 216$. Кубы используют в основном при вычислении объемов, в простейшем случае — объема кубического сосуда (все стенки которого — квадраты).

Процесс, обратный возведению в куб, называется извлечением кубического корня и обозначается так же, как извлечение корня квадратного, но рядом со значком корня ставится маленькая цифра 3, так, как здесь: $\sqrt[3]{216} = 6$.



Стало быть, если нам известно, что объем кубического сосуда — 216 кубических метров, то длина каждой его стороны равна кубическому корню из 216, то есть 6 метрам.

Если степень *отрицательна,* на число под степенью нужно делить. Например, 10^{-3} — десять в степени минус три. Это то же самое, что и

$$\frac{1}{10^3} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$$

Отрицательные степени часто используют при работе с очень большими или крайне малыми числами, и об этом мы поговорим в следующем разделе.

Нормальная форма

Масса Земли примерно равна 6 000 000 000 000 000 000 000 000 кг.

Официальное название этого числа — шесть *септильонов,* хотя «шесть с двадцатью четырьмя нулями на конце» звучит понятнее. Можно выразить это не словами, а числами так:

Масса Земли составляет примерно 6×10^{24} кг

Предположим, нам нужно вычислить, сколько будет 6×10^3. Это то же самое, что и 6×1000, поэтому сдвинем 6 на три знака влево и получим 6000. Аналогично 6×10^{24} означает 6 с 24 нулями на конце.

Если вы хотите выразить вес точнее, вместо одной цифры, такой как 6, следует взять десятичную дробь с одним знаком перед запятой и умножить на степень десятки, вот так:

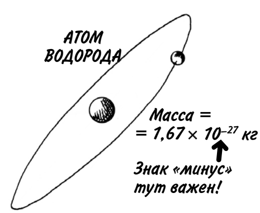
Масса Земли равна 5,9736 × 10^{24} кг

Это называют записью числа в *нормальной форме*. Хотя в десятичной дроби гораздо больше цифр, чем одна, множитель $\times 10^{24}$ остался прежним. Умножая на 10^{24}, мы все так же сдвигаем цифры на 24 знака влево, заполняя пустоты нулями. Поскольку цифры 9736 уже занимают четыре знака, просто добавим 20 нулей и получим массу: 5 973 600 000 000 000 000 000 000 кг.

Нормальную форму можно также использовать для очень маленьких чисел.

Масса одного атома водорода равна 1,67 × 10^{-27} кг

На первый взгляд кажется, что масса атома водорода больше массы Земли. Но это не так. И все благодаря крошечному знаку «минус», из-за которого мы делим, а не умножаем. Поэтому $\times 10^{-27}$ — это то же самое, что и $\div 10^{27}$, а значит, нужно передвинуть все цифры на 27 знаков вправо.



Масса одного атома водорода равна 0,00000000000000000000000000167 кг

Большинство калькуляторов используют нормальную форму, чтобы отображать числа, которые не помещаются на экране. Но вместо $1{,}67 \times 10^{-27}$ калькулятор, скорее всего, покажет вам 1,67 E–27. («E» обозначает «экспоненту», иначе говоря, степень.)

СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ

Средние значения часто фигурируют в новостях, особенно когда нужно шокировать зрителей статистическими показателями, скажем, такими как рост средних глобальных температур, или средняя продолжительность необходимого школьникам сна, или среднее количество личных автомобилей у футболистов. На самом деле есть три разновидности средних значений — *среднее арифметическое, мода и медиана**. Но когда люди говорят о «среднем значении», обычно они имеют в виду среднее арифметическое.

Среднее арифметическое

Расчет средних значений поможет вам спрогнозировать ситуацию в будущем. Например, если в прошлом году вы 7 дней отдыхали в Браунпуле и истратили за это время 350 фунтов, то среднее арифметическое ваших ежедневных расходов составит $350 \div 7 = 50$ фунтов. Допустим, в этом году вы планируете поехать туда уже на 10 дней. Значит, на этот раз вам понадобится около $50 \times 10 = 500$ фунтов. А теперь посмотрим, как расчет среднего арифметического может помочь серьезному деловому человеку...

В прошлую субботу Лэрди припарковал свой фургончик с пирогами у ограды санатория. Сорок его обитателей ухитрились, дотянувшись через заграждение из колючей проволоки, купить у Лэрди пироги. Один человек купил всего один пирог, пятнадцать — по два пирога и т. д. Вот результаты.

---

* Это одни из наиболее употребительных типов средних значений, но есть и другие. *Прим. перев.*

Количество пирогов, купленных одним человеком	1	2	3	4	5	6	7
Количество людей	1	15	9	4	6	3	2
Всего пирогов (пироги × люди)	1	30	27	16	30	18	14

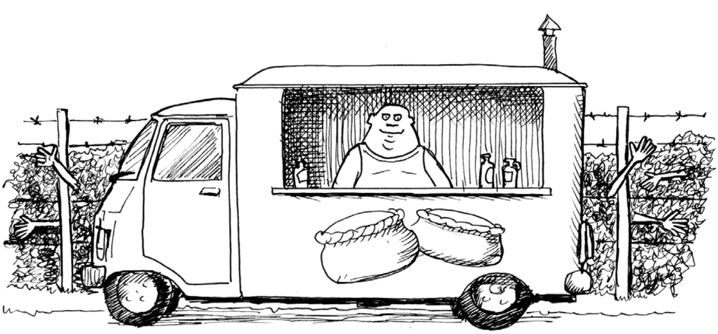
Чтобы узнать среднее количество пирогов, приходящееся на одного человека, нужно вычислить такое выражение:

всего продано пирогов ÷ всего покупателей

Чтобы подсчитать общее количество проданных пирогов, сложим значения из нижней строки таблицы и получим 136 пирогов, а сложив значения из второй строки, узнаем общее число покупателей — 40.

$$136 \div 40 = 3{,}4$$

Таким образом, в среднем на человека приходится 3,4 пирога. Теперь, зная среднее арифметическое, Лэрди может примерно подсчитать, сколько пирогов привезти в следующий раз. Предположим, он надеется обслужить 1000 человек прежде, чем его застукают и арестуют, тогда он может рассчитывать на продажу примерно 3,4 × 1000 = 3400 пирогов.



Мода и медиана

Мода — это число, которое наиболее часто встречается в данной совокупности. Большинство покупателей приобрели по два пирога, значит, мода равна 2. Если остановить случайного человека, ковыляющего от ограды санатория к жилому корпусу, и спросить, сколько он купил пирогов, наиболее вероятным ответом будет 2.

Медиана — это число, находящееся в середине ранжированного ряда, и его можно использовать в качестве приблизительного значения среднего арифметического. Если число всех значений *нечетное,* медиану найти очень просто. Лэрди записал возраст первых пяти покупателей, расположив числа в порядке возрастания:

возраст 23 28 31 37 66

↑

медиана

Медиана в этом случае равна 31.

Если же число всех значений *четное,* надо взять два значения, стоящие посередине, и вычислить их среднее арифметическое. Лэрди узнал вес восьми своих постоянных покупателей и расположил числа в порядке возрастания.

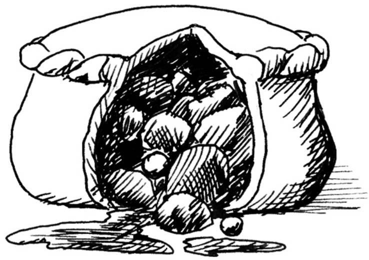
вес, кг 61 72 72 73 78 84 89 112

↑

медиана – это среднее между 73 и 78

$$73 + 78 = 151, \text{ тогда } \frac{151}{2} = 75{,}5$$

Посередине находятся числа 73 и 78, поэтому медиана веса восьми постоянных покупателей равна 75,5 кг.



АЛГЕБРА

Даже если вы, изучая в школе математику, все же совладали с делением больших чисел и десятичными дробями, то знакомство с алгеброй наверняка стало последней каплей, заставившей вас с диким воплем кинуться прочь, к пожарному выходу. И вас можно понять. Вычисление выражений, состоящих из чисел, кажется логичным, для того числа и придуманы. Но вычисление выражений с буквами? Какая-то бессмыслица… или нет?

Зачем все это?

Алгебра напоминает язык вроде русского или английского. Это быстрый способ описать и систематизировать задачу и, после того как вы усвоите основные правила, без лишней суеты найти ее решение. Представьте, что вы, будучи заграницей, хотите узнать у прохожих, где находится ближайшее вегетарианское кафе. Вы можете потратить не один час, пытаясь жестами изобразить морковку, а можете получить ответ за пару секунд, если знаете язык страны.

Что же касается букв, то ими просто обозначены числа, которые пока неизвестны. Чуть позже мы рассмотрим выражение для расчета стоимости чашки кофе, где искомая цена для краткости обозначена буквой c, чтобы не писать каждый раз «цена чашки кофе».

Мы даже не будем трогать буквы поначалу, а просто поглядим, как взаимодействуют между собой числа, чтобы прояснить основные правила.

Знаки «плюс», «минус» и «равно»

В середине этого простого выражения стоит знак равенства, поэтому оно называется *уравнением:*

$$7 - 2 = 4 + 1$$

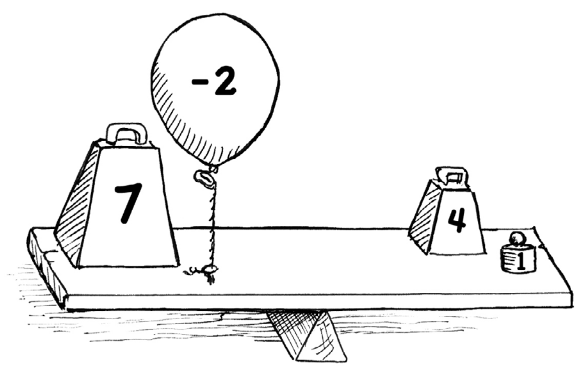
Результат вычитания с левой стороны идентичен сумме чисел с правой стороны; оба равны 5. Суть алгебры в том, чтобы расположить определенным образом числа и буквы в уравнении и получить ответ.

Каждое число может быть либо положительным, либо отрицательным.

Перед отрицательными числами обязательно нужно ставить знак «–». Перед положительными числами тоже положено ставить знак «+», но делать мы это будем не всегда.

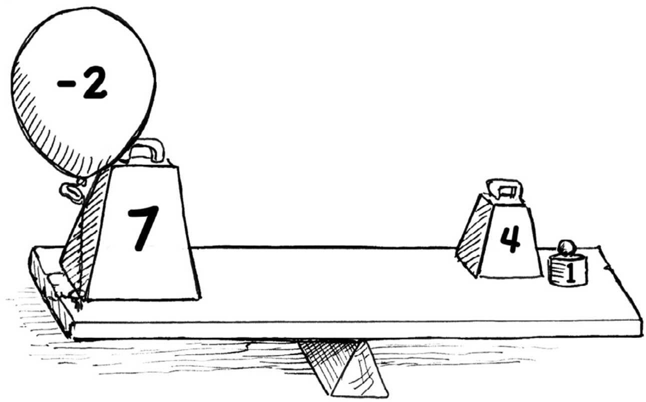
Уравнение можно представить себе в виде доски-качалки, где знак «равно» — точка опоры. Положительные числа — это грузы, прижимающие доску к земле, а отрицательные — воздушные шары, тянущие ее вверх.

$$7 - 2 = 4 + 1$$



Если хотите переместить числа с места на место на одном конце доски, их знаки нужно перемещать вместе с ними. Поменяв местами числа с левой стороны, получим:

$$-2 + 7 = 4 + 1$$



Знак «минус» должен оставаться перед числом 2, иначе уравнение станет неверным. Перед 7 появился знак «плюс» как напоминание, что оно положительное. Предположим, что нам нужно оставить в левой части уравнения только число +7. Существует всего одно золотое правило.

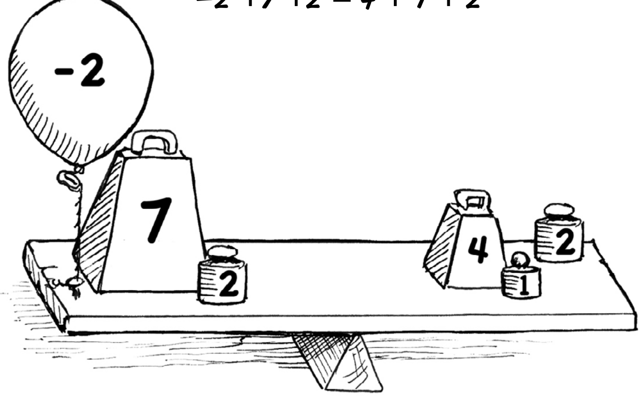
С уравнением можно делать все что угодно* при условии, что с его обеими частями производятся одни и те же действия.

Чтобы в левой части осталось только +7, нужно избавиться от –2. Для этого добавим +2; однако, согласно правилу, это число нужно добавить к обеим частям уравнения.

---

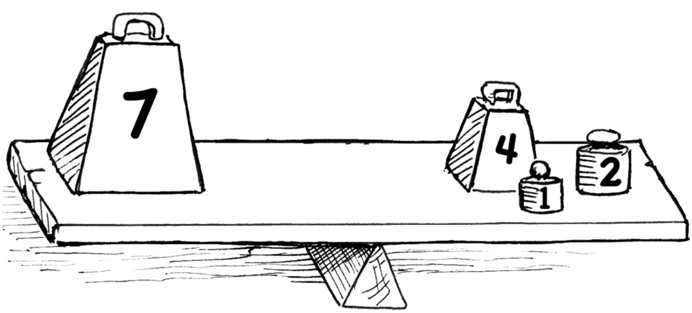
* Нельзя лишь делить обе части на ноль, иначе Вселенная разрушится. Почему, вы поймете из раздела «Как разрушить Вселенную».

$$-2 + 7 + 2 = 4 + 1 + 2$$



–2 и +2 с левой стороны уравнения взаимоуничтожатся, то есть дадут 0. С правой же стороны +2 останется, и мы получим:

$$7 = 4 + 1 + 2$$



Выполнив подсчеты, вы убедитесь, что 7 и вправду равняется 4 + 1 + 2. При этом мы продемонстрировали маленькую хитрость.

Было так... а стало так.

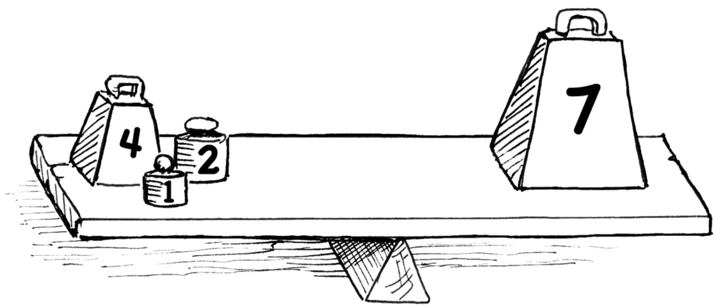
$-2 + 7 = 4 + 1$ $\qquad\qquad$ $+7 = 4 + 1 + 2$

–2 перешло на другую сторону и превратилось в +2

При переносе числа через знак равенства меняется его знак! То есть «−» меняется на «+», а «+» на «−».

Вот еще одна вещь, которую можно показать на примере доски-качалки: вы можете менять две части уравнения местами:

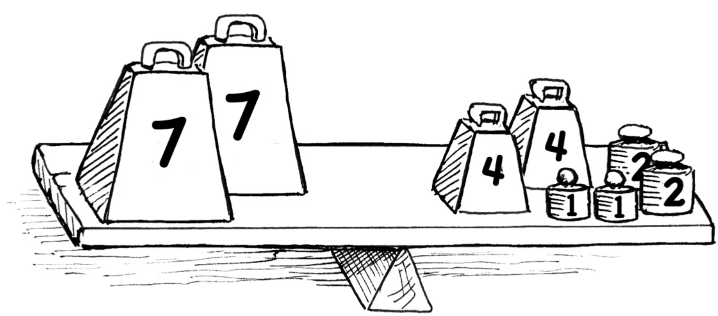
$$4 + 1 + 2 = 7$$



Скобки

Давайте пока остановимся на варианте 7 = 4 + 1 + 2. Предположим, что нам нужно знать, чему равно число 14. Для этого умножаем 7 на 2, но умножать также следует и другую часть уравнения. Поскольку с правой стороны стоят три числа, каждое из них необходимо умножить на 2 вот так:

$$2 \times 7 = 2(4 + 1 + 2)$$



Как видите, мы заключили все числа с правой стороны в скобки. Можно было записать это иначе: $2 \times 4 + 2 \times 1 + 2 \times 2$, но со скобками получается короче и удобнее. Число 2 перед скобкой называется *коэффициентом*.

Если перед открывающей скобкой стоит число, то на него умножается все, что находится внутри скобок.

Добавляем буквы

Наверное, вам уже не терпится перейти к решению хитроумных дифференциальных уравнений, однако начнем с малого.

Прогуливаясь по улице, вы неожиданно встречаете Малькольма, который пребывает в легком шоке. Он только что водил маму в кофейню Barstucks, где они выпили по чашке кофе, и в результате из 10 фунтов, которые он брал с собой, осталось всего 1,20 фунта. Сколько же стоила каждая чашка? Вот что нам известно:

10 фунтов минус цена двух чашек кофе = 1,20 фунта

Мы сэкономим массу типографской краски, если обозначим цену одной чашки кофе буквой c. Из этого следует, что цена двух чашек кофе составит $2 \times c$, но для удобства мы просто напишем $2c$.

Что ж, давайте составим уравнение и посмотрим, как быть дальше.

$$10 - 2c = 1{,}20$$

Нам нужно, чтобы слева от знака равенства была только буква c. Для начала перенесем 10 фунтов на другую сторону, поменяв знак на минус:

$$-2c = 1{,}20 - 10$$

Минус перед $2c$ выглядит не слишком привлекательно, поэтому избавимся от него, умножив обе части уравнения на (-1). В результате каждый знак «+» поменяется на «–», а каждый знак «–» на «+»:

$$2c = 10 - 1{,}20$$

Теперь подсчитаем $10 - 1{,}20 = 8{,}80$, тогда

$$2c = 8{,}80$$

Поскольку нам нужна только одна c, разделим обе части на 2, и ответ готов:

$$c = 4{,}40 \text{ фунта}$$

4,40 фунта за чашку кофе? Неудивительно, что Малькольм был в шоке!

Что можно и чего нельзя

В алгебре есть еще несколько на первый взгляд странных правил, поэтому, чтобы они стали понятнее, представим себе множество одинаковых коробков спичек. В каждом содержится m спичек, так что если мы отложим в сторону три коробка, общее количество спичек в них составит $3 \times m$, или просто $3m$. Число 3 здесь — *коэффициент* при m.

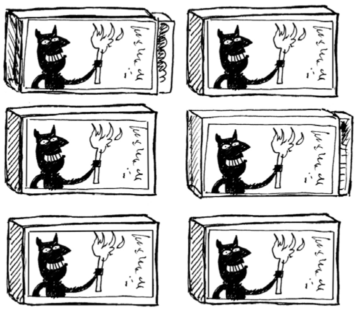
Количество спичек в каждом коробке = m

Количество спичек в 3 коробках = $3m$

Теперь, разобравшись с коробками, перейдем к правилам и выясним, как их применять к нашим спичкам.

❶ *Коэффициент можно умножать на число*

Если добавить еще одну стопку из трех коробков...

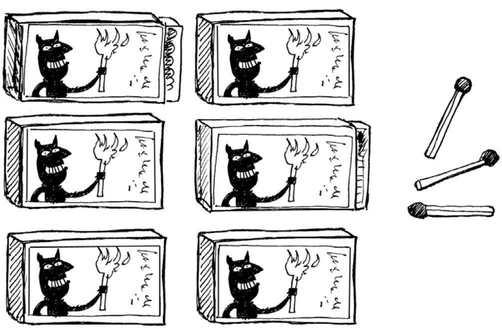


Количество спичек в двух кучках $= 2 \times 3m =$ $= 6m$

… то 2 стопки по $3m$ в сумме дадут $6m$.

❷ *Прибавлять число к коэффициенту нельзя*

Если вы где-то нашли три спички...

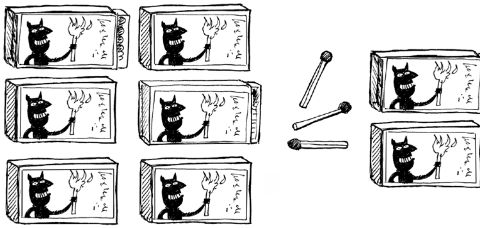


Всего спичек $= 6m + 3$

Видите, теперь у нас $6m + 3$ спички. Нельзя прибавлять 3 к 6, чтобы получить $9m$!

❸ Коэффициенты можно складывать, если при них одна и та же буква

Если взять еще два коробка...



Как видите, складывать $6m$ и $2m$, чтобы получить $8m$, можно, но 3 прибавить к $8m$ по-прежнему нельзя.

Вот еще три правила. Не волнуйтесь, если сейчас они покажутся вам непонятными, чуть позже мы их применим, и все прояснится.

❹ Когда знак «минус» стоит перед скобками, избавляясь от них, надо поменять все знаки внутри скобок на противоположные

В выражении вроде $3 - (2x - 4)$ все, что внутри скобок, следует умножить на -1. Избавившись от скобок, вы получите $3 - 2x + 4$. Вместо $+2x$ стало $-2x$, а вместо -4 стало $+4$.

❺ Если умножить букву на саму себя, получается буква в квадрате

Таким образом, $y \times y$ превратится в y^2 (что такое числа в квадрате, мы обсуждали в разделе «Квадраты и квадратные корни»), а $4y \times 3y$ — в $12y^2$. Коэффициенты перемножаются, а у буквы появляется знак квадрата.

❻ При перемножении разных чисел и букв числа умножаются, а буквы пишутся вместе

Поэтому $2x \times 4y = 8xy$. Такие ситуации часто возникают при умножении содержимого скобок, например: $3p(7q - 2p) = 21pq - 6p^2$.

Итак, давайте посмотрим, как это все может нам пригодиться.

Разгадка тайн математики с помощью алгебры

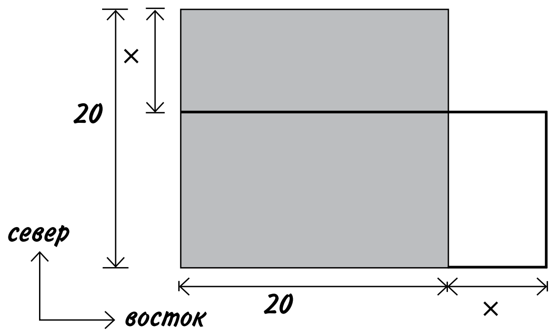
Алгебра бывает крайне полезна при решении задач и головоломок. Вот вам кое-что для начала.

Земельная афера

Бэтчап Билдингз решил приобрести надел земли у фермера Шарпа. Обе стороны сошлись на том, что это должен быть квадратный участок 20 м × 20 м, то есть площадью 400 квадратных метров, или м^2. Однако приехав осмотреть землю, Бэтчап увидел, что участок имеет прямоугольную, а не квадратную форму!

Честно ли поступает фермер?

Хотя мы не знаем, на сколько метров стороны участка длиннее или короче, нам известно, что это одна и та же величина, давайте назовем ее x. Нарисуем схему участка.



Серым цветом показано, как бы выглядел участок, будь это квадрат 20 м × 20 м. Размеры же прямоугольника: $(20 - x)$ в северном направлении и $(20 + x)$ в восточном. Чтобы узнать его площадь, перемножим эти значения и получим $(20 - x) \times (20 + x)$; знак умножения обычно не пишется: $(20 - x)(20 + x)$.

При перемножении двух выражений в скобках все, что находится внутри одной пары скобок, умножается на все, что находится внутри другой пары.

Для этого раскрываем первые скобки и умножаем каждый элемент в них на вторые скобки. Получаем:

$$\begin{aligned}(20 - x)\,(20 + x) &= 20(20 + x) - x(20 + x) = \\ &= 400 + 20x - 20x - x^2 = \\ &= 400 - x^2\end{aligned}$$

Как видите, раскрывая $-x(20 + x)$, мы первым делом умножаем $-x \times 20 = -20x$. Обратите внимание, знак «минус» никуда не исчезает. И наконец, умножаем $-x \times x$, что дает $-x^2$.

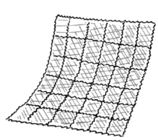
В следующей строке $+20x$ и $-20x$ взаимоуничтожаются, и мы получаем любопытный результат: $400 - x^2$. О чем это говорит?

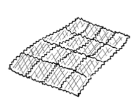
Будь участок квадратным, Бэтчап приобрел бы обещанные 400 квадратных метров земли. Однако после изменения формы участка его площадь уменьшилась на x^2. И чем больше значение x, тем больше земли теряет Бэтчап. (Помните, буква x обозначает, насколько стороны длиннее/короче одна другой.)

Если участок на 5 метров длиннее в одном направлении и на 5 метров короче в другом, тогда $x = 5$. Мы можем вычислить площадь такого участка двумя способами. Во-первых, взяв полученный ранее ответ $400 - x^2$ и подставив вместо x число 5. Площадь составит $400 - 5^2$, то есть $400 - 25 = 375$. Во-вторых, просто перемножив длины сторон прямоугольника. В северном направлении это $20 - 5 = 15$, а в восточном — $20 + 5 = 25$. Тогда площадь равна $15 \times 25 = 375$. Оба ответа совпадают, стало быть, алгебра работает как надо!

Разность квадратов

Допустим, у вас есть квадратный блок почтовых марок размером 6×6. Кто-то оторвал от него несколько марок, оставив вам квадрат 4×4. Сколько марок забрали?





Нам нужно вычислить $6^2 - 4^2$. Вычитание квадрата одного числа из квадрата другого называется *разностью квадратов*. В данном случае все просто, поскольку числа небольшие. Получаем $36 - 16 = 20$. Однако есть более быстрый способ подсчета, который подходит для квадратов любых чисел.

Разность квадратов двух чисел равняется сумме этих чисел, умноженной на их разность.

Звучит довольно странно, однако вот что это означает: чтобы вычислить $6^2 - 4^2$, сначала нужно узнать *сумму* двух чисел: $6 + 4 = 10$. Кроме того, понадобится их *разность*: $6 - 4 = 2$. Теперь умножаем сумму на разность: $10 \times 2 = 20$. Такой же ответ мы получили раньше.

Вместо того чтобы рассуждать об этом на словах, проще записать правило разности квадратов в виде алгебраического уравнения. Обозначим буквой a первое число и буквой b второе, тогда наше правило будет иметь следующий вид:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Мы уже наблюдали, как это работает для $a = 6$ и $b = 4$, однако данное уравнение подходит для любых a и b. Если вы думаете, что разность квадратов вам никогда не пригодится в жизни, представьте, что $a = 20$ и $b = x$, и посмотрите на уравнения из задачки о земельной афере. Там у нас $(20 - x)(20 + x) = 400 - x^2$, тот же самый результат!

Объяснение загадки с тремя числами

Помните подраздел «Фокус с тремя числами», размещенный в начале книги? Там я объяснял, что какими бы ни были три последовательно идущих числа, если умножить большее из них на меньшее, результат всегда будет на единицу меньше второго числа, возведенного в квадрат. Например, возьмем 12, 13 и 14. Результат умножения $12 \times 14 = 168$, что на единицу меньше, чем $13^2 = 169$.

Опять воспользуемся уравнением для разности квадратов, подставив вместо b единицу. Вот что получится:

$$a^2 - 1^2 = (a + 1)(a - 1)$$

Вспоминаем, что $1^2 = 1 \times 1 = 1$, поэтому выходит

$$a^2 - 1 = (a + 1)(a - 1)$$

Теперь предположим, что a — второе из трех последовательно идущих чисел. Тогда $(a + 1)$ будет наибольшим числом, а $(a - 1)$ — наименьшим. Уравнение говорит нам, что если взять квадрат второго числа и вычесть из него единицу, то результат будет равен наибольшему числу, умноженному на наименьшее.

В случае с числами 12, 13 и 14 $a = 13$, но, разумеется, вместо 13 можно выбрать любое другое значение. Вот почему этот фокус применим к любым трем последовательно идущим числам.

Алгебра отлично подходит для разоблачения фокусов из серии «загадать любое число».

Как разрушить Вселенную

Помните, выше я предупреждал вас о такой вероятности? Если вы дочитали до этого места, значит, усердно трудились и многое узнали, поэтому будет совершенно справедливо вознаградить вас за старания неограниченными космическими суперспособностями...

Начнем с двух чисел, a и b, которые волей случая оказались равны:

$$a = b$$

Будем обращаться с обеими частями этого уравнения совершенно одинаковым образом. Смотрите внимательно...

Умножаем обе части на a: $a^2 = ab$

Вычитаем из обеих частей b^2: $a^2 - b^2 = ab - b^2$

С левой стороны уравнения получается разность квадратов, поэтому, как мы знаем, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. С правой стороны выходит $ab - b^2$, где оба элемента делятся на b, стало быть, это выражение можно записать как $b(a - b)$. Все эти действия допустимы и абсолютно корректны.

Таким образом, получаем $(a + b)(a - b) = b(a - b)$

Теперь разделим обе части на $(a - b)$ и получим $(a + b) = b$

Перед скобками множителя нет, а значит, их можно просто убрать

$$a + b = b$$

Переносим $+b$ в другую часть уравнения, меняя знак:

$$a = b - b$$

И вот итог: $a = 0$

Теперь вспоминаем, что a и b могут быть любыми числами, следовательно, мы только что доказали, что любое число равно нулю. То есть получается, что любые измерения времени, пространства или веса несущественны: прощай, Вселенная!

Наша ошибка состояла в том, что мы разделили обе части уравнения на $(a - b)$. Но в случае, когда $a = b$, $(a - b) = 0$. Единственное, чего нельзя делать одновременно с обеими частями уравнения, — это делить на ноль! Если, конечно, вы не собираетесь потратить денек-другой на попытки разрушить Вселенную...

Системы уравнений

Если два неизвестных числа входят в два различных уравнения, их, как правило, можно найти.

Вот классическая задачка. Пара ботинок и щетка для обуви стоят 51 фунт, причем ботинки на 50 фунтов дороже щетки. Какова цена щетки?

Попробуйте спросить об этом Малькольма. Скорее всего, он ответит, что щетка стоит 1 фунт, а ботинки 50 фунтов, но тогда получается, что ботинки лишь на 49 фунтов дороже щетки... Выходит, Малькольм ошибается?!

Поразмыслив, вы можете угадать ответ, но я хочу рассказать, как получить его с помощью алгебры. Обозначим цену ботинок буквой *s*, а цену щетки *c*. К счастью, у нас достаточно сведений, чтобы составить два уравнения:

Уравнение 1. Ботинки и щетка стоят 51 фунт: $s + c = 51$

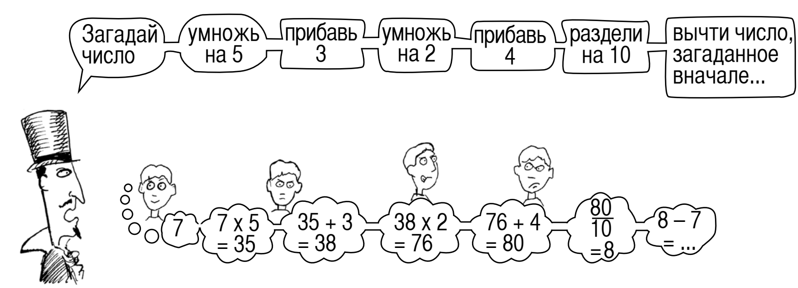
Уравнение 2. Ботинки стоят на 50 фунтов дороже щетки: $s = 50 + c$

Простейший способ решения системы уравнений называется *подстановкой*. Исходя из уравнения 2, $s = 50 + c$, поэтому перепишем уравнение 1, подставив туда $(50 + c)$ вместо *s*.

Получаем:	$50 + c + c = 51$
Меняя знак, переносим 50 в другую часть уравнения и складываем две буквы *c*:	$2c = 51 - 50$
Тут все просто…	$2c = 1$
И наконец, делим обе части уравнения на 2, чтобы узнать цену щетки:	$c = 0{,}5 = 50$ пенсов
Согласно уравнению 2, $s = 50 + c$, так что получаем:	$s = 50{,}5$ фунта

Выходит, ботинки стоят 50,5 фунта, а щетка 0,5 фунта. Ответ неожиданный, но верный!

Загадай число

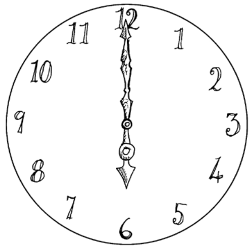


Этот трюк можно проделать с любым числом, даже дробью. Давайте с помощью алгебры разберемся, что здесь к чему. Число нам неизвестно, поэтому просто назовем его n и посмотрим, что с ним происходит по мере выполнения разных действий.

Действие	**Что происходит**	**Промежуточный результат**
Загадай число	Назовем его n	n
Умножь на 5	Теперь у нас есть $5n$	$5n$
Прибавь 3	$5n + 3$. Пока все нормально	$5n + 3$
Умножь на 2	Умножаем на 2 все имеющееся на текущий момент; для верности ставим скобки	$2(5n + 3) = 10n + 6$
Прибавь 4	Тут все просто	$10n + 6 + 4 = 10n + 10$
Раздели на 10	Нужно все разделить на 10, снова используем скобки	$(10n + 10) \div 10 = n + 1$
Вычти загаданное число	Просто вычитаем n	$n + 1 - n = 1$
Получается 1	n полностью исчезает из уравнения, остается единица!	

Хватит алгебры

Заглянув в школьные учебники, вы увидите множество всяких x, y и задач, которые сводятся к перестановкам чего-либо с привлечением толики здравого смысла. Есть масса толстенных книг по алгебре, поэтому понятно, что я не могу рассказать здесь обо всем, но вот еще одна задачка, которую алгебра помогает решить весьма точно и элегантно.



На старинных часах ровно 6 часов вечера. Сколько будет времени, когда минутная стрелка догонит часовую?

Разумеется, сложность в том, что часовая стрелка постоянно медленно движется. Как же это учесть?

Допустим, m — это количество минут, прошедших после 6 часов до того момента, когда минутная и часовая стрелки совпадут.

Минутной стрелке понадобится 30 минут, чтобы добраться до цифры 6, плюс пройти дистанцию, которую преодолеет часовая стрелка за m минут. Давайте это запишем:

Нам нужно выяснить, как далеко продвинется часовая стрелка за m минут.

Минутная стрелка делает один полный оборот в час. Часовой стрелке нужно 12 часов, чтобы сделать полный оборот, то есть ее скорость — 1/12 от скорости минутной.

Составим уравнение: $m = 30 + m/12$

Число 12 в качестве знаменателя выглядит отвратительно, однако не волнуйтесь — мы умножим на 12 обе части уравнения: $12m = 360 + m$

Перенесем $+ m$ в другую часть уравнения, поменяв знак: $12m - m = 360$

Вычтем $1m$ из $12m$: $11m = 360$

Разделим обе части на 11: $m = 32{,}727$

Выходит, стрелки совпадут через 32,727 минуты после 6 часов вечера. Однако 0,727 минуты в ответе смотрятся некрасиво. Поскольку в минуте 60 секунд, в секундах это будет $0{,}727 \times 60$, то есть около 44 секунд. Теперь у нас есть понятный ответ: стрелки совпадут в 6:32:44 вечера.

СКОРОСТЬ

Всем нам порой приходится планировать свои передвижения. Возможно, вам интересно, сколько времени займет поездка на работу или, если вы добрались слишком быстро, не засекли ли ваш автомобиль дорожные радары...

Расчет скорости

К поездкам имеют отношение три фактора: расстояние, скорость и время в пути. Вот как они взаимосвязаны:

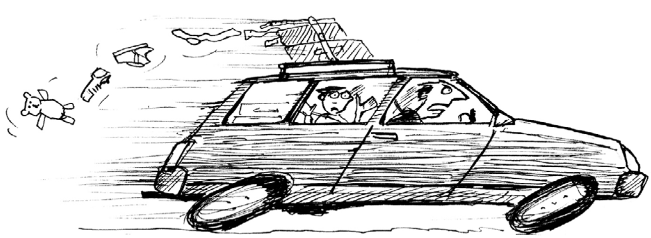
расстояние = скорость × **время**, или $d = st$

Здесь d обозначает расстояние (от англ. distance — расстояние), s — скорость (от англ. speed — скорость) и t — время (от англ. time — время).

То, что $d = st$, легко запомнить, поскольку буквы s, t стоят в алфавитном порядке. Из этого уравнения следуют два других.

Разделив обе части на t, получим: $s = d/t$

Или, разделив обе части на s, получим: $t = d/s$

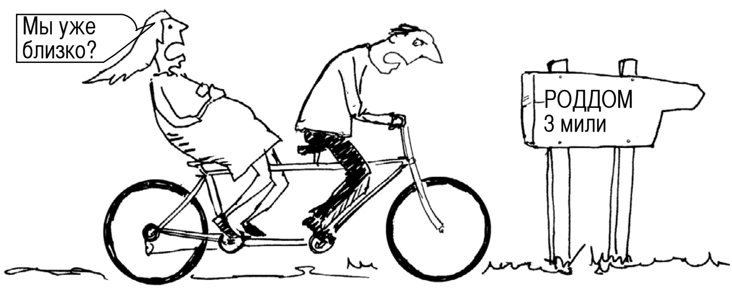


А вот ситуация, в которой эти формулы очень пригодятся. Корабль отчаливает через 3 часа, а до причала, где он пришвартован, ехать 150 миль. С какой скоростью нужно двигаться, чтобы не опоздать?

Зная два параметра, всегда можно вычислить третий — так что давайте разбираться, с какой скоростью нужно вести машину. Нам известно, что $d = 150$ миль, а $t = 3$ часа, поэтому подставим эти величины в формулу $s = d/t$ и получим $s = 150/3 = 50$ миль в час. Скорость измеряется в милях в час, потому что мы делили количество миль на количество часов.

При расчетах скорости вы должны убедиться, что все величины выражены в одних и тех же единицах измерения.

Правильные единицы измерения



У этой пары есть 10 минут, чтобы добраться до родильного дома, а велосипедист едет со скоростью 20 миль в час. Успеют ли эти бедолаги? Нам надо выяснить, за какое время можно преодолеть 3 мили, двигаясь со скоростью 20 миль в час. Используя формулу $t = d/s$, получим: $t = d/s = 3/20$.

Поскольку скорость выражена в милях в час, в результате выйдет 3/20 часа, однако нам нужно время в минутах. В часе 60 минут, стало быть, в минутах это будет $3/20 \times 60 = 9$ минут. Так что, когда парочка доберется до роддома, в запасе у них останется всего минута. Будем надеяться, что в приемной нет очереди.

Комбинирование разных скоростей

Допустим, вы должны преодолеть на машине 400 миль максимум за 8 часов. Если всю дорогу ехать с постоянной скоростью, формула $s = d/t$ подскажет, что она должна равняться $400 \div 8 = 50$ миль в час.

Теперь предположим, что вы проехали первые 200 миль со скоростью 40 миль в час. С какой скоростью нужно ехать оставшиеся 200 миль, чтобы уложиться в отведенные 8 часов? Может показаться, что подходящий ответ — 60 миль в час, но это неверно!

Сначала выясним, сколько еще осталось времени. Раз вы проехали 200 миль со скоростью 40 миль в час, воспользуемся формулой $t = d/s$, чтобы узнать, сколько вы уже находитесь в пути: $200 \div 40 = 5$ часов. Значит, оставшиеся 200 миль нужно преодолеть за 3 часа, поэтому ехать надо со скоростью $200 \div 3 = 66{,}7$ миль в час.

ПРОЦЕНТЫ

С процентами мы сталкиваемся повсюду — от магазинов до банков, от платежных ведомостей до результатов экзаменов. Несложные проценты, такие как 50%, 33% или 25%, часто используются для описания специальных предложений в торговых точках, однако если вы имеете дело с налогами или кредитной картой, вам знакомы куда более замысловатые процентные соотношения. Так или иначе, проценты стоят того, чтобы в них разобраться. Как обычно в математике, изначально все исключительно просто: один процент обозначается как 1%, и это в точности соответствует 1/100, или 0,01. А сто процентов, или 100%, — это то же самое, что 100/100, то есть 1.

От дробей к процентам

Чтобы преобразовать простую дробь в проценты, нужно разделить верхнюю часть дроби (числитель) на нижнюю часть (знаменатель) и умножить на 100. Вот как перевести в проценты дробь 2/5.

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 100}{5} = \frac{200}{5} = 40\%$$

Также проценты можно преобразовать обратно в дробь, разделив их на 100. Переведем 40% в простую дробь:

$$40\% = \frac{40}{100} = \frac{4\cancel{0}}{10\cancel{0}} = \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{10}_{5}} = \frac{2}{5}$$

Числитель и знаменатель делятся на 10

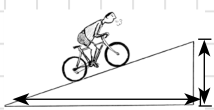
Числитель и знаменатель делятся на 2

Проценты и десятичные дроби тесно взаимосвязаны, поскольку проценты — это первые две цифры после запятой в десятичной дроби: например 0,85 = 85%. Когда после запятой стоит ноль, его важно учитывать! 0,03 = 03%, или просто 3%. Если же после запятой много чисел, следует передвинуть запятую на два знака. Допустим, вы хотите определить, сколько в процентах будет 1/16: вводим в калькулятор 1 ÷ 16 и получаем 0,0625, что соответствует 6,25%.

Уклон дороги

Поднимаясь на велосипеде в гору, вы можете встретить дорожный знак, где обозначен уклон дороги в процентах — чем круче подъем, тем это значение больше. Вот как оно вычисляется:

$$\text{Уклон в \%} = \frac{\text{вертикальное расстояние}}{\text{горизонтальное расстояние}} \times 100$$



Вертикальное расстояние, на которое вы поднимаетесь вверх, делится на горизонтальное расстояние, на которое вы продвигаетесь вперед. Например, на каждые 4 метра движения вперед вы поднимаетесь на 1 метр. В прежние времена сказали бы, что это уклон 1 к 4, а нынче записывают как дробь 1/4 и переводят в проценты. Следовательно, уклон 1 к 4 будет обозначен на дорожном знаке как 25%. На первый взгляд это немного, однако если вы не в идеальной физической форме, придется слезть с велосипеда и катить его рядом.

Большинство простых дробей невозможно точно преобразовать в проценты (как и в десятичные дроби). Ниже приведены самые распространенные значения в процентах и соответствующие им дроби; звездочками помечены округленные значения.

50% = 1/2	25% = 1/4	75% = 3/4	
33%* = 1/3	67%* = 2/3		
10% = 1/10	20% = 1/5	40% = 2/5	60% = 3/5
17%* = 1/6	12,5% = 1/8		

Деньги и проценты

Большинство денежных единиц четко соотносятся с десятичными дробями и процентами. Например, в британском фунте 100 пенсов, в одном евро 100 евроцентов, в долларе США тоже 100 центов. Это существенно упрощает расчеты, связанные с деньгами.

Если разделить 29 фунтов между двумя людьми, каждому человеку достанется $14\frac{1}{2}$ фунта, или 14,5 фунта (поскольку 1/2 = 0,5). Это значение выглядит несколько странно, поэтому представим его с двумя знаками после запятой. То есть каждому достанется 14,50 фунта, или 14 фунтов и 50 пенсов.

Так как 100% = 1, а 100 пенсов = 1 фунт, 1% от фунта — это 1 пенс. Если в кофейне Barstucks чашка кофе и пирожное стоят 7 фунтов плюс 15% сервисного сбора, несложно посчитать, сколько это будет: 15% от 1 фунта = 15 пенсов, следовательно, 15% от 7 фунтов — это 15 × 7 = 105 пенсов. Значит, всего нужно заплатить 7 + 1,05 = 8,05 фунта, и не пытайтесь всучить им 8 фунтов — как знать, что они добавят во взбитые сливки, когда вы придете в следующий раз.

Как выгадать на скидках

Умение сравнивать дроби и проценты поможет вам сэкономить. Предположим, вам нужно купить много батареек, и вы нашли три магазина, предлагающих разные скидки:

Без учета скидок батарейки в этих магазинах стоят 50 пенсов — где же их выгоднее купить? Для этого необходимо выяснить акционную цену одной батарейки.

Скидка 30%: В этом случае цена составит 70% от обычной. 50 × 70% = 50 × 0,7 = 35 пенсов. (Считать будет проще, если представить 50 × × 0,7 как 5 × 10 × 0,7. Тогда 10 × 0,7 = 7, и ответ будет равен 5 × 7 = 35.)

Купи 2 и получи 1 бесплатно: В этом магазине три батарейки предлагают по цене двух. Обычная цена двух батареек 2 × 50 = 1 фунт, но поскольку за эти деньги можно купить три батарейки, каждая обойдется в 1 ÷ 3 фунта, то есть около 33 пенсов.

Купи 1 и получи еще 1 за полцены: Первая батарейка стоит 50 пенсов, а вторая 1/2 × 50 = 25 пенсов, следовательно, за обе вы отдадите 75 пенсов, то есть одна батарейка обойдется вам в 75 ÷ 2 = 37,5 пенса.

Наименьшая цена — около 33 пенсов, то есть выгоднее всего предложение «Купи 2 и получи 1 бесплатно». Но тут вы заметили еще один магазин, цена батареек в котором выше, 65 пенсов, зато там проходит акция «Купи 1 и получи еще 1 бесплатно». Во сколько в этом случае обойдется одна батарейка?

Две батарейки стоят 65 пенсов, значит, цена одной составит 65 ÷ 2 = 32,5 пенса. Это самое выгодное предложение!

Имея дело со скидками, обратите внимание на один момент: предположим, вы покупаете не батарейки, а местную газету. Вам нужен лишь один экземпляр, так что нет смысла покупать две газеты за 65 пенсов, если можно купить одну за 35 пенсов в магазине, где предлагают скидку 30%. Как ни странно, некоторые люди не в силах устоять перед «самым выгодным предложением», даже если им оно не нужно!

Подсказки по процентам

Если вам надо найти указанное количество процентов от «чего-то», выполните с этим «чем-то» следующие действия.

50%: разделить на 2

25%: найти 50% и разделить на 2

10%: разделить на 10

5%: найти 10% и разделить на 2

$2\frac{1}{2}$%: найти 5% и разделить на 2

1%: разделить на 100

Комбинируя эти варианты, можно быстро вычислить и многие другие значения.

15% от 25 фунтов:	10% от 25 = 2,50, 5% = 1,25. Сложив эти значения, получим 15% = 3,75 фунта.
35% от 70 фунтов:	50% от 70 = 35, значит, 25% = 17,50. 10% от 70 = 7, значит, 35% = 17,50 + 7 = = 24,50 фунта.
$17\frac{1}{2}$% от 150 фунтов:	10% от 150 = 15, 5% = 7,50 и $2\frac{1}{2}$% = 3,75. Сложив эти три значения, получим $17\frac{1}{2}$% = 26,25 фунта.

Три самых распространенных действия с процентами

Несмотря на то что проценты удобно считать на калькуляторе, разумно иметь представление о том, каким должен быть результат, а не слепо доверять цифрам на экране устройства. Не стоит скандалить с официантами и продавцами, пока не убедитесь, что посчитали все правильно!

Нажимая на калькуляторе кнопку <%>, будьте особенно осторожны. Как правило, кнопку <=> после этого нажимать не нужно. Далее инструкции для калькулятора заключены в угловые скобки.

❶ От

Сколько будет 9% от 200 фунтов?

«От» означает умножение, то есть надо посчитать: 200 × × 0,09 = 18 фунтов. Можно рассуждать так: 9% от 100 — это 9, следовательно, 9% от 200 — это 2 × 9 = 18 фунтов.

Наберите на калькуляторе < 200 × 0,09 = > или < 200 × × 9 % >

❷ *Плюс*

Сколько будет 60 фунтов плюс $12\frac{1}{2}$%?

Нечто похожее можно встретить в ресторанном счете — еда-питье стоят 60 фунтов плюс плата за обслуживание. Чтобы вычислить общую сумму, найдем $12\frac{1}{2}$% от 60, а затем прибавим 60, таким образом:

60 × 0,125 = 7,50, далее 60 + 7,50 = 67,50 фунта.

Ваш калькулятор легко справится с этой задачкой в одно действие, если набрать: < 60 + 12,5 % >

Существует чуть более хитрый способ подсчета. Стоимость без наценки за обслуживание равна 60 × 100%, то есть просто 60 фунтов. Стоимость с наценкой составит 60 × (100% + 12,5%). Получается 60 ×112,5%, или же 60 × 1,125 = 67,50 фунта.

❸ *Без*

Сколько будет 160 фунтов без 20%? Такой подсчет понадобится, если нужно узнать конечную цену товара со скидкой или если вы заработали 160 фунтов, но из них вычли 20% налога.

<160 – 20 %>

Можно вычислить, сколько будет 160 фунтов × 20%, и вычесть результат из 160 фунтов: 160 × 0,2 = 32 фунта и затем 160 – 32 = 128 фунтов.

Можно применить другой способ. Обратите внимание: вместо того чтобы платить 100% цены, вы платите 100% – 20% =

= 80%. Поэтому окончательная цена составит 160 × 80% = = 128 фунтов.

Ошибки при подсчете процентов

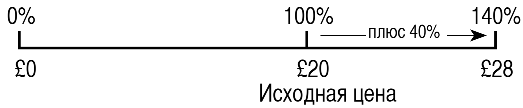
При вычислении процентов легко попасть в некоторые типичные ловушки. Вот две периодически встречающиеся ошибки.

Увеличение и уменьшение

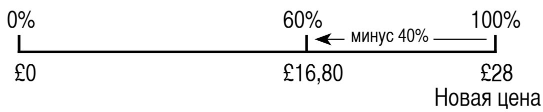
Владелец магазина явно хотел снизить цену обратно до 20 фунтов, что же пошло не так?

Когда вы берете некую цену и выполняете с ней более чем одно действие, помните, что 100% — это изначальная цена и все вычисления процентов должны отталкиваться именно от нее.

Продавщица подняла цену на 40%, и новая цена составила 140% от исходной (20 × 140% = 28 фунтов).



Когда продавщица уменьшала цену на 40%, ей нужно было взять 40% от исходной цены и вычесть это значение из новой цены. Тогда бы цена вернулась обратно к 100%. Ошибка состояла в том, что продавщица приняла новую цену за 100% и взяла 40% от нее.



Вычитание налога

Мы уже знаем, как прибавлять проценты за обслуживание в ресторане и как вычитать проценты из магазинной цены или налог из зарплаты (см. пункты «Плюс» и «Без» в предыдущем подразделе). Однако представьте, что вы купили новый ноутбук за 293,75 фунта с учетом 17,5% торгового налога. Какой была бы цена ноутбука без налогов?

Практически все делают в такой задачке одну и ту же ошибку: ищут 17,5% от 293,75 фунта и вычитают это значение из цены с налогом. Получается 242,34 фунта, что неверно. Ту же ошибку совершила и продавщица в обувном магазине, вычитая 40% из 28 фунтов.

Нужно помнить, что 293,75 фунта — это окончательная цена, которая состоит из цены без налога, умноженной на 1,175. Вот как это можно записать:

(цена ноутбука без налога) × 1,175 = (цена ноутбука с налогом)

Когда при наличии окончательной цены требуется выполнить обратное действие, то есть найти цену без налога, окончательную цену нужно *делить* на 1,175:

$$\text{(цена ноутбука без налога)} = \text{(цена ноутбука с налогом)} \div 1{,}175$$

Теперь подставим числа:

$$293{,}75 \text{ фунта} \div 1{,}175 = 250 \text{ фунтов}$$

Получается, что до обложения налогом ноутбук стоил 250 фунтов, так что если у вас есть возможность вернуть налог, вы получите обратно 43,75 фунта.

ПРОЦЕНТНЫЕ СТАВКИ

Как известно, потратив деньги, вы становитесь беднее, а сэкономив — богаче… Особенно если понимаете, как начисляются банковские проценты.

Когда вы кладете деньги на сберегательный счет, это называется *вклад* (или *капитал*). Он должен принести вам дополнительный доход, то есть *проценты*, начисляемые исходя из *процентной ставки*. Проценты на вклады бывают двух видов: простые и сложные.

Простые проценты

Допустим, вы положили 700 фунтов на счет с простой процентной ставкой в 6% годовых. Это значит, что раз в год банк будет вычислять 6% от ваших вложений и добавлять их на ваш счет. Если вы внесли 700 фунтов под 6% годовых, проценты, которые вам начислят по завершении первого года, составят: $700 \times 6\% = 700 \times 0{,}06 = 42$ фунта, то есть в конце года на вашем счету будет 742 фунта.

Если в течение нескольких лет вы не будете снимать деньги со счета, то какую прибыль по процентам получите? Можно воспользоваться формулой для простых процентов.

простые проценты = $p \times r \times t$

p = первоначальный вклад
r = процентная ставка (в виде десятичной дроби)
t = количество лет

Таким образом, если вы положите в банк 700 фунтов под 6% годовых на 3 года, прибыль по процентам составит: 700 × × 0,06 × 3 = 126 фунтов. (Не забывайте, 6% нужно преобразовать в 0,06!) Эти деньги поступят на ваш счет, и полная сумма ваших сбережений достигнет 826 фунтов.

Сложные проценты (или как получать больше денег)

Предположим, вы положили в банк 700 фунтов под 6% годовых и через год сняли все деньги. Как мы уже знаем, это 742 фунта. Затем вы решили внести эту сумму обратно еще на год. Теперь прибыль по процентам составит 6% от 742 фунтов, то есть 742 × 0,06 = 44,52 фунта. Это чуть больше, чем вы получили за первый год, и полная сумма ваших сбережений будет равна 786,52 фунта. Если вы снова заберете эти деньги и тут же положите обратно еще на год, то прибыль по процентам снова возрастет: 786,52 × 0,06 = 47,19 фунта.

Через три года на вашем счету будет 833,71 фунта. За счет того, что вы забирали и снова вкладывали деньги, вы получили дополнительные 7,71 фунта, то есть вам достались проценты от первоначальной суммы вклада плюс проценты от начисленных прежде процентов! Это называется сложными процентами.

Хорошая новость состоит в том, что банк не заинтересован, чтобы вы каждый год забирали и вкладывали обратно свои деньги, поэтому он будет сам начислять вам сложные проценты. Если он это делает раз в год, используется такая формула:

$$\text{сложные проценты (годовые)} = [(1 + r)^t - 1] \times p$$

Давайте посмотрим, что произойдет с нашими 700 фунтами за 3 года. Подставим 0,06 вместо r, а 700 вместо p:

$$[(1 + 0{,}06)^3 - 1] \times 700$$

При вычислении этого выражения крайне важно соблюдать очередность выполняемых действий (см. раздел «Порядок действий»). Сначала считаем то, что находится в скобках с наибольшей вложенностью, затем степени, после чего умножаем/делим, потом складываем/вычитаем.

$[(1 + 0{,}06)^3 - 1] \times 700$ Внутренние скобки: (1 + 0,06) = (1,06)

$= [(1{,}06)^3 - 1] \times 700$ Содержимое скобки возводится в 3-ю степень: то есть $(1{,}06)^3 = 1{,}06 \times 1{,}06 \times$ $\times\ 1{,}06$. Не пытайтесь выглядеть круто, возьмите калькулятор!

Степени и калькулятор

Чтобы посчитать $(1{,}06)^3$, достаточно набрать <1,06 × × 1,06 × 1,06 = > и получить в итоге 1,191016. Если у вас мощный калькулятор, поищите кнопку возведения в степень — на ней может быть написано: x^y, или x^y, или даже y^x. Чтобы вычислить $(1{,}06)^3$, наберите <1,06 x^y 3 = >; должен получиться тот же результат: 1,191016.

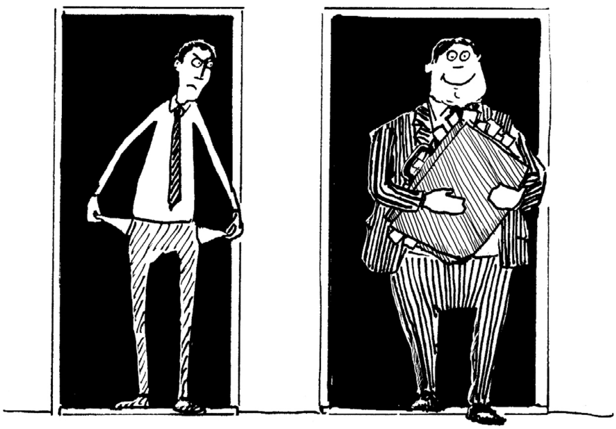
$= [1{,}191016 - 1] \times 700$ Теперь, вычислив степень, уберем внутренние скобки. Во внешних скобках останется $1{,}191016 - 1 =$ $= 0{,}191016$.

$= 0{,}191016 \times 700$ Еще чуть-чуть, и готово...

$= 133{,}71$ Итак, проценты составят 133,71 фунта.

Поскольку наш исходный вклад равнялся 700 фунтам, через три года на счету будет 700 + 133,71 = 833,71 фунта. Такой же ответ мы получили ранее, значит, формула верна!

На самом деле в банках применяют еще более сложные формулы, пересчитывая проценты раз в месяц, а то и каждый день, так что прибыль выходит чуть больше… Не правда ли, очень мило с их стороны? К сожалению, у этой арифметики есть и обратная сторона, и если вы пользуетесь кредитной картой, то знаете, что я имею в виду!



Проценты по кредиту (или как терять деньги)

Если вы берете денежный займ или покупаете что-то по кредитной карте, *вы* платите банку проценты! И чем больше сумма кредита, тем больше придется платить.

Существуют тысячи разнообразных кредитных программ и процентных ставок: в зависимости от того, сколько вы зарабатываете, сколько хотите занять, для чего вам нужны деньги, как скоро можете их вернуть, нравится ли банковским служащим ваша рубашка и т. д. Как блестяще подытожил Боб Хоуп: «Банк — это место, где вам дадут денег, если вы сумеете доказать, что в них не нуждаетесь».

Далее будем считать, что вы взяли займ на 5000 фунтов в конторе «Акула-Кредит» с возмутительной процентной ставкой 10% в месяц. Чтобы погасить кредит, вам нужно будет выплатить и проценты, и так называемый *заемный капитал,* то есть 5000 фунтов.

Взрывные проценты... и выплаты

Навскидку вы можете решить, что за год проценты составят 10% × 12 = 120%, и если прибавить это значение к 100%, то получится, что к концу года (при отсутствии каких-либо выплат по кредиту) вам придется выложить 220%. Увы, это не так.

По кредиту *всегда* взимаются сложные проценты. Спустя первый месяц вы будете должны 110%, спустя второй месяц — уже 110% × 110%, спустя третий месяц — 110% × 110% × 110% и т. д. Подразумевая, что 110% — это 1,1, сколько вы будете должны к концу года? А вот сколько: $1{,}1^{12}$ = 3,14, или 314%. Проценты от процентов растут как на дрожжах!

Если в течение года вы не погасите кредит в 5000 фунтов, то через 12 месяцев ваш долг составит 5000 × 3,14 = 15 700 фунтов. Разумеется, чтобы долг не доходил до таких сумм, нужно совершать регулярные выплаты.

Наименее разумно (если в «Акула-Кредит» вам дадут такую возможность) выплачивать *только проценты*. Каждый месяц вы смотрите на свой долг, считаете проценты и вносите именно эту сумму. 10% от 5000 = 500 фунтов. Однако ежемесячные выплаты по 500 фунтов не уменьшат ваш заемный капитал — он по-прежнему будет равен 5000, а вы будете выплачивать проценты до конца своих дней.

Если платить чуть больше (скажем, 600 фунтов), заемная сумма в 5000 фунтов начнет уменьшаться — сначала понемногу, но со временем все быстрее и быстрее, и однажды вы погасите долг целиком. Числа в следующей таблице округлены до ближайших целых сумм в фунтах.

Месяц	Долг в начале месяца	10% ставки	Плюс проценты	Выплаты	Долг в конце месяца
Январь	5000	500	5500	600	4900
Февраль	4900	490	5390	600	4790
Март	4790	479	5269	600	4669
Апрель	4669	467	5136	600	4536
Май	4536	454	4990	600	4390

Здесь стоит обратить внимание на три момента.

❶ С каждым месяцем проценты уменьшаются. Это значит, что со временем вы будете гасить долг все быстрее и быстрее.

❷ За эти пять месяцев сумма ваших выплат составила 3000 фунтов, и это на 500 фунтов больше, чем если бы вы платили только проценты. Однако вы уменьшили задолженность до 4390 фунтов, то есть возместили 610 фунтов заемного капитала. Дополнительные 500 фунтов снизили долг на 610 фунтов!

❸ Если продолжать таблицу, станет ясно, что для погашения кредита потребуется 18 выплат по 600 фунтов и еще одна финальная выплата в 484 фунта. Общая сумма выплат составит $600 \times 18 + 484 = 11\,284$ фунта.

А если бы вы смогли выплачивать на 100 фунтов в месяц больше, то задолженность бы уменьшалась еще быстрее и для погашения кредита вам понадобилось бы всего 13 месячных выплат по 700 фунтов и финальная выплата в 105 фунтов. В сумме выплаты составят $700 \times 13 + 105 = 9205$ фунтов. То есть дополнительные 100 фунтов в месяц позволят вам сэкономить 2000 фунтов!

Долговая воронка

Серьезной проблемой может стать пропущенный платеж. Это приведет не только к росту процентов, но и к тому, что славные ребята из «Акула-Кредит», скорее всего, наложат на вас штраф. Предположим, выплачивая в месяц минимальные 500 фунтов, вы пропустили первый платеж и были оштрафованы на 200 фунтов.

Ох, не к добру это...

Месяц	Долг в начале месяца	10% ставки	Плюс проценты	Выплаты	Долг в конце месяца
Январь	5000	500	5500	Пропущено! Штраф 200	5700
Февраль	5700	570	6270	500	5770
Март	5770	577	6347	500	5847
Апрель	5847	585	6432	500	5932
Май	5932	593	6525	500	6025

Через 5 месяцев ваш долг составил 6025 фунтов, то есть всего один пропущенный платеж в 500 фунтов вылился в более чем 1000 фунтов дополнительной задолженности — и таким образом долг будет расти бесконечно. Даже если вы больше не пропустите ни одной выплаты, через 12 месяцев вы будете должны 6997 фунтов, через 2 года — 11 268 фунтов, через 3 года — 24 671 фунт, а через 4 года — 66 738 фунтов.

Если бы люди из «Акула-Кредит» не оштрафовали вас на 200 фунтов, через 4 года вы были бы должны 49 099 фунтов. Однако они, безусловно, с радостью это сделают, потому что через 4 года эти 200 фунтов принесут им дополнительно почти 17 000 фунтов по процентам!

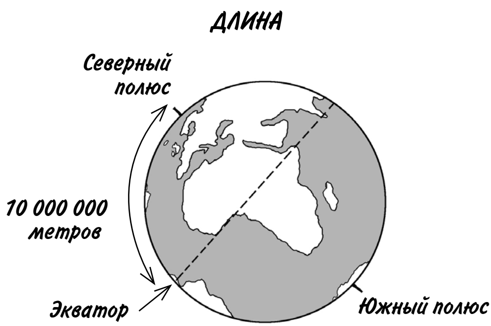
Когда вы слышите истории о людях, увязших в заоблачных долгах, как правило, всему причиной послужили несколько пропущенных выплат, штрафы и процентные ставки еще почище тех, что я использовал здесь в качестве примера.

ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

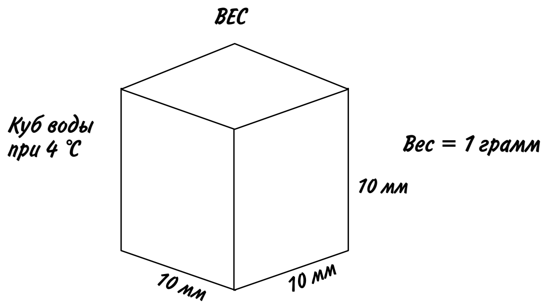
До того как около 200 лет тому назад во Франции придумали метрическую систему, люди пользовались сотнями разнообразных единиц измерения длины, веса и объема. В метрической же системе применяются всего три основные единицы измерения, которые очень удобно взаимосвязаны.

Метры, литры и граммы

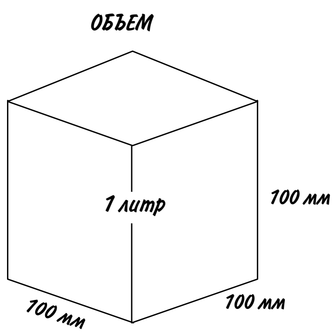
Изначально метр был определен как 1/10 000 000 расстояния от экватора до Северного полюса вдоль линии, проходящей через Париж. Таким образом, расстояние от экватора до Северного полюса равно 10 000 км, а длина окружности экватора — приблизительно 40 000 км. (В действительности же Земля не идеально круглая, и длина экватора равна примерно 40 075 км.)



Грамм — это вес куба (с длиной сторон 10 мм) воды при температуре 4 °C. (При этой температуре плотность воды максимальна. Иначе говоря, если вода теплее или холоднее, куб воды такого же размера весит немного меньше.)



Литр — количество жидкости, которое поместится в куб с длиной сторон 100 мм. Если этой жидкостью является вода при температуре 4 °C, тогда литр будет весить ровно 1 килограмм. Куб с длиной сторон 1 м вмещает 1000 литров воды, которая весит 1000 кг, или 1 тонну. Иначе говоря, кубический метр воды весит 1 тонну. Если бы в жизни было все так просто...



Хотя значения веса абсолютно точны лишь при 4 °C, при иных температурах они не сильно меняются. Даже когда вода находится на грани кипения, 1000 литров будут весить около 0,96 тонны, что довольно близко к 1 тонне.

Кило, мега и милли

Основные единицы — метры, литры и граммы — можно умножать или делить на степени числа 10, чтобы получить другие единицы измерения, от крайне малых до невероятно больших. Вы, конечно, знаете, что 1 километр — это 1000 метров, а 1 метр — 1000 миллиметров. Из таблички ниже видно, как эти и другие префиксы связаны между собой:

Большие величины		Малые величины	
дека (да)	$\times$ 10, или $\times 10^1$	деци (д)	$\times$ 0,1, или $\times 10^{-1}$
гекто (г)	$\times$ 100, или $\times 10^2$	санти (с)	$\times$ 0,01, или $\times 10^{-2}$
кило (к)	$\times$ 1 000, или $\times 10^3$	милли (м)	$\times$ 0,001, или $\times 10^{-3}$
мега (М)	$\times$ 1 000 000, или $\times 10^6$	микро (мк)	$\times$ 0,000001, или $\times 10^{-6}$
гига (Г)	$\times 10^9$	нано (н)	$\times 10^{-9}$
тера (Т)	$\times 10^{12}$	пико (п)	$\times 10^{-12}$
пета (П)	$\times 10^{15}$	фемто (ф)	$\times 10^{-15}$

Не забывайте, что маленький знак минус перед степенью означает деление, то есть $10^{-6} = 1/10^6$. В наши дни редко используются декаметры, гектометры или дециметры, да и сантиметры несколько устарели. Строитель, измеряющий дверной проем, вряд ли скажет, что его ширина 75 сантиметров, скорее, он скажет: «750 миллиметров». Чтобы перевести миллиметры в метры, нужно просто разделить на 1000, так что 750 мм = = 0,75 м.

Другие единицы, которые вам могут встретиться

- **Тонна:** равна 1000 кг, 1 000 000 г, или 1×10^9 мг. Метрическая тонна практически равна устаревшей английской тонне (однако американская тонна легче — около 0,9 метрической тонны).

- **Гектар:** равен площади 10 000 м^2, или площади квадрата со стороной 100 м. Гектар — это примерно 2,5 устаревших акра.
- **Световой год:** эта единица вряд ли пригодится вам в повседневной жизни, но если вы интересуетесь астрономией, имейте в виду, что это расстояние, преодолеваемое светом за один год: 9 500 000 000 000 км. Ближайшая к нашему солнцу звезда находится на расстоянии 4,2 световых года.

На волосок от...

Толщина человеческого волоса около 100 мкм, но что это значит? В одном миллиметре 1000 мкм, стало быть, 100 мкм — это 0,1 мм. То есть диаметр волоса — примерно 0,1 мм.

Преобразование единиц

Зачастую одни единицы измерения нужно преобразовывать в другие, например во время приготовления еды, при покупке одежды, обмене валют или чтении прогноза погоды на следующую неделю. Рассмотрим вкратце, как это делать.

Преобразование единиц британской системы

Хотя метрическая система распространена практически повсеместно, кое-где до сих пор используются единицы британской системы, в частности в старой Британии, американских поваренных книгах и руководствах «Сделай сам». Чтобы без проблем перевести единицы измерения из британской системы в метрическую, важно знать следуюшее:

1 миля = 1,609 километра	1 британский галлон = = 4,55 литра*
1 ярд = 0,914 метра	1 британская пинта = = 568 миллилитров*
1 дюйм = 25,4 миллиметра	1 американский галлон = = 3,78 литра*
1 фунт = 454 грамма	1 американская кварта = = 946 литров*
1 унция = 28,35 грамма	1 американская пинта = = 473 миллилитра*
1 жидкая унция = 28,4 миллилитра	1 американская чашка = = 237 миллилитров*
1 акр = 4047 квадратных метров, или около 0,4 гектара	(*Эти значения относятся только к измерению жидкостей.)

Примечание: 4 американские чашки = 2 американские пинты = 1 американская кварта = 0,25 американских галлона.

Для большинства преобразований понадобится или умножать, или делить — нужно лишь понимать, что именно. Допустим, нам необходимо перевести 28 километров в мили. Если высокая точность не требуется, можно сказать, что 1 миля = = 1,6 км. Однако какое именно действие выполнять: 28 × 1,6 или 28 ÷ 1,6? Это зависит от того, каким должен быть ответ: больше или меньше исходного значения. Очевидно, что при сравнении 1 мили и 1,6 км число 1 меньше, чем 1,6, то есть значение в милях будет всегда меньше значения в километрах.

Поскольку 28 ÷ 1,6 дает меньший результат, он и будет правильным, стало быть, 28 км = 17,5 миль.

Метры и миллиметры

Здесь все абсолютно просто, но тем не менее легко ошибиться! 1 м = 1000 мм, значит, нужно умножать или делить на 1000.

Сколько миллиметров в 0,04 метра? Очевидно, что значение должно быть больше, поэтому умножаем: 0,04 × × 1000 = 40 мм.

Сколько метров в 520 мм? Значение должно быть меньше, поэтому делим: 520 ÷ 1000 = 0,52 метра.

Валюты

Конвертация валют аналогична любым другим преобразованиям единиц измерения. Поскольку я понятия не имею, где вы живете и что во что хотите перевести, будем считать вас пиратом XVII века, который меняет 500 дублонов на гроуты*.

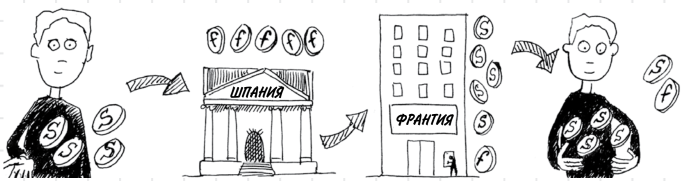
Если 1 дублон = 3,76 гроута, нужно ожидать большего значения в гроутах. Выходит, что 500 × 3,76 = 1880 гроутов.

Однако стоит иметь в виду, что банк может назначить комиссию за обмен и в результате вы получите меньше, чем ожидали. В таком случае сделайте одолжение, сбросьте этих скваlыг за борт. Йо-хо-хо!

* Гроут — вышедшая из употребления английская серебряная монета. *Прим. перев.*

Парадокс обмена валют

А сейчас не расчеты, а информация к размышлению! Валюта страны Шпании называется «шпалы», тогда как в граничащей с ней Франтии в ходу «фраки». И там и там считают, что местная валюта ценнее, чем соседская. Шпания объявила, что 5 фраков стоят 4 шпалы. В ответ Франтия оценила 5 шпал в 4 фрака. Гляньте-ка, на этом можно разбогатеть!



Занимаете у друга 4 шпалы

Отправляетесь в банк Шпании и меняете 4 шпалы на 5 фраков

Идете в банк Франтии и меняете 4 фрака на 5 шпал

Возвращаете другу 4 шпалы, и у вас на руках остается 1 шпала и 1 фрак!

Отлично, вы в выигрыше — но за чей счет?

Температура

Из всех необходимых нам преобразований чуть сложнее дело обстоит с температурой. Большинство из нас пользуются шкалой Цельсия, но в ходу и градусы Фаренгейта, а ученые ориентируются на шкалу Кельвина.

	Фаренгейт, °F	Цельсий, °C	Кельвин, °K
Точка кипения воды	212	100	373
Точка замерзания воды	32	0	273
Температура тела	98	37	310
Абсолютный ноль	–459,67	–273,15	0

Вот как переводить °C в °F и обратно:

°C = (°F – 32) × 5/9	Если из градусов Фаренгейта вычесть 32, умножить на 5 и разделить на 9, то получатся градусы Цельсия.
°F = (°C × 9/5) + 32	Если градусы Цельсия умножить на 9, разделить на 5 и прибавить 32, то получатся градусы Фаренгейта.

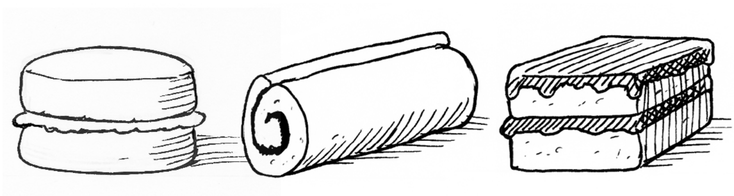
Абсолютный ноль — это самая низкая возможная температура, которая по Цельсию равна –273,15. Градусы Кельвина соответствуют градусам Цельсия, но их отсчет начинается с абсолютного нуля. Следовательно, °K = °C + 273 (оставшимися 0,15 °C можно пренебречь).

Во всем этом очень легко запутаться. Простейший способ убедиться, что вы правильно запомнили, как переводить °C в °F, — постараться преобразовать 100 °C в 212 °F. Опыт подсказывает, что нужно умножить 100 на 9 (получится 900), разделить на 5 (получится 180) и прибавить 32 (получится 212).

Удивительно, но факт: –40 °F = –40 °C.

ДЛИНА, ПЛОЩАДЬ И ОБЪЕМ

Если вы испекли торт, перевязали его ленточкой и завернули в кулинарную пленку, то вы имели дело с длиной (ленточки), площадью (размером куска кулинарной пленки) и объемом (торта). Предположим, вы разделили содержимое большой миски с тестом на три равные части, а затем испекли из них три пирожных разной формы.

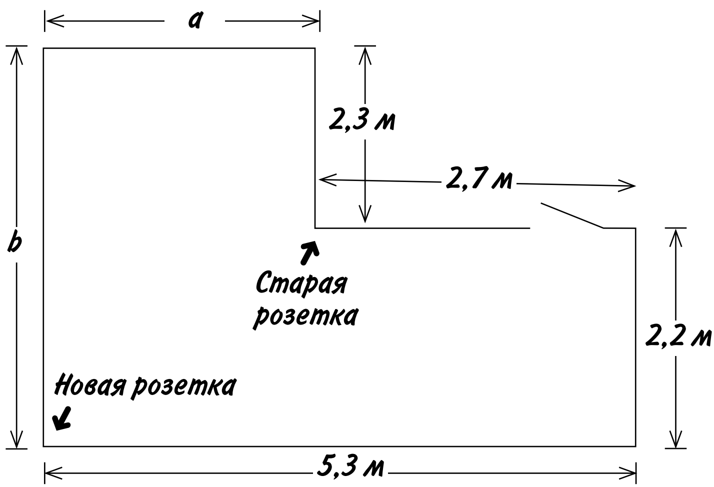


Несмотря на то что объем всех трех частей одинаков, количество пленки и длина ленточки для каждого пирожного могут отличаться. Так происходит потому, что длина, площадь и объем описывают разные свойства предметов. И в этом нужно разбираться независимо от того, занимаетесь вы готовкой или планируете ремонт в доме.

Длина

Длина — это расстояние между двумя точками. Каким бы оно ни было, с ним связано только одно измерение. Длина карандаша может равняться 130 мм, длина беговой дорожки — 100 м, а расстояние от Килмарнока до Нориджа — 705 км (или 438 миль). Миллиметры (мм), метры (м) и километры (км) — это единицы измерения длины.

Предположим, вам нужно установить новую телевизионную розетку, а для этого понадобится купить кусок кабеля. Вы идете в магазин, вооружившись планом своей гостиной. Кабель требуется протянуть от старой розетки до новой. Вы знаете длину всех стен, кроме тех, что помечены буквами *a* и *b*. Какой длины нужен провод?



Самый простой подход — не связываться с лишними расчетами и проложить провод рядом с дверью. В этом случае его длина составит 2,7 + 2,2 + 5,3 = 10,2 м плюс еще немного понадобится, чтобы обвести кабель вокруг двери. Однако более разумный способ — вычислить *a* и *b*. Из плана комнаты следует, что длина большой стены равна 5,3 м, а той, что поменьше, — 2,7 м. Значит, длина стены *a* равна 5,3 − 2,7 = 2,6 м. Аналогично *b* = = 2,2 + 2,3 = 4,5 м. Если не связываться с дверью и тянуть кабель в другую сторону, его длина должна составить 2,3 + *a* + *b*. Подставив значения *a* и *b*, получим 2,3 + 2,6 + 4,5 = 9,4 м.

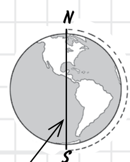
Искривление пространства

Прямая линия представляет собой кратчайшее расстояние между двумя точками… если только мы не имеем дело с искривленным пространством! Обычно мы считаем, что прямая линия проведена на двумерной поверхности, например на листе бумаги. Можно взять карту мира и провести прямую линию, обозначив кратчайшее расстояние между Северным и Южным полюсом, но действительно ли оно будет кратчайшим?

Двумерная карта мира

Кратчайшее расстояние между полюсами

Трехмерная карта мира



Кратчайшая линия, нарисованная на карте

На самом деле кратчайший путь проходит через центр

Реальный мир, в котором мы живем, представляет собой трехмерное пространство. В нем наша прямая линия становится кривой, а действительно кратчайший путь от полюса к полюсу проходит через центр Земли. (Его длину мы рассчитаем чуть позже.) Вот бы выйти в четырехмерное пространство — возможно, там найдется еще более короткий путь! О похожих вещах думал Эйнштейн, когда разрабатывал теорию относительности.

Площадь

Что ж, с длиной мы разобрались, теперь выясним, сколько понадобится краски на покраску стены *b*, длина которой, как мы уже знаем, равна 4,5 м.

Итак, вы покупаете в строительном магазине 750-миллилитровую банку замечательной краски цвета подгоревшей яичницы. На этикетке указано, что одного литра хватает на 12 м^2 поверхности.

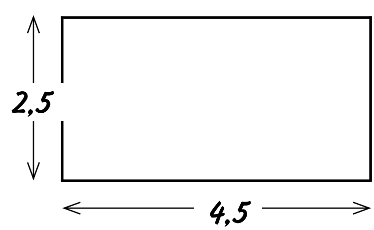
Первое, на что стоит обратить внимание, это обозначение *м^2*, то есть *квадратные метры* — единица измерения площади. Вы можете красить поверхность любой формы, но, как бы то ни было, 1 литра краски хватит на площадь 12 квадратов 1 м × 1 м. Так сколько же вы покрасите содержимым одной банки? 750 миллилитров — это 0,75 литра, следовательно, одной банки достаточно для покраски $12 \times 0{,}75 = 9$ м^2.

Вычисляем площадь стены

Я думаю, вы уже поняли, что знать длину стены недостаточно, поскольку расход краски также зависит от ее высоты. Существует множество формул для вычисления площадей разных фигур, и все они тем или иным образом связаны с перемножением двух длин. Сейчас мы имеем дело с самой распространенной фигурой — прямоугольником, и формула в этом случае исключительно проста:

площадь прямоугольника = ширина × высота

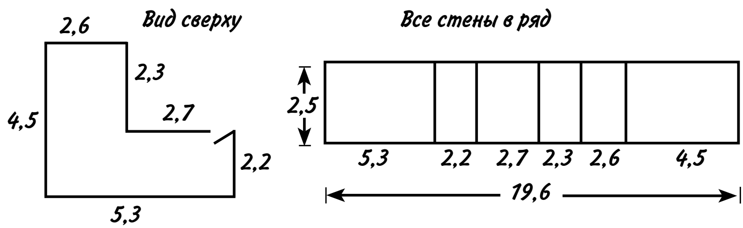
Предположим, что высота стены комнаты 2,5 м, а длина 4,5 м. Чтобы узнать площадь, нужно перемножить высоту и длину: 2,5 м × 4,5 м = 11,25 м^2.



Как видите, при умножении метров на метры получаются квадратные метры.

Итак, теперь мы знаем, что площадь стены равна 11,25 м^2, а банки хватает на 9 м^2. Без всяких подсчетов становится очевидно, что одной банкой мы не обойдемся. Однако если мы купим две банки, останется много лишней краски, да и красить только одну стену как-то неправильно. Так что давайте поднатужимся и выясним, сколько краски понадобится для покраски всех стен в комнате. Есть два способа это сделать. Первый — вычислить площадь каждой стены и затем сложить результаты. Поскольку высота всех стен 2,5 м, получается вот что: (4,5 × 2,5) + (5,3 × 2,5) + (2,2 × 2,5) + (2,7 × 2,5) + (2,3 × 2,5) + + (2,6 × 2,5)… Тьфу!

Гораздо проще вообразить, что все стены расположены в ряд.



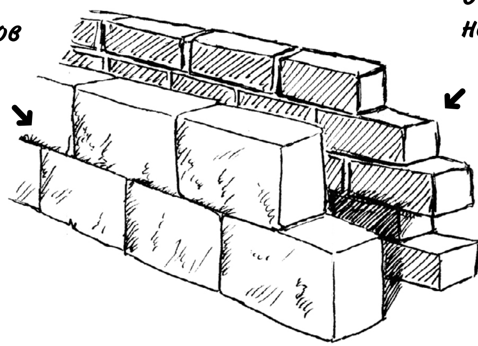
Сложив длины всех стен, мы узнаем, что их общая длина равна 19,6 м, а умножив это число на 2,5, вычислим общую площадь стен: 19,6 × 2,5 = 49 м^2.

Банки краски хватает на 9 м^2, стало быть, нам нужно: 49 ÷ ÷ 9 = 5,44, то есть шести банок будет вполне достаточно.

Если хотите рассчитать площадь для покраски более точно, можно измерить дверной проем и окна и вычесть их. Размер двери обычно равен 0,75 м × 2 м = 1,5 м^2. Теперь подумайте об окнах: они такие же, как дверь? В половину двери? Или еще меньше? Впрочем, если вам неохота возиться с окнами, просто закрасьте их — сэкономите на занавесках.

Кирпичи и блоки

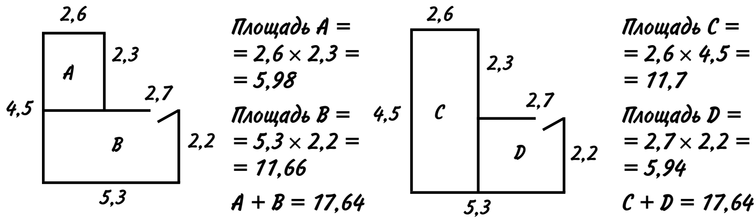
Если вы решили возвести стену из стандартного строительного кирпича, вам понадобится около 60 кирпичей на 1 м^2. Если же использовать строительные блоки, то 10 блоков на 1 м^2.



Так что если заблудший дорожный каток мимоходом развалит стену вашего дома, размер которой 5,3 м × 2,5 м, то на восстановление ее внешней части понадобится 5,3 × 2,5 × 60 = = около 800 кирпичей, а внутренней — 5,3 × 2,5 × 10 = примерно 135 блоков. Если бы мой приятель Блейки знал об этом, ему бы не пришлось краснеть, когда каменщику, которого он нанял на день, уже к 11 утра не хватило материалов.

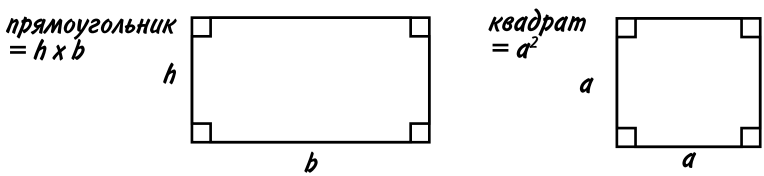
Покраска потолка

Краска цвета подгоревшей яичницы настолько вам приглянулась, что вы решили покрасить ею и потолок тоже. Так что нам опять нужно вычислять площадь. Увы, это не идеальный прямоугольник, но мы можем разделить потолок на два прямоугольника, по отдельности подсчитать их площадь и сложить результаты. Сделать это можно двумя способами.



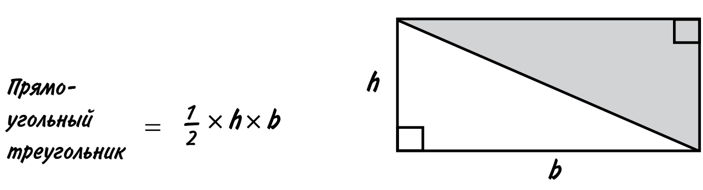
Теперь мы знаем, что площадь потолка равна 17,64 м^2. Поскольку банки краски хватает на 9 м^2, для потолка двух банок будет достаточно.

Формулы площадей для других фигур



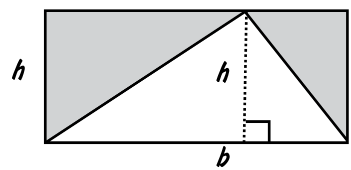
Мы уже использовали формулу площади прямоугольника. Квадрат — это тоже прямоугольник, только с одинаковыми сторонами, поэтому, чтобы вычислить его площадь, нужно умножить длину стороны саму на себя.

Прямоугольный треугольник — это прямоугольник, разрезанный пополам по диагонали. Поэтому все просто, его площадь = 1/2 × (две короткие стороны треугольника [катеты], помноженные друг на друга).



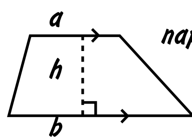
В сущности, площадь *любого* треугольника равна половине площади наименьшего прямоугольника, в который его можно вписать. На рисунке видно, что две серые области равны двум половинам треугольника. Формула записывается так: площадь = 1/2 × основание × перпендикулярная высота.

Любой треугольник $= \frac{1}{2} \times h \times b$

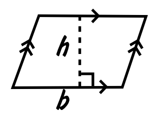


Несмотря на то что этим формулам для треугольников уделяется много внимания на уроках геометрии, вам вряд ли доведется применять их в жизни. А вот еще две более бесполезные формулы (разве что стены и потолки в вашем доме уж очень экзотической формы).

трапеция $= \frac{1}{2}(a + b) \times h$



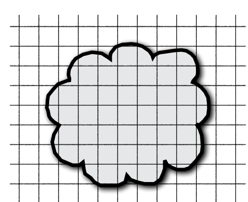
параллелограмм $= h \times b$



Маленькими стрелочками отмечены параллельные линии. Для использования этих формул обязательно нужно знать перпендикулярную основанию высоту *h*.

И наконец, вот как вычислить размер некоей области на карте. Если сторона каждой клетки соответствует 0,1 км, то площадь клетки равна $(0,1)^2 = 0,01$ км^2. Допустим, озеро занимает около 35 клеток, тогда его площадь составит примерно 0,35 км^2.

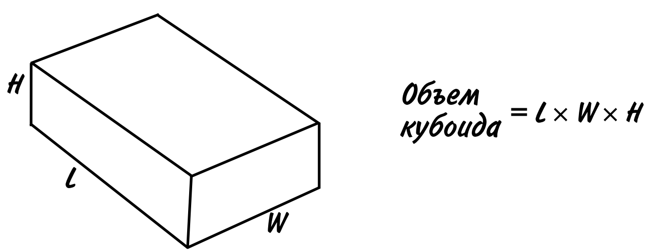
Любая форма — просто сосчитайте клеточки!



Объем кубоида

Длина требует одного измерения, площадь — двух перемноженных измерений, а объем — трех. Проще всего вычислять объемы *кубоидов**, то есть ящиков с прямоугольными стенками. Достаточно перемножить длину, ширину и высоту — и объем получен!

Если вы решите превратить одну из своих спален в огромный аквариум для своего домашнего питомца осьминога, вам будет интересно знать вес того количества воды, которым ее можно заполнить доверху. Сначала нужно рассчитать объем комнаты: при размерах 4 м × 3 м × 2,5 м он будет равен 4 × 3 × × 2,5 = 30 м^3. Как видите, объем измеряется в *м^3*, или *кубических метрах.* Объем 30 м^3 соответствует количеству воды, которое поместится в 30 кубах с размером стороны 1 м. Как мы знаем из подраздела «Метры, литры и граммы», один кубический метр воды весит 1 тонну, значит, ваша наполненная водой спальня будет весить 30 тонн. Что ж, удачи!



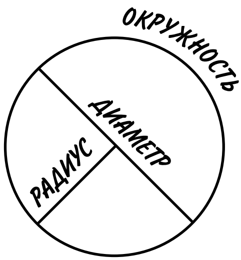
В повседневной жизни, кроме объема кубоида, вам, возможно, еще пригодится умение вычислять объем цилиндра, но для этого сперва следует познакомиться с числом π.

---

* Другое название кубоида — прямоугольный параллелепипед. *Прим. перев.*

Окружность и π

Граница круга называется *окружностью*, отрезок между противоположными точками окружности, проходящий через центр круга, — *диаметром*, а расстояние от центра до окружности — *радиусом*, и все эти величины связаны между собой посредством числа π. Эта греческая буква называется «пи» и обозначает особое число, которое получится в результате деления длины любой окружности на ее диаметр.



$$\frac{\text{окружность}}{\text{диаметр}} = \pi = 3{,}14159\ldots$$

Эта десятичная дробь бесконечна, поэтому нам достаточно запомнить ее как 3,14, или 22/7. Число π нужно для расчета площади круга, а также объемов цилиндра и сферы.

В поисках π

Число π с давних пор занимает людские умы, поскольку его очень сложно точно рассчитать. Древнегреческий математик Архимед начертил близкую к окружности фигуру с 96 миниатюрными сторонами и с ее помощью вычислил, что значение π лежит где-то между $3\frac{10}{71}$ и $3\frac{1}{7}$, то есть получил π с точностью до 0,001.

В XVI веке голландский математик Людольф ван Цейлен использовал фигуру с более чем 32 миллиардами сторон, потратив двадцать лет жизни на поиски первых

35 знаков числа π после запятой. Вероятно, он считал, что дальше этого зайти никому не удастся, но сразу после его смерти Исаак Ньютон и другие ученые обнаружили менее сложные способы получения еще большего количества знаков. В наши дни с помощью компьютеров найдены триллионы десятичных знаков π, но даже это лишь капля в море...

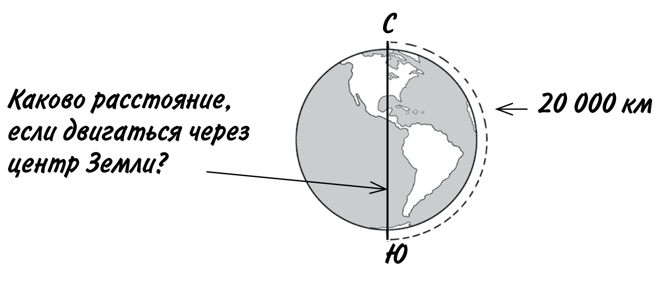
Основные формулы для круга таковы.

диаметр = 2 × радиус (обычно записывается как $d = 2r$)

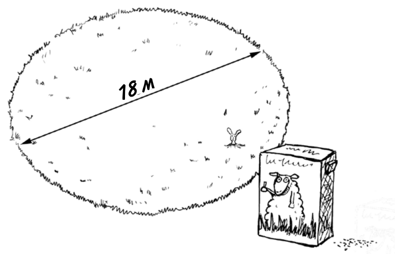
длина окружности = π × диаметр ($c = \pi d$ или $c = 2\pi r$)

площадь круга = πr^2

Помните врезку «Искривление пространства» о кратчайших расстояниях? Если взлететь с Северного полюса и, обогнув Землю, приземлиться на Южном полюсе, расстояние перелета составит 20 000 км. А какой будет длина подземного хода, ведущего с одного полюса на другой через центр Земли?



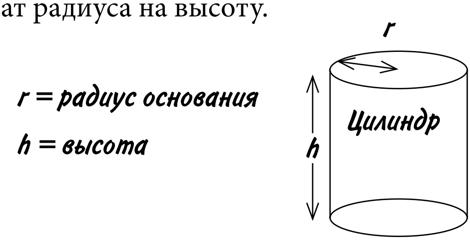
Нам известно, что 20 000 км — это половина пути вокруг Земли, значит, полная длина окружности составит 2 × 20 000 = = 40 000 км. Путь через центр — диаметр d; воспользуемся формулой $c = \pi d$. Мы знаем, что $\pi \times d = 40\,000$. Следовательно, $d = 40\,000 \div \pi = 12\,732$ км.



Давайте перейдем к более насущным вопросам. Допустим, вы решили засеять травой круглый газон шириной 18 м. Одной упаковки семян хватает на 10 м^2. Сколько всего понадобится упаковок? Нам нужно вычислить площадь газона, поэтому воспользуемся формулой *площадь круга* = πr^2. Мы знаем, что ширина газона составляет 18 м; по сути, это его диаметр. Следовательно, $r = 18/2 = 9$ м. Теперь можно рассчитать площадь: $\pi r^2 = \pi \times r \times r = \pi \times 9 \times 9 = \pi \times 81 = 254$ м^2. Поскольку одной упаковки семян хватает на 10 м^2, нам понадобится $254 \div$ $\div\ 10 = 25{,}4$ упаковки.

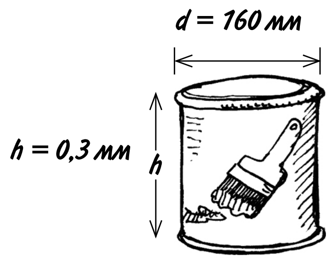
Цилиндр

Основная формула для расчета объема, куда входит число π, относится к цилиндру. Чтобы узнать его объем, нужно умножить площадь его основания (это круг) на высоту — или число π на квадрат радиуса на высоту.



$$\text{Объем цилиндра} = \pi r^2 h$$

Предположим, вы зашли в строительный магазин и увидели огромную банку вашей любимой краски цвета подгоревшей яичницы. Вам стало интересно, а сколько краски она вмещает? Так как радиус измерить сложно, измерим ширину основания — получим диаметр 160 мм. Разделим его пополам и узнаем радиус: $r = 160 \div 2 = 80$ мм. Также измерим высоту — она равна 0,3 м.



При расчете площади или объема всегда используйте одинаковые единицы измерения. У нас радиус в миллиметрах, а высота в метрах, так что будем считать все в метрах, чтобы в итоге получить кубические метры. Преобразуем радиус: 80 мм = 0,08 м. Теперь подставим $r = 0{,}08$ и $h = 0{,}3$ в формулу:

$$\begin{aligned} \text{объем банки} &= \pi \times (0{,}08)^2 \times 0{,}3 \\ &= \pi \times 0{,}0064 \times 0{,}3 \\ &= 0{,}00603\ \text{м}^3 \end{aligned}$$

Заглянув в табличку в подразделе «Метры, литры и граммы», мы видим, что в 1 кубическом метре 1000 литров. Стало быть, наша таинственная банка вмещает 0,00603 × 1000 = = 6,03 л.

Прежде мы выяснили, что нам нужно 6 банок краски объемом 750 мл для стен и еще 2 банки для потолка — всего 8 банок. Сколько это в литрах? 750 мл = 0,75 л, значит, в 8 банках $8 \times 0{,}75 = 6$ л. Отлично, одной огромной банки как раз хватит на все стены и потолок!

Быстрый способ

Если у вас есть рулетка, вы можете рассчитать объем цилиндра, не связываясь с числом π. Для этого нужно измерить его окружность c, диаметр d и высоту h. Длина окружности неявно вводит π в расчеты, и получается изумительно простая формула:

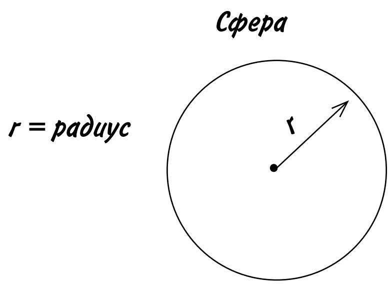
объем цилиндра = dch/4

Сфера

Около 2250 лет тому назад греческий ученый и математик Архимед совершил множество потрясающих открытий. Но лишь одно изображено на его могильной плите: Архимед был первым, кто доказал, что сфера, вписанная в цилиндр, занимает ровно 2/3 его объема. Иначе говоря, если взять банку с бобами в точности такого размера, чтобы в нее входил теннисный мяч, этот мяч вытолкнет наружу

ровно 2/3 бобов. Благодаря Архимеду у нас теперь есть формула объема сферы.

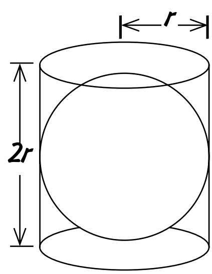
Итак, возьмем сферу и обозначим ее радиус r.



Сначала выведем формулу объема наименьшего цилиндра, в который помещается эта сфера. Возьмем обычную формулу объема цилиндра $\pi r^2 h$, однако учитывая, что высота цилиндра в нашем случае равна $2r$, объем наименьшего цилиндра будет $\pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3$.

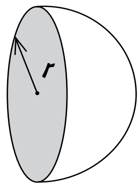
Согласно Архимеду, сфера занимает 2/3 этого объема, следовательно, объем сферы = $2/3 \times 2\pi r^3$. В итоге получается:

$$\text{объем сферы} = 4/3\,\pi r^3$$



Раз уж мы занялись сферой, стоит упомянуть, что если разрезать ее пополам, площадь круга на срезе будет равна πr^2. А площадь поверхности сферы вчетверо больше площади круга, поэтому

площадь поверхности сферы = $4\pi r^2$



Формула объема сферы — еще одна весьма популярная на уроках геометрии тема, совершенно бесполезная в обыденной жизни: скажите на милость, как измерить радиус чего-то вроде футбольного мяча относительно его центра? Гораздо проще измерить его окружность *c* и воспользоваться такой формулой:

объем сферы = $c^3/60$

Если вы ученый-ракетостроитель и вам нужен более точный результат, то вычисляйте так:

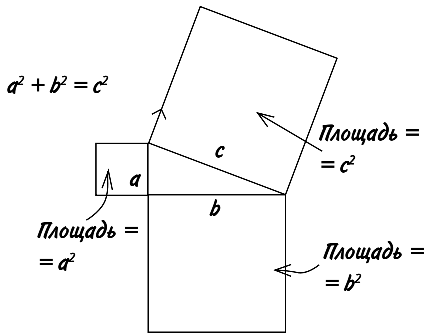
объем сферы = $= c^3/59{,}2176264$

Однако если вы ракетостроитель и учите математику по этой книге, то у нас у всех серьезные проблемы, не так ли?

Пифагор и его теорема

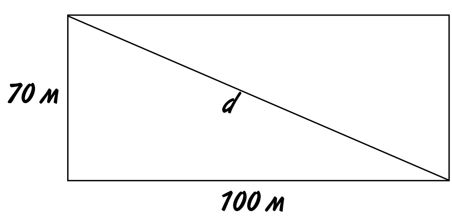
Пифагор жил примерно за 300 лет до Архимеда и прославился в первую очередь своей знаменитой теоремой: в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов его катетов.

Звучит несколько замысловато, но взгляните на рисунок, и вы все поймете. Если взять прямоугольный треугольник и пририсовать к каждой его стороне квадрат, то площади двух меньших квадратов в сумме будут равны площади большого квадрата.



Если вас беспокоит вопрос, зачем кому-то понадобилось лепить к сторонам треугольника квадраты, не волнуйтесь, польза теоремы не в этом. Лучше представьте, что вы по диагонали пересекаете футбольное поле. Если размер поля 100 м × 70 м, какое расстояние вам нужно преодолеть?

Вычисления будут не совсем простыми, поэтому, получив ответ, стоит убедиться, что он правдоподобен! По рисунку видно, что результат должен быть больше 100 м, но меньше 170 м.



Обозначим диагональ буквой d.

Согласно теореме Пифагора, $d^2 = 100^2 + 70^2$
Вычисляем: $d^2 = 10\,000 + 4900 = 14\,900$

Теперь нужно извлечь квадратный корень из 14 900. Иными словами, при умножении какого числа на само себя получится 14 900?

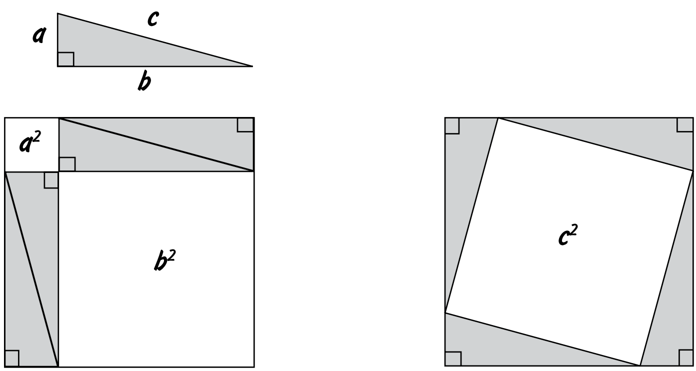
Если у вас нет калькулятора, самый простой способ извлечения корней — догадка и корректировка. Положим, вам кажется, что ответ может равняться 120, тогда считаем: 120 × × 120 = 14 400. Довольно близко, но все же меньше, чем надо. Ладно, попробуем 123 × 123 = 15 129. Выходит больше, чем 14 900. Проверим еще один вариант 122 × 122 = 14 884. Уже совсем рядышком, однако теперь все же посчитаем на калькуляторе.

Введите <14900 √> и получите 122,065.

Значит, искомое расстояние чуть больше 122 м.

За более чем 2500 лет, прошедших со времени доказательства Пифагором этой теоремы, люди придумали не менее 300 других ее доказательств, основанных на сложных алгебраических вычислениях, чертежах и тригонометрии, а также следующий способ, где достаточно лишь посмотреть на несколько фигур:

Докажем, что $a^2 + b^2 = c^2$



Площадь этой фигуры равна сумме площадей четырех треугольников и двух квадратов

Площадь этой фигуры равна сумме площадей четырех треугольников и большого квадрата посередине

Внешние контуры обеих нижних фигур — это квадраты с длиной сторон $(a + b)$. Это означает, что их площади равны и, следовательно, если из квадратов со стороной $(a + b)$ вычесть площади четырех равных треугольников, то сумма площадей двух меньших квадратов будет равна площади большого квадрата. Вот мы и доказали, что $a^2 + b^2 = c^2$!

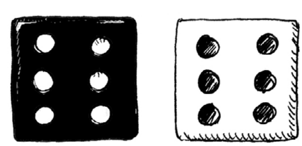
ЧТО ТАКОЕ ВЕРОЯТНОСТЬ

Вероятность наступления какого-либо события измеряется в простых дробях или процентах. Если что-то произойдет наверняка (например, насколько вероятно, что в следующем году пойдет дождь?), вероятность равна 1, или 100%. Если что-то определенно не должно случиться (например, насколько вероятно, что у вас вырастут крылья?), вероятность равна 0, или 0%. Если же событие в равной степени либо произойдет, либо нет (например, каковы шансы, что вы подбросите монетку и выпадет «орел»?), вероятность равна 1/2, или 50%.

Когда событие крайне маловероятно, то проще сказать нечто вроде «вероятность выиграть джекпот в национальной лотерее Британии — примерно один шанс из 14 миллионов». Или, если точнее, это один шанс из 13 983 816, что соответствует дроби 1/13 983 816. Переводим ее в проценты и получаем 0,00000715%.

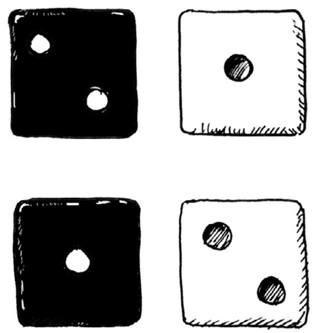
Игральные кости

У обычной игральной кости шесть граней, поэтому шанс выбросить какое-либо конкретное число равен 1/6, или 16,7%. Если же кидать две кости, может выпасть любая из 36 различных комбинаций.



Предположим, вам нужно выбросить 12 очков. Для этого должны выпасть две шестерки, и такой вариант только один среди 36 возможных комбинаций. Поэтому вероятность этого события составляет 1/36 = около 2,8%.

Теперь допустим, что вы хотите получить сумму костей, равную 3. Для этого должно выпасть 2 и 1 либо 1 и 2, то есть всего две подходящие комбинации. Ваши шансы: 2/36 = 1/18 = = около 5,6%.



Чаще всего на костях выпадает сумма 7, поскольку для этого подходят шесть различных комбинаций. Вероятность такого события равна 6/36 = 1/6 = 16,7%.

Дни рождения

А теперь, пожалуй, самое странное утверждение в этой книге: если в результате случайного отбора собрать в одной комнате 30 человек, вероятность того, что двое из них родились в один день, составит 70%!

Чтобы это доказать, сперва выясним, каковы шансы, что ни у кого из 30 собравшихся дни рождения не совпадают (будем считать за совпадение одинаковый день и месяц, без учета года). Сначала в комнате находится один Фред, затем входит Джанет. Какова вероятность, что она родилась не в один день с Фредом? Будем считать, что в году 365 дней, и игнорировать високосные годы, потому что на ответ это практически не повлияет, но существенно усложнит вычисления.

Вероятность того, что Джанет родилась в один день с Фредом, равна 1/365. Следовательно, вероятность, что она не родилась с ним в один день, составит 364/365.

Третьим появляется Барни, и если день рождения Джанет не совпадает с днем рождения Фреда, то вероятность, что Барни не родился в один день с кем-то из них, равна 363/365. А вероятность того, что все трое родились в разные дни, составит:

$$364/365 \times 363/365 = 99{,}18\%$$

Входит Агнесс. Вероятность, что ее день рождения не совпадает с другими, равна 362/365, а вероятность, что все четверо родились в разные дни, составит:

$$364/365 \times 363/365 \times 362/365 = 98{,}37\%$$

Постепенно комната заполняется, и мы перемножаем все больше и больше дробей, вычисляя вероятность несовпадения дат дней рождений. Когда в комнату заходит двадцать третий человек, происходит нечто странное. И наше уравнение приобретает следующий вид:

$$364/365 \times 363/365 \times 362/36 \times \ldots \text{ и так далее} \ldots$$
$$\times\, 345/365 \times 344/365 \times 343/365 = 49{,}27\%$$

То есть шансов, что все родились в разные дни, теперь меньше 50%, а значит, вероятность совпадения дней рождения у двух человек уже немного превышает 50%. Выходит, такое совпадение скорее имеет место быть, чем не имеет!

К тому моменту, как в комнате соберется 30 человек, вероятность, что дни рождения у всех разные, снизится примерно до 30%, а вероятность, что двое из присутствующих родились в один день, составит около 70%. Если вам сложно в это поверить, в следующий раз, когда рядом окажутся 30 человек, поинтересуйтесь, когда они родились. Да, это удивительно, но факт.

Карты и покерные комбинации

Предположим, у вас есть обычная колода из 52 игральных карт и вы хотите знать, какова вероятность выпадения той или иной карточной комбинации. Некоторые из этих вероятностей довольно легко просчитать.

Каковы шансы, что вверху колоды будут две совпадающие по номиналу карты

Если перетасовать колоду и снять верхнюю карту, она может оказаться любой, например четверкой треф. В колоде есть еще три совпадающие с ней по номиналу карты: четверка червей, четверка пик и четверка бубей. Всего остается 51 карта, следовательно, вероятность, что следующая карта совпадает с уже открытой, составит 3/51. Эту дробь можно сократить, разделив числитель и знаменатель на 3, получаем 1/17.

Иначе говоря, если многократно перетасовывать колоду и открывать две верхние карты, две совпадающие карты в среднем будут выпадать один раз из 17.

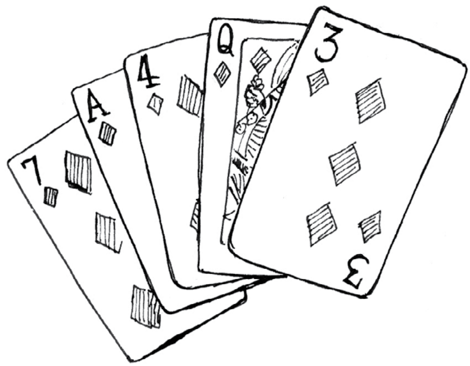
Каковы шансы, что вам сдадут пять карт одной масти

Если вы играете в покер, это, к вашей великой радости, будет флеш. Но насколько это вероятно?

Первое, что нужно понимать: не имеет значения, берете ли вы пять карт сверху перетассованной колоды или сидите за одним столом с другими игроками и получаете карты по одной во время раздачи. Так что представим, что вы просто взяли из колоды пять верхних карт.

Верхняя карта может быть любой. Очевидно, что по масти она совпадает с собой же, то есть вероятность совпадения равна 1 (или 100%). Положим, это семерка бубей. Из оставшейся 51 карты 12 имеют ту же масть, стало быть, шанс, что и следующая карта совпадет по масти, составит 12/51.

Для третьей карты вероятность совпадения равна 11/50, поскольку среди 50 оставшихся карт 11 нужной масти, для четвертой карты — 10/49, а для пятой — 9/48. Чтобы вычислить вероятность совпадения масти для всех пяти карт, перемножим все эти вероятности.



$$1 \times \frac{12}{51} \times \frac{11}{50} \times \frac{10}{49} \times \frac{9}{48} = \frac{11\,880}{5\,997\,600}$$

Округлим последнюю некрасивую дробь: число 11 880 близко к 12 000, а 5 997 600 к 6 000 000. Это даст нам

$$12\,000/6\,000\,000 = 1/500$$

Таким образом, ваш шанс получить подряд 5 карт одной масти примерно равен 1 из 500, или 0,2%.

Комбинации в покере

В покере комбинации ценятся тем выше, чем реже они выпадают. Вот их список в порядке уменьшения выигрыша:

❶ 1 из 650 000: флеш-рояль (туз, король, дама, валет, 10 — все одной масти);

❷ 1 из 72 000: стрит-флеш (пять последовательных карт одной масти, например 7, 8, 9, 10, валет);

❸ 1 из 4000: каре (четыре карты одного номинала);

❹ 1 из 700: фулл-хауз (тройка и пара карт одного номинала);

❺ 1 из 500: флеш (пять карт одной масти);

❻ 1 из 256: стрит (пять последовательных карт как минимум в двух мастях);

❼ 2%: тройка (например, три туза);

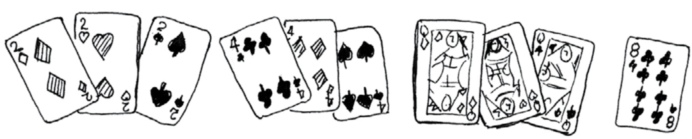
❽ 5%: две пары (например, две восьмерки и две тройки);

❾ 42%: пара (например, две дамы).

Покерный трюк на 10 карт

Как видите, любой фулл-хауз бьет тройку, а тройка бьет две пары. Вот трюк, которому я научился в Дублине у своего коллеги Роба Истэвея, тоже автора книг по математике. Предупреждаю: мы не несем никакой ответственности за то, как вы будете использовать эти сведения.

Вам понадобятся десять карт из колоды: три тройки и любая одиночная карта.



Играть нужно с другом — вы раздаете по пять карт ему и себе. Коварство фокуса в том, что вы с самого начала знаете, кто победит, а кто проиграет!

Секрет исключительно прост. Независимо от того, как перетасованы карты, игрок, которому достанется одиночная карта, проиграет! Если вы привыкли обращаться с картами, вам не составит труда придержать одну карту вверху или внизу колоды и убедиться, что она досталась нужному игроку. Если же вы не уверены в себе, слегка согните уголок одиночной карты, чтобы видеть, кому она досталась, и знать, кто победит.

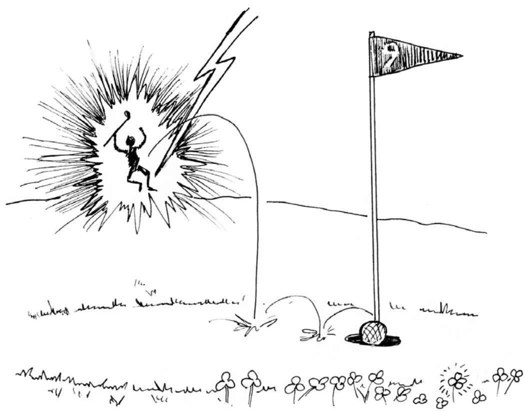
Имеет смысл позволить вашему другу несколько раз выиграть, а затем, когда он утратит бдительность, поднять ставки и отыграться.

Некоторые забавные вероятности

Люди обожают судачить о всяких странных случайностях. Вот их небольшая подборка, но не принимайте ее слишком всерьез!

- Шансы найти четырехлистный клевер: 1 из 10 000, или 0,01%.
- Вероятность, что беременная женщина вынашивает более чем одного ребенка, постепенно возрастает. На сегодняшний день шанс зачать двойню, тройню, а то и больше составляет примерно 3%.
- Если во время того, как вы целитесь в мишень, играя в дартс, кто-то вдруг завяжет вам глаза и несколько раз повернет на месте, вероятность, что вы попадете в мишень вслепую, равна примерно 2%. При этом шанс попасть в яблочко составит 1 из 100 000. Но, пожалуйста, не стоит проверять это на практике.
- Вероятность при игре в гольф забить мяч с одного удара составляет предположительно 1 из 5000.
- Вероятность, что вас поразит молния, примерно 1 из 3 000 000. По любопытному совпадению, такова же вероятность повстречать инопланетянина.
- Вероятность, что в следующем столетии в нашу Землю врежется астероид, составляет 1 из 5000. И если этот огромный гадкий астероид таки сделает свое грязное дело, каковы шансы, что аккурат перед этим вы повесите сушиться белье? Примерно 100%.

? Какова вероятность получить высший балл на экзаменационном тесте, отмечая варианты наобум? Если в тесте 30 вопросов, каждый с четырьмя вариантами ответа, то вероятность составит 1 из 4^{30} = 1 152 921 504 606 846 976. Если же для прохождения теста достаточно угадать не менее 50% ответов, шансы на победу вычислить гораздо сложнее, но это будет примерно 1 шанс из 364. Впрочем, есть и хорошие новости: вероятность ответить неправильно на все вопросы составляет лишь 1 из 5600.



Две обманчивые вероятности

Люди часто заблуждаются, оценивая свои шансы на удачу, а вокруг, увы, полно бессовестных типов, которые этим пользуются, вовлекая доверчивых искателей легкого счастья во всевозможные аферы, а затем облапошивая их. Если вы один из таких прощелыг, вот пара несложных трюков вам на радость. Суть их в том, чтобы сначала убедить жертву, что удача на ее стороне, а затем обчистить до нитки.

Черные и белые карточки

И вот вы сидите за столом с бедным стариной Малькольмом и показываете ему три карточки: одна черная с обеих сторон, другая — белая, а третья с одной стороны черная, а с другой — белая.

Попросите Малькольма перетасовать не глядя карточки под столом, затем вытащить одну карточку и положить ее на стол так, чтобы никто из вас не заметил цвета нижней стороны. Остальные две карточки никто не должен видеть. Пусть верхняя сторона лежащей на столе карточки будет черная.

— Очевидно, это не белая с двух сторон карточка, — говорите вы, — значит, она или черная с белым, или черная с обеих сторон.

Малькольм глубокомысленно кивает в ответ.

— Выходит, что с равными шансами это та или другая карточка. (Малькольм снова кивает.) Спорим на один фунт, что другая сторона черная!

— Нет, спасибо, — отвечает Малькольм. Он что-то подозревает, хотя и не понимает, в чем подвох.

— Ой, да ладно, — подначиваете вы. — Знаешь, давай так: если другая сторона черная, ты платишь мне один фунт, а если белая, я плачу тебе полтора фунта. Годится?

Малькольму это предложение кажется слишком заманчивым, он кладет деньги на стол… и с вероятностью 2 шанса из 3 вы выигрываете. Иными словами, в среднем за три кона игры вы заплатите Малькольму полтора фунта, а он вам два.

А секрет вот в чем: какого бы цвета ни была верхняя сторона карточки, всегда ставьте на то, что другая сторона того же цвета. У двух карточек цвета́ сторон совпадают, и лишь у одной — разные. Поэтому у Малькольма всего один шанс на выигрыш из трех.

Если Малькольм всерьез задумается, он может догадаться, в чем дело, так что пора переходить ко второму трюку.

Трюк с двумя монетами

Этот трюк очень прост, но при этом весьма необычен! Идеально будет провернуть его с Малькольмом, когда он придет вместе со своей подругой Сандрой. Сандра поможет вам облегчить карманы Малькольма; нужно лишь, чтобы она выполняла ваши просьбы и не подсказывала Малькольму.

И что же получается, сделка выгодна для Малькольма? Конечно, нет. На самом деле вы снова должны выиграть с вероятностью 2 из 3. Хитрость в том, что при бросании монет кажется, будто есть три варианта того, как они могут лечь: два орла, две решки или орел и решка. Однако, взяв монеты разных размеров, вы увидите, что вариантов четыре:

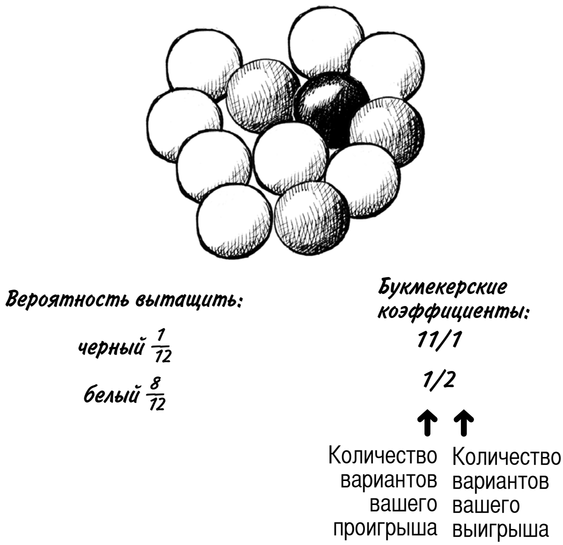
Вы просили Сандру заново бросить монеты, если выпадут две решки, так что этот вариант исключен. Значит, когда дело дойдет до ставок, останется только три варианта. Когда Сандра покажет орла, в двух вариантах вторая монета лежит решкой. Поэтому в двух случаях из трех вы должны выиграть.

Прибыль букмекера

Предположим, перед вами стоит мешок с 12 шариками: один черный, 8 белых и 3 серых. Ваша задача — с закрытыми глазами вынуть один шарик из мешка. Если он черный, вы выиграли, но каковы шансы на победу? Очевидно, 1 из 12, что можно записать как 1/12.

Или же можно сказать, что есть 11 вариантов не вынуть черный шарик против одного варианта выигрыша. Получается коэффициент *против* выигрыша 11 к 1, который букмекеры обычно записывают как 11/1. Так они и рассчитывают ставки.

Букмекер, который не планирует получить прибыль, предложит вам коэффициент 11/1 *против* того, что вам попадется черный шарик. Если вы поставите 1 фунт и проиграете, фунт останется у букмекера. Если вы поставите 1 фунт и выиграете, он вернет ваш 1 фунт плюс еще 11 фунтов выигрыша.

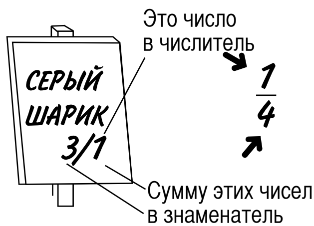


Предположим, вы вынимаете шарики из мешка по одному. Вам известно, что 11 раз вы проиграете, а 1 раз выиграете. Если букмекер каждый раз будет предлагать вам коэффициент 11/1 после того, как вы достанете последний шарик, вы заплатите ему 11 × 1 фунт = 11 фунтов. Он же заплатит вам 1 × × 11 фунтов = 11 фунтов, так что это честный, или чистый, коэффициент.

Вы решаете, что шансы вытащить черный шарик слишком малы, и потому хотите попытаться достать один из 8 белых шариков. Тогда вероятность вашего выигрыша составит 8/12. Букмекер говорит, что шансы против вашего выигрыша 4 к 8, то есть чистый коэффициент равен 4/8, или, после сокращения, 1/2. Если вы поставите 1 фунт и вытащите белый шарик, вы выиграете 1/2 × 1 фунт = 50 пенсов.

Как переводить букмекерские коэффициенты в вероятности

Наш букмекер также предлагает коэффициент 3 к 1 против того, что вы достанете один из серых шариков. Чтобы убедиться, что это чистый коэффициент, нужно преобразовать его в вероятность выбора серого шарика и посмотреть, верна ли она.



Из букмекерского коэффициента следует вероятность 1/4. Поскольку в мешке 3 серых шарика из 12, это дает вероятность 3/12, то есть 1/4. Выходит, это чистый (честный) коэффициент!

А вот хитрый момент. Положим, нам неизвестно, сколько в мешке шариков, мы только знаем, что они белые, серые и черные. Можно определить, насколько букмекер честен, посмотрев на все его коэффициенты, преобразовав их в вероятности и сложив их.

Черный шарик: коэффициент = 11/1, вероятность = 1/12

Белый шарик: коэффициент = 1/2, вероятность = 2/3

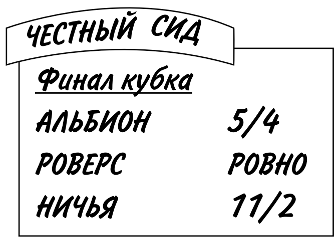
Серый шарик: коэффициент = 3/1, вероятность = 1/4

Если букмекер абсолютно честен, сумма вероятностей даст 1. Можно сложить три простые дроби или взять калькулятор, перевести их в десятичные и уже затем складывать, но в любом случае сумма вероятностей равна 1. Какой благородный букмекер! Жаль, что в реальности таких не существует.

Ставки в спорте (и вероятность того, что Элвис работает в кафетерии)

Что касается ставок в спорте, то здесь не получится столь же легко найти вероятности, как для шариков в мешке. Более того, букмекер не может быть честным в том смысле, о котором мы говорили выше, ведь ему нужно получать прибыль, чтобы платить за свою спортивную машину, массивный золотой браслет и виллу в Португалии.

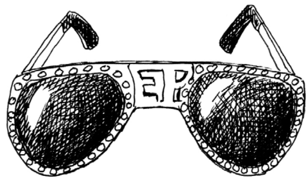
Давайте полюбуемся на Честного Сида и выясним, какую прибыль он надеется получить.



Сперва преобразуем коэффициенты Сида в вероятности: для 5/4 вероятность будет 4/9 или 0,444, «ровно» означает 1/1, то есть вероятность 1/2, или 0,5, а для 11/2 вероятность составит 2/13, или 0,154. Если сложить все десятичные дроби, получится 1,098.

Это говорит о том, что на каждые 100 фунтов, выплачиваемые Сидом, по его ожиданиям должно прийтись 100 фунтов × × 1,098 = 109,80 фунта, то есть его прибыль должна составить 9,80 фунта.

Некоторые букмекеры также принимают ирреальные ставки: к примеру, на то, что Элвиса Пресли найдут живым-здоровым и что он работает в кафетерии. Уж лучше купить лотерейный билет, и хотя шанс сорвать джекпот составляет лишь 1/13 983 816, по сути, это куда более вероятно. Как сказал бы сам Король рок-н-ролла: «Ну что же, раз (из примерно 14 миллионов) это ради денег...»*.



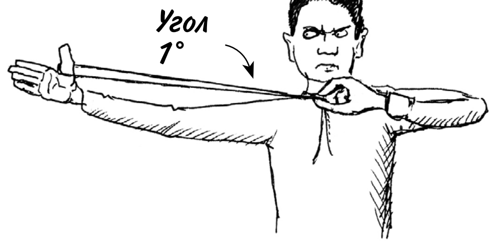
* Строчка из песни «Синие замшевые ботинки», в оригинале Well, it's one for the money. *Прим. перев.*

ПРОДВИНУТАЯ МАТЕМАТИКА

Итак, вы добрались почти до конца книги: поздравляю! Как насчет того, чтобы блеснуть интеллектом и доказать, что вам по зубам и более сложные теоретические штучки? Следующие два раздела посвящены математическим понятиям, которые вам вряд ли пригодятся в обыденной жизни, но с ними интересно в общих чертах ознакомиться, особенно если в школьные годы они являлись вам в кошмарах!

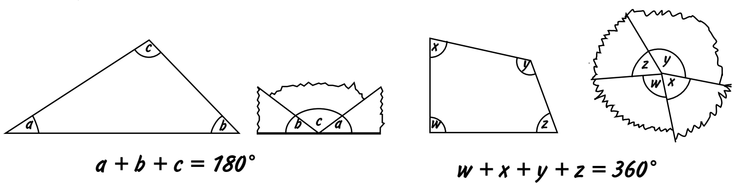
Углы, треугольники и тригонометрия

Угол между двумя пересекающимися линиями измеряют в градусах, обозначая их маленьким символом °. Если хотите посмотреть, какого примерно размера угол в 1°, возьмите длинную нитку, сложите ее пополам, проденьте в петлю большой палец и вытяните руку в сторону. Другой рукой возьмите концы нитки и держите их перед собой так, чтобы нитка была натянута. Угол в месте схождения двух концов и составит около 1°.



Угол между сторонами квадрата равен 90° и называется *прямым*. Если вы сделаете полный поворот вокруг своей оси, вы повернетесь на 360°. Угол в 180° представляет собой прямую линию; а сумма углов любого треугольника всегда будет 180°. Вырежте треугольник из бумаги, оторвите его уголки и, сложив их вместе, получите прямую линию, как показано на рисунке ниже.

Четыре угла любого четырехугольника вместе составляют 360°, так что если их оторвать и сложить, они сойдутся один к одному без зазора.

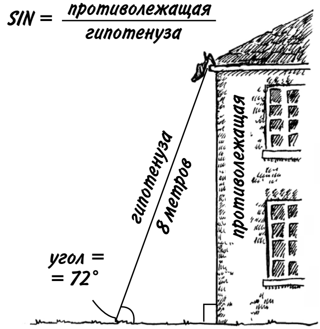


Возможно, у вас есть калькулятор с кучей таинственных кнопок, которыми вы не пользуетесь? Это обидно, учитывая, что вы за них заплатили, так что давайте вкратце рассмотрим, что такое *синус, косинус и тангенс*.

Основная идея состоит в том, что если вы знаете длину только одной (или двух) стороны треугольника и его углы, то, воспользовавшись *тригонометрией,* можете вычислить то, что неизвестно. Проще всего иметь дело с прямоугольными треугольниками, поскольку достаточно знать длину одной из сторон и величину любого угла (помимо прямого), чтобы вычислить его остальные параметры.

Допустим, известна величина одного из углов; если взять сторону, *противолежащую* этому углу, и разделить на самую длинную сторону, то есть *гипотенузу*, получится дробь, которая называется *синусом* угла и обозначается словом *sin*. (Пишется точно так же, как английское sin, то есть «грех», но не спешите радоваться — порок и разврат здесь ни при чем.)

Предположим, вы пытаетесь достать свой любимый ботинок из водосточного желоба (бог знает, как он туда попал, но, сами понимаете, всякое бывает). В вашем распоряжении 8-метровая лестница, стоящая у стены здания.



Лестница, стена и поверхность земли образуют прямоугольный треугольник. Если вы измерили угол между лестницей и землей (он равен 72°), то можете вычислить, на какой высоте находится желоб, чтобы не теряться, отвечая потом на вопросы работников скорой помощи.

Лестница является гипотенузой треугольника, и она равна 8. Высота, которую мы хотим узнать, — это сторона, противолежащая углу в 72°, так что можем составить простое уравнение:

$$\sin 72^\circ = \text{противолежащая сторона}/8$$

Умножив обе части уравнения на 8, получим

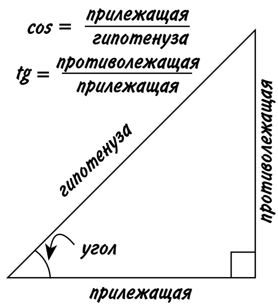
$$\sin 72^\circ \times 8 = \text{противолежащая сторона}$$

Чтобы вычислить синус на калькуляторе, введите <sin 72 => и получите 0,951.

Затем умножим это число на 8 — выйдет 7,608. Это и есть высота от земли до желоба в метрах!

Косинус (cos) и тангенс (tg) — это дроби, представляющие отношения других сторон треугольника друг к другу.

И это практически все, что вам нужно знать о тригонометрии...



Логарифм: это что за чертовщина?

Всякий раз, когда разговор заходит о самых мрачных и зловещих тайнах математики, как правило, вспоминают о логарифмах. На многих это слово навевает кошмары, полные бессмысленных чисел и язвительных учителей. Однако теперь, когда школа позади, не пора ли все же разобраться, что это такое? Не будет ни тестов, ни контрольных, ни летающих губок для вытирания доски — чудовище не сможет вам навредить.

Логарифмы в 1645 году изобрел шотландец Джон Непер, и на протяжении 350 лет (пока не изобрели калькуляторы) они были единственным верным средством для быстрого умножения и деления очень больших чисел. Так в чем же суть логарифмов?

Возьмем весьма простое выражение:

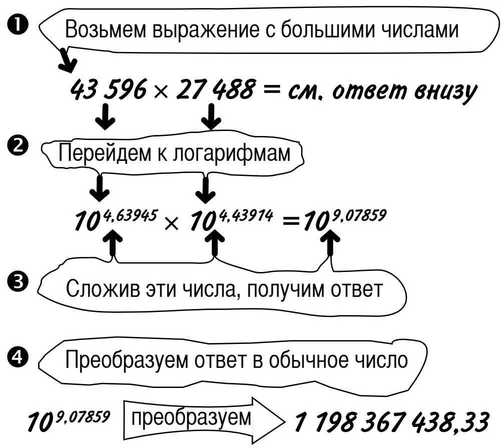
$$1000 \times 100 = 100\,000$$

Иначе его можно записать как $10^3 \times 10^2 = 10^5$ — это абсолютно то же самое, однако вместо того, чтобы перемножать большие числа, мы просто сложили степени: 3 + 2 = 5. Джон Непер понял, что *любое* число можно представить в виде степени числа 10, после чего для умножения или деления чисел достаточно лишь складывать или вычитать их степени.

Но вот незадача: такие степени редко бывают красивыми ровными числами, например $78 = 10^{1,89209}$. Когда степени становятся затейливыми десятичными дробями, их называют *логарифмами*. Поскольку $78 = 10^{1,89209}$, можно сказать, что логарифм от 78 равен 1,89209.

Перевод чисел в логарифмы — крайне утомительный процесс, но соратник Непера по имени Генри Бригс облечил его, разработав для подобных преобразований так называемые логарифмические таблицы. Некоторые из таблиц позволяли получить лишь три знака после запятой: $78 = 10^{1,892}$. А по наиболее точным таблицам Бригса выходило, что $78 = 10^{1,89209460269048}$. Соответственно, чем точнее логарифмы, тем точнее результат вычислений. (Исаак Ньютон, изучая движения звезд и планет, дошел в вычислении логарифма до 50 знаков после запятой, но его увлеченность граничила с манией.)

Что ж, опробуем логарифмы в деле.



Точный ответ = 1 198 366 848. Погрешность при вычислении с помощью логарифмов составила примерно 1 миллионную!

Быстрый способ вычисления корней

Вы можете находить квадратные и кубические корни путем деления логарифма на 2 и 3.

Будь вы Исааком Ньютоном, которому нужно узнать кубический корень из 591, вы бы сначала нашли по логарифмическим таблицам, что $591 = 10^{2,771587}$. Затем посчитали бы $2,771587 \div 3 = 0,923862$. И наконец, переведя $10^{0,923862}$ в обычное число, получили бы ответ: 8,391942. (Если перемножить $8,391942 \times 8,391942 \times 8,391942$, действительно получится 591.)

Мало того что этот ответ точен — логарифмы позволили сэкономить часы, которые бы ушли на мозгодробительные вычисления!

ГЛОССАРИЙ

Существует много слов для обозначения разных математических понятий, однако эта книга и так достаточно информативна. Поэтому я старался, насколько возможно, обходиться без научной терминологии. Однако все же предоставляю краткий справочник по основным математическим терминам.

E — на экране калькулятора обозначает «экспоненциальную запись», когда результат умножается на степень числа 10.

e — особенное число, равное 2,71828183. Применяется при вычислении прироста чего-либо, например урожая. Также используется при расчете банковских процентных ставок.

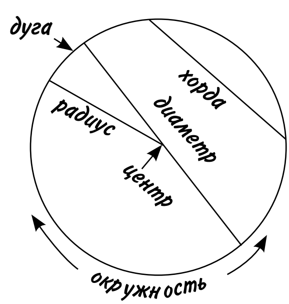
Градус — единица измерения углов, обозначается символом °. Также в градусах (Кельвина, Цельсия и Фаренгейта) измеряют температуру.

Делимое — при делении это число, которое делят. В выражении 35 ÷ 5 = 7 число 35 является делимым.

Делитель — при делении это число, на которое делят. В выражении 48 ÷ 4 = 12 число 4 является делителем.

Десятичные дроби — числа с десятичной запятой, такие как 0,667 или 365,26.

Диаметр — линия, соединяющая две точки окружности и проходящая через ее центр.

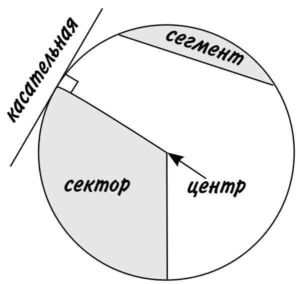


Дуга — участок окружности. Может быть разной величины, от маленького кусочка до почти полной окружности.

Знаменатель — нижнее число в простой дроби. Например, в дроби 4/7 число 7 — это знаменатель.

Иррациональное число — десятичная дробь с бесконечным количеством знаков после запятой, которые не повторяются предсказуемым образом.

Касательная — прямая линия, которая соприкасается с окружностью в одной точке. Если провести к этой точке радиус, он составит с касательной угол в 90°.



Квадрат и квадратный корень. *Возведение в квадрат* — это умножение числа на само себя, например 7 × 7 = 49. Действие, обратное этому, называется *извлечением квадратного корня*, например квадратный корень из 49 равен 7.

Квадратное уравнение — алгебраическое уравнение, в которое входит неизвестное значение в квадрате, например x^2. Обычно у квадратного уравнения есть два разных решения.

Коэффициент — число, на которое умножается другое число (или содержимое скобок). Например, в выражении $3(2x + 7)$ число 3 — коэффициент при выражении в скобках, а 2 — коэффициент при x.

Медиана — при наличии упорядоченного набора значений медианой будет значение, стоящее посередине совокупности значений.

Множители — целые числа, на которые заданное число делится без остатка. Множители числа 60: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 и 30. **Простые множители** — простые числа, которые нужно перемножить, чтобы получить исходное составное число. Простые множители числа 60: 2 × 2 × 3 × 5 = 60.

Мода — при наличии набора значений модой будет то значение, которое встречается в этом наборе чаще всего.

Неравносторонний треугольник — треугольник, у которого все стороны разной длины.

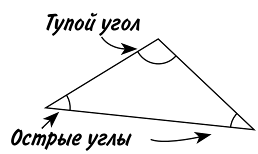
Нечестный официант (см. подраздел «Загадка про нечестного официанта») — забудьте о 30 фунтах! В итоге женщины заплатили 27 фунтов, 25 из которых попали в кассу, а 2 остались у официанта.

Ноль — пожалуй, самое сложное из чисел, ведь некоторые люди даже не уверены, что оно является числом. Если считать его числом, оно порождает множество проблем, особенно при попытке на него делить. А если это не число, то как оно может получиться из других чисел, например 2 – 2 = 0?

Округление — замена неудобного числа более простым числом, близким к нему по значению.

Окружность — замкнутая линия, граница круга.

Острый угол — угол, величина которого меньше 90° (то есть меньше прямого угла).



Перпендикуляр — линия, составляющая прямой угол с другой линией или поверхностью.

Пи (или π) — 3,14159265… Название числа, которое получается в результате деления длины окружности на ее диаметр.

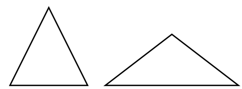
Произведение — результат перемножения двух или более чисел. Произведением чисел 4, 7 и 8 будет 4 × 7 × 8 = 224.

Простая дробь — дробь, где одно число записывается над другим, например 2/3, в отличие от десятичных дробей, таких как 0,618.

Простое число — число, которое делится без остатка лишь на само себя и на 1.

Прямой угол — угол в 90°, например любой угол квадрата. На рисунках обычно помечается квадратиком.

Равнобедренный треугольник — треугольник, две стороны которого имеют одинаковую длину, и, соответственно, два угла тоже равны.



Равносторонний треугольник — треугольник с одинаковой длиной всех сторон. Все углы такого треугольника равны 60°.

Радиус — расстояние от любой точки окружности до ее центра. Радиус всегда вдвое меньше диаметра.

Разложение на множители в алгебре — преобразование сложного алгебраического выражения в виде произведения более простых выражений. Простейший способ разложения — вынесение множителя за скобки. Например, в выражении $6x^2 + 9x$ оба слагаемых делятся на $3x$, поэтому его можно разложить на множители путем вынесения множителя за скобки: $3x(2x + 3)$.

Раскрытие скобок в алгебре — избавление от скобок путем умножения коэффициента перед скобками на их содержимое. Если раскрыть скобки в выражении $4y(3 - 2y)$, получится $12y - 8y^2$.

Рациональная дробь — бесконечная десятичная дробь, в которой цифры после запятой периодически повторяются.

Сегмент — конечный интервал на прямой линии или фигура, которая получится при отсечении части круга прямой линией (см. рис. выше).

Сектор — фигура, похожая на кусок пиццы (см. рис. выше).

Сокращение дробей — деление числителя и знаменателя простой дроби на одно и то же число.

Составное число — любое число, не являющееся простым. Иначе говоря, число, которое делится не только на 1 и на само себя, но и на другие числа.

Среднее арифметическое — разновидность среднего значения, вычисляемая путем сложения ряда чисел и деления их суммы на количество этих чисел.

Степень — количество раз умножения числа на само себя. 4^5 — это четыре в пятой степени = $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1024$.

Сумма — сумма ряда чисел как результат их сложения друг с другом.

Транспортир — инструмент для измерения углов; размером и формой обычно напоминает половинку компакт-диска, где вдоль круглого края отмечены числа. Еще транспортиром удобно соскабливать лед с ветрового стекла машины.

Тупой угол — угол, который больше 90°, но меньше 180°. Тупоугольным называют треугольник, один из углов которого тупой.

Угольник — треугольный инструмент для черчения. Обычно либо с одним прямым углом и двумя углами по 45°, либо с одним прямым углом, двумя углами в 30° и 60°. Судя по всему, 90% всех угольников покупают в подарок детям среднего школьного возраста их благонамеренные тетушки.

Упрощение — действия, которые совершают со сложными алгебраическими выражениями, чтобы сделать их проще. Например, выражение $3(2x - 4) + 5(1 - x)$ можно упростить, если сначала раскрыть скобки $6x - 12 + 5 - 5x$, а затем сложить и вычесть подобные члены выражения, получится $x - 7$.

Факториал (числа n) — это произведение всех целых чисел от 1 до n. Обозначается символом «!». Например, $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$. На скачках, в которых участвуют 4 лошади, это число соответствует количеству вариантов их финиширования. К сожалению, выяснить, какая лошадь придет первой, факториал не поможет.

Хорда — прямая линия, которая пересекает окружность, не проходя через ее центр (см. рис. выше).

Частное — результат операции деления. Например, 14 ÷ 2 = 7, здесь 7 частное.

Четырехугольник — любая фигура с четырьмя прямыми сторонами.

Числитель — верхнее число в простой дроби.

Эллипс — фигура, похожая на окружность, но с двумя центрами, называемыми *фокусами.* Чем дальше они отстоят друг от друга, тем более вытянутым будет эллипс. Планеты вращаются вокруг Солнца по эллиптическим орбитам, однако орбита Земли очень близка к круговой.

ЧТД

Эти три буквы обычно пишут в конце математических доказательств. Они являются сокращением от фразы «что и требовалось доказать». Это удобный способ заявить: «Вот видите? Я доказал, что это работает».

Надеюсь, я доказал вам, что математика работает, и объяснил, как взаимосвязаны ее разные области. Осталось лишь пожелать вам удачи при следующей встрече с числами! Как выразился мой приятель Блейки: «Бо́льшую часть жизни я не понимал, что к чему в математике, а теперь не понимаю, как это можно было не понять».

И на прощание еще один забавный математический фокус.

❶ Выберите любое четырехзначное число, чтобы все его цифры были разными. Хороший способ это сделать — взять девять игральных карт, от туза (это будет 1) до 9, перетасовать и вытянуть четыре случайные карты. Предположим, число будет 4728.

❷ Переставьте цифры, расположив их задом наперед: 8274. Вычтите меньшее число из большего: 8274 – 4728 = 3546.

❸ При сложении отдельных цифр результата всегда будет 18: 3 + 5 + 4 + 6 = 18.

Хотите знать, в чем секрет? Полагаю, разобраться в этом поможет алгебра, однако есть объяснение получше — это магия.

ОТ АВТОРА

Спасибо замечательным сотрудникам издательства Michael O'Mara, благодаря которым эта книга увидела свет, а также Эндрю Пиндеру за рисунки, Ричарду Коллинзу за корректуру и в особенности редактору Керри Чеппл — без ее участия вам не было бы так интересно читать эту книгу, а мне — ее писать.

Научно-популярное издание

Поскитт Кьяртан

Математика для взрослых
Лайфхаки для повседневных вычислений

Главный редактор *Артем Степанов*
Ответственный редактор *Наталья Шульпина*
Арт-директор *Алексей Богомолов*
Литературный редактор *Татьяна Сковородникова*
Дизайн переплета *Сергей Хозин*
Верстка *Лариса Чернокозинская*
Корректоры *Екатерина Лебедева*, *Елена Попова*