

А.Х. Шахмейстер

ПОСТРОЕНИЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ. ПАРАМЕТРЫ

ЧАСТЬ 2. НЕЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ И УРАВНЕНИЯ
ЧАСТЬ 3. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ
И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ



Для тех,
кто
хочет
учиться

А. Х. Шахмейстер

Построение и преобразования графиков. Параметры

Часть 2. Нелинейные функции и уравнения

Часть 3. Графическое решение уравнений
и систем уравнений с параметром

ПОСОБИЕ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ,
АБИТУРИЕНТОВ И УЧИТЕЛЕЙ



С.-Петербург
Москва
2016

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6
Ш 32

Редактор:

Кандидат пед. наук, доцент кафедры
математики МИОО А. В. Семенов.

Рекомендовано

Московским институтом открытого образования (МИОО)
и Московским центром непрерывного математического
образования (МЦНМО) в качестве пособия для школьников,
абитуриентов и преподавателей.

Шахмейстер А. Х.

Ш 32 Построение и преобразования графиков. Параметры.
Часть 2. Нелинейные функции и уравнения. Часть 3. Графическое
решение уравнений и систем уравнений с параметром /
А. Х. Шахмейстер — СПб.: «Петроглиф» : «Виктория плюс» :
М.: Издательство МЦНМО, 2016. — 392 с.: илл. —
ISBN 978-5-98712-265-5, ISBN 978-5-91673-158-3,
ISBN 978-5-4439-0348-4.

Данное пособие предназначено для углубленного изучения школь-
ного курса математики, содержит большое количество разноуровневого
тренировочного материала. В книге представлена программа для про-
ведения элективных курсов в профильных и предпрофильных классах.
Пособие адресовано широкому кругу учащихся, абитуриентов, студентов
педагогических вузов, учителей.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6

ISBN 978-5-98712-265-5 («Петроглиф»)
ISBN 978-5-91673-158-3 («Виктория плюс»)
ISBN 978-5-4439-0348-4 (МЦНМО)

© Шахмейстер А. Х., 2016
© Дольник Е. В., обложка, 2016
© ООО «Петроглиф», 2016

*Посвящается памяти Заслуженных
учителей России:*

*Бориса Германовича Зива
Иосифа Яковлевича Веребейчика
Арона Рувимовича Майзелиса
Таисии Ивановны Курсиш
Владимира Леонидовича Ильина*

Предисловие

Предлагаемая серия книг адресована широкому кругу учащихся средних школ, классов и школ с углубленным изучением математики, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

Книги можно использовать как самостоятельные учебные пособия (самоучители), как задачки по данной теме и как сборники дидактических материалов. Каждая книга снабжена программой элективного курса.

Для учащихся можно предложить следующую схему работы: прочитав вступление и рассмотрев примеры решения, самостоятельно решать тренировочные работы, затем посмотреть решения и, осмыслив их, попробовать решить проверочные работы, проверяя их решения по книге и т.д.

Книги полностью подходят для самостоятельного овладения той или иной темой и рассчитаны на последовательное обучение от начального уровня до уровня, необходимого абитуриентам.

Для учителей эти книги предоставляют широкий выбор приемов и методов работы:

Это могут быть задания учащимся для самостоятельной работы с последующим контролем учителя.

Возможно использование книги как задачника для работы в классе и для домашних заданий.

Подбор материала позволяет существенно дифференцировать уровень требований к учащимся при проведении контрольных и зачетных работ.

Уровень сложности и объем материала в книгах серии, безусловно, избыточен, и учитель должен сам выбирать сложность и объем материала в соответствии с возможностями учащихся и задачами, стоящими перед ними.

А. Х. Шахмейстер

Предисловие редактора

Перед вами уникальная книга «Построение и преобразования графиков. Параметры (Часть 2. Нелинейные функции и уравнения. Часть 3. Графическое решение уравнений и систем уравнений с параметром)» серии «Математика. Элективные курсы» по школьному курсу для тех, кто хочет учиться и научиться. В действительности это удивительная энциклопедия различных методов решения задач, кладовая педагогического и методического опыта преподавания сложных тем школьного курса математики. Это настоящий самоучитель, в котором с «разных позиций» рассматриваются основные идеи, связанные с исследованием графических способов решения уравнений и систем уравнений с параметром. Большое количество разнообразных примеров, уравнений, графиков позволит учащемуся «прочувствовать», графически образно представить и «увидеть» их естественное применение.

Книга адресована широкому кругу читателей:

- интересующемуся ученику обычного класса;
- ученику профильного или специализированного класса;
- студенту, изучающему высшую математику;
- учителю, преподающему школьный курс математики.

Ценность книги заключается в том, что с рассмотренными заданиями приходит понимание трудных для восприятия математических понятий, изучаемых в школе. Многие факты и идеи, заложенные в систему примеров, тренировочных и самостоятельных заданий, безусловно, могут быть использованы для подготовки к экзаменам, творческим работам и олимпиадам.

Желательно, чтобы подготовительная работа к изучению этой книги начиналась с изучения книги «Построение и преобразование графиков. Параметры» Часть I. Линейные функции и уравнения, и знакомством с книгами «Уравнения и неравенства с параметрами»; «Задачи с параметрами на экзаменах» этой серии уже в 8, 9 классе.

Планомерная работа с материалами книг этой серии вместе с материалами учебных методических комплектов дает наибольший эффект понимания и усвоения содержания школьного курса математики.

А. В. Семенов

Программа элективного курса для учащихся 8-9 классов (26–38 уроков)

№№ уроков	Название темы В скобках указаны номера заданий
1–4 (+3)	Квадратичная функция (стр. 7 – 30) Построение графиков квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) методом сечения Упражнения 1 Упражнения 2
5–7 (+2)	Практикум 1 (стр. 31 – 72) Тренировочная работа 1
8–13 (+2)	Метод преобразований (стр. 73 – 119) Построение графика функции $y = f(x + b)$ Графики основных элементарных функций Практикум 2 (частично) Построение графика функции $y = f(x) + C$ Практикум 3 (частично) Преобразование графиков с использованием различных видов симметрии Практикум 4 (частично)
14–21 (+3)	Построение графика функции $y = Af(x)$ ($A > 0$) (стр. 120 – 184) Практикум 5 Построение графика функции $y = f(kx)$ ($k > 0$) Практикум 6 Преобразование графиков вида $y = f(x + b)$, $y = f(x + b)$ Практикум 7 Самостоятельные работы 1–5 (частично) Тренировочная работа 2 (частично) Домашняя тренировочная работа (вариант II)
22–26 (+2)	Графическое решение уравнений и систем с параметром (стр. 185 – 219) Практикум 9 (2, 4, 5, 8) Тренировочная работа 3 (2, 4, 7, 8, 9) Самостоятельная работа 7 (варианты: I, II, V, VI)

Программа элективного курса для учащихся 10-11 классов (31 урок)

№№ уроков	Название темы В скобках указаны номера заданий
1–6	Квадратичная функция (стр. 7 – 50) Построение графиков квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) методом сечения Упражнения 1–2 (частично) Практикум 1 (3, 8, 9, 10) Тренировочная работа 1 (варианты: 1, 3, 4)
7–12	Метод преобразований (стр. 73 – 119) Графики основных элементарных функций Практикум 2 (3, 6, 7) Построение графика функции $y = f(x) + C$ Практикум 3 (3, 4, 6, 8) Преобразование графиков с использованием различных видов симметрии Практикум 4 (1, 2, 3)
13–15	Построение графика функции $y = Af(x)$ ($A > 0$) (стр. 120 – 184) Практикум 5 (частично) Построение графика функции $y = f(kx)$ ($k > 0$) Практикум 6 (1, 3, 4)
16–20	Преобразование графиков (стр. 120 – 184) вида $y = f(x + b)$, $y = f(x + b)$ Практикум 7 (4, 5) Самостоятельные работы 1–5 (частично) Тренировочная работа 2 (в. 1 (1, 3, 5), в. 2 (2, 3, 4)) Домашняя тренировочная работа (вариант I)
21–25	Графическое решение уравнений и систем с параметром (стр. 185 – 219) Практикум 9 (2, 4, 5,) Тренировочная работа 3 (2, 4, 7, 8, 12) Самостоятельная работа 7 (варианты: I, II, V, VI)
26–31	Графическое решение уравнений и систем с параметром (стр. 220 – 308) Практикум 10 (1, 4, 5) Тренировочная работа 4 (вариант 1) Самостоятельная работа 8 (частично) Практикум 11 Практикум 12 (2, 4, 5) Домашняя творческая работа-исследование Итоговая самостоятельная работа

1

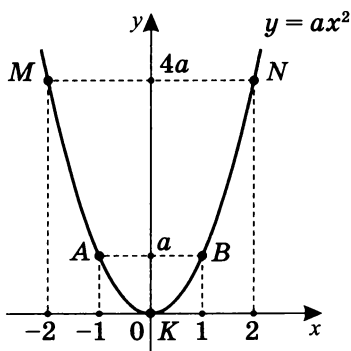
Квадратичная функция

Построение графиков квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) методом сечения

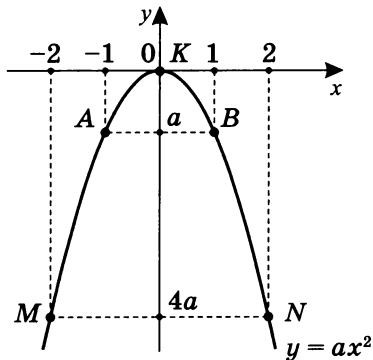
Определение. Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек плоскости с координатами $(x_0; y_0)$, для которых справедливо равенство $f(x_0) = y_0$, т. е. $\Gamma(y = f(x)) = \{(x_0; y_0) | y_0 = f(x_0)\}$, где $\Gamma(y = f(x))$ — обозначение графика функции $y = f(x)$.

Предполагается, что читатель уже знает, как строить график $y = ax^2$ по точкам. График выглядит так:

$$a > 0$$



$$a < 0$$



x	y	Координаты точек
0	0	$K(0; 0)$
1	a	$B(1; a)$
-1	a	$A(-1; a)$
2	$4a$	$N(2; 4a)$
-2	$4a$	$M(-2; 4a)$

Примечание. Предполагается, что по прочтении каждого параграфа читатель будет *самостоятельно на клетчатой бумаге* строить графики, повторяя рассуждения. Поэтому на координатной плоскости мы не будем показывать клетку, чтобы не загромождать графики.

Отметим, что график функции $y = ax^2$ симметричен относительно оси Oy , т. е. если перегнуть эскиз графика по оси Oy , то точки M и N , A и B совпадут. При этом точка K , принадлежащая оси симметрии, останется неподвижной.

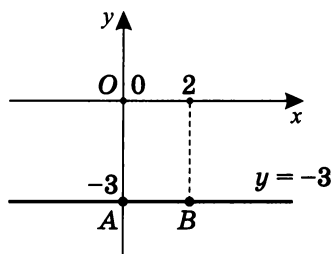
Рассмотрим функцию $y = 2x^2 - 4x - 3$.

Построим график этой функции методом **сечения**, т. е. используем пересечение графика данной функции с прямой, параллельной оси Ox . В данном случае — это прямая $y = -3$, где -3 — значение свободного (от неизвестного x) члена квадратичной функции. Здесь $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Для этого решим систему уравнений $\begin{cases} y = -3 \\ y = 2x^2 - 4x - 3 \end{cases}$,
получим $2x^2 - 4x = 0$.

Решим это уравнение: $2x(x - 2) = 0$, тогда $\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

С графических позиций это значит, что при пересечении графика функции $y = 2x^2 - 4x - 3$ прямой $y = -3$ получили две точки пересечения: $A(0; -3)$ и $B(2; -3)$.



Так как интуитивно понятно, что график квадратичной функции в общем виде симметричен относительно прямой, параллельной оси ординат Oy (позже это будет доказано), то абсцисса точки, относительно которой точка A симметрична точке B , есть среднее арифметическое абсцисс этих точек, т. е. $x_0 = \frac{0+2}{2} = 1$.

Значит $x = x_0$ (точнее, $x = 1$) есть уравнение прямой, являющейся осью симметрии графика данной функции.

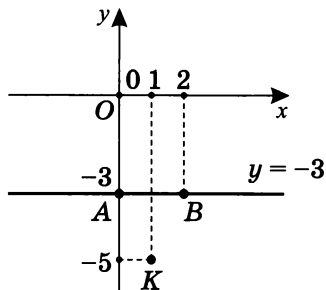
Найдем значение

$$y_0 = 2 \cdot x_0^2 - 4x_0 - 3.$$

Так как $x_0 = 1$, то

$$y_0 = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 3 = -5, \text{ и точка}$$

$K(1; -5)$ называется вершиной графика данной квадратичной функции.



В принципе трех точек на графике функции достаточно, чтобы однозначно «закрепить», определить график квадратичной функции. Проверим, так ли это. Для квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, зная принадлежность к ее графику точек $A(0; -3)$, $B(2; -3)$ и $K(1; -5)$, найдем значение коэффициентов a , b и c . Если они совпадут с исходными $a = 2$, $b = -4$ и $c = -3$, то данное утверждение верно.

При желании это утверждение можно доказать в общем виде, полагая, что $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ и $C(x_3; y_3)$ принадлежат $\Gamma(y = ax^2 + bx + c)$.

$$A(0; -3) \in \Gamma(y = f(x)); \quad a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -3;$$

$$B(2; -3) \in \Gamma(y = f(x)); \quad a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = -3;$$

$$K(1; -5) \in \Gamma(y = f(x)); \quad a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = -5.$$

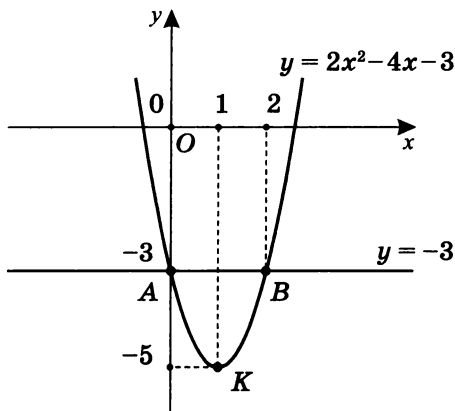
Получили систему линейных уравнений. Решим эту систему.

$$\begin{cases} c = -3 \\ 4a + 2b + c = -3; \\ a + b + c = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} c = -3 \\ 4a + 2b = 0; \\ a + b = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} c = -3 \\ 2a = -b \\ a + (-2a) = -2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} c = -3 \\ b = -2a; \\ a = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} c = -3 \\ b = -4, \\ a = 2 \end{cases},$$

т. е. $y = 2x^2 - 4x - 3$, что и требовалось доказать.

Плавно соединим точки A , B и K . Продолжим кривую за пересечение с осью абсцисс. Получим график $y = 2x^2 - 4x - 3$.

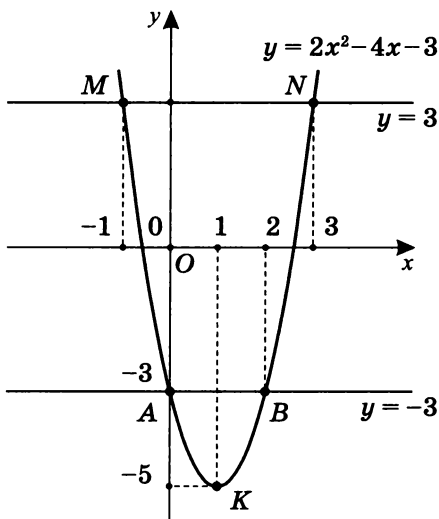


Дополнение (при первом знакомстве можно пропустить). Если необходимо более точное построение, можно провести сечение, например, прямыми $x = 3$ и $x = -1$. Главное, чтобы они были симметричны прямой $x = x_0 = 1$, т.е. оси симметрии графика квадратичной функции $y = 2x^2 - 4x - 3$. Тогда ординаты их должны быть равными.

Действительно, $f(3) = 2 \cdot (3)^2 - 4 \cdot 3 - 3 = 3$;

$$f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) - 3 = 3;$$

$N(3; 3)$ и $M(-1; 3)$,
т.е. можно было сразу
пересечь прямой $y = 3$.
Получили бы те же 2 точки
 $M(-1; 3)$ и $N(3; 3)$.
Значит, можно было бы
сразу для уточнения
графика пересечь график
еще одной прямой,
параллельной оси абсцисс,
но нет гарантии в общем
случае, что полученные при
этом координаты точек
пересечения будут
целочисленными.



Примечания. 1. Рассмотрение секущих прямых, параллельных оси симметрии, с целочисленными абсциссами связано с желанием получить уравнение прямой сечения, параллельной оси Ox с целочисленными ординатами, т.е. $y = 3$. Тогда точки пересечения будут с целыми координатами, в противном случае, возможно, что и нет.

2. **Определение.** График функции $y = f(x)$ называется симметричным относительно прямой $x = x_0$, если для любого $x \in D(f)$ существует x_0 , такое что выполняется равенство $f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$.

Докажем, что график $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) симметричен относительно прямой $x = x_0$, и найдем значение x_0 .

$$\begin{aligned} f(x_0 + x) &= a(x_0 + x)^2 + b(x_0 + x) + c = \\ &= \underline{ax_0^2} + 2ax_0x + \underline{ax^2} + \underline{bx_0} + \underline{bx} + c; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_0 - x) &= a(x_0 - x)^2 + b(x_0 - x) + c = \\ &= \underline{ax_0^2} - 2ax_0x + \underline{ax^2} + \underline{bx_0} - \underline{bx} + c. \end{aligned}$$

При $f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$ подобные члены этого уравнения взаимно уничтожаются, в результате получим уравнение $4ax_0x + 2bx = 0$; $2x(2ax_0 + b) = 0$.

Тогда либо $2x = 0$, либо $2ax_0 + b = 0$.

- а) Пусть $2x = 0$. Так как по определению симметричности равенство должно выполняться для любых x , то вариант, при котором $x = 0$, не подходит.

- б) Пусть $2ax_0 + b = 0$.

Тогда при любых значениях x $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

Итак, доказано существование оси симметрии $x = x_0$, где для графика функции $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

Если $x_0 = 0$, то $b = 0$, и функция будет иметь вид $y = ax^2 + c$ — ее график симметричен оси ординат.

Отметим, что при $x_0 = 0$ равенство $f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$ обращается в $f(-x) = f(x)$, а это по сути есть определение четности функции, график которой всегда симметричен относительно оси Oy ¹.

Покажем на примерах, как можно строить графики квадратичных функций методом сечения.

1. Построим график функции $y = 4x - x^2$.

Так как $c = 0$, то прямая сечения $y = 0$. Значит, ось абсцисс и есть прямая сечения, т. е.

$$4x - x^2 = 0; \quad x(4 - x) = 0; \quad \begin{cases} x = 0 & A(0; 0) \\ x = 4 & B(4; 0) \end{cases}.$$

$$x_0 = \frac{0+4}{2} = 2; \quad y_0 = 4x_0 - x_0^2; \quad \text{т. е. } y_0 = 4 \cdot 2 - 2^2 = 4.$$

Значит, точка $K(2; 4)$ — вершина параболы.

По трем точкам A , B и K построим параболу.

Для уточнения можно вычислить:

$$y(1) = 4 \cdot 1 - 1^2 = 3,$$

$$\text{т. е. } M(1; 3) \in \Gamma(y = 4x - x^2);$$

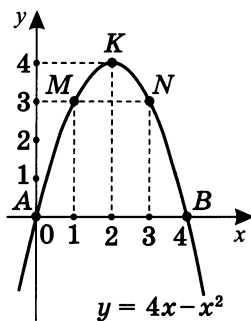
$$y(3) = 4 \cdot 3 - 3^2 = 3,$$

$$\text{т. е. } N(3; 3) \in \Gamma(y = 4x - x^2).$$

Отметим, что $S_{x=2}(M) = N$,

т. е. точки M и N симметричны относительно прямой $x = 2$:

$$f(2 + 1) = f(2 - 1).$$



2. Построим график функции $y = x^2 - 4x + 4$.

Так как $c = 4$, то прямая сечения $y = 4$, т. е.

$$x^2 - 4x + 4 = 4; \quad x^2 - 4x = 0; \quad \begin{cases} x = 0 & A(0; 4) \\ x = 4 & B(4; 4) \end{cases}.$$

$x_0 = \frac{0+4}{2} = 2$, $y_0 = 2^2 - 4 \cdot 2 + 4 = 0$, значит $K(2; 0)$ — вершина параболы.

¹ Более подробно см.: Шахмейстер А. Х. Введение в математический анализ. СПб.; М.: Петроглиф, 2011, 2015. С. 330–336.

По трем точкам A , B и K построим параболу.

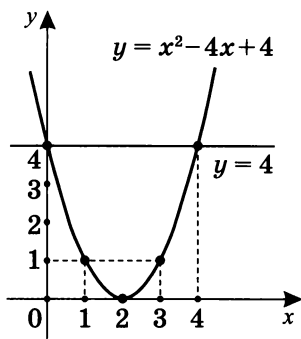
График $y = x^2 - 4x + 4$ должен быть симметричен относительно прямой $x = 2$.

Проверим, так ли это.

$$f(2-1) = f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 4 = 1;$$

$$f(2+1) = f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 4 = 1.$$

Значит $f(2-1) = f(2+1)$ — удовлетворяет определению симметричности графика $y = x^2 - 4x + 4$ относительно прямой $x = 2$. В общем виде это было доказано относительно $x_0 = -\frac{b}{2a}$ (см. с. 11). Здесь $x_0 = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2$, значит $f(2-x) = f(2+x)$ для любого x .



3. Построим график функции $y = x^2 - 3x + 5$.

Так как $c = 5$, то прямая сечения $y = 5$.

$$x^2 - 3x + 5 = 5;$$

$$x^2 - 3x = 0;$$

$$\begin{cases} x = 0 & A(0; 5) \\ x = 3 & B(3; 5) \end{cases}$$

$$x_0 = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}, \text{ значит}$$

$$y_0 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 5 =$$

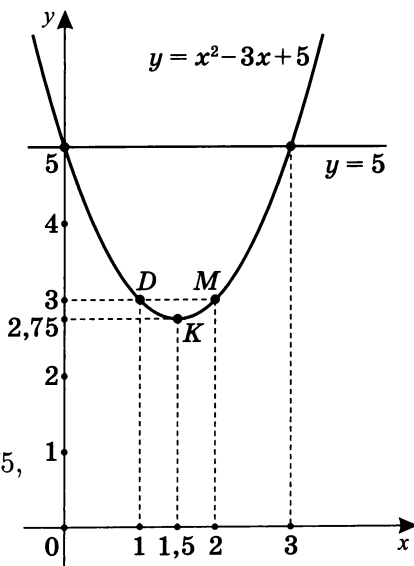
$$= \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 5 =$$

$$= -2,25 + 5 = 2,75.$$

Таким образом, $y_0 = 2,75$,

и вершина параболы —

точка $K(1,5; 2,75)$.



Для уточнения графика можно вычислить:

$$y(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 5 = 3, \text{ т. е. } D(1; 3) \in \Gamma(y = x^2 - 3x + 5);$$

$$y(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 5 = 3, \text{ т. е. } M(2; 3) \in \Gamma(y = x^2 - 3x + 5).$$

Кроме того, точки D и M симметричны относительно прямой $x = 1,5$: $S_{x=1,5}(D) = M$.

$$\text{Итак, } f(1,5 + 0,5) = f(1,5 - 0,5),$$

и в общем случае $f(1,5 + x) = f(1,5 - x)$ для любого x .

4. Построим график функции $y = x^2 - 2x - 4$.

Так как $c = -4$, то прямая сечения $y = -4$, т. е.

$$-4 = x^2 - 2x - 4; \quad x^2 - 2x = 0; \quad \begin{cases} x = 0 & A(0; -4) \\ x = 2 & B(2; -4) \end{cases}.$$

$$x_0 = \frac{0+2}{2} = 1; \quad y_0 = 1^2 - 2 \cdot 1 - 4 = -5,$$

т. е. $K(1; -5)$ — вершина параболы.

Построим график по точкам A , B и K .

Для уточнения графика

вычислим:

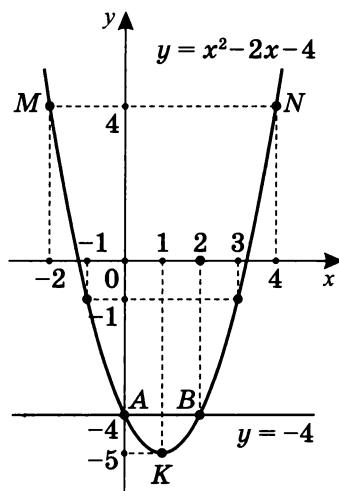
$$\begin{aligned} f(1+3) &= f(4) = \\ &= 4^2 - 2 \cdot 4 - 4 = 4, \end{aligned}$$

т. е. точка $N(4; 4)$ принадлежит $\Gamma(y = x^2 - 2x - 4)$;

$$\begin{aligned} f(1-3) &= f(-2) = \\ &= (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 4 = 4, \end{aligned}$$

т. е. точка $M(-2; 4)$ принадлежит $\Gamma(y = x^2 - 2x - 4)$.

Итак, $f(1+3) = f(1-3)$.



Отметим, что в данном случае получаются целочисленные координаты точек параболы. Если бы мы выбрали $y = 0$, то получили бы корни уравнения $x^2 - 2x - 4 = 0$ — иррациональные числа, что неудобно для построения.

Примечание. Выяснять симметрию точек параболы весьма полезно не только с точки зрения нахождения уточняющих точек, но и с точки зрения проверки правильности вычисления оси симметрии. Действительно, пусть в примере, рассмотренном выше, $x = 2$ есть ось симметрии, тогда должно выполняться равенство $f(2+3) = f(2-3)$:

$$f(2+3) = f(5) = 25 - 10 - 4 = 11;$$

$$f(2-3) = f(-1) = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 4 = -1.$$

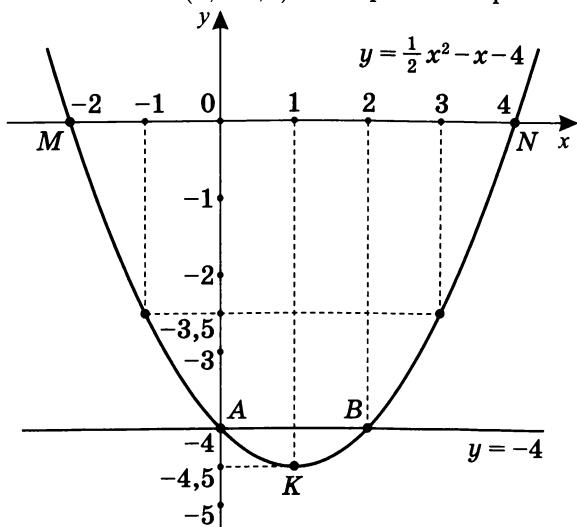
Увы, равенство не выполняется, $f(2+3) \neq f(2-3)$, значит $x = 2$ осью симметрии не является.

5. Построим график функции $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$.

$$c = -4; \quad y = -4, \text{ тогда } \frac{1}{2}x^2 - x = 0; \quad x^2 - 2x = 0;$$

$$\begin{cases} x = 0 & A(0; -4) \\ x = 2 & B(2; -4) \end{cases} \cdot x_0 = \frac{0+2}{2} = 1; y_0 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - 1 - 4 = -4,5,$$

т. е. точка $K(1; -4,5)$ — вершина параболы.



Для уточнения можно найти точки пересечения графика $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$ с осью абсцисс, т. е. $y = 0$.

$$\frac{1}{2}x^2 - x - 4 = 0; \quad x^2 - 2x - 8 = 0; \quad \begin{cases} x = 4 & N(4; 0) \\ x = -2 & M(-2; 0) \end{cases}.$$

Примечание. График параболы AKB в окрестности точки K *всегда* должен быть мягко скругленным, т.е. в нем не должно быть «острия». Представьте себе игрушку «ванька-встанька», нижняя часть которой имеет форму параболоида (поверхности, полученной вращением параболы вокруг оси симметрии) с прикрепленным внутри в точке K тяжелым грузом. Если бы там было «острие», то игрушка бы заваливалась, тогда как если есть «скругление», и груз точно отцентрирован, то игрушка стоит вертикально, не заваливаясь.

Теперь рассмотрим построение графиков квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ методом сечения в общем виде.

1. Пусть $y = c$, тогда $ax^2 + bx + c = c$, $ax^2 + bx = 0$,

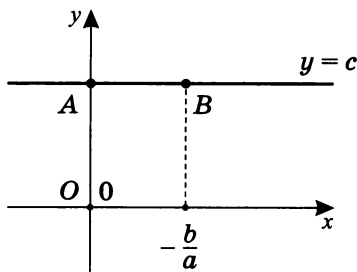
т.е. $x(ax + b) = 0$, значит $\begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{b}{a} \end{cases}.$

Графически это означает пересечение графика параболы прямой $y = c$, при этом получили точки пересечения

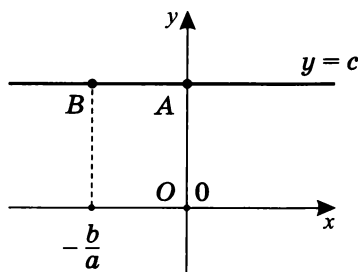
$$\begin{cases} A(0; c) \in \Gamma(y = f(x)) \\ B\left(-\frac{b}{a}; c\right) \in \Gamma(y = f(x)) \end{cases}.$$

Рассмотрим в общем виде положение точек пересечения графика $y = ax^2 + bx + c$ прямой $y = c$, в зависимости от знаков коэффициентов a , b и c .

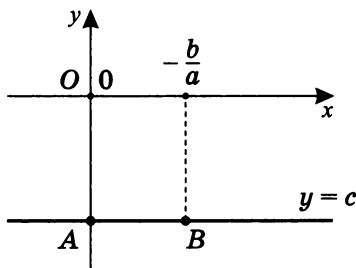
Если $\begin{cases} c > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \end{cases}$



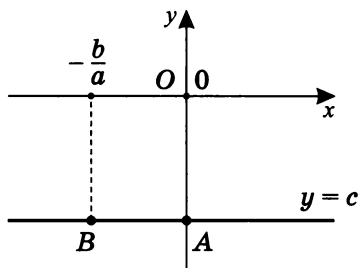
Если $\begin{cases} c > 0 \\ -\frac{b}{a} < 0 \end{cases}$



Если $\begin{cases} c < 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \end{cases}$



Если $\begin{cases} c < 0 \\ -\frac{b}{a} < 0 \end{cases}$



2. Так как график параболы симметричен относительно прямой $x = x_0$ (эта прямая параллельна оси ординат), то

а) $x_0 = \frac{0 + \left(-\frac{b}{a}\right)}{2} = -\frac{b}{2a}$, где $x = 0$ и $x = -\frac{b}{a}$ — корни уравнения $ax^2 + bx = 0$.

б) $y_0 = f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c$,

или $y_0 = a \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b \left(-\frac{b}{2a}\right) + c = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$,

где $b^2 - 4ac = D$ (дискриминант — с латинского различитель), т. е. $y_0 = -\frac{D}{4a}$.

Таким образом, получили еще одну точку, принадлежащую графику функции $y = ax^2 + bx + c$. Это точка $K \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$, или $K \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$.

Ее еще называют вершиной параболы. В принципе, трех точек вполне достаточно, чтобы однозначно построить график параболы (это было показано ранее).

3. В случае $D > 0$ ($D = b^2 - 4ac$) можно получить еще пару точек для более точного построения графика.

Пусть $y = 0$, $ax^2 + bx + c = 0$, где x_1, x_2 — корни, тогда точки $M(x_1; 0)$ и $N(x_2; 0)$ также принадлежат графику параболы.

Рассмотрим вид графика параболы в зависимости от значения дискриминанта D (в случаях $D < 0$, $D = 0$ и $D > 0$) и различных знаков коэффициентов a , b и c .

Пусть $D < 0$.

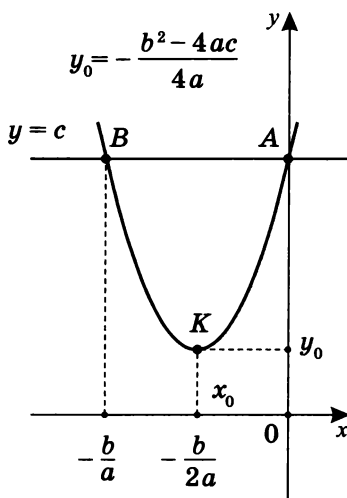
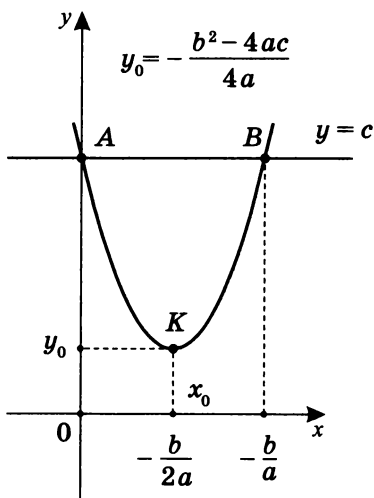
Так как $y_0 = -\frac{D}{4a}$ ордината вершины параболы, то:

- а) если $a > 0$, то $y_0 > 0$ (парабола не пересекает ось абсцисс и находится в верхней полуплоскости),
тогда $y \geq y_0 > 0$ при любых x (пункты 1, 2);
- б) если $a < 0$, то $y_0 < 0$ (парабола не пересекает ось абсцисс и находится в нижней полуплоскости),
тогда $y \leq y_0 < 0$ при любых x (пункты 3, 4).

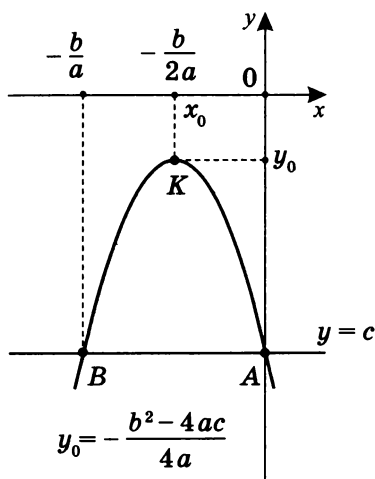
Значит при $D < 0$ возможный вид графиков будет:

1. Если $\begin{cases} a > 0 \\ c > 0 \\ b < 0 \end{cases}$

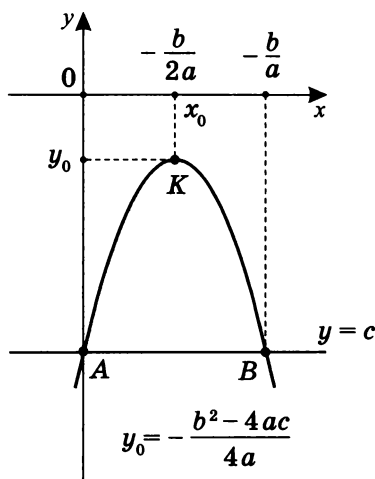
2. Если $\begin{cases} a > 0 \\ c > 0 \\ b > 0 \end{cases}$



3. Если $\begin{cases} a < 0 \\ c < 0 \\ b < 0 \end{cases}$



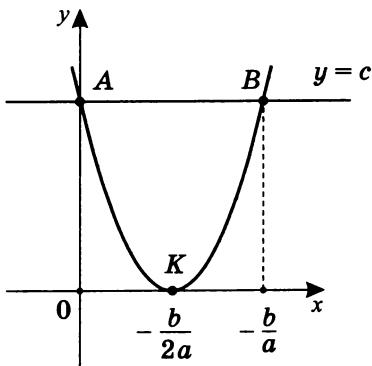
4. Если $\begin{cases} a < 0 \\ c < 0 \\ b > 0 \end{cases}$



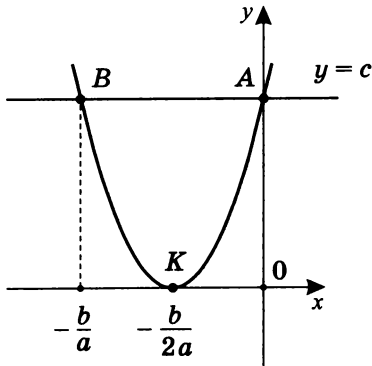
Пусть $D = 0$.

Так как $y_0 = -\frac{0}{4a} = 0$, то возможный вид графиков в этом случае:

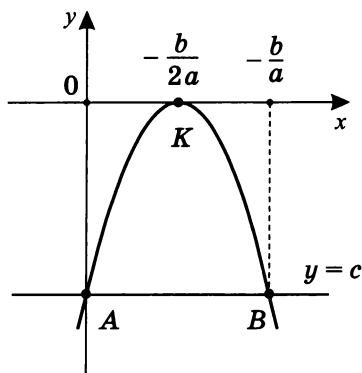
5. При $\begin{cases} a > 0 \\ c > 0 \\ b < 0 \end{cases}$



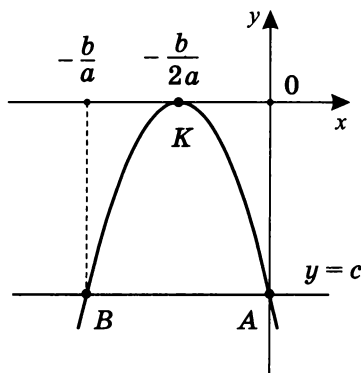
6. При $\begin{cases} a > 0 \\ c > 0 \\ b > 0 \end{cases}$



7. При $\begin{cases} a < 0 \\ c < 0 \\ b > 0 \end{cases}$



8. При $\begin{cases} a < 0 \\ c < 0 \\ b < 0 \end{cases}$



Отметим, что в пунктах 5, 6, 7 и 8 ось абсцисс есть касательная к параболе и существует единственная их общая точка — $K\left(-\frac{b}{2a}; 0\right)$.

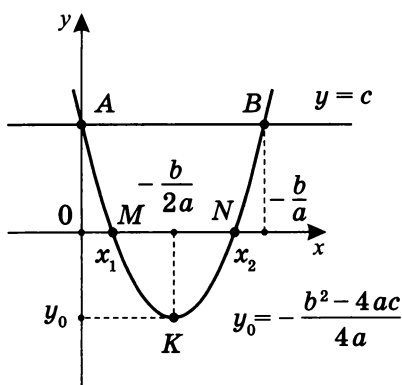
Если $D > 0$, то возможный вид графиков представлен в пунктах 9–16.

Так как $y_0 = -\frac{D}{4a}$, то при $D > 0$ следует, что $a \cdot y_0 < 0$.

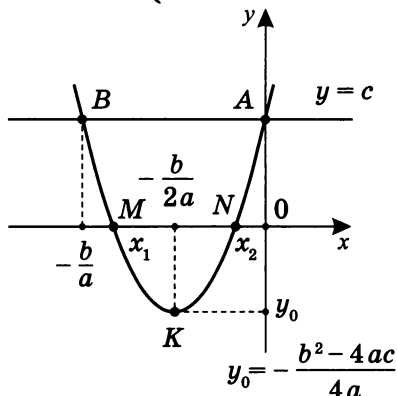
Значит:

- а) если $a > 0$, то $y_0 < 0$, ветви параболы направлены вверх, а вершина параболы находится в нижней полуплоскости;
- б) если $a < 0$, то $y_0 > 0$, то ветви параболы направлены вниз, а вершина параболы находится в верхней полуплоскости. Значит, есть различные корни функции $y = ax^2 + bx + c$, и можно найти еще две точки — $M(x_1; 0)$ и $N(x_2; 0)$, уточняющие график квадратичной функции.

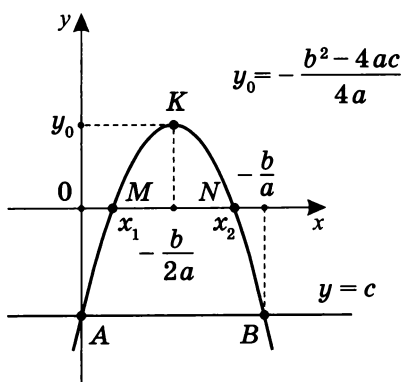
9. При $\begin{cases} a > 0 \\ c > 0 \\ b < 0 \end{cases}$



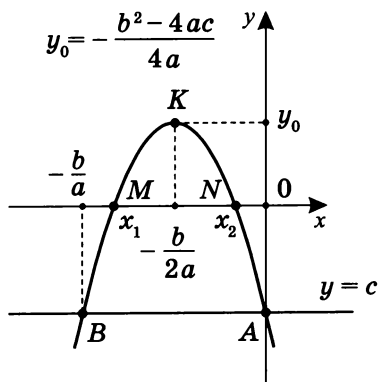
10. При $\begin{cases} a > 0 \\ c > 0 \\ b > 0 \end{cases}$



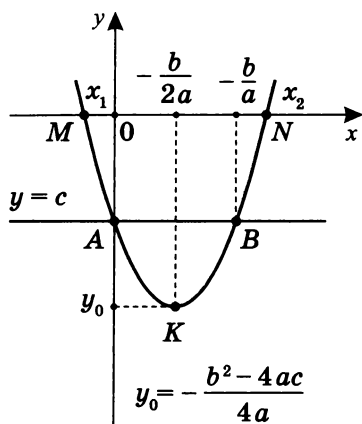
11. При $\begin{cases} a < 0 \\ c < 0 \\ b > 0 \end{cases}$



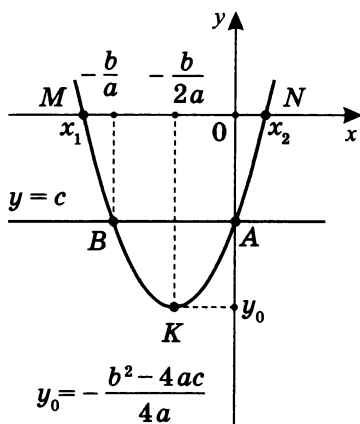
12. При $\begin{cases} a < 0 \\ c < 0 \\ b < 0 \end{cases}$



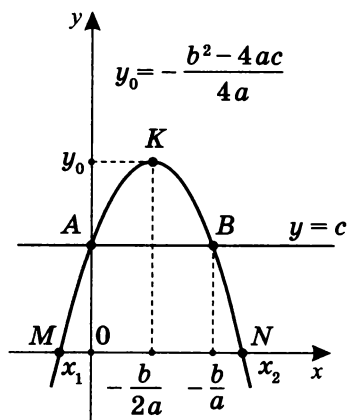
13. При $\begin{cases} a > 0 \\ c < 0 \\ b < 0 \end{cases}$



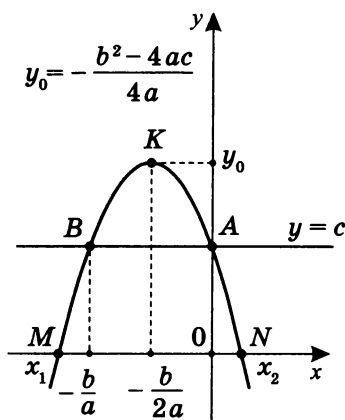
14. При $\begin{cases} a > 0 \\ c < 0 \\ b > 0 \end{cases}$



15. При $\begin{cases} a < 0 \\ c > 0 \\ b > 0 \end{cases}$



16. При $\begin{cases} a < 0 \\ c > 0 \\ b < 0 \end{cases}$



Выводы

1. Знак коэффициента a очень важен:

при $a > 0$ ветви параболы направлены **вверх**;

при $a < 0$ ветви параболы направлены **вниз**.

2. Знак коэффициента b также очень существенен, так как:

если $-\frac{b}{a} > 0$, то вершина параболы находится в **правой** полуплоскости относительно оси ординат (это пункты 1, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 15);

если $-\frac{b}{a} < 0$, то вершина параболы находится в **левой** полуплоскости относительно оси ординат (это пункты 2, 3, 6, 8, 10, 12, 14, 16).

3. Знак коэффициента c означает следующее:

если $c > 0$, то точка пересечения параболы с осью ординат находится в **верхней** полуплоскости относительно оси абсцисс (пункты 1, 2, 5, 6, 9, 10, 15, 16);

если $c < 0$, то точка пересечения параболы с осью ординат находится в **нижней** полуплоскости относительно оси абсцисс (пункты 3, 4, 7, 8, 11, 12, 13, 14).

4. Построение графиков $y = ax^2 + bx + c$ методом сечения позволяет сделать вывод: график $y = ax^2 + bx + c$ можно получить сдвигом графика $y = ax^2$:

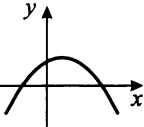
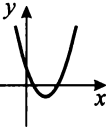
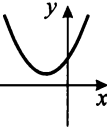
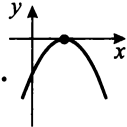
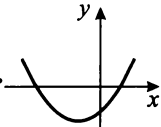
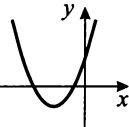
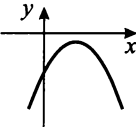
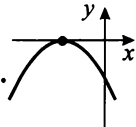
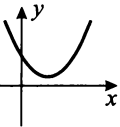
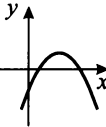
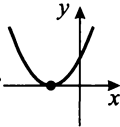
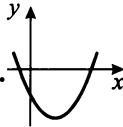
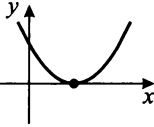
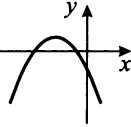
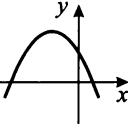
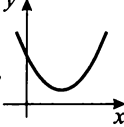
по горизонтали: на $\left| -\frac{b}{2a} \right|$ **влево** при $-\frac{b}{2a} < 0$, **вправо** при $-\frac{b}{2a} > 0$;

по вертикали: **вверх** на $|y_0|$ при $y_0 > 0$, **вниз** при $y_0 < 0$, где $y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{D}{4a}$.

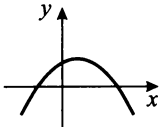
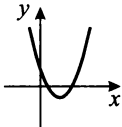
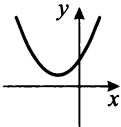
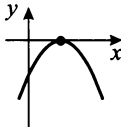
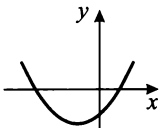
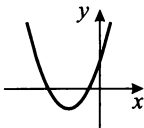
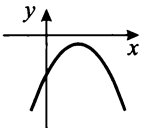
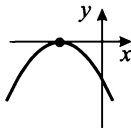
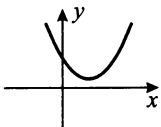
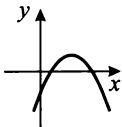
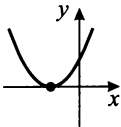
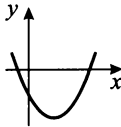
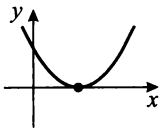
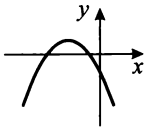
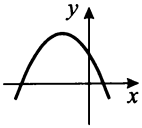
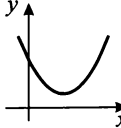
5. Для построения графиков квадратичной функции методом сечения достаточно трех точек — A , B и K . Знание же общих формул решения квадратного уравнения не обязательно, т. е. графики можно строить до изучения формулы решения квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ в общем виде.

Упражнения 1

По эскизам графиков парабол ($y = ax^2 + bx + c$) определите знаки коэффициентов a , b , c и значение дискриминанта: положительное, отрицательное или нулевое.

1. 	2. 	3. 	4. 
5. 	6. 	7. 	8. 
9. 	10. 	11. 	12. 
13. 	14. 	15. 	16. 

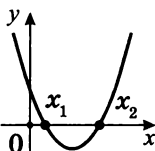
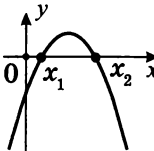
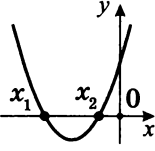
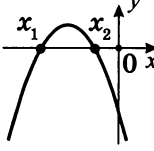
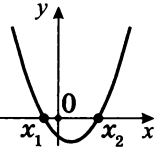
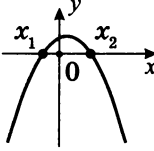
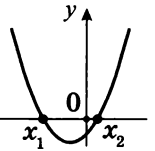
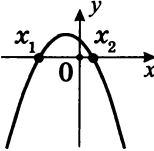
Ответы на упражнения 1

<p>1. $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \\ c > 0 \\ D > 0 \end{cases}$</p> 	<p>2. $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ c > 0 \\ D > 0 \end{cases}$</p> 	<p>3. $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ c > 0 \\ D < 0 \end{cases}$</p> 	<p>4. $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \\ c < 0 \\ D = 0 \end{cases}$</p> 
<p>5. $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ c < 0 \\ D > 0 \end{cases}$</p> 	<p>6. $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ c > 0 \\ D > 0 \end{cases}$</p> 	<p>7. $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \\ c < 0 \\ D < 0 \end{cases}$</p> 	<p>8. $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \\ c < 0 \\ D = 0 \end{cases}$</p> 
<p>9. $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ c > 0 \\ D < 0 \end{cases}$</p> 	<p>10. $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \\ c < 0 \\ D > 0 \end{cases}$</p> 	<p>11. $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ c > 0 \\ D = 0 \end{cases}$</p> 	<p>12. $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ c < 0 \\ D > 0 \end{cases}$</p> 
<p>13. $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ c > 0 \\ D = 0 \end{cases}$</p> 	<p>14. $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \\ c < 0 \\ D > 0 \end{cases}$</p> 	<p>15. $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \\ c > 0 \\ D > 0 \end{cases}$</p> 	<p>16. $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ c > 0 \\ D < 0 \end{cases}$</p> 

Соотношение знаков корней функции $y = ax^2 + bx + c$ и знаков ее коэффициентов

Для уравнения $y = ax^2 + bx + c$, где x_1, x_2 — корни,

по теореме Виета $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$.

	$a > 0$	$a < 0$
1. $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ D > 0 \end{cases}$ Оба корня положительные		
2. $\begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 < 0 \end{cases}$; $\begin{cases} -\frac{b}{a} < 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ D > 0 \end{cases}$ Оба корня отрицательные		
3. $\begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 > 0 \\ x_2 > x_1 \end{cases}$; $\begin{cases} -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} < 0 \\ D > 0 \end{cases}$ Корни разных знаков, но по абсолютной величине больше положительный корень		
4. $\begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 > 0 \\ x_2 < x_1 \end{cases}$; $\begin{cases} -\frac{b}{a} < 0 \\ \frac{c}{a} < 0 \\ D > 0 \end{cases}$ Корни разных знаков, но по абсолютной величине больше отрицательный корень		

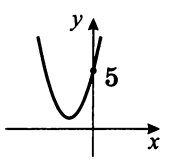
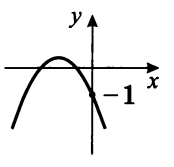
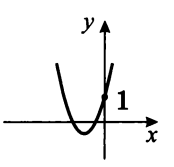
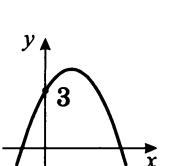
Упражнения 2

Используя таблицу ответов к упражнениям 1 (с. 25) и таблицу, характеризующую по теореме Виета зависимость между корнями функции $y = ax^2 + bx + c$ и ее коэффициентами (с. 26), постройте эскизы графиков, вычисляя только знак дискриминанта $D = b^2 - 4ac$.

Укажите вид сдвигов базовой параболы $y = ax^2$: вверх, вниз, влево, вправо; укажите также направленность ветвей параболы: вверх, вниз.

1. $y = 2x^2 + 5x + 5$;
2. $y = -x^2 - 3x - 1$;
3. $y = 3x^2 + 5x + 1$;
4. $y = -3x^2 + 2x + 3$;
5. $y = 4x^2 - 6x - 3$;
6. $y = -2x^2 - 5x - 4$;
7. $y = 2x^2 - 3x + 5$;
8. $y = -2x^2 + 6x - 1$;
9. $y = 4x^2 + 3x - 2$;
10. $y = -3x^2 + 2x - 2$;
11. $y = 4x^2 - 6x + 2$;
12. $y = -4x^2 - 5x + 1$.

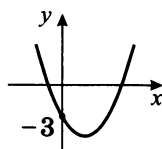
Ответы на упражнения 2

<p>1. $y = 2x^2 + 5x + 5$</p> $\begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \\ c = 5 \end{cases}; \begin{cases} a > 0 \\ -\frac{b}{a} = -\frac{5}{2} < 0 \\ \frac{c}{a} = \frac{5}{2} > 0 \\ D = -15 < 0 \end{cases}$ <p>Ветви вверх, сдвиг влево и вверх, корней нет.</p>	
<p>2. $y = -x^2 - 3x - 1$</p> $\begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \\ c = -1 \end{cases}; \begin{cases} a < 0 \\ -\frac{b}{a} = -3 < 0 \\ \frac{c}{a} = 1 > 0 \\ D = 5 > 0 \end{cases}$ <p>Ветви вниз, сдвиг влево и вверх, оба корня отрицательны.</p>	
<p>3. $y = 3x^2 + 5x + 1$</p> $\begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \\ c = 1 \end{cases}; \begin{cases} a > 0 \\ -\frac{b}{a} = -\frac{5}{3} < 0 \\ \frac{c}{a} = \frac{1}{3} > 0 \\ D = 13 > 0 \end{cases}$ <p>Ветви вверх, сдвиг влево и вниз, оба корня отрицательны.</p>	
<p>4. $y = -3x^2 + 2x + 3$</p> $\begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases}; \begin{cases} a < 0 \\ -\frac{b}{a} = -\frac{2}{-3} > 0 \\ \frac{c}{a} = \frac{3}{-3} = -1 < 0 \\ D = 40 > 0 \end{cases}$ <p>Ветви вниз, сдвиг вправо и вверх, корни разных знаков, причем положительный корень больше по абсолютной величине.</p>	

5. $y = 4x^2 - 6x - 3$

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = -6 \\ c = -3 \end{cases}; \begin{cases} a > 0 \\ -\frac{b}{a} = \frac{3}{2} > 0 \\ \frac{c}{a} = -\frac{3}{4} < 0 \\ D = 84 > 0 \end{cases}$$

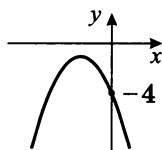
Ветви вверх, сдвиг вправо и вниз, корни разных знаков, причем положительный корень больше по абсолютной величине.



6. $y = -2x^2 - 5x - 4$

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = -5 \\ c = -4 \end{cases}; \begin{cases} a < 0 \\ -\frac{b}{a} = -\frac{5}{2} < 0 \\ \frac{c}{a} = 2 > 0 \\ D = -7 < 0 \end{cases}$$

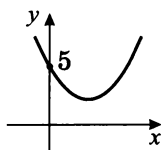
Ветви вниз, сдвиг влево и вниз, корней нет.



7. $y = 2x^2 - 3x + 5$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 5 \end{cases}; \begin{cases} a > 0 \\ -\frac{b}{a} = \frac{3}{2} > 0 \\ \frac{c}{a} = \frac{5}{2} > 0 \\ D = -31 < 0 \end{cases}$$

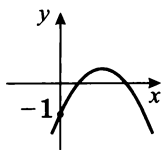
Ветви вверх, сдвиг вправо и вверх, корней нет.



8. $y = -2x^2 + 6x - 1$

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 6 \\ c = -1 \end{cases}; \begin{cases} a < 0 \\ -\frac{b}{a} = 3 > 0 \\ \frac{c}{a} = \frac{1}{2} > 0 \\ D = 28 > 0 \end{cases}$$

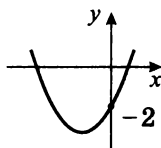
Ветви вниз, сдвиг вправо и вверх, корни одного знака — положительные.



$$9. y = 4x^2 + 3x - 2$$

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \\ c = -2 \end{cases}; \begin{cases} a > 0 \\ -\frac{b}{a} = -\frac{3}{4} < 0 \\ \frac{c}{a} = -\frac{1}{2} < 0 \\ D = 41 > 0 \end{cases}$$

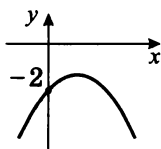
Ветви вверх, сдвиг влево и вниз, корни разных знаков, причем отрицательный корень больше по абсолютной величине.



$$10. y = -3x^2 + 2x - 2$$

$$\begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \\ c = -2 \end{cases}; \begin{cases} a < 0 \\ -\frac{b}{a} = \frac{2}{3} > 0 \\ \frac{c}{a} = \frac{2}{3} > 0 \\ D = -20 < 0 \end{cases}$$

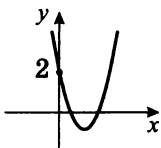
Ветви вниз, сдвиг вправо и вниз, корней нет.



$$11. y = 4x^2 - 6x + 2$$

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = -6 \\ c = 2 \end{cases}; \begin{cases} a > 0 \\ -\frac{b}{a} = \frac{3}{2} > 0 \\ \frac{c}{a} = \frac{1}{2} > 0 \\ D = 4 > 0 \end{cases}$$

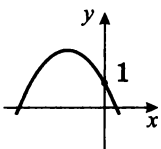
Ветви вверх, сдвиг вправо и вниз, корни одного знака — положительные.



$$12. y = -4x^2 - 5x + 1$$

$$\begin{cases} a = -4 \\ b = -5 \\ c = 1 \end{cases}; \begin{cases} a < 0 \\ -\frac{b}{a} = -\frac{5}{4} < 0 \\ \frac{c}{a} = -\frac{1}{4} < 0 \\ D = 41 > 0 \end{cases}$$

Ветви вниз, сдвиг влево и вверх, корни разных знаков, причем отрицательный корень больше по абсолютной величине.



Практикум 1

Постройте графики методом сечения и исследуйте функцию по следующим параметрам:

- а) промежутки монотонности;
- б) промежутки знакопостоянства (т. е. промежутки, на которых функция имеет значения, постоянные по знаку);
- в) наибольшее или наименьшее значение функции;
- г) множество всех значений функции на промежутке $[p; k]$.

1. $y = x^2 - 4x; \quad ([-1; 5])$.
2. $y = x^2 + 6x; \quad ([-5; 1])$.
3. $y = x^2 - 6x + 9; \quad ([2; 5])$.
4. $y = x^2 + 4x + 4; \quad ([-3; 1])$.
5. $y = x^2 - 3x + 4; \quad ([2; 4])$.
6. $y = x^2 + 3x + 6; \quad ([-2, 5; -2])$.
7. $y = x^2 - 4x - 5; \quad ([1; 3])$.
8. $y = x^2 + 2x - 3; \quad ([0; 2])$.
9. $y = 12 + 4x - x^2; \quad ([-1; 3])$.
10. $y = 8 - 2x - x^2; \quad ([1; 3])$.

Дополнительное задание. Найдя координаты точки K (вершины параболы) и используя выводы на с. 23 (4), укажите, какие сдвиги базового графика $y = x^2$ вдоль осей координат и на сколько необходимо сделать, чтобы построить данный график. Естественно, проверьте, совпадает ли уже построенный другим способом график с вашими результатами.

Решение практикума 1

1. $y = x^2 - 4x; \quad ([-1; 5])$.

Построим график. Так как $c = 0$, то при $y = 0$

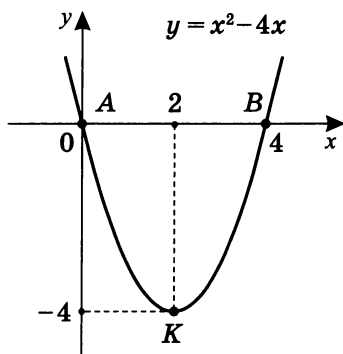
$$x^2 - 4x = 0; \quad x(x - 4) = 0; \quad \begin{cases} x = 0 & A(0; 0) \\ x = 4 & B(4; 0) \end{cases}.$$

$$x_0 = \frac{0+4}{2} = 2; \quad y_0 = x_0^2 - 4x_0, \text{ т. е. } y_0 = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4,$$

значит $K(2; -4)$ — вершина параболы

(отметим, что $D = -4a \cdot y_0$ — см. с. 23).

По трем точкам A , B и K построим параболу.



Теперь исследуем по графику поведение функции.

а) Найдем промежутки монотонности.

Определение

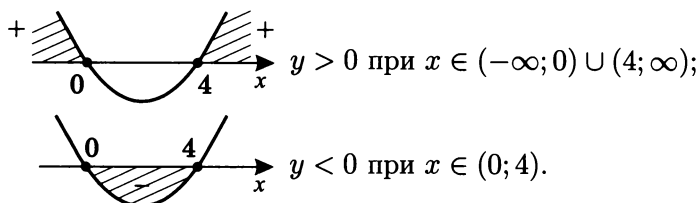
а) Функция на промежутке $[p; k]$ возрастает, если для любых x_1 и x_2 , где $x_1, x_2 \in [p; k]$ из $x_2 > x_1$ следует, что $f(x_2) > f(x_1)$, т. е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

б) Функция на промежутке $[p; k]$ убывает, если для любых x_1 и x_2 , где $x_1, x_2 \in [p; k]$ из $x_2 > x_1$ следует, что $f(x_2) < f(x_1)$, т. е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

в) Если функция возрастает или убывает, то она называется монотонной.

На $[2; \infty)$ $y = x^2 - 4x \uparrow$ (монотонно возрастает);
на $(-\infty; 2]$ $y = x^2 - 4x \downarrow$ (монотонно убывает).

- б) Исследуем по графику промежутки знакопостоянства.



- в) Найдем по графику наибольшее или наименьшее значение функции.

Определение. а) Если для любого значения x из области определения функции $f(x_0) \geq f(x)$, то значение $f(x_0) = f_{\text{наиб}}$ называется наибольшим значением функции.

б) Если для любого значения x из области определения функции $f(x_0) \leq f(x)$, то значение $f(x_0) = f_{\text{наим}}$ называется наименьшим значением функции.

Из графика $y = x^2 - 4x$ следует, что $y_{\text{наим}} = -4$, причем $-4 = y(2)$.

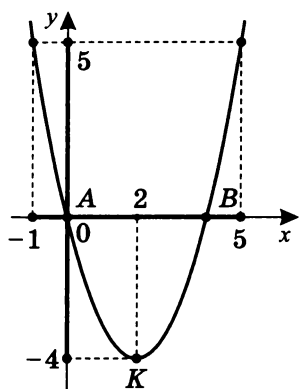
- г) По графику функции $y = x^2 - 4x$ найдите множество всех значений функции, которые она может принимать на $[-1; 5]$.

Найдем сначала из графика

$$f(-1) = 5, \quad f(5) = 5.$$

Естественно, потом для контроля вычислим значения $f(-1) = (-1)^2 - 4(-1) = 5$, $f(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 = 5$.

Значит, на промежутке $[-1; 5]$ множество всех значений функции, которые она может принять, $[-4; 5]$, т. е. на $[-1; 5]$ $f(x) \in [-4; 5]$ — область изменения.



д) (Дополнительное задание)

Базовый график $y = x^2$ необходимо сдвинуть вправо на 2 единицы и вниз на 4 единицы, чтобы построить график $y = x^2 - 4x$, так как $y = (x - 2)^2 - 4$ (попробуйте доказать это сами).

2. $y = x^2 + 6x$; $([-5; 1])$.

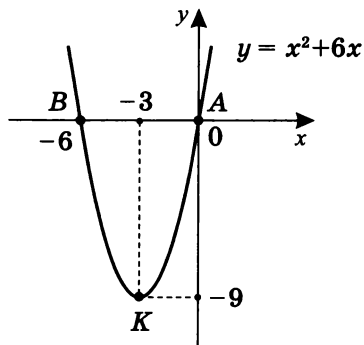
Построим график.

$$c = 0; \quad x^2 + 6x = 0; \quad x(x + 6) = 0; \quad \begin{cases} x = 0 & A(0; 0) \\ x = -6 & B(-6; 0) \end{cases}.$$

$$x_0 = \frac{0 + (-6)}{2} = -3;$$

$$y_0 = (-3)^2 + 6(-3) = 9 - 18 = -9, \text{ тогда } K(-3; -9).$$

По трем точкам A , B и K построим параболу.

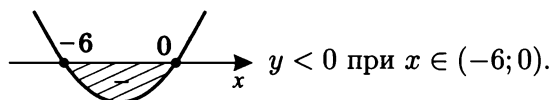
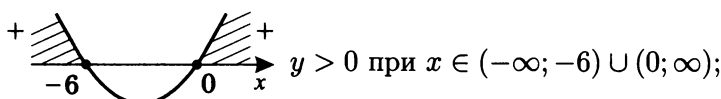


Исследование по графику.

а) Промежутки монотонности.

На $[-3; \infty)$ $y = x^2 + 6x$ \uparrow (монотонно возрастает),на $(-\infty; -3]$ $y = x^2 + 6x$ \downarrow (монотонно убывает).

б) Промежутки знакопостоянства.



в) Наибольшее или наименьшее значение функции.

 $y_{\text{наим}} = -9$, причем $f(-3) = -9$.

г) Множество всех значений функции на промежутке.

Рассмотрим график функции $y = x^2 + 6x$ на $[-5; 1]$.Найдем $f(1) = 7$; $f(-5) = -5$.

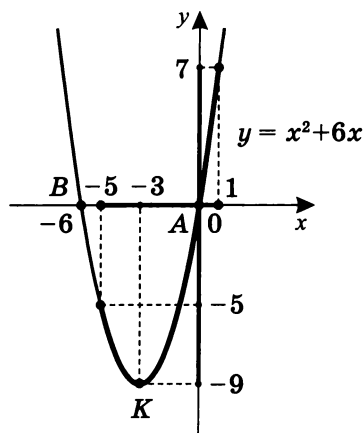
Затем для контроля вычислим значения

$$f(1) = (+1)^2 + 6(+1) = 7;$$

$$f(-5) = (-5)^2 + 6(-5) = -5.$$

Учтем, что -9 есть наименьшее значение функции. При чем $f(-3) = -9$ и $-3 \in [-5; 1]$.

Это соображение необходимо всегда иметь в виду. Значит на промежутке $[-5; 1]$ функция $y = x^2 + 6x$ принимает все значения $[-9; 7]$.



д) (Дополнительное задание)

Базовый график $y = x^2$ необходимо сдвинуть влево на 3 единицы и вниз на 9 единиц, чтобы построить график $y = x^2 + 6x$, так как $y = (x + 3)^2 - 9$ (докажите).

3. $y = x^2 - 6x + 9$; $([2; 5])$.

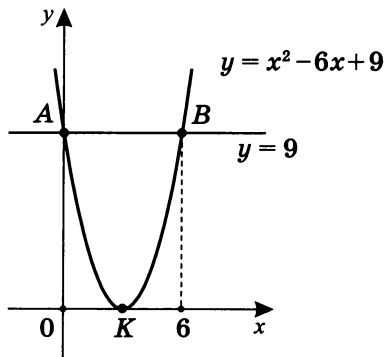
Построим график.

$$c = 9; \quad x^2 - 6x = 0; \quad x(x - 6) = 0; \quad \begin{cases} x = 0 & A(0; 9) \\ x = 6 & B(6; 9) \end{cases}.$$

$$x_0 = \frac{0+6}{2} = 3; \quad y_0 = 3^2 - 6 \cdot 3 + 9 = 9 - 18 + 9 = 0,$$

тогда $K(3; 0)$.

По трем точкам A , B и K построим параболу.



Отметим, что $y = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$, причем $y_0 = -\frac{D}{4a}$, т. е. $D = 0$.

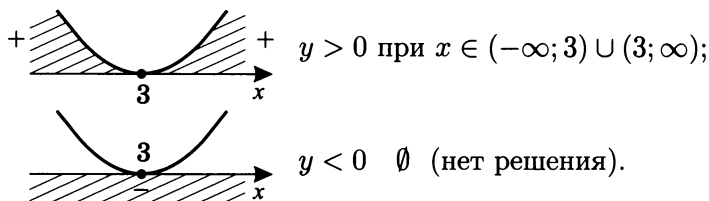
Значит, график можно было построить сдвигом графика $y = x^2$ вправо на три единицы вдоль оси абсцисс. См. с. 23 (4).

Исследование по графику.

а) Промежутки монотонности.

На $[3; \infty)$ $y = x^2 - 6x + 9 \quad \uparrow$ (монотонно возрастает);
на $(-\infty; 3]$ $y = x^2 - 6x + 9 \quad \downarrow$ (монотонно убывает).

б) Промежутки знакопостоянства.



в) Наибольшее или наименьшее значение функции.

$y_{\text{наим}} = 0$, причем $0 = f(3)$.

г) Множество всех значений функции на промежутке.

Из графика функции $y = x^2 - 6x + 9$ на $[2; 5]$ найдем, что $f(2) = 1$, $f(5) = 4$.

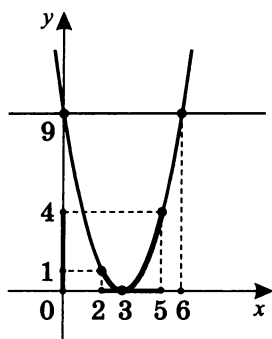
Для контроля вычислим значения:

$$f(2) = 2^2 - 6 \cdot 2 + 9 = 1; \quad f(5) = 5^2 - 6 \cdot 5 + 9 = 4.$$

Учтем также, что $f(3) = 0$ — наименьшее значение функции, и $3 \in [2; 5]$.

Значит на $[2; 5]$ функция $y = x^2 - 6x + 9$ принимает все значения $[0; 4]$.

Иногда записывается так: $E_{[2;5]}(f) = [0; 4]$, где $f(x) = x^2 - 6x + 9$. Такую запись, по усмотрению преподавателя, возможно использовать в школе, колледже, лицее.



д) (Дополнительное задание)

Базовый график $y = x^2$ необходимо сдвинуть вправо на 3 единицы, чтобы построить график $y = x^2 - 6x + 9$, так как $y = (x - 3)^2$.

4. $y = x^2 + 4x + 4$; $([-3; 1])$.

Построим график.

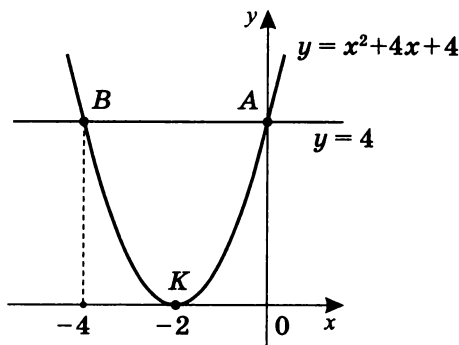
$$c = 4; \quad x^2 + 4x = 0; \quad \begin{cases} x = 0 & A(0; 4) \\ x = -4 & B(-4; 4) \end{cases}.$$

$$x_0 = \frac{0 + (-4)}{2} = -2;$$

$$y_0 = (-2)^2 + 4(-2) + 4 = 0, \text{ тогда } K(-2; 0).$$

(Можно иначе: $y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$; $D = -\frac{4^2 - 4 \cdot 4}{4 \cdot 1} = 0$, тогда $y_0 = 0$.)

По трем точкам A , B и K построим параболу.

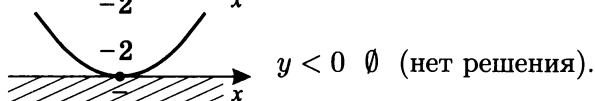
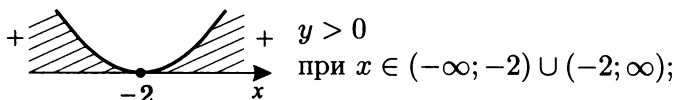


Исследование по графику.

а) Промежутки монотонности.

На $[-2; \infty)$ $y = f(x) \uparrow$ (монотонно возрастает);на $(-\infty; -2]$ $y = f(x) \downarrow$ (монотонно убывает).

б) Промежутки знакопостоянства.



в) Наибольшее или наименьшее значение функции.

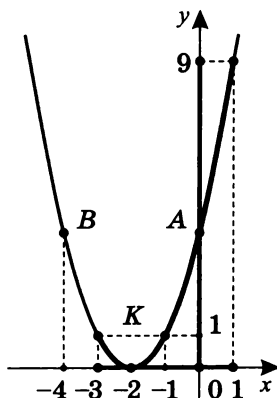
Из графика $y = x^2 + 4x + 4$ $y_{\text{наим}} = 0$,причем $0 = y(-2)$.

г) Множество всех значений функции на промежутке.

По графику $y = x^2 + 4x + 4$ найдем на $[-3; 1]$
 $f(-3) = 1$, $f(1) = 9$.

Для контроля вычислим

$$f(-3) = (-3 + 2)^2 = 1, \quad f(1) = (1 + 2)^2 = 9.$$

Значит на $[-3; 1]$ функция $y = x^2 + 4x + 4$ принимает все значения $[0; 9]$ или $E_{[-3; 1]}(f) = [0; 9]$
($-2 \in [-3; 1]$).

д) (Дополнительное задание)

Базовый график $y = x^2$ необходимо сдвинуть влево на 2 единицы, чтобы построить график $y = x^2 + 4x + 4$, так как $y = (x + 2)^2$.

5. $y = x^2 - 3x + 4$; $([2; 4])$.

Построим график:

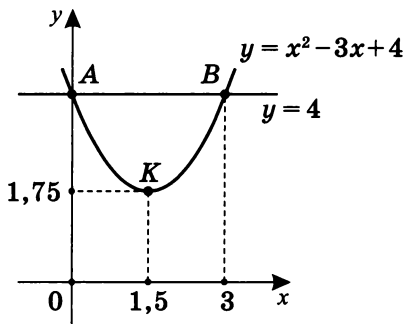
$$c = 4; \quad x^2 - 3x = 0; \quad \begin{cases} x = 0 & A(0; 4) \\ x = 3 & B(3; 4) \end{cases}.$$

$$x_0 = \frac{0+3}{2} = 1,5;$$

$$y_0 = (1,5)^2 - 3 \cdot 1,5 + 4 = 2,25 - 4,5 + 4 = 1,75 = 1\frac{3}{4},$$

тогда $K(1,5; 1,75)$.

По трем точкам A , B и K построим параболу.



Исследование по графику.

а) Промежутки монотонности.

На $[1,5; \infty)$ $y = f(x)$ \uparrow (монотонно возрастает);

на $(-\infty; 1,5]$ $y = f(x)$ \downarrow (монотонно убывает).

б) Промежутки знакопостоянства функции.

$y > 0$ при $x \in (-\infty; \infty)$.

Обратите внимание: $D = 3^2 - 4 \cdot 4 = -7 < 0$.

$y < 0$ \emptyset (нет решения).

в) Наибольшее или наименьшее значение функции.

Из графика $y = x^2 - 3x + 4$ $y_{\text{наим}} = 1,75$, причем $1,75 = y(1,5)$.

г) Множество всех значений функции на промежутке.

Из графика $y = x^2 - 3x + 4$ найдем на $[2; 4]$

$$f(2) = 2, \quad f(4) = 8.$$

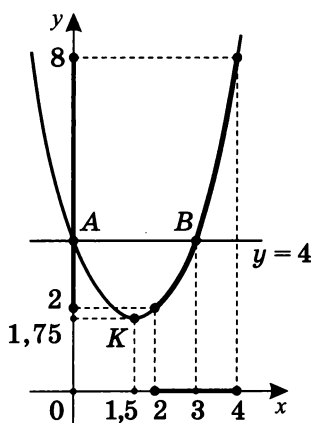
Для контроля проверим:

$$f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 4 = 2; \quad f(4) = 4^2 - 3 \cdot 4 + 4 = 8.$$

Значит на промежутке $[2; 4]$ функция $y = x^2 - 3x + 4$ принимает все свои значения $[2; 8]$, или

$$E_{[2;4]}(f) = [2; 8].$$

Отметим, что $f(1,5) \notin [2; 8]$, так как $1,5 \notin [2; 4]$.



д) (Дополнительное задание)

Базовый график $y = x^2$ необходимо сдвинуть вправо на 1,5 единицы и вверх на 1,75 единицы, чтобы построить график $y = x^2 - 3x + 4$, так как

$$y = (x - 1,5)^2 + 1,75 \quad (\text{докажите}).$$

6. $y = x^2 + 3x + 6; \quad ([-2,5; -2])$.

Построим график:

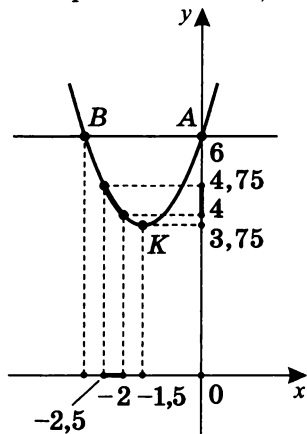
$$c = 6; \quad x^2 + 3x = 0; \quad \begin{cases} x = 0 & A(0; 6) \\ x = -3 & B(-3; 6) \end{cases}.$$

$$x_0 = \frac{0+(-3)}{2} = -1,5;$$

$$y_0 = (-1,5)^2 + 3(-1,5) + 6 = 2,25 - 4,5 + 6 = 3,75,$$

тогда $K(-1,5; 3,75)$.

По трем точкам A , B и K построим параболу.



Исследование по графику.

а) Промежутки монотонности.

На $[-1,5; \infty)$ $y = f(x)$ \uparrow (монотонно возрастает);

на $(-\infty; -1,5]$ $y = f(x)$ \downarrow (монотонно убывает).

б) Промежутки знакопостоянства функции.

$y > 0$ при $x \in (-\infty; \infty)$;

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 6 = -15 < 0;$$

$y < 0$ \emptyset (нет решения).

в) Наибольшее или наименьшее значение функции.

Из графика следует, что $y_{\text{наим}} = 3,75$,

причем $3,75 = f(-1,5)$.

г) Из графика $y = x^2 + 3x + 6$ найдем на $[-2,5; -2]$ множество значений функции: $f(-2) = 4$; $f(-2,5)$ по графику определить сложно.

Здесь, конечно, разумнее сразу вычислить

$$f(-2,5) = (-2,5)^2 + 3(-2,5) + 6 = 6,25 - 7,5 + 6 = 4,75,$$

$$f(-2) = (-2)^2 + 3 \cdot (-2) + 6 = 4 - 6 + 6 = 4.$$

Значит на $[-2,5; -2]$ множество всех значений функции $[4; 4,75]$, или

$$E_{[-2,5; -2]}(y = x^2 + 3x + 6) = [4; 4,75]$$

$$(-1,5 \notin [-2,5; -2]).$$

д) (Дополнительное задание)

Базовый график $y = x^2$ необходимо сдвинуть влево на 1,5 единицы и вверх на 3,75 единицы, чтобы построить график $y = x^2 + 3x + 6$, так как

$$\boxed{y = (x + 1,5)^2 + 3,75} \quad (\text{докажите}).$$

7. $y = x^2 - 4x - 5; \quad ([1; 3]).$

Построим график:

$$c = -5; \quad x^2 - 4x = 0; \quad \begin{cases} x = 0 & A(0; -5) \\ x = 4 & B(4; -5) \end{cases}.$$

$$x_0 = \frac{0+4}{2} = 2;$$

$$y_0 = 2^2 - 2 \cdot 4 - 5 = -9,$$

тогда $K(2; -9)$.

$$y = 0; \quad x^2 - 4x - 5 = 0; \quad x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+5} = 2 \pm 3;$$

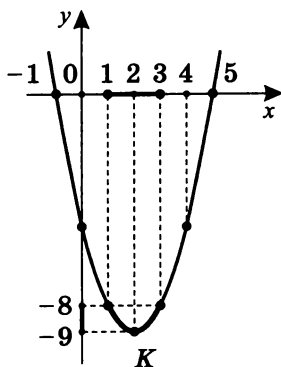
$$x_1 = -1; \quad x_2 = 5$$

(формула для приведенного квадратного уравнения

$$x^2 + px + q = 0; \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}), \text{ но можно решать}$$

сразу по теореме Виета: $M(-1; 0), N(5; 0)$.

Построили график по пяти точкам A, B, K, M и N .



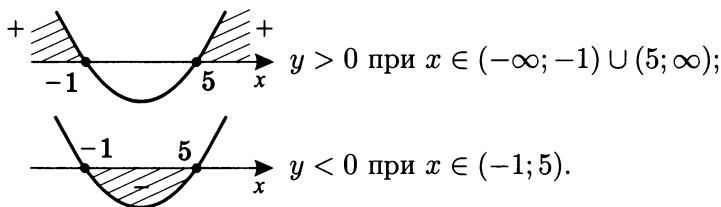
Исследование по графику.

а) Промежутки монотонности.

На $[2; \infty)$ $y = f(x)$ \uparrow (монотонно возрастает);

на $(-\infty; 2]$ $y = f(x)$ \downarrow (монотонно убывает).

б) Промежутки знакопостоянства.



в) Наибольшее или наименьшее значение.

Из графика $y = x^2 - 4x - 5$ следует, что $y_{\text{наим}} = -9$,
причем $-9 = f(2)$.

г) Множество всех значений функции на промежутке.

Из графика $y = x^2 - 4x - 5$ найдем на $[1; 3]$ значения
функции $f(1) = -8$; $f(3) = 8$.

Вычисления подтверждают, что

$$f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 - 5 = -8; \quad f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 - 5 = -8,$$

значит на промежутке $[1; 3]$ множество всех значений $[-9; -8]$, т. е. $E_{[1; 3]}(f) = [-9; -8]$ ($2 \in [1; 3]$).

д) (Дополнительное задание)

Базовый график $y = x^2$ необходимо сдвинуть вправо на 2 единицы и вниз на 9 единиц, чтобы построить график $y = x^2 - 4x - 5$, так как $y = (x - 2)^2 - 9$ (докажите).

$$8. y = x^2 + 2x - 3; \quad ([0; 2]).$$

Построим график:

$$c = -3; \quad x^2 + 2x = 0; \quad \begin{cases} x = 0 & A(0; -3) \\ x = -2 & B(-2; -3) \end{cases}.$$

$$x_0 = \frac{0 + (-2)}{2} = -1;$$

$$y_0 = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 3 = -4, \text{ тогда } K(-1; -4).$$

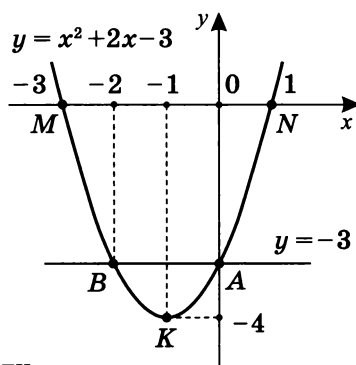
$$y = 0; \quad x^2 + 2x - 3 = 0;$$

по теореме Виета $\begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$,

т. е. $M(-3; 0)$, $N(1; 0)$.

Построили график по пяти точкам A , B , K , M и N .

Исследование по графику.

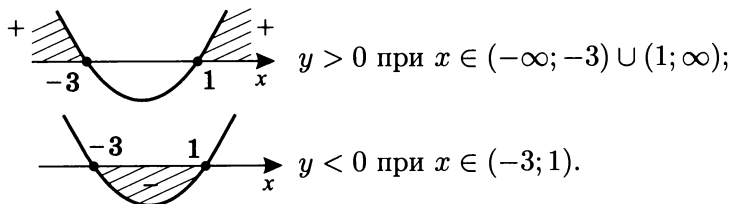


а) Промежутки монотонности.

На $[-1; \infty)$ $y = f(x)$ \uparrow (монотонно возрастает);

на $(-\infty; -1]$ $y = f(x)$ \downarrow (монотонно убывает).

б) Промежутки знакопостоянства.



в) Наибольшее или наименьшее значение функции.

$y_{\text{наим}} = -4$, причем $-4 = f(-1)$.

г) Множество всех значений на промежутке.

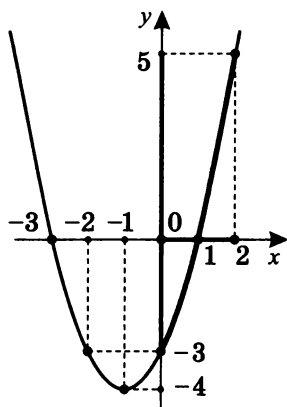
Из графика $y = x^2 + 2x - 3$ найдем на $[0; 2]$

$$f(0) = -3, \quad f(2) = 5.$$

Непосредственное вычисление значений функции

$$f(0) = -3; \quad f(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 - 3 = 5$$

подтверждают, что множество всех значений на $[0; 2]$ есть $[-3; 5]$, т. е. $E_{[0; 2]}(f) = [-3; 5]$ ($-1 \notin [0; 2]$).



д) (Дополнительное задание)

Базовый график $y = x^2$ необходимо сдвинуть влево на единицу и вниз на 4 единицы, чтобы построить график $y = x^2 + 2x - 3$, так как $y = (x + 1)^2 - 4$ (докажите).

9. $y = 12 + 4x - x^2$; $([-1; 3])$.

Построим график.

$$c = 12; \quad 4x - x^2 = 0; \quad x(4 - x) = 0; \quad \begin{cases} x = 0 & A(0; 12) \\ x = 4 & B(4; 12) \end{cases}.$$

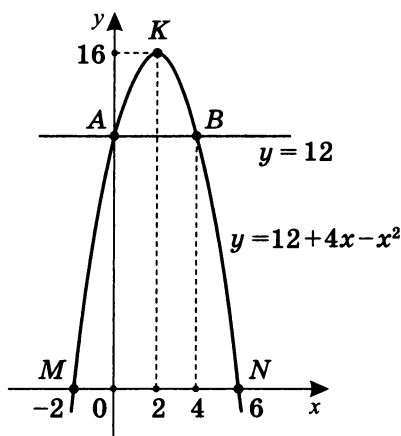
$$x_0 = \frac{0+4}{2} = 2;$$

$$y_0 = 12 + 4 \cdot 2 - 2^2 = 16, \text{ тогда } K(2; 16).$$

$$y = 0; \quad -x^2 + 4x + 12 = 0, \text{ т. е. } x^2 - 4x - 12 = 0.$$

$$\text{По теореме Виета } \begin{cases} x = 6 \\ x = -2 \end{cases}, \text{ т. е. } \begin{matrix} N(6; 0) \\ M(-2; 0) \end{matrix}.$$

Построили график по пяти точкам A , B , K , M и N .



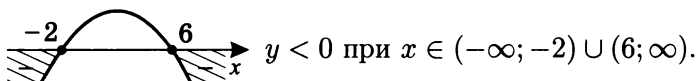
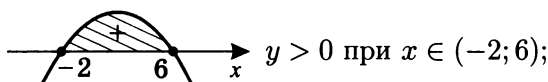
Исследование по графику.

а) Промежутки монотонности.

На $(-\infty; 2]$ $y = f(x) \uparrow$ (монотонно возрастает);

на $[2; \infty)$ $y = f(x) \downarrow$ (монотонно убывает).

б) Промежутки знакопостоянства.



в) Наибольшее или наименьшее значение функции.

Из графика следует, что $y_{\text{наиб}} = 16$,

причем $16 = f(2)$.

г) Множество всех значений функции на промежутке.

Из графика $y = 12 + 4x - x^2$ найдем на $[-1; 3]$
 $f(-1) = 7$; $f(3) = 15$.

Для контроля вычислим значения функции:

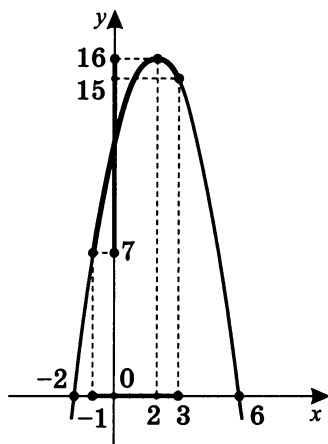
$$f(-1) = 12 + 4(-1) - (-1)^2 = 7;$$

$$f(3) = 12 + 4 \cdot 3 - 3^2 = 15.$$

Учтем, что $16 = y_{\text{наиб}}$, где $f(2) = 16$, и $2 \in [-1; 3]$.

Значит множество всех значений на $[-1; 3]$ есть промежутки $[7; 16]$,

или $E_{[-1; 3]}(y = 12 + x - x^2) = [7; 16]$ — область изменения функции ($2 \in [-1; 3]$).



д) (Дополнительное задание)

Базовый график $y = x^2$ необходимо сначала симметрично отразить относительно оси абсцисс, затем получившийся график $y = -x^2$ необходимо сдвинуть вправо на 2 единицы и вверх на 16 единиц, чтобы построить график $y = -x^2 + 4x + 12$, так как $y = -(x - 2)^2 + 16$ (докажите).

10. $y = 8 - 2x - x^2$; $([1; 3])$.

Построим график.

$$c = 8; \quad -2x - x^2 = 0; \quad -x(2 + x) = 0;$$

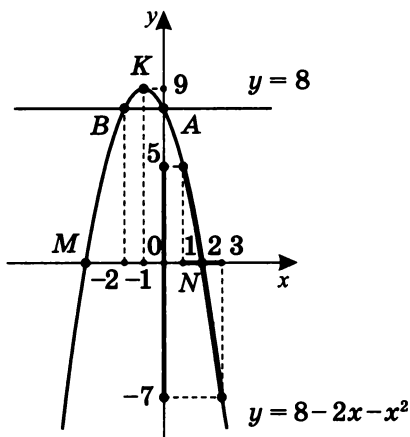
$$\begin{bmatrix} x = 0 & A(0; 8) \\ x = -2 & B(-2; 8) \end{bmatrix}.$$

$$x_0 = \frac{0 + (-2)}{2} = -1;$$

$$y = 0; \quad 8 - 2x - x^2 = 0, \text{ т. е. } x^2 + 2x - 8 = 0.$$

По теореме Виета $\begin{cases} x = -4 \\ x = 2 \end{cases}$, т. е. $M(-4; 0)$, $N(2; 0)$.

Построили график по пяти точкам A , B , K , M и N .



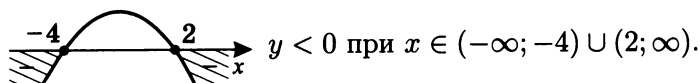
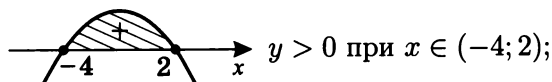
Исследование по графику.

а) Промежутки монотонности.

На $[-1; \infty)$ $y = f(x)$ \downarrow (монотонно убывает);

на $(-\infty; -1]$ $y = f(x)$ \uparrow (монотонно возрастает).

б) Промежутки знакопостоянства.



в) Наибольшее или наименьшее значение функции.

$y_{\text{наиб}} = 9$, причем $9 = f(-1)$.

г) Множество всех значений функции на промежутке.

Из графика $y = 8 - 2x - x^2$ на промежутке $[1; 3]$

$f(1) = 5$; $f(3) = -7$.

Вычислим значение функции:

$$f(1) = 8 - 2 \cdot 1 - 1^2 = 5;$$

$$f(3) = 8 - 2 \cdot 3 - 3^2 = -7.$$

Убедимся, что множество всех значений функции на $[1; 3]$ есть промежуток $[-7; 5]$,

или $E_{[1;3]}(y = 8 - 2x - x^2) = [-7; 5] \quad (-1 \notin [1; 3])$.

д) (Дополнительное задание)

Базовый график $y = x^2$ необходимо сначала симметрично отразить относительно оси абсцисс, затем получившийся график $y = -x^2$ необходимо сдвинуть влево на единицу и вверх на 9 единиц, чтобы построить график $y = -8 - 2x - x^2$, так как

$y = -(x + 1)^2 + 9$

 (докажите).

Тренировочная работа 1

Постройте эскиз графика функций и по графику исследуйте функцию по следующим характеристикам:

- а) промежутки монотонности;
- б) промежутки знакопостоянства;
- в) наибольшее или наименьшее значение;
- г) область изменения на промежутке $[p; k]$.
- д) При каких значениях x $L \leq y < T$, т.е. $y \in [L; T)$?

Вариант 1

1. $y = 3x - x^2$.

г) $D(f) = [-1; 2]$; $E(f) = ?$ ($p = -1$; $k = 2$)

д) $-4 \leq y < 2$: для каких x это верно?
($L = -4$; $T = 2$)

2. $y = 2x^2 - 3x - 9$.

г) $D(f) = [1; -2]$; $E(f) = ?$ ($p = 1$; $k = -2$)

д) $-7 \leq y < -4$: для каких x это верно?
($L = -7$; $T = -4$)

Вариант 2

1. $y = x^2 - 4x + 6$.

г) $D(f) = [3; 5]$; $E(f) = ?$ ($p = 3$; $k = 5$)

д) $6 \leq y < 11$: для каких x это верно?
($L = 6$; $T = 11$)

2. $y = -x^2 - 6x - 8$.

г) $D(f) = [-5; -1,5]$; $E(f) = ?$ ($p = -5$; $k = -1,5$)

д) $-8 \leq y < -3$: для каких x это верно?
($L = -8$; $T = -3$)

Вариант 3

1. $y = -x^2 - 2x - 6$.

г) $D(f) = [-0,5; 1]$; $E(f) = ?$ ($p = -0,5$; $k = 1$)

д) $-9 \leq y < -6$: для каких x это верно?

($L = -9$; $T = -6$)

2. $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2,5$.

г) $D(f) = [2; 7]$; $E(f) = ?$ ($p = 2$; $k = 7$)

д) $-1,5 \leq y < 6$: для каких x это верно?

($L = -1,5$; $T = 6$)

Вариант 4

1. $y = x^2 - 10x + 9$.

г) $D(f) = [3; 6]$; $E(f) = ?$ ($p = 3$; $k = 6$)

д) $E(f) = [-12; -7]$; $D(f) = ?$ ($L = -12$; $T = -7$)

2. $y = -2x^2 - 5x - 3$.

г) $D(f) = [-2; -0,25]$; $E(f) = ?$ ($p = -2$; $k = -0,25$)

д) $E(f) = [-1,875; -1]$; $D(f) = ?$

($L = -1,875$; $T = -1$)

Решение тренировочной работы 1**Вариант 1**

1. $y = 3x - x^2$.

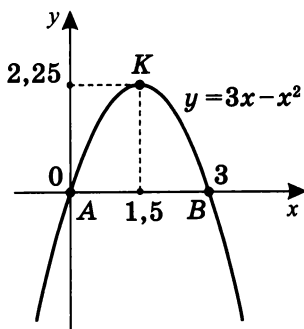
Построим график.

 $c = 0$, тогда

$$3x - x^2 = 0; \quad x(3 - x) = 0; \quad \begin{cases} x = 0 & A(0; 0) \\ x = 3 & B(3; 0) \end{cases}.$$

$$x_0 = \frac{0+3}{2} = 1,5; \quad y_0 = 3 \cdot 1,5 - 1,5^2 = 4,5 - 2,25 = 2,25;$$

$$K(1,5; 2,25).$$

По точкам A , B и K построим график.

По графику функции определим следующие ее характеристики.

а) Промежутки монотонности.

На $(-\infty; 1,5]$ $y = f(x) \uparrow$;на $[1,5; \infty)$ $y = f(x) \downarrow$.

б) Промежутки знакопостоянства.

 $y > 0$ при $x \in (0; 3)$; $y < 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$.

в) Наибольшее или наименьшее значение.

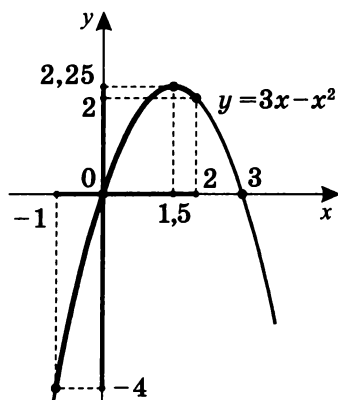
$$y(1,5) = 2,25 = y_{\text{наиб.}}$$

г) $D(f) = [-1; 2]$ $E(f) = ?$

$$f(-1) = 3(-1) - (-1)^2 = -4; \quad f(2) = 3 \cdot 2 - 2^2 = 2.$$

$$E(f) = [-4; 2,25]$$

$$(E_{[-1;2]} = [-4; 2,25], 1,5 \in [-1; 2]).$$



д) $-4 \leq y < 2$: для каких x это верно?

(См. чертеж на с. 55.)

Для этого пересечем график $y = 3x - x^2$ прямыми $y = 2$ и $y = -4$.

Из графика следует, что если $y = 2$, то $x = 1$ или $x = 2$, если $y = -4$, то $x = -1$ или $x = 4$.

Но это можно выяснить и аналитически:

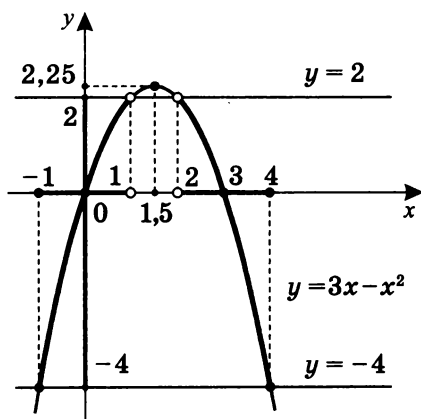
$$y = 2, \text{ т. е. } 2 = 3x - x^2;$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0; \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases};$$

$$y = -4, \text{ т. е. } -4 = 3x - x^2;$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0; \quad \begin{cases} x = 4 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Значит для функции $y = 3x - x^2$, если $E(f) = [-4; 2]$, то это верно только для $x \in [-1; 1) \cup (2; 4]$, что и требовалось найти.



2. $y = 2x^2 - 3x - 9$.

Построим график.

$c = -9$, тогда

$$2x^2 - 3x = 0; \quad x(2x - 3) = 0; \quad \begin{cases} x = 0 & A(0; -9) \\ x = 1,5 & B(1,5; -9) \end{cases}.$$

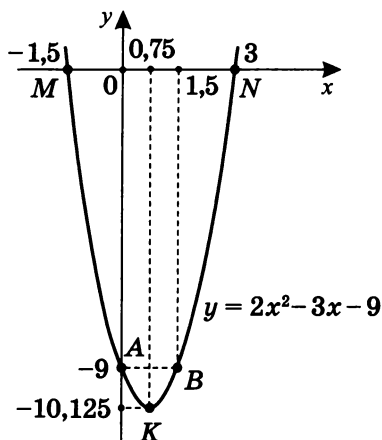
$$x_0 = \frac{0+1,5}{2} = \frac{3}{4} = 0,75;$$

$$\begin{aligned} y_0 &= 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{4} - 9 = \frac{2 \cdot 9}{16} - \frac{9}{4} - 9 = -\frac{9}{8} - 9 = \\ &= -10\frac{1}{8} = -10,125. \end{aligned}$$

$$y = 0; \quad 2x^2 - 3x - 9 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+72}}{4} = \frac{3 \pm 9}{4}; \quad \begin{cases} x = 3 & N(3; 0) \\ x = -1,5 & M(-1,5; 0) \end{cases}.$$

По точкам A , B , K , M и N построим график.



По графику функции определим следующие ее характеристики.

а) Промежутки монотонности.

На $(-\infty; 0,75]$ $y = f(x) \downarrow$;

на $[0,75; \infty)$ $y = f(x) \uparrow$.

б) Промежутки знакопостоянства.



$y > 0$ при $x \in (-\infty; -1,5) \cup (3; \infty)$;

$y < 0$ при $x \in (-1,5; 3)$.

в) Наибольшее или наименьшее значение.

Очевидно, что здесь есть только

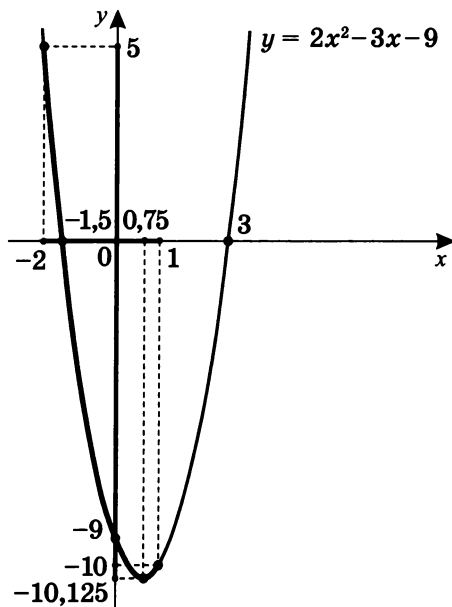
$y(0,75) = -10,125 = y_{\text{наим}}$.

г) $D(f) = [-2; 1]; \quad E(f) = ?$

$$f(-2) = 2(-2)^2 - 3(-2) - 9 = 5;$$

$$f(1) = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 9 = -10.$$

Значит $E(f) = [-10, 125; 5] \quad (0,75 \in [-2; 1])$.



д) $-7 \leq y < -4$: для каких x это верно?

(См. чертеж на с. 58.)

Пересечем график $y = 2x^2 - 3x - 9$ прямой $y = -7$, тогда $x = 2$ и $x = -\frac{1}{2}$.

При $y = -4$ $x = \frac{5}{2}$ и $x = -1$.

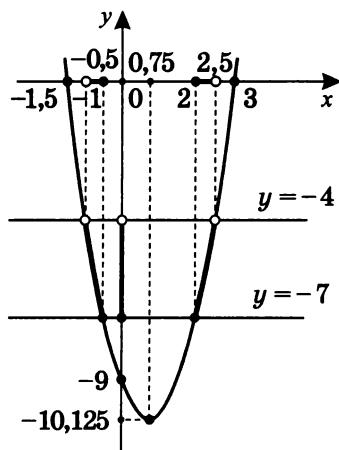
Очевидно, что лучше найти их точно аналитически, а не графически приближенно. Тогда если $y = -7$, то $2x^2 - 3x - 9 = -7$; $2x^2 - 3x - 2 = 0$;

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}; \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

При $y = -4$ $2x^2 - 3x - 9 = -4$; $2x^2 - 3x - 5 = 0$;

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4}; \quad \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x = -1 \end{cases}.$$

Значит для функции $y = 2x^2 - 3x - 9$, если $E(f) = [-7; -4)$, то это верно только для всех $x \in (-1; -0,5] \cup [2; 2,5)$.



Примечание. Отметим, что проверка возможна и более простым способом, т.е. непосредственным вычислением при подстановке.

$$f(2) = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 - 9 = -7;$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 9 = -7;$$

$$f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 9 = -4;$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right) - 9 = -4.$$

Вариант 2

1. $y = x^2 - 4x + 6$.

Построим график.

$c = 6$, тогда

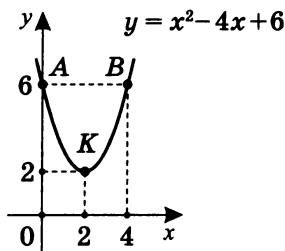
$$x^2 - 4x = 0; \quad x(x - 4) = 0; \quad \begin{cases} x = 0 & A(0; 6) \\ x = 4 & B(4; 6) \end{cases}.$$

$$x_0 = \frac{0+4}{2} = 2;$$

$$y_0 = 2^2 - 4 \cdot 2 + 6 = 2, \text{ т. е. } K(2; 2).$$

$D = 2^2 - 6 = -2 < 0$, корней нет, т. е. пересечения параболы $y = x^2 - 4x + 6 = 0$ с осью абсцисс нет.

По точкам A , B и K построим график.



По графику функции определим следующие ее характеристики.

а) Промежутки монотонности.

На $(-\infty; 2]$ $y = f(x) \downarrow$;

на $[2; \infty)$ $y = f(x) \uparrow$.

б) Промежутки знакопостоянства.

$y > 0$ при $x \in (-\infty; \infty)$, так как график параболы целиком находится в верхней полуплоскости.

в) Наибольшее или наименьшее значение.

Очевидно, что здесь есть только $y_{\min} = y(2) = 2$.

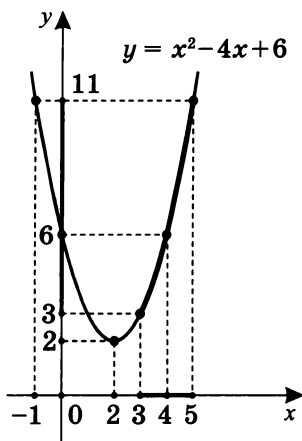
г) $D(f) = [3; 5]$; $E(f) = ?$

$$y(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 6 = 3; \quad y(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 + 6 = 11.$$

Значит $E(f) = [3; 11]$

$(2 \notin [3; 5])$,

или $E_{[3;5]}(f) = [3; 11]$.



д) $6 \leq y < 11$: для каких x это верно?

Из графика параболы следует, что если $y = 6$, то $x = 0$ и $x = 4$, а если $y = 11$, то $x = -1$ и $x = 5$.

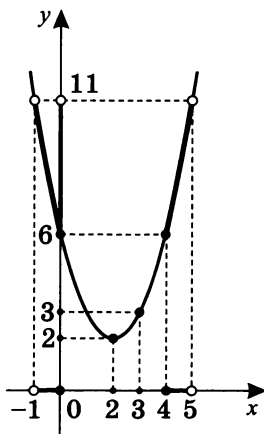
Но это можно выяснить и аналитически:

$$y = 6, \text{ т.е. } x^2 - 4x + 6 = 6; \quad x^2 - 4x = 0; \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases};$$

$$y = 11, \text{ т.е. } x^2 - 4x + 6 = 11;$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0; \quad \begin{cases} x = 5 \\ x = -1 \end{cases}$$

Следовательно, для функции $y = x^2 - 4x + 6$, если $E(f) = [6; 11)$, $x \in (-1; 0] \cup [4; 5)$.



2. $y = -x^2 - 6x - 8$.

Построим график.

$c = -8$, тогда

$$-x^2 - 6x = 0; \quad x^2 + 6x = 0; \quad \begin{cases} x = 0 & A(0; -8) \\ x = -6 & B(-6; -8) \end{cases}.$$

$$x_0 = \frac{0+(-6)}{2} = -3;$$

$$y_0 = -(-3)^2 - 6 \cdot (-3) - 8 = 1; \quad K(-3; 1).$$

$$y = 0; \quad -x^2 - 6x - 8 = 0; \quad x^2 + 6x + 8 = 0;$$

$$\begin{cases} x = -2 & N(-2; 0) \\ x = -4 & M(-4; 0) \end{cases}.$$

По точкам A , B , K ,
 M и N построим график
параболы.

По графику функции определим
следующие ее характеристики.

а) Промежутки монотонности.

На $(-\infty; -3]$ $y = f(x) \uparrow$;

на $[-3; \infty)$ $y = f(x) \downarrow$.

б) Промежутки знакопостоянства.



$y > 0$ при $x \in (-4; -2)$;

$y < 0$ при $x \in (-\infty; -4) \cup (-2; \infty)$.

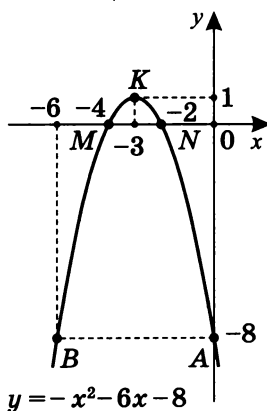
в) Наибольшее или наименьшее значение.

Очевидно, что здесь есть только $y(-3) = 1 = y_{\text{наиб.}}$

г) $D(f) = [-5; -1,5]$; $E(f) = ?$

$$f(-5) = -(-5)^2 - 6(-5) - 8 = -3;$$

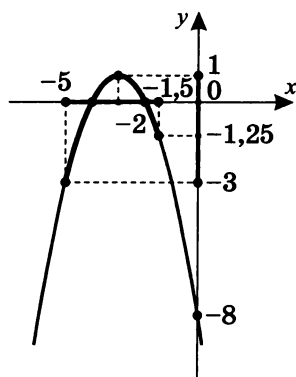
$$f(-1,5) = -(-1,5)^2 - 6(-1,5) - 8 = -1,25.$$



Значит $E(f) = [-3; 1]$,

или $E_{[-5; -1,5]} = [-3; 1]$

$(-2 \in [-5; -1,5])$.



д) $-8 \leq y < -3$: для каких x это верно?

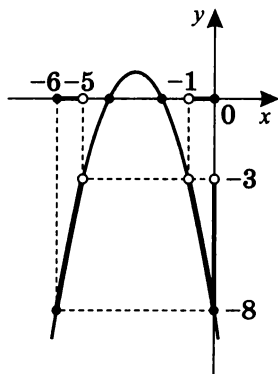
Пересечем график $y = -x^2 - 6x - 8$ прямыми:

$y = -3$, тогда $x = -5$ и $x = -1$, или решим уравнение: $-x^2 - 6x - 8 = -3$; $x^2 + 6x + 5 = 0$;

$x = -5$ и $x = -1$.

$y = -8$, тогда $x = -6$ и $x = 0$ (но эти точки нам уже известны), значит для функции $y = -x^2 - 6x - 8$, если $y \in [-8; -3)$, то это верно только для

$x \in [-6; -5) \cup (-1; 0]$.



Вариант 3

1. $y = -x^2 - 2x - 6$.

Построим график.

$c = -6$, тогда

$$-x^2 - 2x = 0; \quad x(x+2) = 0; \quad \begin{cases} x = 0 & A(0; -6) \\ x = -2 & B(-2; -6) \end{cases}.$$

$$x_0 = \frac{0+(-2)}{2} = -1;$$

$$y_0 = -(-1)^2 - 2(-1) - 6 = -5, \text{ значит } K(-1; -5).$$

$$y = 0, \quad x^2 + 2x + 6 = 0,$$

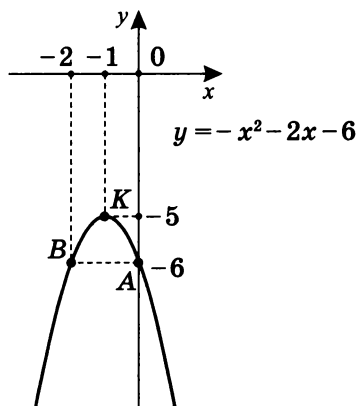
$$D = 1^2 - 5 = -5 < 0,$$

корней нет.

По точкам A , B и K

построим график.

По графику функции определим следующие ее характеристики.



а) Промежутки монотонности.

На $(-\infty; -1]$ $y = f(x) \uparrow$;

на $[-1; \infty)$ $y = f(x) \downarrow$.

б) Промежутки знакопостоянства.

$y > 0$ при $x \in \emptyset$;

$y < 0$ при $x \in (-\infty; \infty)$.

в) Наибольшее или наименьшее значение.

Очевидно, что здесь есть только $y_{\text{наиб}} = y(-1) = -5$.

г) $D(f) = [-0,5; 1]$ $E(f) = ?$

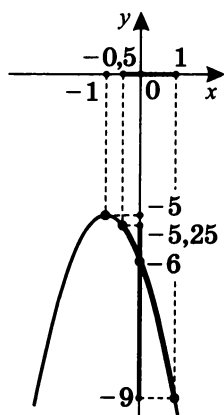
$$f(-0,5) = -(-0,5)^2 - 2(-0,5) - 6 = -5\frac{1}{4} = -5,25.$$

$$f(1) = -1^2 - 2 \cdot 1 - 6 = -9.$$

Значит $E(f) = [-9; -5,25]$,

$E_{[-0,5;1]} = [-9; -5,25]$

$(-1 \notin [-0,5;1])$.



д) $-9 \leq y < -6$: для каких x это верно?

Пересечем график $y = -x^2 - 2x - 6$ прямыми:

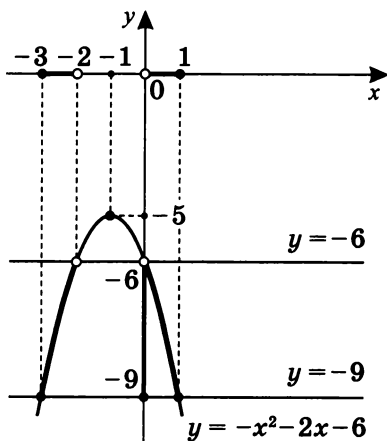
$y = -9$, тогда $x = 1$ и $x = -3$, или решим уравнение

$-x^2 - 2x - 6 = -9$, т.е. $x^2 + 2x - 3 = 0$, где $\begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$,

и прямой $y = -6$, тогда $x = 0$ и $x = -2$.

Значит для функции $y = -x^2 - 2x - 6$, если $y \in [-9; -6)$, то это верно только

для $x \in [-3; -2) \cup (0; 1]$.



$$2. y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2,5.$$

Построим график.

$c = 2,5$, тогда

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x = 0; \quad \frac{1}{2}x(x - 6) = 0; \quad \begin{cases} x = 0 & A(0; 2,5) \\ x = 6 & B(6; 2,5) \end{cases}.$$

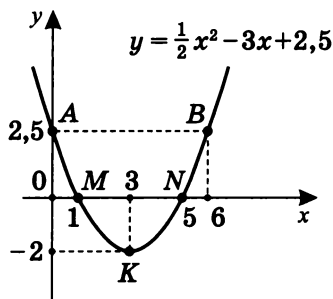
$$x_0 = \frac{0+6}{2} = 3;$$

$$y_0 = \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 2,5 = -2, \text{ т. е. } K(3; -2).$$

$$y = 0; \quad \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2,5 = 0; \quad x^2 - 6x + 5 = 0;$$

$$\begin{cases} x = 5 & N(5; 0) \\ x = 1 & M(1; 0) \end{cases}.$$

По точкам A , B , K , M и N построим график.



По графику функции определим следующие ее характеристики.

а) Промежутки монотонности.

На $(-\infty; 3]$ $y = f(x) \downarrow$;

на $[3; \infty)$ $y = f(x) \uparrow$.

б) Промежутки знакопостоянства.



$y > 0$ при $x \in (-\infty; 1) \cup (5; \infty)$;

$y < 0$ при $x \in (1; 5)$.

в) Наибольшее или наименьшее значение.

Очевидно, что здесь есть только $y_{\text{наим}} = y(3) = -2$.

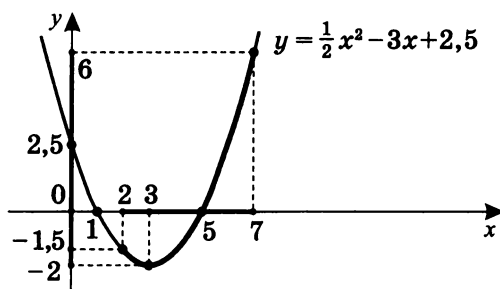
г) $D(f) = [2; 7]$; $E(f) = ?$

$$f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 2,5 = -1,5;$$

$$f(7) = \frac{1}{2} \cdot 7^2 - 3 \cdot 7 + 2,5 = 6.$$

Значит $E(f) = [-2; 6]$,

или $E_{[2;7]} = [-2; 6]$ ($3 \in [2; 7]$).



д) $-1,5 \leq y < 6$: для каких x это верно?

$E(f) = [-1,5; 6)$, необходимо определить $D(f)$.

Пересечем график $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2,5$ прямыми:

$$y = -1,5, \text{ тогда } x = 2 \text{ и } x = 4, \text{ или решим уравнение}$$

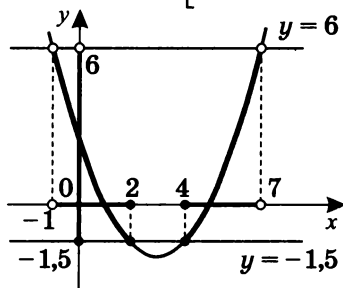
$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2,5 = -1,5; \quad x^2 - 6x + 8 = 0; \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases};$$

$$y = 6, \text{ тогда } x = 7 \text{ и } x = -1, \text{ или решим уравнение}$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2,5 = 6; \quad x^2 - 6x - 7 = 0; \quad \begin{cases} x = 7 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Значит

$$D(f) = (-1; 2] \cup [4; 7).$$



Вариант 4

1. $y = x^2 - 10x + 9$.

Построим график.

$c = 9$, тогда

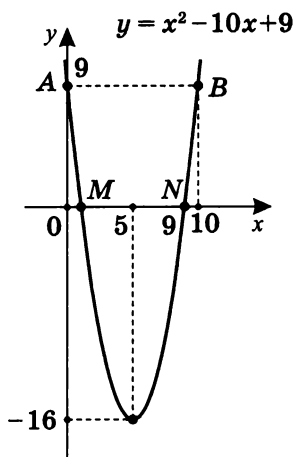
$$x^2 - 10x = 0; \quad x(x - 10) = 0; \quad \begin{cases} x = 0 & A(0; 9) \\ x = 10 & B(10; 9) \end{cases}.$$

$$x_0 = \frac{0+10}{2} = 5;$$

$$y_0 = 5^2 - 10 \cdot 5 + 9 = -16, \text{ т. е. } K(5; -16).$$

$$y = 0; \quad x^2 - 10x + 9 = 0; \quad \begin{cases} x = 1 & M(1; 0) \\ x = 9 & N(9; 0) \end{cases}.$$

По точкам A , B , K , M и N построим график.



По графику функции определим следующие ее характеристики.

а) Промежутки монотонности.

На $(-\infty; 5]$ $y = f(x) \downarrow$;

на $[5; \infty)$ $y = f(x) \uparrow$.

б) Промежутки знакопостоянства.



$y > 0$ при $x \in (-\infty; 1) \cup (9; \infty)$;

$y < 0$ при $x \in (1; 9)$.

в) Наибольшее или наименьшее значение.

Очевидно, что здесь есть только $y_{\text{наим}} = y(5) = -16$.

г) $D(f) = [3; 6]$; $E(f) = ?$

$f(3) = 3^2 - 10 \cdot 3 + 9 = -12$;

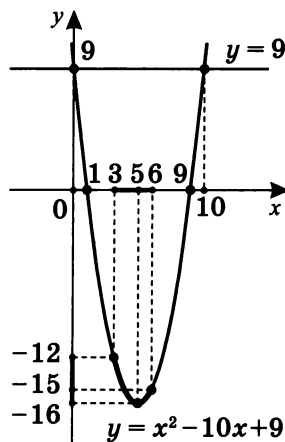
$f(6) = 6^2 - 10 \cdot 6 + 9 = -24 + 9 = -15$.

Из графика следует,

что $E(f) = [-16; -12]$,

или $E_{[3;6]} = [-16; -12]$

($5 \in [3; 6]$).



д) $E(f) = [-12; -7]$; $D(f) = ?$

Пересечем график $y = x^2 - 10x + 9$ прямыми:

$y = -12$, получим $x = 7$ и $x = 3$,

или решим уравнение

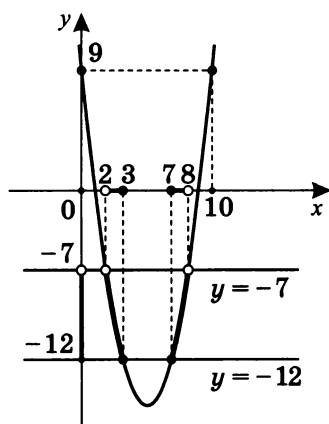
$$x^2 - 10x + 9 = -12; \quad x^2 - 10x + 21 = 0; \quad \begin{cases} x = 3 \\ x = 7 \end{cases};$$

$y = -7$, получим $x = 2$ и $x = 8$,

или решим уравнение

$$x^2 - 10x + 9 = -7; \quad x^2 - 10x + 16 = 0; \quad \begin{cases} x = 8 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Следовательно, $D(f) = (2; 3] \cup [7; 8)$.



2. $y = -2x^2 - 5x - 3$.

Построим график.

$c = -3$, тогда

$$-2x^2 - 5x = 0; \quad -x(2x + 5) = 0;$$

$$\begin{cases} x = 0 & A(0; -3) \\ x = -2,5 & B(-2,5; -3) \end{cases}$$

$$x_0 = \frac{0 + (-2,5)}{2} = -1,25 = -1\frac{1}{4};$$

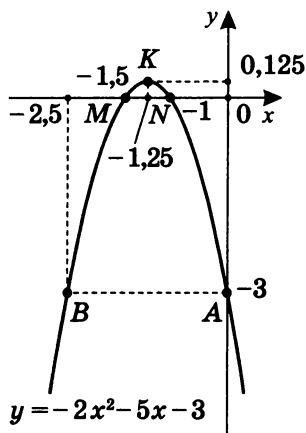
$$\begin{aligned} y_0 &= -2 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right)^2 - 5 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) - 3 = -\frac{2 \cdot 25}{16} + \frac{25}{4} - 3 = \\ &= \frac{25}{8} - 3 = \frac{1}{8} = 0,125; \end{aligned}$$

$$K(-1,25; 0,125).$$

$$y = 0; \quad -2x^2 - 5x - 3 = 0; \quad 2x^2 + 5x + 3 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4} = \frac{-5 \pm 1}{4}; \quad \begin{cases} x = -1 & N(-1; 0) \\ x = -1,5 & M(-1,5; 0) \end{cases}$$

По точкам A , B , K , M и N построим график.



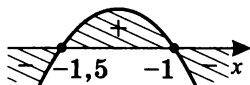
По графику функции определим следующие ее характеристики.

а) Промежутки монотонности.

На $(-\infty; -1,25]$ $y = f(x) \uparrow$;

на $[-1,25; \infty)$ $y = f(x) \downarrow$.

б) Промежутки знакопостоянства.



$y > 0$ при $x \in (-1,5; -1)$;

$y < 0$ при $x \in (-\infty; -1,5) \cup (-1; \infty)$.

в) Наибольшее или наименьшее значение.

Очевидно, что здесь есть только

$$y_{\text{наиб}} = y(-1,25) = 0,125.$$

г) $D(f) = [-2; -0,25]; \quad E(f) = ?$

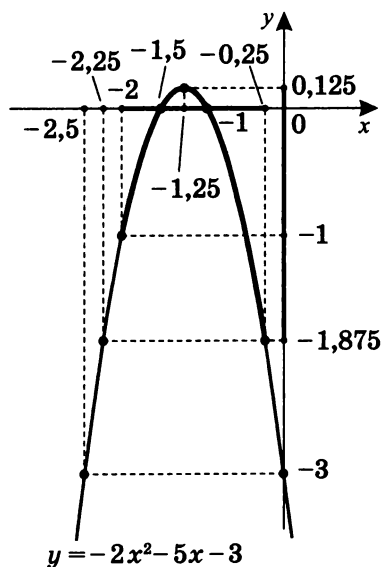
$$f(-2) = -2(-2)^2 - 5(-2) - 3 = -1;$$

$$\begin{aligned} f(-0,25) &= -2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2 - 5 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - 3 = \\ &= -\frac{1}{8} + \frac{5}{4} - 3 = -1\frac{7}{8} = -1,875. \end{aligned}$$

Значит, $E(f) = [-1,875; 0,125]$,

или $E_{[-2; -0,25]} = [-1,875; 0,125]$

$(-1,25 \in [-2; -0,25])$.



д) $E(f) = [-1,875; -1] \quad D(f) = ?$

Графически точно решить этот вопрос очень трудно. Рассмотрим этот вопрос аналитически, для этого решим уравнение $y = -1,875$ и $y = -1$.

$$-2x^2 - 5x - 3 = -1,875; \quad -2x^2 - 5x - 3 = -\frac{15}{8};$$

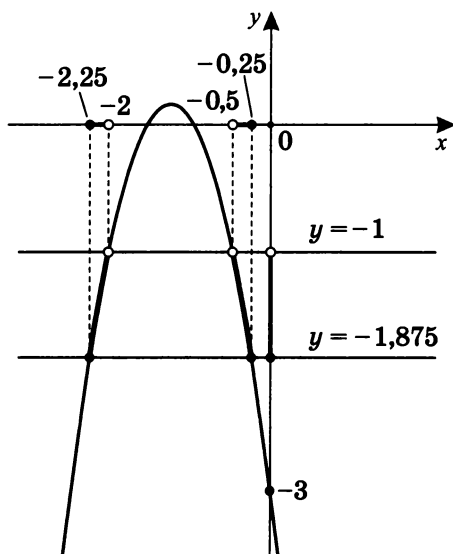
$$-16x^2 - 40x - 9 = 0, \text{ т. е. } 16x^2 + 40x + 9 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 144}}{16} = \frac{-20 \pm 16}{16}; \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{4} \\ x = -\frac{9}{4} \end{cases}.$$

$$-2x^2 - 5x - 3 = -1; \quad 2x^2 + 5x + 2 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4}; \quad \begin{cases} x = -2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Следовательно, $D(f) = [-2, 25; -2) \cup (-0,5; -0,25]$.



2

Метод преобразований

Первоначальные соображения, связанные с опытом построения графиков квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) методом сечения, привели к возможности построения таких графиков сдвигом вдоль осей координат.

Рассмотрим такой способ более подробно и для более широкого класса элементарных функций.

Вопрос в общем виде звучит так: как построить график функции $y = Af(kx + b) + C$, если известен график функции $y = f(x)$?

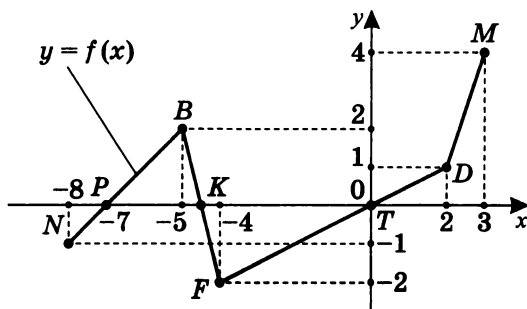
Построение графика функции $y = f(x + b)$

Для графика функции, заданной в общем виде уравнением $y = Af(kx + b) + C$, рассмотрим случай $A = 1$, $k = 1$, $C = 0$.

Ясно, что в этом случае необходимо построить график функции $y = f(x + b)$, зная график функции $y = f(x)$.

Рассмотрим базовый график кусочно-линейной функции, заданной точками N , B , F , D и M .

Отметим точки P , K и T на оси абсцисс (T — и на оси ординат).



Пусть $b = -2$.

Тогда для $y = f(x - 2)$ точки N , B , F , D и M перейдут в точки N_1 , B_1 , F_1 , D_1 и M_1 .

На примере точки N получаем:

$x - 2 = -8$, т.е. $x = -6$; $y = -1$ (так как $f(-8) = -1$).

$N(-8; -1) \rightarrow N_1(-6; -1)$, т.е. $x - 2 = -8$, $x = -6$ и $y = -1$;

$B(-5; 2) \rightarrow B_1(-3; 2)$, т.е. $x - 2 = -5$, $x = -3$ и $y = 2$;

$F(-4; -2) \rightarrow F_1(-2; -2)$ (далее аналогично);

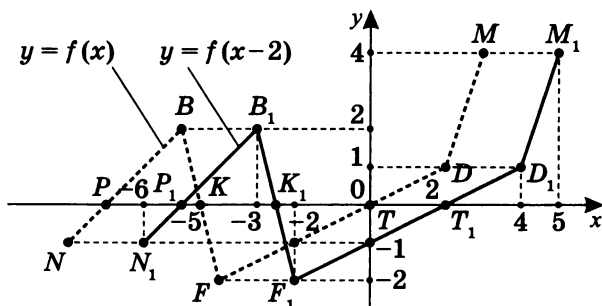
$D(2; 1) \rightarrow D_1(4; 1)$;

$M(3; 4) \rightarrow M_1(5; 4)$;

$P(-7; 0) \rightarrow P_1(-5; 0)$;

$K(-4; 0) \rightarrow K_1(-2; 0)$;

$T(0; 0) \rightarrow T_1(2; 0)$.



Пусть $b = 1$.

Тогда для $y = f(x + 1)$:

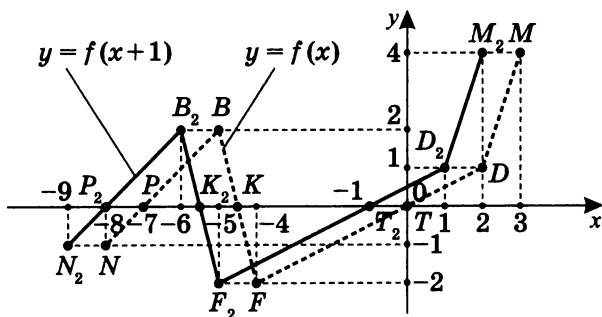
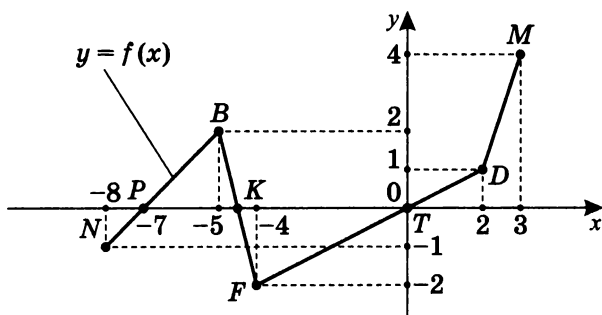
$N(-8; -1) \rightarrow N_2(-9; -1)$, т.е. $x + 1 = -8$, $x = -9$ и $y = -1$;

$B(-5; 2) \rightarrow B_2(-6; 2)$, т.е. $x + 1 = -5$, $x = -6$ и $y = 2$;

$F(-4; -2) \rightarrow F_2(-5; -2)$ (далее аналогично);

$D(2; 1) \rightarrow D_2(1; 1)$.

Аналогично для точек P , K , T и M .



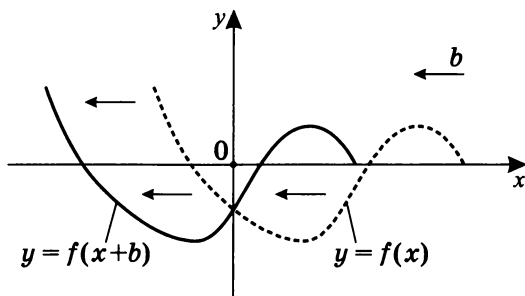
Так как $N(x_0; y_0) \in \Gamma(y = f(x))$, то если $x_1 = x_0 + b$, то $N_1(x_0 + b; y_0) \in \Gamma(y = f(x + b))$.

Значит, точка $N_1(x_1; y_0)$ получена сдвигом точки $N(x_0; y_0)$ вдоль оси абсцисс на величину $|b|$: *вправо*, если $b < 0$, и *влево*, если $b > 0$.

Очевидно, что при преобразовании вида $y = f(x + b)$ графика функции $y = f(x)$ область *изменения* остается прежней, а конечная область *определения* сдвигается на $|b|$ вправо при $b < 0$ и влево при $b > 0$. Если область определения — $(-\infty; \infty)$, то изменений нет.

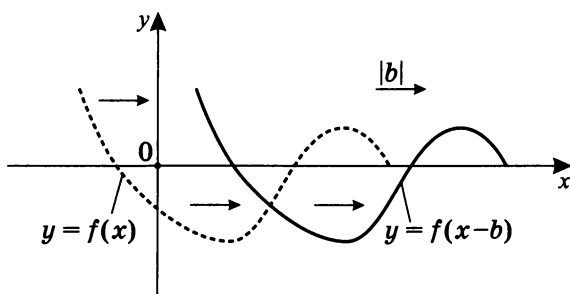
1. $y = f(x + b)$
($b > 0$)

График получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox на $|b|$ единиц *влево*.



2. $y = f(x + b)$
($b < 0$)

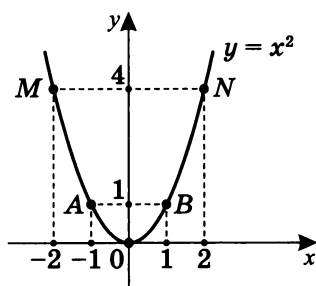
График получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox на $|b|$ единиц *вправо*.



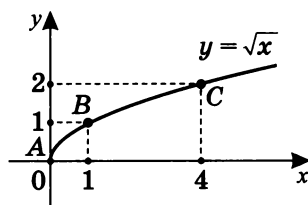
Графики основных элементарных функций

Напомним графики основных элементарных функций, чтобы в дальнейшем использовать их для иллюстрации методов преобразований.

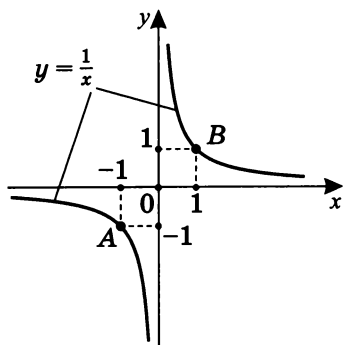
1.



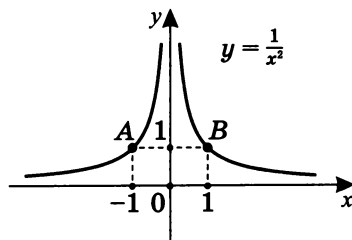
2.



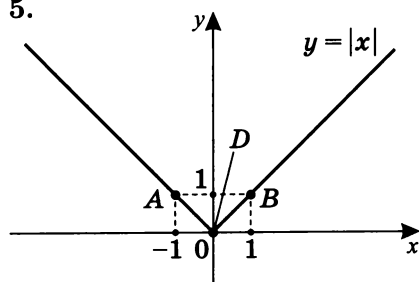
3.



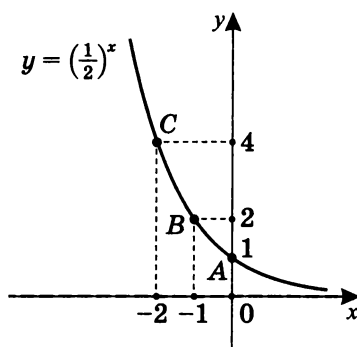
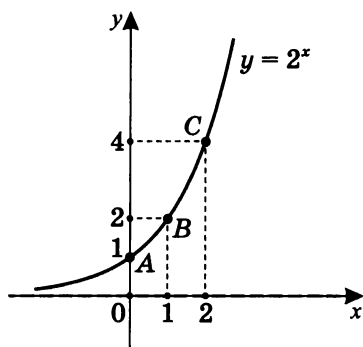
4.



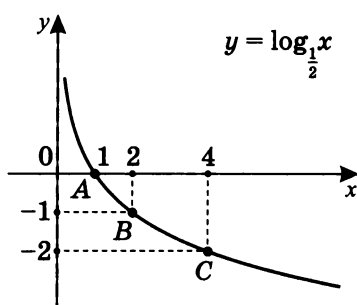
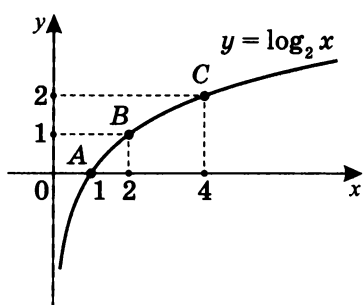
5.



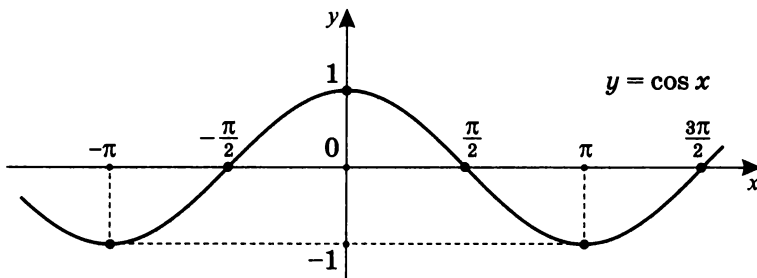
6.



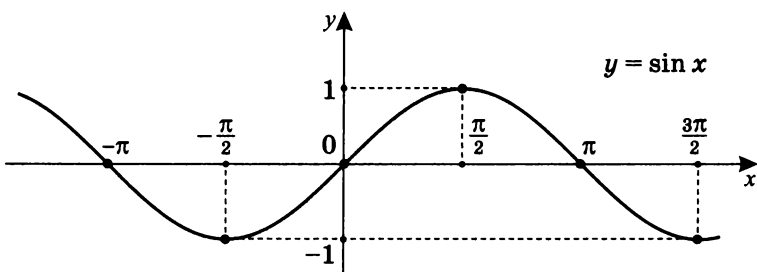
7.



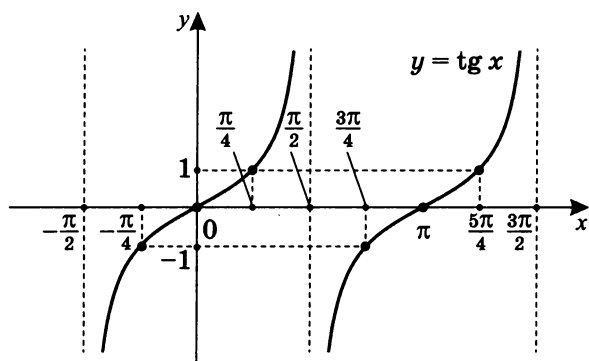
8.



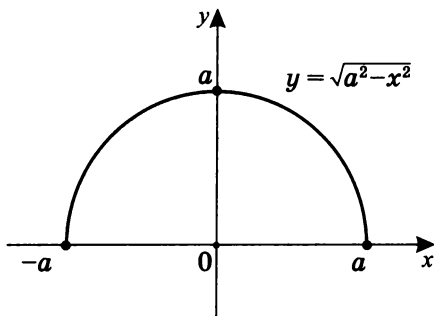
9.



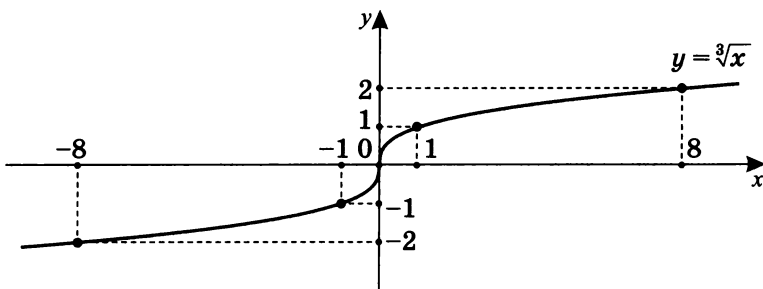
10.



11.



12.



Практикум 2

Постройте графики функций, используя преобразования вида $y = f(x + b)$.

1. $y = f(x) = x^2$,

где а) $b = -2$; б) $b = 1$.

2. $y = f(x) = \frac{1}{x}$,

где а) $b = 1$; б) $b = -2$.

3. $y = f(x) = \sqrt{x}$,

где а) $b = -3$; б) $b = 2$.

4. $y = f(x) = |x|$,

где а) $b = 3$; б) $b = -2$.

5. $y = f(x) = 2^x$,

где а) $b = -2$; б) $b = 1$.

6. $y = f(x) = \log_2 x$,

где а) $b = 2$; б) $b = -1$.

7. а) $y = f(x) = \sin x$ при $b = -\frac{\pi}{2}$;

б) $y = f(x) = \operatorname{tg} x$ при $b = \frac{\pi}{4}$.

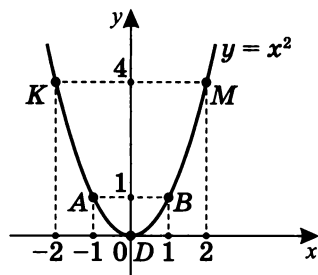
8. $y = f(x) = \frac{1}{x^2}$,

где а) $b = -1$; б) $b = 2$.

Решение практикума 2

1. Пусть $f(x) = x^2$. Рассмотрим график $y = x^2$.

Очевидно, что ось ординат
есть ось симметрии графика
функции $y = x^2$.



- а) Пусть $b = -2$, т. е. $f(x - 2) = (x - 2)^2$.

Тогда имеем сдвиг графика функции $y = f(x)$ *вправо*
на 2 относительно оси симметрии параболы $y = x^2$.

Построим график функции $y = f(x - 2)$,

т. е. $y = (x - 2)^2$:

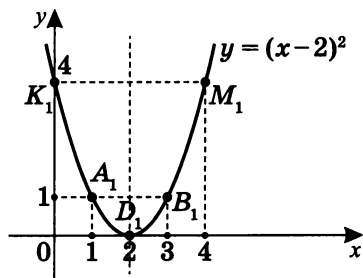
$$K(-2; 4) \rightarrow K_1(0; 4);$$

$$A(-1; 1) \rightarrow A_1(1; 1);$$

$$D(0; 0) \rightarrow D_1(2; 0);$$

$$B(1; 1) \rightarrow B_1(3; 1);$$

$$M(2; 4) \rightarrow M_1(4; 4).$$



- б) Пусть $b = 1$, т. е. $f(x + 1) = (x + 1)^2$.

Тогда имеем сдвиг графика функции $y = f(x)$ *влево*
на 1 относительно оси симметрии параболы $y = x^2$.

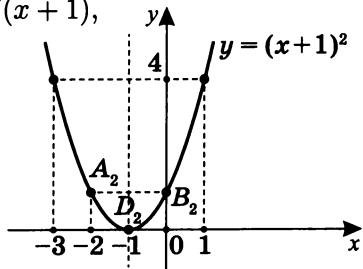
Построим график $y = f(x + 1)$,

т. е. $y = (x + 1)^2$:

$$A(-1; 1) \rightarrow A_2(-2; 1);$$

$$D(0; 0) \rightarrow D_2(-1; 0);$$

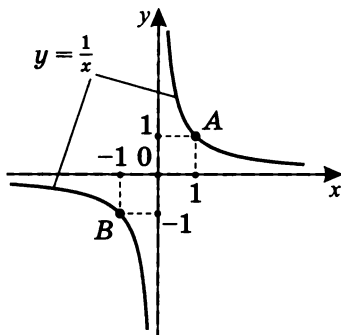
$$B(1; 1) \rightarrow B_2(0; 1).$$



Так как парабола определяется тремя точками, то рассматривать изменение координат точек K и M не обязательно.

2. Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$. Рассмотрим график $y = \frac{1}{x}$.

Для этого графика ось абсцисс $y = 0$ — горизонтальная асимптота, а ось ординат $x = 0$ — вертикальная асимптота.



- а) Пусть $b = 1$, т.е. $f(x+1) = \frac{1}{x+1}$.

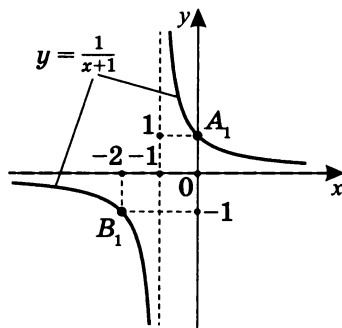
Построим график функции $y = f(x+1)$,

т.е. $y = \frac{1}{x+1}$.

Имеем сдвиг графика функции $y = \frac{1}{x}$ влево на 1.

Горизонтальная асимптота $y = 0$ сохраняется, вертикальная асимптота $x = 0$ переходит к $x = -1$.

$A(1; 1) \rightarrow A_1(0; 1); \quad B(-1; -1) \rightarrow B_1(-2; -1).$



б) Пусть $b = -2$, т. е. $f(x-2) = \frac{1}{x-2}$.

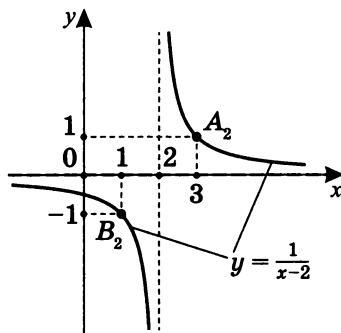
Построим график функции $y = f(x-2)$,

т. е. $y = \frac{1}{x-2}$.

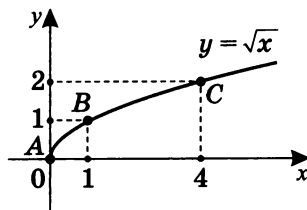
Имеем сдвиг графика функции $y = \frac{1}{x}$ *вправо* на 2.

Горизонтальная асимптота $y = 0$ сохраняется, вертикальная асимптота $x = 0$ переходит к $x = 2$.

$A(1; 1) \rightarrow A_2(3; 1); \quad B(-1; -1) \rightarrow B_2(1; -1)$.



3. Пусть $f(x) = \sqrt{x}$. Рассмотрим график $y = \sqrt{x}$.



а) Пусть $b = -3$, т. е. $f(x-3) = \sqrt{x-3}$.

Построим график функции $y = f(x-3)$,

т. е. $y = \sqrt{x-3}$.

Имеем сдвиг графика

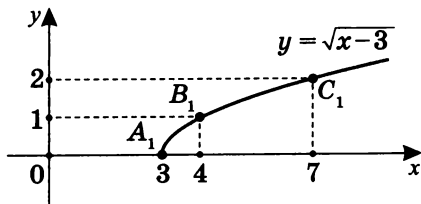
функции $y = \sqrt{x}$

вправо на 3.

$A(0; 0) \rightarrow A_1(3; 0);$

$B(1; 1) \rightarrow B_1(4; 1);$

$C(4; 2) \rightarrow C_1(7; 2).$



- б) Пусть $b = 2$, т.е. $f(x+2) = \sqrt{x+2}$.

Построим график функции $y = f(x+2)$,

т.е. $y = \sqrt{x+2}$:

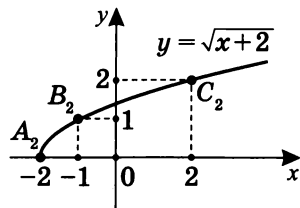
Имеем сдвиг графика

функции $y = \sqrt{x}$ влево на 2.

$A(0;0) \rightarrow A_2(-2;0)$;

$B(1;1) \rightarrow B_2(-1;1)$;

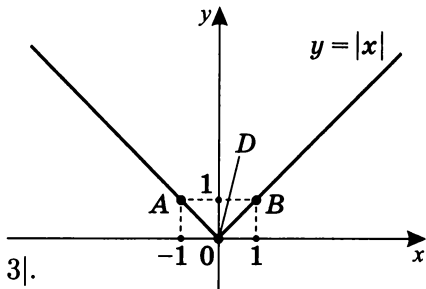
$C(4;2) \rightarrow C_2(2;2)$.



4. Пусть $f(x) = |x|$.

Рассмотрим график

$y = |x|$.



- а) Пусть $b = 3$,

т.е. $f(x+3) = |x+3|$.

Построим график функции

$y = f(x+3)$, т.е. $y = |x+3|$.

Имеет сдвиг графика

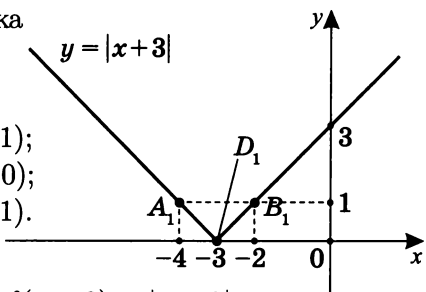
функции $y = |x|$

влево на 3.

$A(-1;1) \rightarrow A_1(-4;1)$;

$D(0;0) \rightarrow D_1(-3;0)$;

$B(1;1) \rightarrow B_1(-2;1)$.



- б) Пусть $b = -2$, т.е. $f(x-2) = |x-2|$.

Построим график функции

$y = f(x-2)$, т.е. $y = |x-2|$.

Имеем сдвиг графика

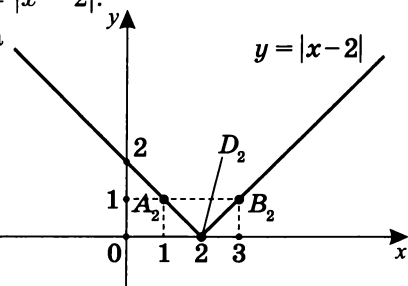
функции $y = |x|$

вправо на 2.

$A(-1;1) \rightarrow A_2(1;1)$;

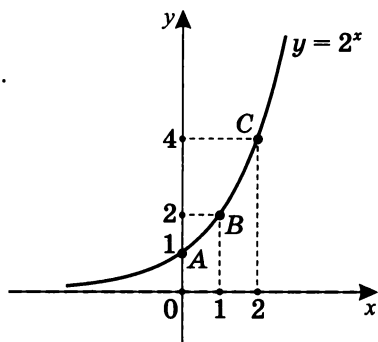
$D(0;0) \rightarrow D_2(2;0)$;

$B(1;1) \rightarrow B_2(3;1)$.



5. Пусть $f(x) = 2^x$.

Рассмотрим график $y = 2^x$.



а) Пусть $b = -2$, т.е. $f(x - 2) = 2^{x-2}$.

Построим график

функции $y = f(x - 2)$,

т.е. $y = 2^{x-2}$.

Имеем сдвиг графика

функции $y = 2^x$

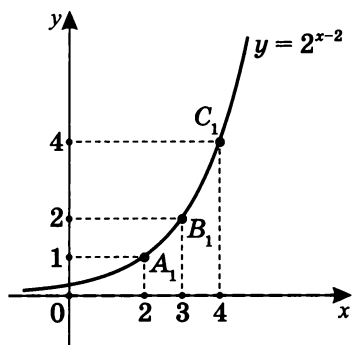
вправо на 2.

$A(0; 1) \rightarrow A_1(2; 1)$;

$B(1; 2) \rightarrow B_1(3; 2)$;

$C(2; 4) \rightarrow C_1(4; 4)$.

Горизонтальная асимптота $y = 0$ сохраняется.



б) Пусть $b = 1$, т.е. $f(x + 1) = 2^{x+1}$.

Построим график функции

$y = f(x + 1)$, т.е. $y = 2^{x+1}$.

Имеем сдвиг графика

функции $y = 2^x$

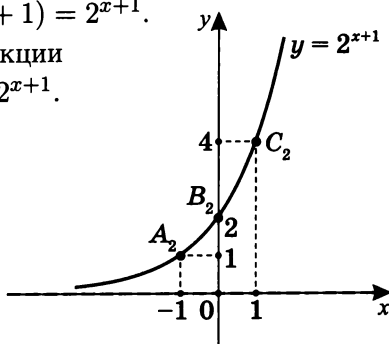
влево на 1.

$A(0; 1) \rightarrow A_2(-1; 1)$;

$B(1; 2) \rightarrow B_2(0; 2)$;

$C(2; 4) \rightarrow C_2(1; 4)$.

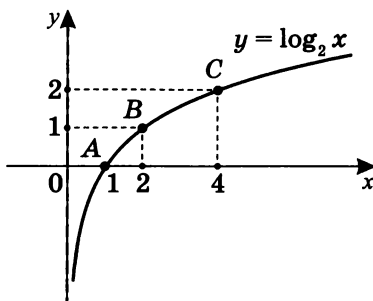
Горизонтальная асимптота $y = 0$ сохраняется.



6. Пусть $f(x) = \log_2 x$.

Рассмотрим график

$$y = \log_2 x.$$



а) Пусть $b = 2$, т. е. $f(x + 2) = \log_2(x + 2)$.

Построим график функ-

$$ции y = f(x + 2),$$

$$\text{т. е. } y = \log_2(x + 2).$$

Имеем сдвиг графика

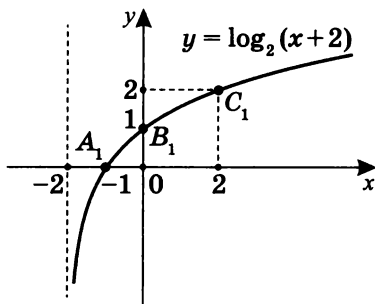
$$\text{функции } y = \log_2 x$$

влево на 2.

$$A(1; 0) \rightarrow A_1(-1; 0);$$

$$B(2; 1) \rightarrow B_1(0; 1);$$

$$C(4; 2) \rightarrow C_1(2; 2).$$



Вертикальная асимптота $x = 0$ переходит в $x = -2$.

б) Пусть $b = -1$, т. е. $f(x - 1) = \log_2(x - 1)$.

Построим график функ-

$$ции y = f(x - 1),$$

$$\text{т. е. } y = \log_2(x - 1).$$

Имеем сдвиг графика

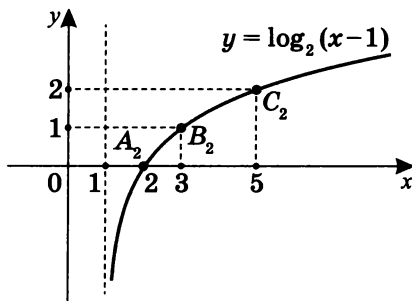
$$\text{функции } y = \log_2 x$$

вправо на 1.

$$A(1; 0) \rightarrow A_2(2; 0);$$

$$B(2; 1) \rightarrow B_2(3; 1);$$

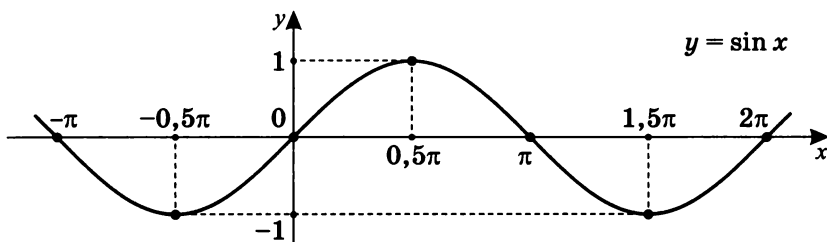
$$C(4; 2) \rightarrow C_2(5; 2).$$



Вертикальная асимптота $x = 0$ переходит в $x = 1$.

7. а) Пусть $f(x) = \sin x$.

Рассмотрим график $y = \sin x$.

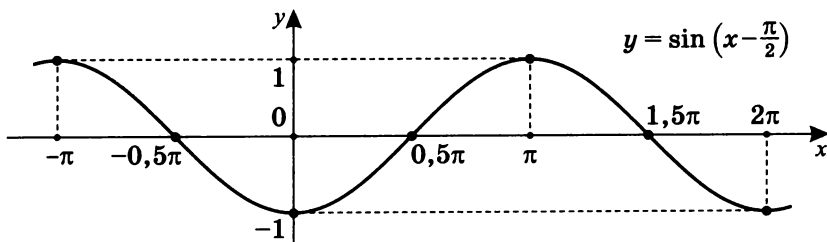


Пусть $b = -\frac{\pi}{2}$, т. е. $f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Построим график функции $y = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$,

т. е. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Имеем сдвиг графика функции $y = \sin x$ *вправо* на $\frac{\pi}{2}$.



Для целых k :

$$A(2\pi k; 0) \rightarrow A_1\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 0\right);$$

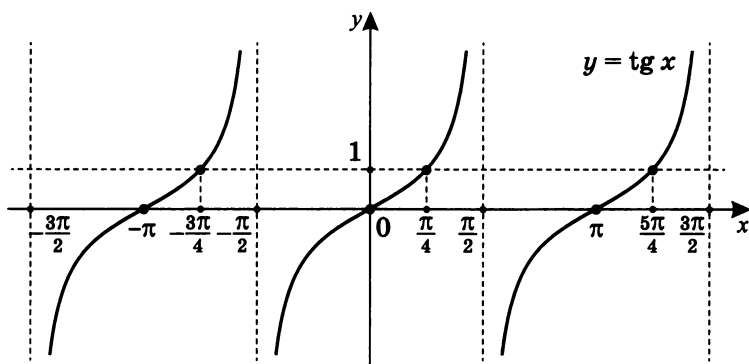
$$B\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 1\right) \rightarrow B_1(\pi + 2\pi k; 1);$$

$$C(\pi + 2\pi k; 0) \rightarrow C_1\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k; 0\right);$$

$$D\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k; -1\right) \rightarrow D_1(2\pi + 2\pi k; -1).$$

б) Пусть $f(x) = \operatorname{tg} x$.

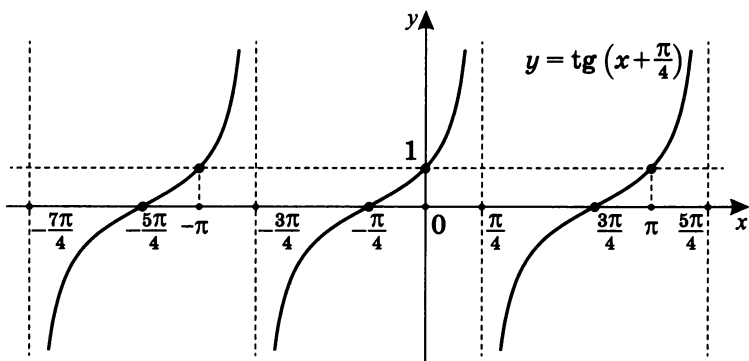
Рассмотрим график $y = \operatorname{tg} x$.



Пусть $b = \frac{\pi}{4}$, т. е. $f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Построим график функции $y = f\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$,

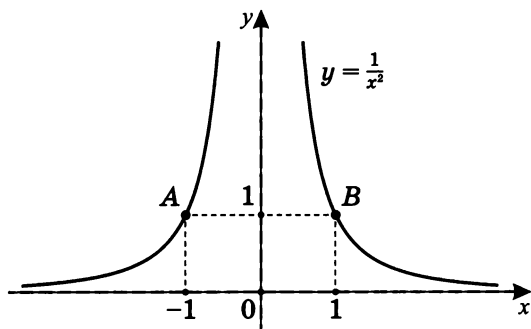
т. е. $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.



Для целых k вертикальная асимптота $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ переходит в $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, а вертикальная асимптота $x = -\frac{\pi}{2} + \pi k$ переходит в $x = -\frac{3\pi}{4} + \pi k$.

8. Пусть $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Рассмотрим график $y = \frac{1}{x^2}$.



а) Пусть $b = -1$, т. е. $f(x - 1) = \frac{1}{(x-1)^2}$.

Построим график функции $y = f(x - 1)$,

т. е. $y = \frac{1}{(x-1)^2}$.

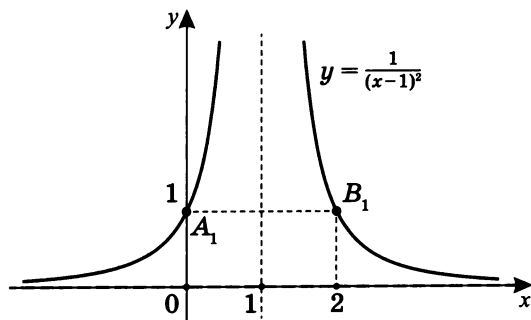
Имеем сдвиг графика функции $y = \frac{1}{x^2}$ *вправо* на 1.

Горизонтальная асимптота $y = 0$ сохраняется.

Вертикальная асимптота $x = 0$ переходит в $x = 1$.

$A(-1; 1) \rightarrow A_1(0; 1)$;

$B(1; 1) \rightarrow B_1(2; 1)$.



б) Пусть $b = 2$, т.е. $f(x+2) = \frac{1}{(x+2)^2}$.

Построим график функции $y = f(x+2)$,

т.е. $y = \frac{1}{(x+2)^2}$.

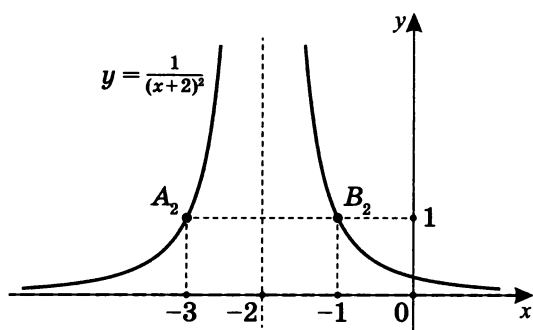
Имеем сдвиг графика функции $y = \frac{1}{x^2}$ влево на 2.

Горизонтальная асимптота $y = 0$ сохраняется.

Вертикальная асимптота $x = 0$ переходит в $x = -2$.

$A(-1; 1) \rightarrow A_2(-3; 1);$

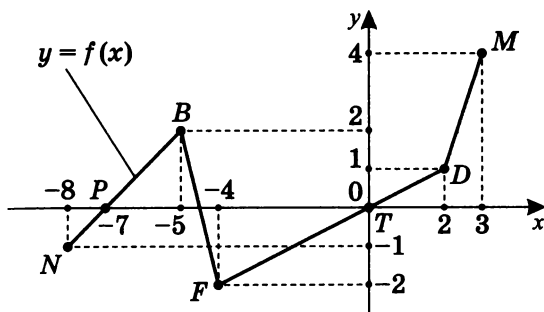
$B(1; 1) \rightarrow B_2(-1; 1).$



Построение графика функции $y = f(x) + C$

Для графика функции, заданной в общем виде уравнением $y = Af(kx + b) + C$, рассмотрим случай $A = 1$, $k = 1$, $b = 0$: в этом случае необходимо построить график функции $y = f(x) + C$, зная график функции $y = f(x)$.

Рассмотрим график кусочно-линейной функции $y = f(x)$.



Очевидно, что для $y_0 = f(x_0)$ $y_1 = y_0 + C$.

Пусть $C = 1$.

Тогда для $y = f(x) + 1$ $y_1 = y_0 + 1$, и для данных точек:

$N(-8; -1) \rightarrow N_1(-8; 0)$, т. е. $y = -1 + 1$, $y = 0$ и $x = -8$;

$B(-5; 2) \rightarrow B_1(-5; 3)$, т. е. $y = 2 + 1$, $y = 3$ и $x = -5$;

$D(2; 1) \rightarrow D_1(2; 2)$ (далее аналогично);

$M(3; 4) \rightarrow M_1(3; 5)$.

Пусть $C = -2$.

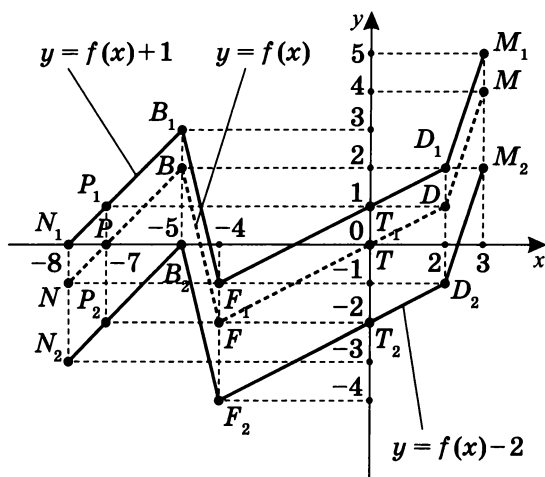
Тогда для $y = f(x) - 2$:

$N(-8; -1) \rightarrow N_2(-8; -3)$, т. е. $y = -1 - 2$, $y = -3$ и $x = -8$;

$B(-5; 2) \rightarrow B_2(-5; 0)$, т. е. $y = 2 - 2$, $y = 0$ и $x = -5$;

$D(2; 1) \rightarrow D_2(2; -1)$ (далее аналогично);

$M(3; 4) \rightarrow M_2(3; 2)$.



Так как $N(x_0; y_0) \in \Gamma(y = f(x))$, то если $y_1 = y_0 + C$, то $N_1(x_0; y_0 + C) \in \Gamma(y = f(x) + C)$.

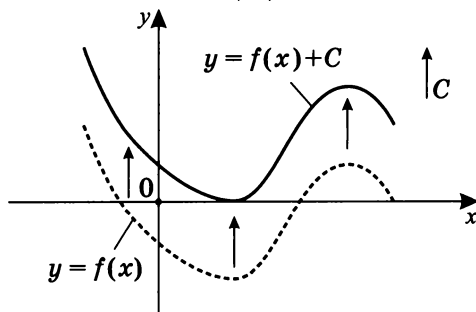
Значит, точка $N_1(x_0; y_1)$ получена сдвигом точки $N(x_0; y_0)$ вдоль оси ординат на величину $|C|$: *вверх*, если $C > 0$, и *вниз*, если $C < 0$ (N_2).

Из данных примеров следует, что при преобразовании вида $y = f(x) + C$ область определения преобразованной функции не изменяется по сравнению с функцией $y = f(x)$. Разумеется, это можно доказать в общем виде.

Очевидно, что при преобразовании вида $y = f(x) + C$ графика функции $y = f(x)$ область *определения* остается прежней, а конечная область *изменений* сдвигается по сравнению с $y = f(x)$ на $|C|$, согласно знаку. Если область изменений — $(-\infty; \infty)$, то она сохраняется.

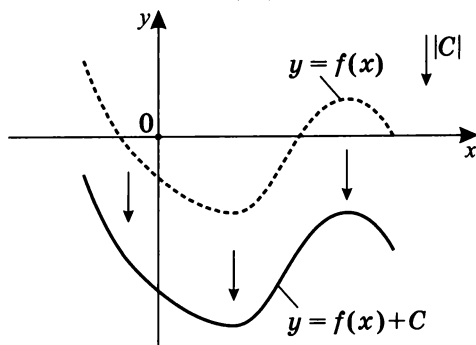
3. $y = f(x) + C$
($C > 0$)

График получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy на $|C|$ единиц вверх.



4. $y = f(x) + C$
($C < 0$)

График получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy на $|C|$ единиц вниз.



Практикум 3

Постройте графики функций, используя преобразования вида $y = f(x) + C$.

1. $y = f(x) = x^2$, где а) $C = 2$; б) $C = -1$.

2. $y = f(x) = \frac{1}{x}$, где а) $C = -2$; б) $C = 1$.

3. $y = f(x) = \sqrt{x}$, где а) $C = 3$; б) $C = -2$.

4. $y = f(x) = |x|$, где а) $C = 1$; б) $C = -2$.

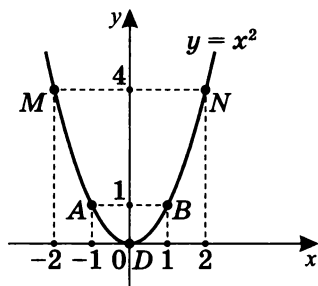
5. $y = f(x) = 2^x$, где а) $C = 1$; б) $C = -2$.

6. $y = f(x) = \log_2 x$, где а) $C = 1$; б) $C = -1$.

7. $y = f(x) = \cos x$, где $C = 0,5$.

8. $y = f(x) = \frac{1}{x^2}$, где а) $C = 2$; б) $C = -1$.

Решение практикума 3

1. Пусть $f(x) = x^2$.Рассмотрим график $y = x^2$.а) Пусть $C = 2$.

Требуется построить график

функции $y = f(x) + 2$, т.е. $y = x^2 + 2$.Имеем сдвиг графика функции $f(x)$ *вверх* на 2.

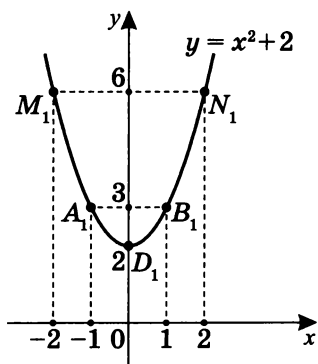
$$D(0;0) \rightarrow D_1(0;2);$$

$$A(-1;1) \rightarrow A_1(-1;3);$$

$$B(1;1) \rightarrow B_1(1;3);$$

$$M(-2;4) \rightarrow M_1(-2;6);$$

$$N(2;4) \rightarrow N_1(2;6).$$

б) Пусть $C = -1$.

Требуется построить график

функции $y = f(x) - 1$, т.е. $y = x^2 - 1$.Имеем сдвиг графика функции $f(x)$ *вниз* на 1.

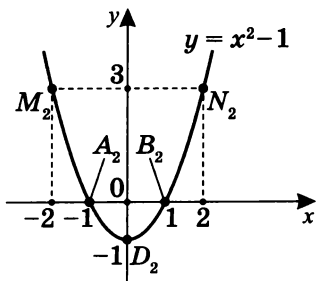
$$D(0;0) \rightarrow D_2(0;-1);$$

$$A(-1;1) \rightarrow A_2(-1;0);$$

$$B(1;1) \rightarrow B_2(1;0);$$

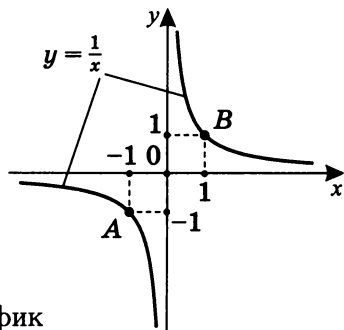
$$M(-2;4) \rightarrow M_2(-2;3);$$

$$N(2;4) \rightarrow N_2(2;3).$$



2. Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$.

Рассмотрим график $y = \frac{1}{x}$.



а) Пусть $C = -2$.

Требуется построить график

функции $y = f(x) - 2$, т.е. $y = \frac{1}{x} - 2$.

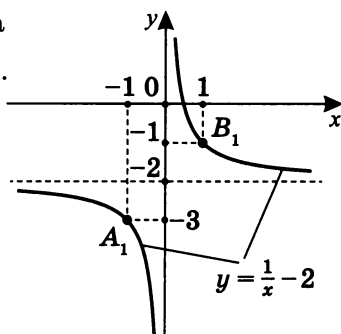
Имеем сдвиг графика функции $f(x)$ вниз на 2.

Горизонтальная асимптота

$y = 0$ переходит в $y = -2$.

$A(-1; -1) \rightarrow A_1(-1; -3);$

$B(1; 1) \rightarrow B_1(1; -1).$



б) Пусть $C = 1$.

Требуется построить график

функции $y = f(x) + 1$, т.е. $y = \frac{1}{x} + 1$.

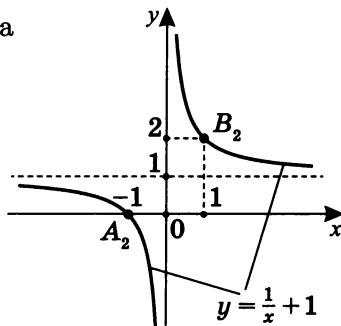
Имеем сдвиг графика функции $f(x)$ вверх на 1.

Горизонтальная асимптота

$y = 0$ переходит в $y = 1$.

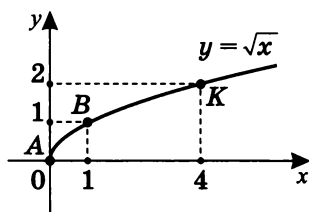
$A(-1; -1) \rightarrow A_2(-1; 0);$

$B(1; 1) \rightarrow B_2(1; 2).$



3. Пусть $f(x) = \sqrt{x}$.

Рассмотрим график $y = \sqrt{x}$.



а) Пусть $C = 3$.

Требуется построить график

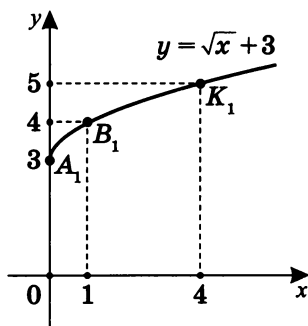
функции $y = f(x) + 3$, т. е. $y = \sqrt{x} + 3$.

Имеем сдвиг графика функции $f(x)$ *вверх* на 3.

$$A(0;0) \rightarrow A_1(0;3);$$

$$B(1;1) \rightarrow B_1(1;4);$$

$$K(4;2) \rightarrow K_1(4;5).$$



б) Пусть $C = -2$.

Требуется построить график

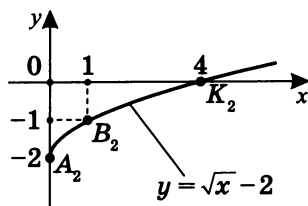
функции $y = f(x) - 2$, т. е. $y = \sqrt{x} - 2$.

Имеем сдвиг графика функции $f(x)$ *вниз* на 2.

$$A(0;0) \rightarrow A_2(0;-2);$$

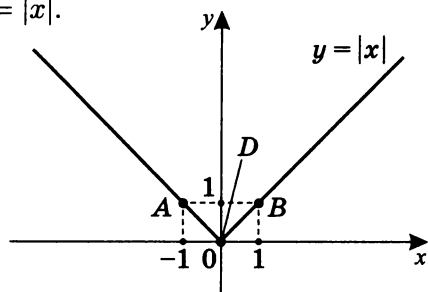
$$B(1;1) \rightarrow B_2(1;-1);$$

$$K(4;2) \rightarrow K_2(4;0).$$



4. Пусть $f(x) = |x|$.

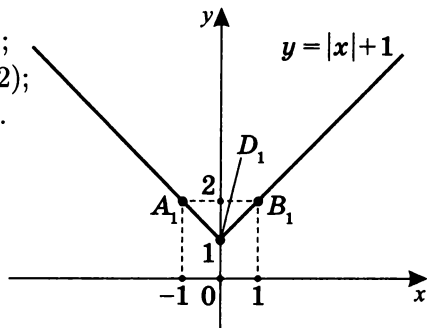
Рассмотрим график $y = |x|$.



а) Пусть $C = 1$.

Требуется построить график функции $y = f(x) + 1$, т.е. $y = |x| + 1$.

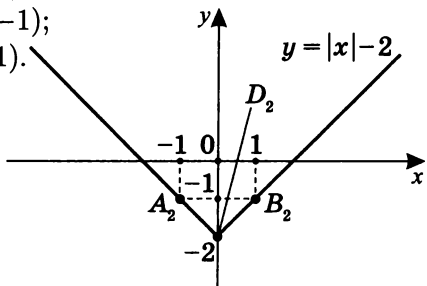
$$\begin{aligned} D(0;0) &\rightarrow D_1(0;1); \\ A(-1;1) &\rightarrow A_1(-1;2); \\ B(1;1) &\rightarrow B_1(1;2). \end{aligned}$$



б) Пусть $C = -2$.

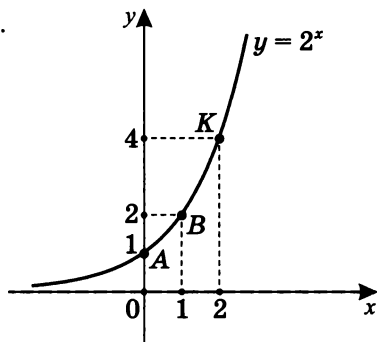
Требуется построить график функции $y = f(x) - 2$, т.е. $y = |x| - 2$.

$$\begin{aligned} D(0;0) &\rightarrow D_2(0;-2); \\ A(-1;1) &\rightarrow A_2(-1;-1); \\ B(1;1) &\rightarrow B_2(1;-1). \end{aligned}$$



5. Пусть $f(x) = 2^x$.

Рассмотрим график $y = 2^x$.



а) Пусть $C = 1$.

Требуется построить график

функции $y = f(x) + 1$, т.е. $y = 2^x + 1$.

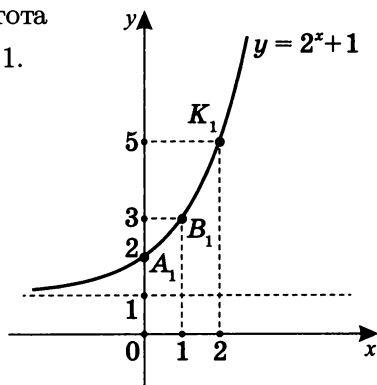
Горизонтальная асимптота

$y = 0$ переходит в $y = 1$.

$A(0; 1) \rightarrow A_1(0; 2);$

$B(1; 2) \rightarrow B_1(1; 3);$

$K(2; 4) \rightarrow K_1(2; 5).$



б) Пусть $C = -2$.

Требуется построить график

функции $y = f(x) - 2$, т.е. $y = 2^x - 2$.

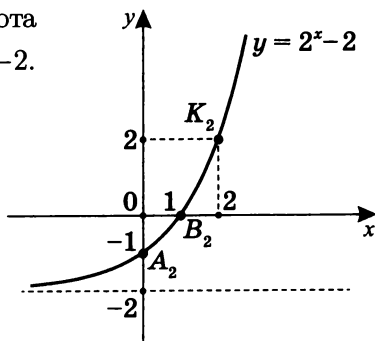
Горизонтальная асимптота

$y = 0$ переходит в $y = -2$.

$A(0; 1) \rightarrow A_2(0; -1);$

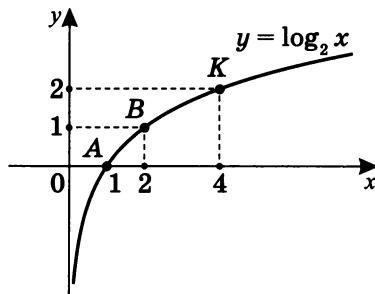
$B(1; 2) \rightarrow B_2(1; 0);$

$K(2; 4) \rightarrow K_2(2; 2).$



6. Пусть $f(x) = \log_2 x$.

Рассмотрим график $y = \log_2 x$.

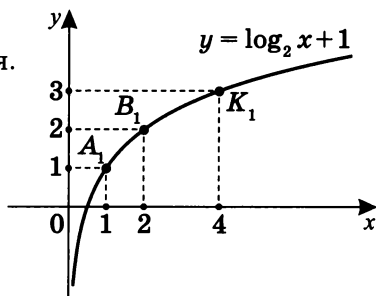


а) Пусть $C = 1$.

Требуется построить график функции $y = f(x) + 1$, т. е. $y = \log_2 x + 1$.

Вертикальная асимптота $x = 0$ сохраняется.

$A(1; 0) \rightarrow A_1(1; 1);$
 $B(2; 1) \rightarrow B_1(2; 2);$
 $K(4; 2) \rightarrow K_1(4; 3).$

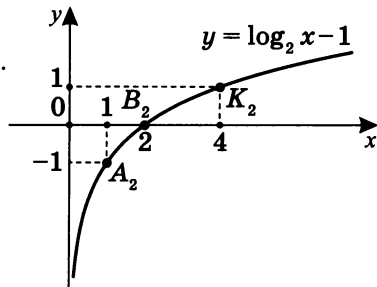


б) Пусть $C = -1$.

Требуется построить график функции $y = f(x) - 1$, т. е. $y = \log_2 x - 1$.

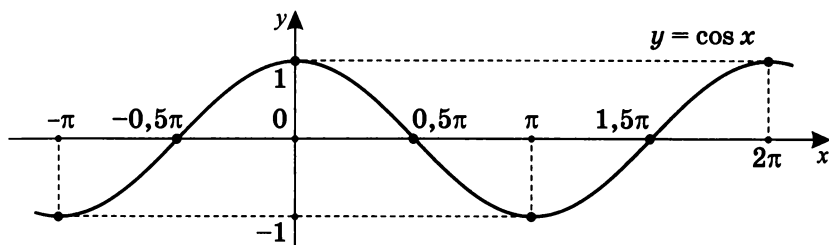
Вертикальная асимптота $x = 0$ сохраняется.

$A(1; 0) \rightarrow A_2(1; -1);$
 $B(2; 1) \rightarrow B_2(2; 0);$
 $K(4; 2) \rightarrow K_2(4; 1).$



7. Пусть $f(x) = \cos x$.

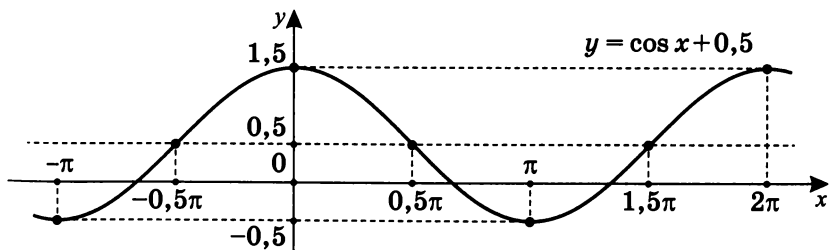
Рассмотрим график $y = \cos x$.



Пусть $C = 0,5$.

Построим график функции $y = f(x) + 0,5$,

т. е. $y = \cos x + 0,5$.



Для целых k :

$$A(2\pi k; 1) \rightarrow A_1(2\pi k; 1,5);$$

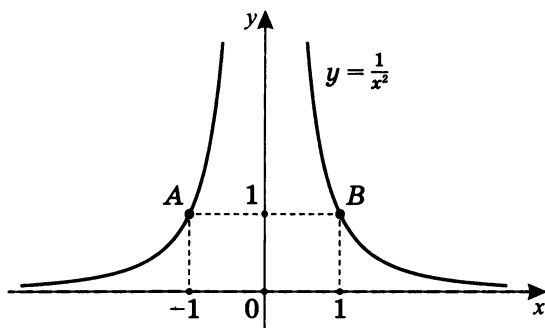
$$B\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 0\right) \rightarrow B_1\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 0,5\right);$$

$$K(\pi + 2\pi k; -1) \rightarrow K_1(\pi + 2\pi k; -0,5);$$

$$D\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k; 0\right) \rightarrow D_1\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k; 0,5\right).$$

8. Пусть $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Рассмотрим график $y = \frac{1}{x^2}$.



а) Пусть $C = 2$.

Построим график функции $y = f(x) + 2$,

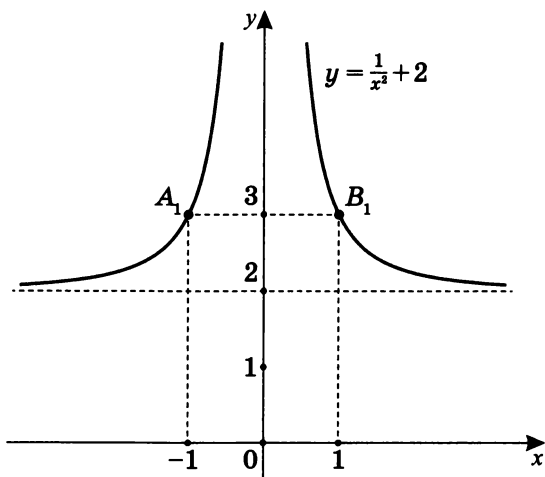
т. е. $y = \frac{1}{x^2} + 2$.

Горизонтальная асимптота $y = 0$ переходит в $y = 2$.

Вертикальная асимптота $x = 0$ сохраняется.

$A(-1; 1) \rightarrow A_1(-1; 3);$

$B(1; 1) \rightarrow B_1(1; 3).$



б) Пусть $C = -1$.

Построим график функции $y = f(x) - 1$,

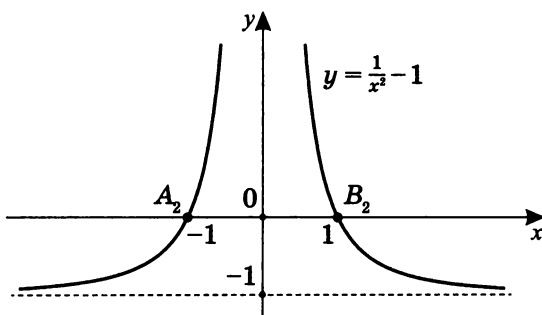
т. е. $y = \frac{1}{x^2} - 1$.

Горизонтальная асимптота $y = 0$ переходит в $y = -1$.

Вертикальная асимптота $x = 0$ сохраняется.

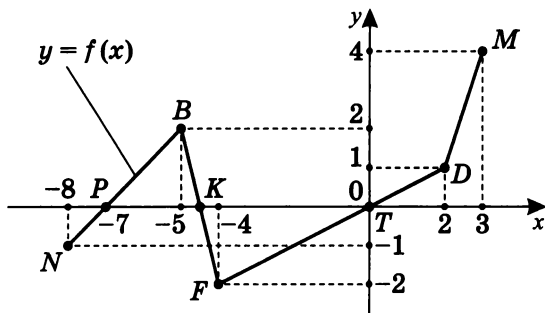
$A(-1; 1) \rightarrow A_2(-1; 0);$

$B(1; 1) \rightarrow B_2(1; 0).$



Преобразования графиков с использованием различных видов симметрии

Вновь рассмотрим график кусочно-линейной функции $f(x)$.

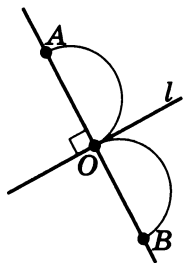


Напомним определение симметрии относительно прямой.

Определение. Точка A называется симметричной точке B относительно оси l , если:

- а) прямая $(AB) \perp l$;
- б) $AB \cap l = O$ и $AO = OB$.

Обозначается $S_l(A) = B$
или $S_l(B) = A$.

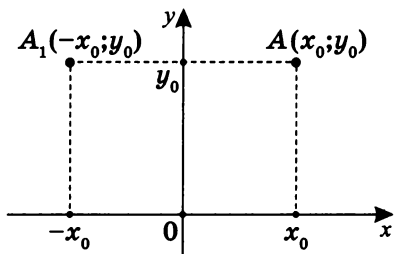


- а) Построим график функции $y = f(-x)$.

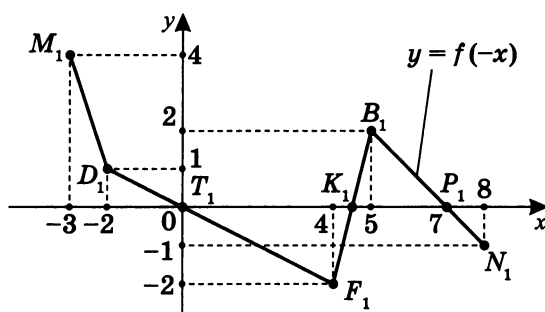
$$\begin{aligned} N(-8; -1) &\rightarrow N_1(8; -1); \\ B(-5; 2) &\rightarrow B_1(5; 2); \\ F(-4; -2) &\rightarrow F_1(4; -2); \\ D(2; 1) &\rightarrow D_1(-2; 1); \\ M(3; 4) &\rightarrow M_1(-3; 4). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$A(x; y) \rightarrow A_1(-x; y).$$



Очевидно, что точки графика $y = f(-x)$ симметричны точкам графика $y = f(x)$ относительно оси ординат.



Примечание. Напомним, что:

$D(f(x))$ — область определения функции $f(x)$;

$E(f(x))$ — область изменения функции $f(x)$.

В данном случае:

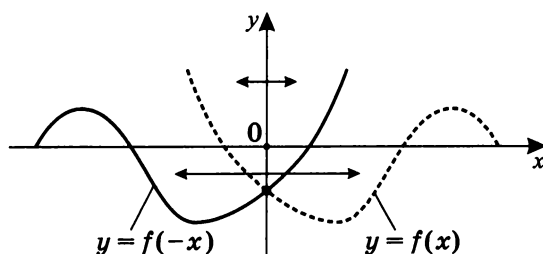
$$D(f(x)) = [-8; 3]; \quad D(f(-x)) = [-3; 8];$$

$$E(f(x)) = [-2; 4]; \quad E(f(-x)) = [-2; 4].$$

График $y = f(-x)$ симметричен относительно оси Oy графику $y = f(x)$.

5. $y = f(-x)$

График получается симметричным отражением относительно оси Oy .



Точка пересечения графика $y = f(x)$ с осью Oy остается неизменной.

б) Построим график

функции $y = -f(x)$.

$$N(-8; -1) \rightarrow N_2(-8; 1);$$

$$B(-5; 2) \rightarrow B_2(-5; -2);$$

$$F(-4; -2) \rightarrow F_2(-4; 2);$$

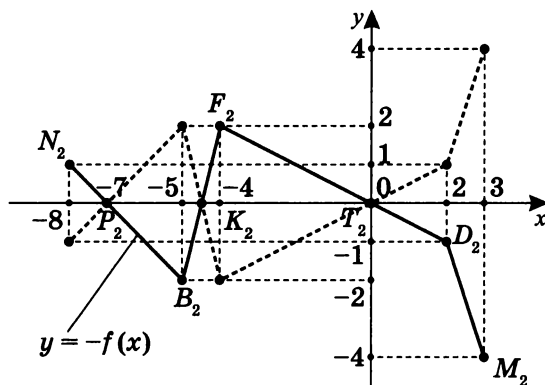
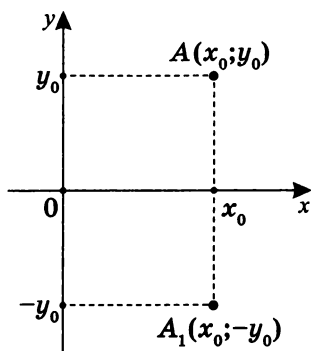
$$D(2; 1) \rightarrow D_2(2; -1);$$

$$M(3; 4) \rightarrow M_2(3; -4).$$

Таким образом,

$$A(x; y) \rightarrow A_1(x; -y).$$

Очевидно, что точки графика $y = -f(x)$ симметричны точкам графика $y = f(x)$ относительно оси абсцисс.



Примечание. В данном случае:

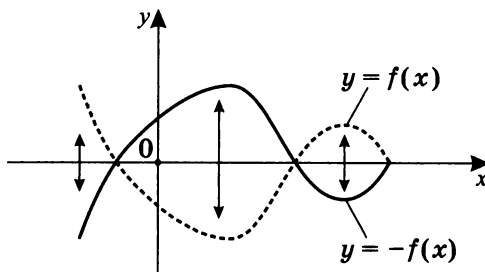
$$D(f(x)) = [-8; 3]; \quad D(-f(x)) = [-8; 3];$$

$$E(f(x)) = [-2; 4]; \quad E(-f(x)) = [-4; 2].$$

График $y = -f(x)$ симметричен относительно оси Ox графику $y = f(x)$.

6. $y = -f(x)$

График получается симметричным отражением относительно оси Ox .



Точки пересечения графика $f(x)$ с осью Ox остаются неизменными.

в) Построим график функции $y = -f(-x)$.

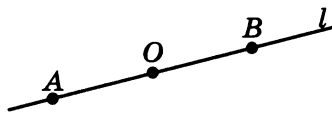
Напомним определение симметрии относительно точки.

Определение. Точка A называется центрально-симметричной точке B относительно точки O , если:

а) точки A, B, O одновременно принадлежат прямой l ;

б) расстояние $AO = OB$.

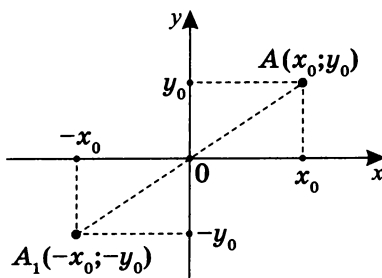
Обозначается $Z_0(A) = B$ или $Z_0(B) = A$.



Таким образом,

$$A(x; y) \rightarrow A_1(-x; -y).$$

Очевидно, что точки графика $y = -f(-x)$ центрально-симметричны точкам графика $y = f(x)$ относительно начала координат $O(0; 0)$, т. е. $Z_0(A) = A_1$.

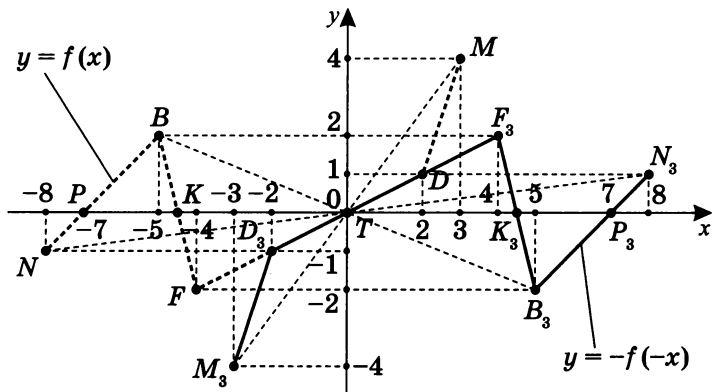


$$\begin{aligned}
 N(-8; -1) &\rightarrow N_3(8; 1); \\
 B(-5; 2) &\rightarrow B_3(5; -2); \\
 F(-4; -2) &\rightarrow F_3(4; 2); \\
 D(2; 1) &\rightarrow D_3(-2; -1); \\
 M(3; 4) &\rightarrow M_3(-3; -4); \\
 T(0; 0) &\text{ — неподвижная точка;} \\
 K(-4; 5; 0) &\rightarrow K_3(4; 5; 0); \\
 P(-7; 0) &\rightarrow P_3(7; 0).
 \end{aligned}$$

Ясно также, что $D(-f(-x))$ симметрична $D(f(x))$, а $E(-f(-x))$ симметрична $E(f(x))$ относительно начала координат:

$$D(f(x)) = [-8; 3]; \quad D(f(-x)) = [-3; 8];$$

$$E(f(x)) = [-2; 4]; \quad E(f(-x)) = [-4; 2].$$



$$O \in NN_3; \quad NO = ON_3;$$

$$O \in BB_3; \quad BO = OB_3;$$

$$\text{Отметим, что при этом: } O \in FF_3; \quad FO = OF_3;$$

$$O \in DD_3; \quad DO = OD_3;$$

$$O \in MM_3; \quad MO = OM_3.$$

$$Z_0(N) = N_3$$

$$Z_0(B) = B_3$$

$$\text{Значит, } Z_0(F) = F_3, \text{ и } Z_0(NBFD M) = N_3B_3F_3D_3M_3.$$

$$Z_0(D) = D_3$$

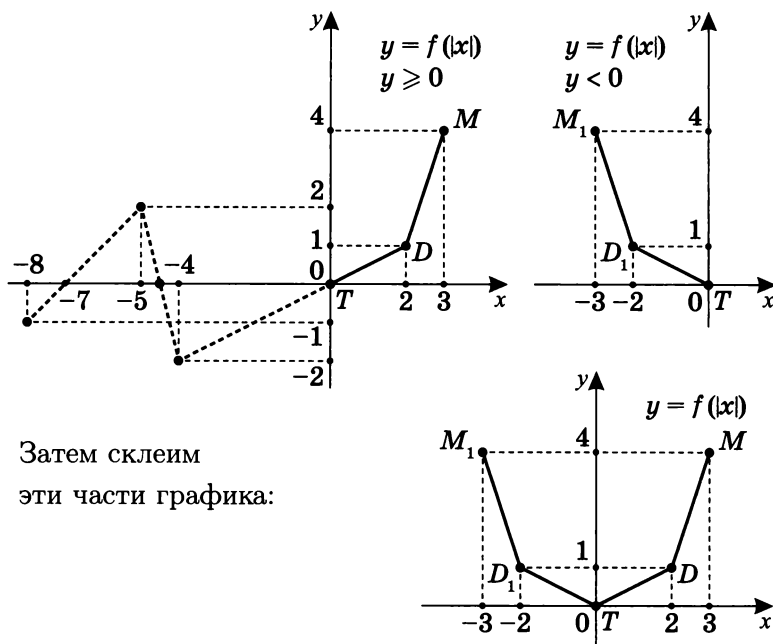
$$Z_0(M) = M_3$$

г) Построим график функции $y = f(|x|)$.

Учтем, что по определению модуля числа

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x), & \text{при } x \geq 0 \\ f(-x), & \text{при } x < 0 \end{cases}.$$

Рассмотрим и построим только ту часть графика $y = f(x)$, которая находится в правой полуплоскости, а затем — часть графика $y = f(-x)$, находящуюся только в левой полуплоскости:



Затем склеим

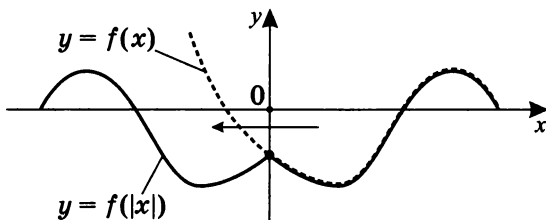
эти части графика:

Для того чтобы построить график функции $y = f(|x|)$, зная график функции $y = f(x)$, необходимо:

1. Всю часть графика функции, находящуюся в правой полуплоскости, сохранить.
2. Всю часть графика функции в левой полуплоскости убрать и на его место разместить график, полученный отражением графика $y = f(x)$ из правой полуплоскости в левую полуплоскость симметрично относительно оси Oy .
3. Точка, принадлежащая графику $y = f(x)$, находящаяся на оси ординат, сохраняется.

7. $y = f(|x|)$

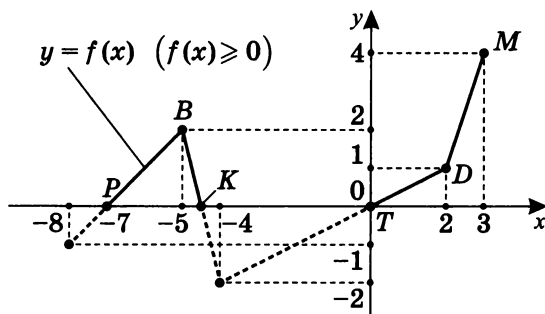
Вся часть графика функции $y = f(x)$, лежащая левее оси Oy , удаляется, а вся часть, лежащая правее оси Oy и на ней, остается без изменений, а кроме того, симметрично отражается относительно оси Oy в левую полуплоскость.



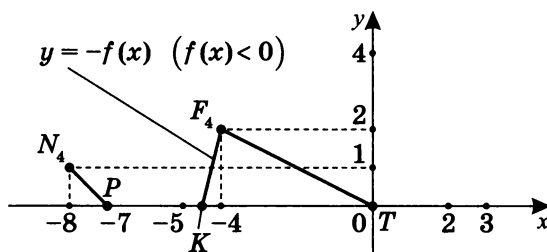
д) Построим график функции $|f(x)|$.

Учтем, что $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases}$.

Рассмотрим и построим график $y = f(x)$, находящийся только в верхней полуплоскости:



Затем график $y = f(x)$, находящийся только в нижней полуплоскости, отражается симметрично относительно оси абсцисс в верхнюю полуплоскость.



Далее склеим получившиеся графики в одной системе координат.

$$N(-8; -1) \rightarrow N_4(-8; 1);$$

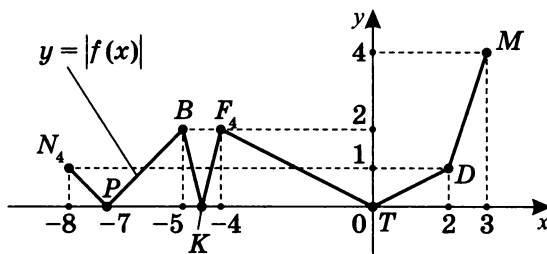
$$P(-7; 0) \rightarrow P(-7; 0);$$

$$B(-5; 2) \rightarrow B(-5; 2);$$

$$K(-4; 0) \rightarrow K(-4; 0);$$

$$F(-4; -2) \rightarrow F_4(-4; 2);$$

$$T(0; 0) \rightarrow T(0; 0).$$

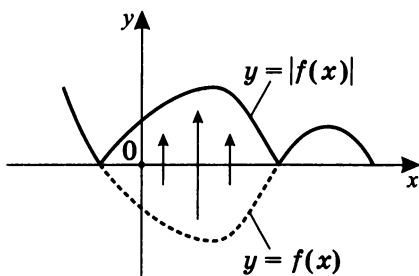


Для того чтобы построить график $y = |f(x)|$, необходимо:

1. Вся часть графика функции, находящуюся в верхней полуплоскости, сохранить.
2. Вся часть графика функции, находящуюся в нижней полуплоскости, отразить симметрично относительно оси абсцисс в верхнюю полуплоскость.
3. Все точки графика $y = f(x)$, принадлежащие оси абсцисс, сохраняются.

8. $y = |f(x)|$

Вся часть графика функции $y = f(x)$, лежащая выше оси Ox и на оси, остается без изменения, а лежащая ниже оси Ox — симметрично отражается относительно этой оси вверх.



Итоговый график располагается в верхней полуплоскости.

Практикум 4

Постройте графики функций, используя известные преобразования графика функции $y = f(x)$.

1. $y = f(x) = \sqrt{x}$:

а) $y = f(-x)$;

б) $y = -f(x)$;

в) $y = -f(-x)$;

г) $y = f(|x|)$.

2. $y = f(x) = 2^x$:

а) $y = f(-x)$;

б) $y = -f(x)$;

в) $y = -f(-x)$;

г) $y = f(|x|)$;

д) $y = f(-|x|)$.

3. $y = f(x) = \log_3 x$:

а) $y = f(-x)$;

б) $y = -f(x)$;

в) $y = f(|x|)$;

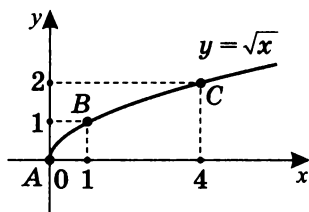
г) $y = |f(|x|)|$.

Решение практикума 4

1. Пусть
- $f(x) = \sqrt{x}$
- .

Построим графики:

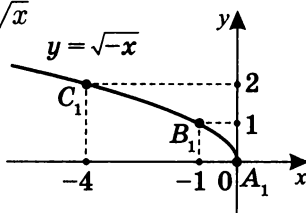
- а) $y = f(-x)$;
 б) $y = -f(x)$;
 в) $y = -f(-x)$;
 г) $y = f(|x|)$.



- а) Построим график
- $y = \sqrt{-x}$
- .

Так как график $y = \sqrt{-x}$ симметричен графику $y = \sqrt{x}$ относительно оси Oy , то $A(0;0) \rightarrow A_1(0;0)$

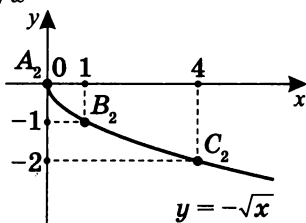
(неподвижная точка);

 $B(1;1) \rightarrow B_1(-1;1)$; $C(4;2) \rightarrow C_1(-4;2)$.

- б) Построим график
- $y = -\sqrt{x}$
- .

Так как график $y = -\sqrt{x}$ симметричен графику $y = \sqrt{x}$ относительно оси Ox , то $A(0;0) \rightarrow A_2(0;0)$

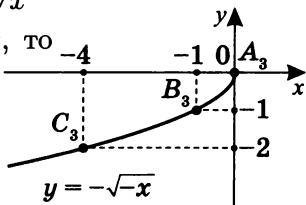
(неподвижная точка);

 $B(1;1) \rightarrow B_2(1;-1)$; $C(4;2) \rightarrow C_2(4;-2)$.

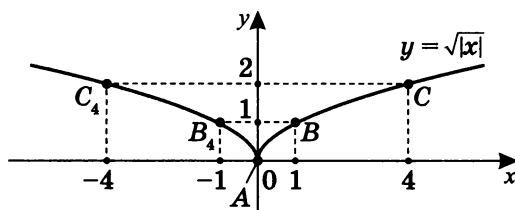
- в) Построим график
- $y = -\sqrt{-x}$
- .

Так как график $y = -\sqrt{-x}$ симметричен графику $y = \sqrt{x}$ относительно осей Oy и Ox , то $A(0;0) \rightarrow A_3(0;0)$

(неподвижная точка);

 $B(1;1) \rightarrow B_3(-1;-1)$; $C(4;2) \rightarrow C_3(-4;-2)$.

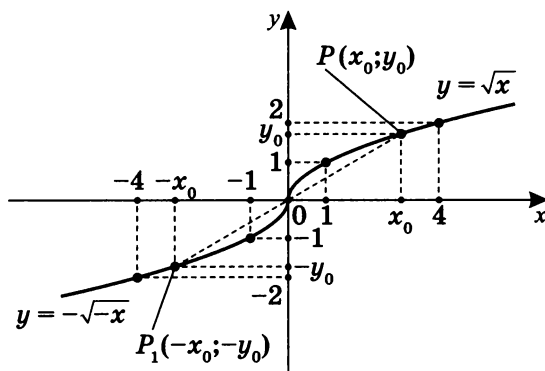
- г) Аналогично по правилу построения графика функции от модуля аргумента, строится график функции $y = \sqrt{|x|}$.



Примечание. Графики $y = \sqrt{x}$ и $y = -\sqrt{-x}$ симметричны относительно начала координат,

то есть $P(x_0; y_0) \in \Gamma(y = f(x))$ переходит

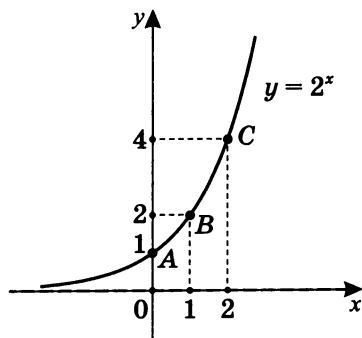
в $P_1(-x_0; -y_0) \in \Gamma(y = -f(-x))$ и наоборот.



2. Пусть $f(x) = 2^x$.

Построим графики:

- а) $y = f(-x)$;
- б) $y = -f(x)$;
- в) $y = -f(-x)$;
- г) $y = f(|x|)$;
- д) $y = f(-|x|)$.



а) $y = f(-x)$.

Построим график $y = 2^{-x}$.

Так как график 2^{-x}

симметричен гра-

фику $y = 2^x$ относитель-

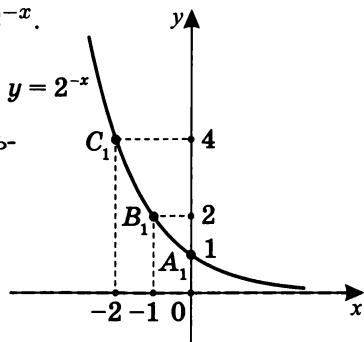
но оси ординат, то

$$A(0; 1) \rightarrow A_1(0; 1)$$

(неподвижная точка);

$$B(1; 2) \rightarrow B_1(-1; 2);$$

$$C(2; 4) \rightarrow C_1(-2; 4).$$



Отметим, что $2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

б) $y = -f(x)$.

Построим график $y = -2^x$.

Так как график -2^x

симметричен гра-

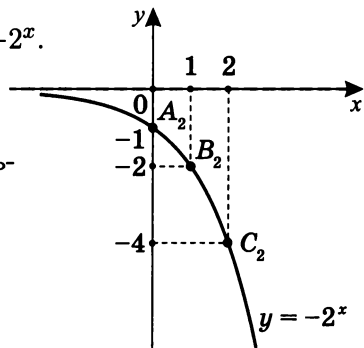
фику $y = 2^x$ относитель-

но оси абсцисс, то

$$A(0; 1) \rightarrow A_2(0; -1);$$

$$B(1; 2) \rightarrow B_2(1; -2);$$

$$C(2; 4) \rightarrow C_2(2; -4).$$



в) $y = -f(-x)$.

Построим график $y = -2^{-x}$.

Так как график -2^{-x}

симметричен гра-

фику $y = 2^x$ относитель-

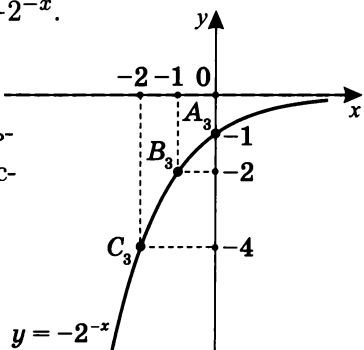
но оси ординат и оси абс-

цисс, то

$$A(0; 1) \rightarrow A_3(0; -1);$$

$$B(1; 2) \rightarrow B_3(-1; -2);$$

$$C(2; 4) \rightarrow C_3(-2; -4).$$

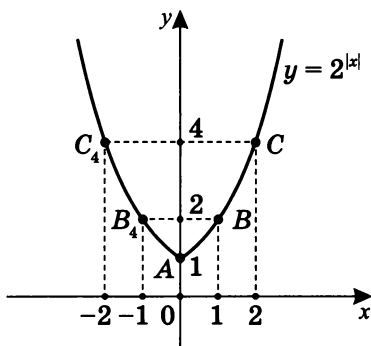


(График $y = -2^{-x}$ центрально-симметричен графику $y = 2^x$ относительно начала координат.)

г) $y = f(|x|)$.

Построим график функции $y = 2^{|x|}$.

Точки графика $y = 2^x$ из правой полуплоскости сохраняем и отражаем в левую полуплоскость относительно оси Oy :

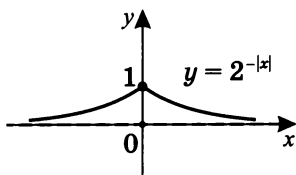


д) $y = f(-|x|)$.

Построим график функции $y = 2^{-|x|}$.

Так как $y = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, то и $y = 2^{-|x|} = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$.

Точки графика $y = 2^{-x}$ из правой полуплоскости сохраняем и отражаем в левую полуплоскость относительно оси Oy :



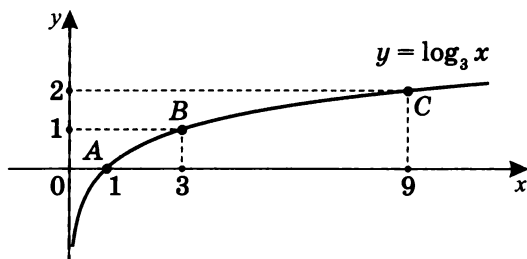
Можно строить график и другим способом.

$$\text{Так как } y = 2^{-|x|} = \begin{cases} 2^{-x}, & x \geq 0 \\ 2^x, & x < 0 \end{cases},$$

то достаточно взять правую часть графика $y = 2^{-x}$ и левую часть графика $y = 2^x$.

3. Пусть $f(x) = \log_3 x$. Построим графики:

- а) $y = f(-x)$;
- б) $y = -f(x)$;
- в) $y = f(|x|)$;
- г) $y = |f(|x|)|$.



а) $y = f(-x)$.

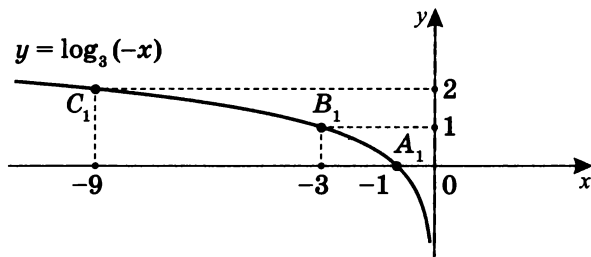
Построим график $y = \log_3(-x)$.

Так как график $y = \log_3(-x)$ симметричен графику $y = \log_3 x$ относительно оси ординат, то

$$A(1; 0) \rightarrow A_1(-1; 0);$$

$$B(3; 1) \rightarrow B_1(-3; 1);$$

$$C(9; 2) \rightarrow C_1(-9; 2).$$



б) $y = -f(x)$.

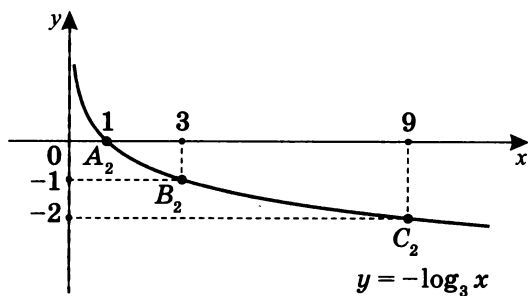
Построим график $y = -\log_3 x$.

Так как график $y = -\log_3 x$ симметричен графику $y = \log_3 x$ относительно оси абсцисс, то

$$A(1; 0) \rightarrow A_2(1; 0) \text{ (неподвижная точка);}$$

$$B(3; 1) \rightarrow B_2(3; -1);$$

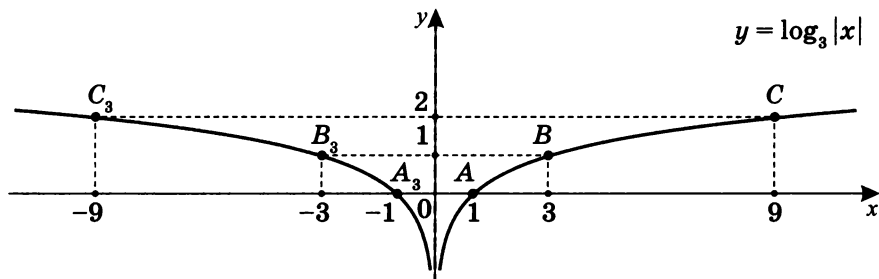
$$C(9; 2) \rightarrow C_2(9; -2).$$



в) $y = f(|x|)$.

Построим график $y = \log_3 |x|$.

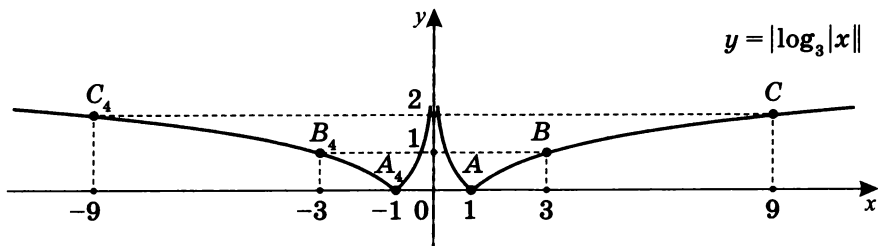
График $y = \log_3 x$ в правой полуплоскости сохраняется и отражается симметрично оси Oy в левую полуплоскость:



г) $y = |f(|x|)|$.

Построим график $y = |\log_3 |x||$.

График $y = \log_3 |x|$ в верхней полуплоскости сохраняется, а график, находящийся в нижней полуплоскости, отражается симметрично относительно оси абсцисс в верхнюю полуплоскость:



Построение графика функции $y = Af(x)$ ($A > 0$)

Для графика функции, заданного в общем виде уравнением $y = Af(kx + b) + C$, рассмотрим случай $k = 1$, $b = 0$, $C = 0$, т. е. необходимо построить график функции $y = Af(x)$, зная график функции $y = f(x)$.

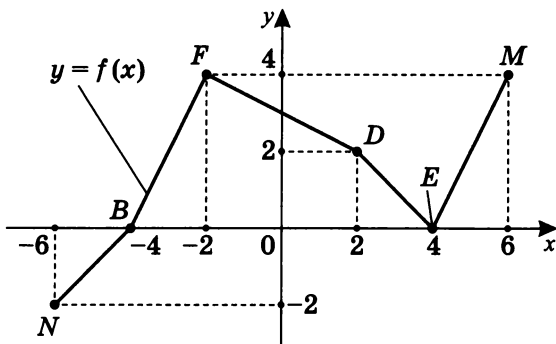
Так как $N(x_0; y_0) \in \Gamma(y = f(x))$, где N — произвольная точка, то $N_1(x_0; Ay_0) \in \Gamma(y = Af(x))$.

При $A > 1$ график $y = Af(x)$ получается растяжением графика $y = f(x)$ вдоль оси Oy в A раз.

При $0 < A < 1$ график $y = Af(x)$ получается сжатием графика $y = f(x)$ вдоль оси Oy в $\frac{1}{A}$ раз.

Очевидно, что точки пересечения графика функции с осью абсцисс — неподвижные.

Рассмотрим график кусочно-линейной функции.



а) Построим график $y = 2f(x)$.

$$N(-6; -2) \rightarrow N_1(-6; -4);$$

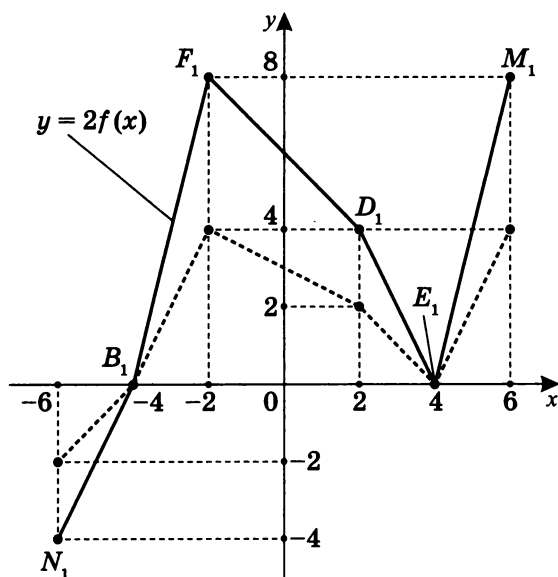
$$B(-4; 0) \rightarrow B_1(-4; 0);$$

$$F(-2; 4) \rightarrow F_1(-2; 8);$$

$$D(2; 2) \rightarrow D_1(2; 4);$$

$$E(4; 0) \rightarrow E_1(4; 0);$$

$$M(6; 4) \rightarrow M_1(6; 8).$$



б) Построим график $y = \frac{1}{2}f(x)$.

$$N(-6; -2) \rightarrow N_2(-6; -1);$$

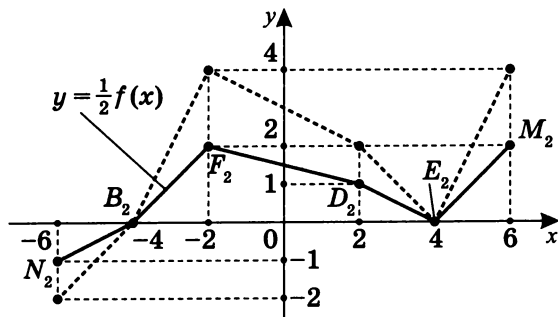
$$B(-4; 0) \rightarrow B_2(-4; 0);$$

$$F(-2; 4) \rightarrow F_2(-2; 2);$$

$$D(2; 2) \rightarrow D_2(2; 1);$$

$$E(4; 0) \rightarrow E_2(4; 0);$$

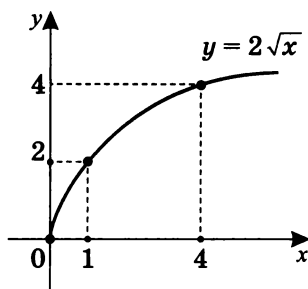
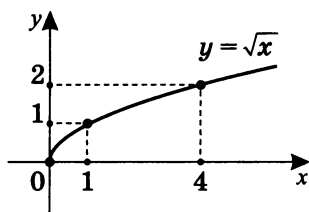
$$M(6; 4) \rightarrow M_2(6; 2).$$



Практикум 5 (Примеры преобразований графиков вида $y = Af(x)$)

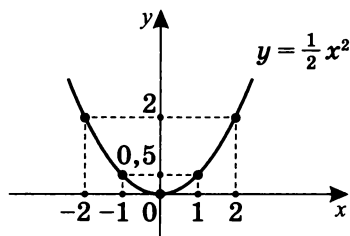
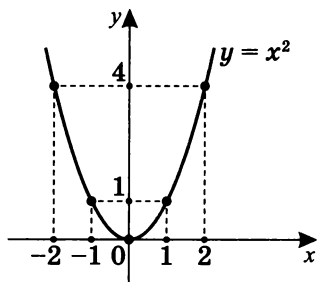
1. Пусть $f(x) = \sqrt{x}$.

Построим график функции $y = 2f(x)$: $y = 2\sqrt{x}$.



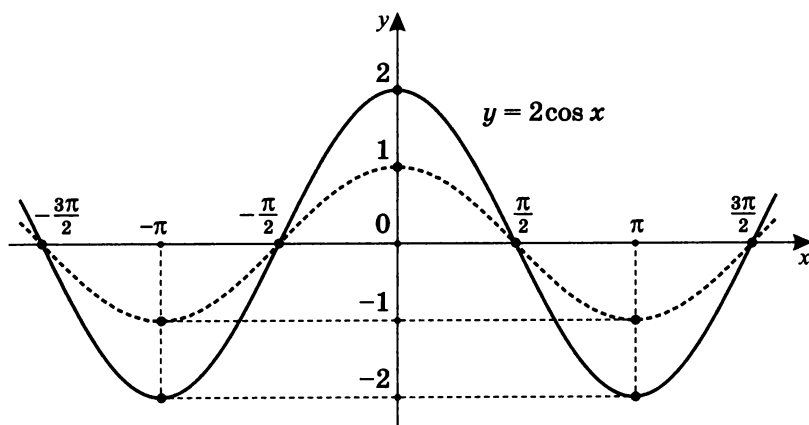
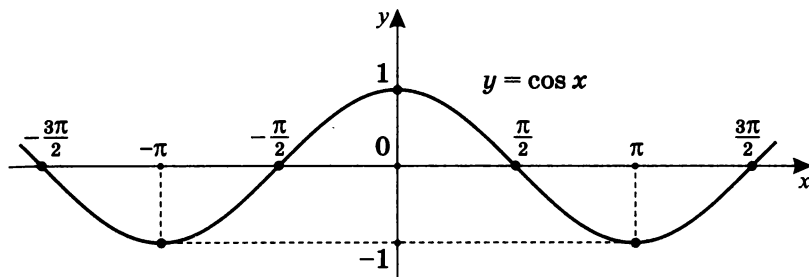
2. Пусть $f(x) = x^2$.

Построим график функции $y = \frac{1}{2}f(x)$: $y = \frac{1}{2}x^2$.



3. Пусть $f(x) = \cos x$.

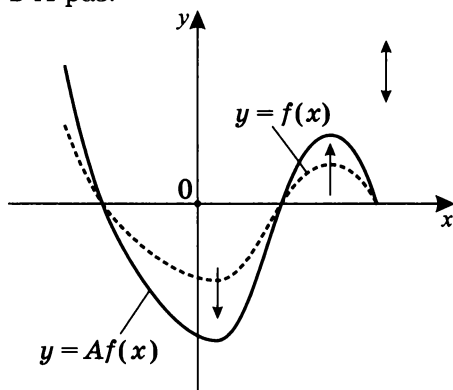
Построим график функции $y = 2f(x)$: $y = 2 \cos x$.



Отметим, что точки исходного графика, находящиеся на оси абсцисс, при этом преобразовании остаются неизменными.

9. $y = Af(x)$
($A > 1$)

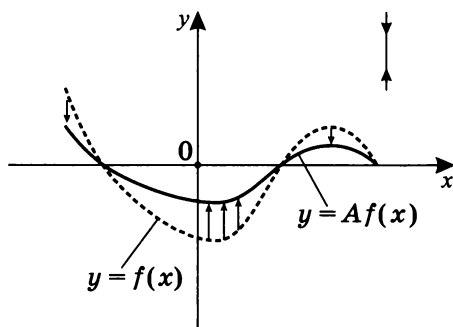
График получается растяжением графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy в A раз.



$D(f(x)) = D(Af(x))$. Точки пересечения графика с осью Ox остаются неизменными.

10. $y = Af(x)$
($0 < A < 1$)

График получается сжатием графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy в $\frac{1}{A}$ раз.



$D(f(x)) = D(Af(x))$. Точки пересечения графика с осью Ox остаются неизменными.

Построение графика функции $y = f(kx)$ ($k > 0$)

Для графика функции, заданной в общем виде уравнением $y = Af(kx + b) + C$ рассмотрим случай $A = 1$, $b = 0$, $C = 0$, т. е. необходимо построить график функции $y = f(kx)$, зная график функции $y = f(x)$.

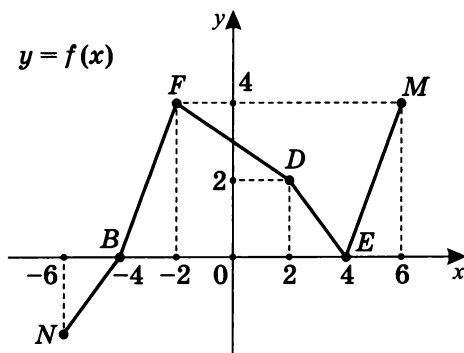
Так как $N(x_0; y_0) \in \Gamma(y = f(x))$,

то $N(kx_0; y_0) \in \Gamma(y = f(kx))$.

При $k > 1$ график $y = f(kx)$ получается из графика $y = f(x)$ сжатием вдоль оси абсцисс в k раз.

При $0 < k < 1$ график $y = f(kx)$ получается из графика $y = f(x)$ растяжением вдоль оси абсцисс в $\frac{1}{k}$ раз.

Рассмотрим график кусочно-линейной функции.



а) Построим график $y = f(2x)$.

$$N(-6; -2) \rightarrow N_1(-3; -2);$$

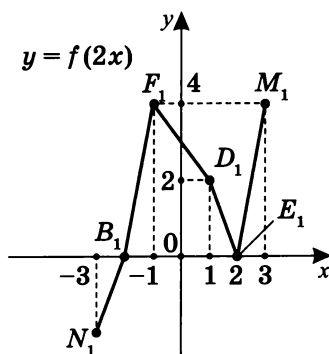
$$B(-4; 0) \rightarrow B_1(-2; 0);$$

$$F(-2; 4) \rightarrow F_1(-1; 4);$$

$$D(2; 2) \rightarrow D_1(1; 2);$$

$$E(4; 0) \rightarrow E_1(2; 0);$$

$$M(6; 4) \rightarrow M_1(3; 4).$$



Значит, для того чтобы построить график функции $y = f(2x)$, зная график функции $y = f(x)$, необходимо сжать его в два раза вдоль оси абсцисс.

б) Построим график $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$.

$$N(-6; -2) \rightarrow N_2(-12; -2);$$

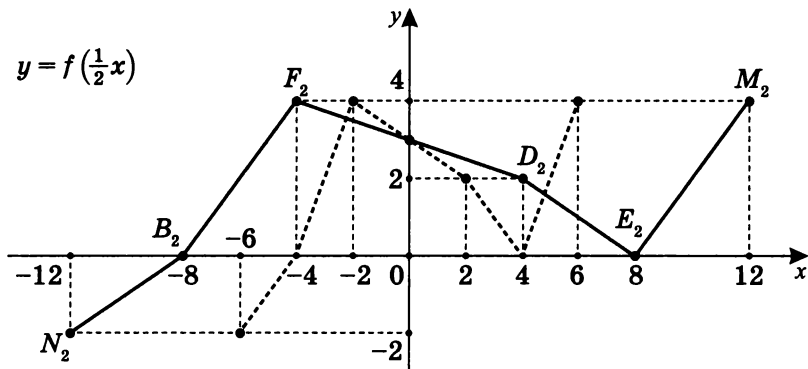
$$B(-4; 0) \rightarrow B_2(-8; 0);$$

$$F(-2; 4) \rightarrow F_2(-4; 4);$$

$$D(2; 2) \rightarrow D_2(4; 2);$$

$$E(4; 0) \rightarrow E_2(8; 0);$$

$$M(6; 4) \rightarrow M_2(12; 4).$$



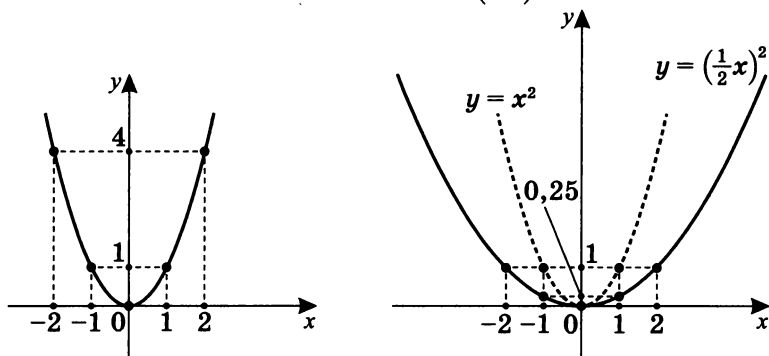
Значит, для того чтобы построить график функции $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$, зная график функции $y = f(x)$, необходимо растянуть его в два раза вдоль оси абсцисс.

Отметим, что точка на оси ординат всегда неподвижна, т. е. остается на том же месте.

Практикум 6 (Примеры преобразований графиков вида $y = f(kx)$)

1. Пусть $f(x) = x^2$.

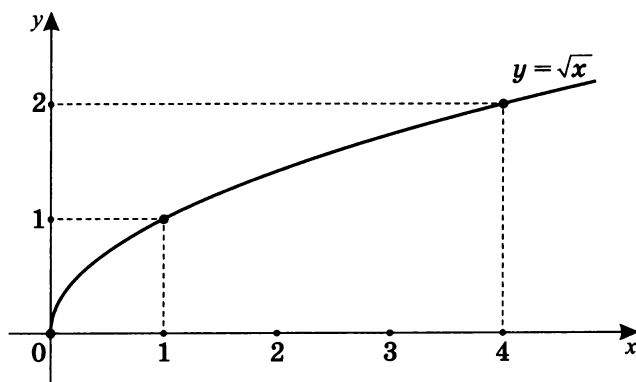
Построим график функции $y = \left(\frac{1}{2}x\right)^2$.



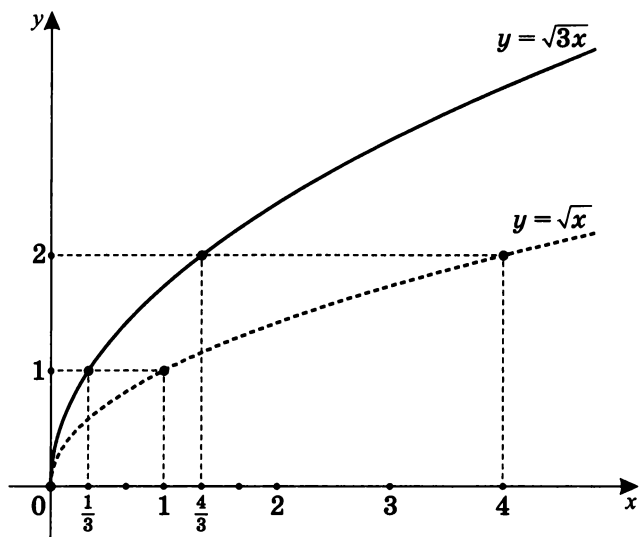
Для того чтобы построить график функции $y = \left(\frac{1}{2}x\right)^2$, необходимо растянуть график функции $y = x^2$ в два раза вдоль оси абсцисс.

2. Пусть $f(x) = \sqrt{x}$.

Построим график функции $y = \sqrt{3x}$.

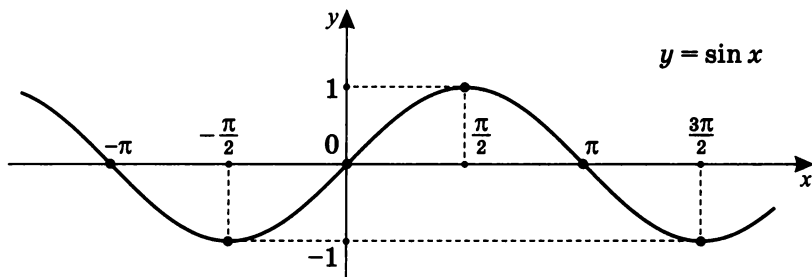


Для того чтобы построить график функции $y = \sqrt{3x}$, необходимо сжать график функции $y = \sqrt{x}$ в три раза вдоль оси абсцисс.

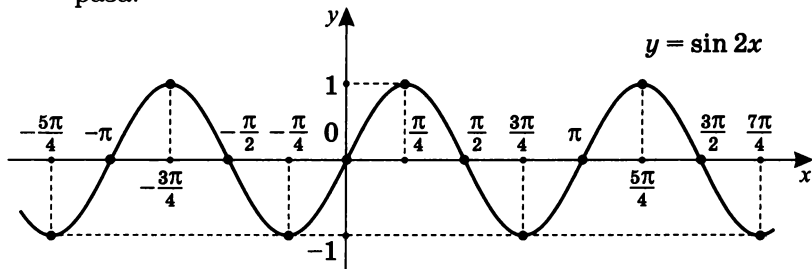


3. Пусть $f(x) = \sin x$.

Построим график функции $y = \sin 2x$.

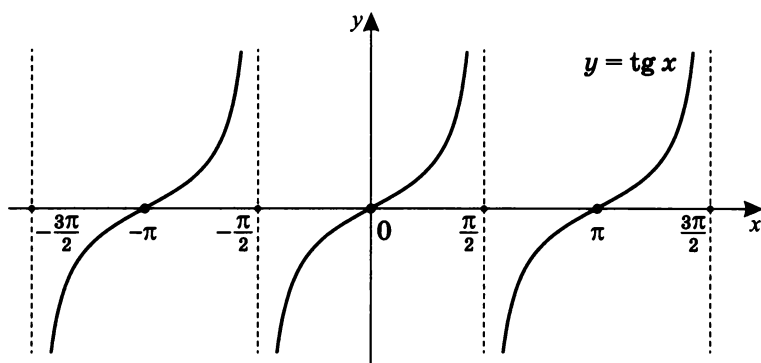


Для построения графика функции $y = \sin 2x$ необходимо график функции $y = \sin x$ сжать вдоль оси абсцисс в два раза.

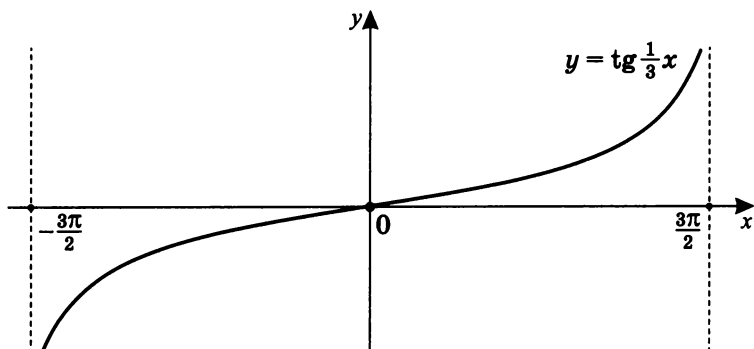


4. Пусть $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Построим график функции $y = \operatorname{tg} \left(\frac{1}{3}x \right)$.

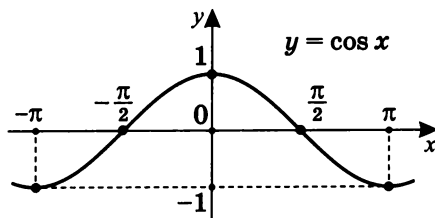


Для того чтобы построить график функции $y = \operatorname{tg} \left(\frac{1}{3}x \right)$, необходимо график функции $y = \operatorname{tg} x$ растянуть вдоль оси абсцисс в три раза.

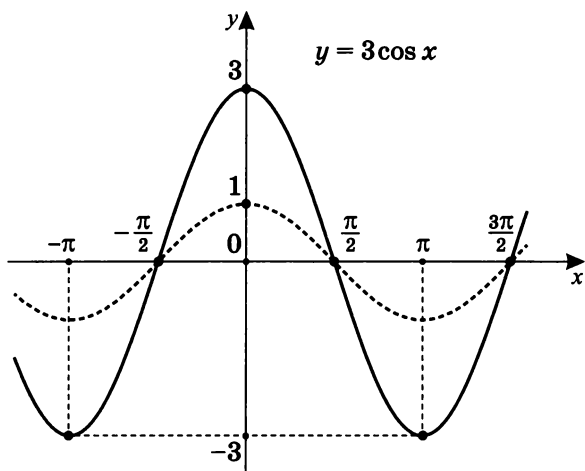


5. Пусть $f(x) = \cos x$.

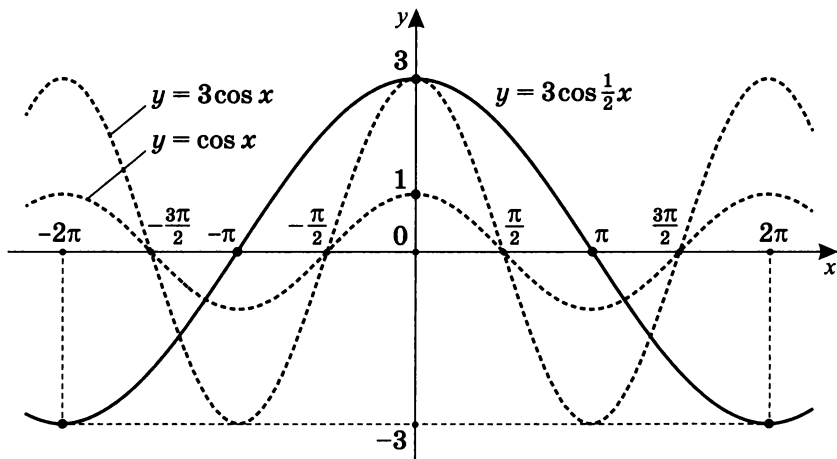
Построим график функции $y = 3 \cos \frac{1}{2}x$ методом комбинации преобразований.



Вначале построим график функции $y = 3 \cos x$. Для этого надо растянуть график функции $y = \cos x$ в три раза вдоль оси *ординат*.

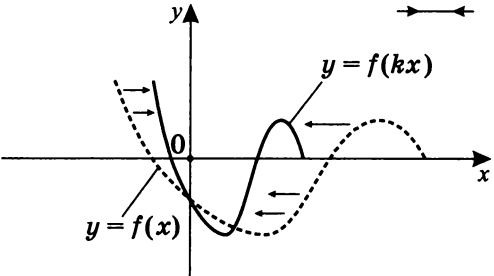
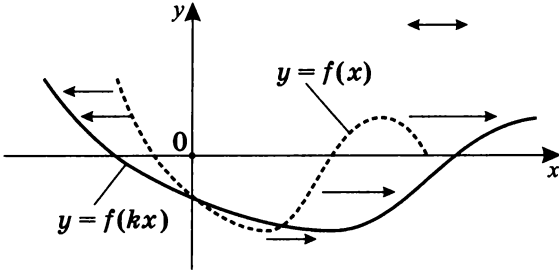


Затем построим график функции $y = 3 \cos \frac{1}{2}x$. Для этого график $y = 3 \cos x$ необходимо растянуть вдоль оси *абсцисс* в два раза.



Примечание. Для построения графиков вида $y = Af(kx)$, естественно, возможны различные последовательности преобразований исходного графика функции $y = f(x)$. В предыду-

щем примере вначале был построен график $y = 3 \cos x$, а затем — график $y = 3 \cos \frac{x}{2}$. Но возможно было действовать в другом порядке, вначале растянув график функции $y = \cos x$ в два раза вдоль оси абсцисс и построив график функции $y = \cos \frac{x}{2}$, после чего растянуть полученный график в три раза вдоль оси ординат.

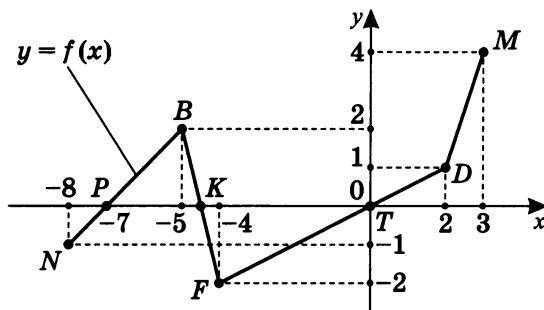
<p>11. $y = f(kx)$ ($k > 1$)</p>	<p>График получается сжатием графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox в k раз.</p>  <p>The diagram shows a coordinate system with x and y axes. A solid curve labeled $y = f(x)$ is shown. A dashed curve labeled $y = f(kx)$ is shown, which is a horizontal compression of the solid curve. Arrows point from the solid curve towards the y-axis, indicating the direction of compression. A double-headed arrow above the x-axis indicates the scale factor k.</p> <p>$E(f(x)) = E(f(kx))$. Точки пересечения графика с осью Oy остаются неизменными.</p>
<p>12. $y = f(kx)$ ($0 < k < 1$)</p>	<p>График получается растяжением графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox в $\frac{1}{k}$ раз.</p>  <p>The diagram shows a coordinate system with x and y axes. A solid curve labeled $y = f(x)$ is shown. A dashed curve labeled $y = f(kx)$ is shown, which is a horizontal stretching of the solid curve. Arrows point from the solid curve away from the y-axis, indicating the direction of stretching. A double-headed arrow above the x-axis indicates the scale factor $1/k$.</p> <p>$E(f(x)) = E(f(kx))$. Точки пересечения графика с осью Oy остаются неизменными.</p>

Преобразование графиков

вида $y = f(|x + b|)$, $y = f(|x| + b)$

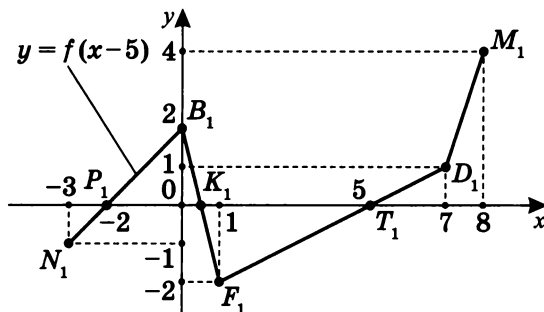
Эти преобразования несколько сложны, поэтому при первом прочтении данный параграф можно опустить.

1. Пусть $f(x)$ — кусочно-линейная функция, заданная графиком.



Построим график функции $y = f(|x - 5|)$.

- а) Вначале построим график функции $y = f(x - 5)$, получаемый сдвигом исходного графика на 5 вправо:



$$N(-8; -1) \rightarrow N_1(-3; -1);$$

$$B(-5; 2) \rightarrow B_1(0; 2);$$

$$F(-4; -2) \rightarrow F_1(1; -2);$$

$$D(2; 1) \rightarrow D_1(7; 1);$$

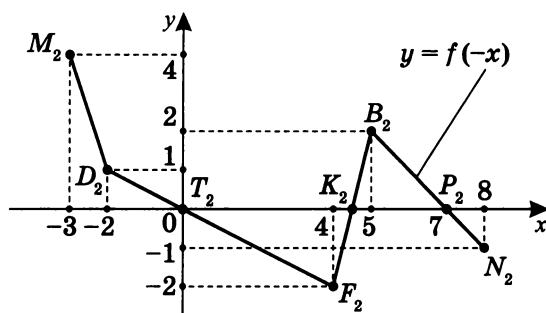
$$M(3; 4) \rightarrow M_1(8; 4);$$

$$P(-7; 0) \rightarrow P_1(-2; 0);$$

$$K(-4; 0) \rightarrow K_1(1; 0);$$

$$T(0; 0) \rightarrow T_1(5; 0).$$

- б) Так как $y = f(|x - 5|) = \begin{cases} f(x - 5), & x \geq 5 \\ f(5 - x), & x < 5 \end{cases}$, то вначале построим $f(-x)$:



$$N(-8; -1) \rightarrow N_2(8; -1);$$

$$B(-5; 2) \rightarrow B_2(5; 2);$$

$$F(-4; -2) \rightarrow F_2(4; -2);$$

$$D(2; 1) \rightarrow D_2(-2; 1);$$

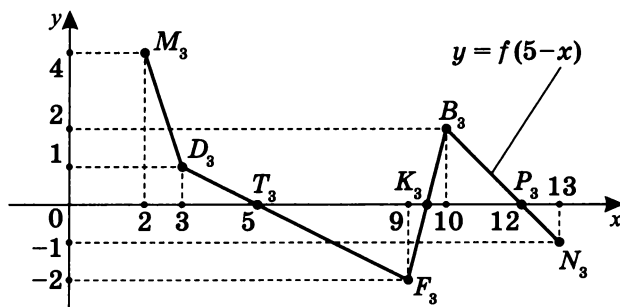
$$M(3; 4) \rightarrow M_2(-3; 4);$$

$$P(-7; 0) \rightarrow P_2(7; 0);$$

$$K(-4, 5; 0) \rightarrow K_2(0, 5; 0);$$

$$T(0; 0) - \text{неподвижная точка, } T \equiv T_2.$$

- в) Затем сдвигом графика $y = f(-x)$ на 5 вправо построим график функции $y = f(5 - x) = f(-(x - 5))$:



$$N_2(-8; 1) \rightarrow N_3(13; -1);$$

$$B_2(5; 2) \rightarrow B_3(10; 2);$$

$$F_2(4; -2) \rightarrow F_3(9; -2);$$

$$D_2(-2; 1) \rightarrow D_3(3; 1);$$

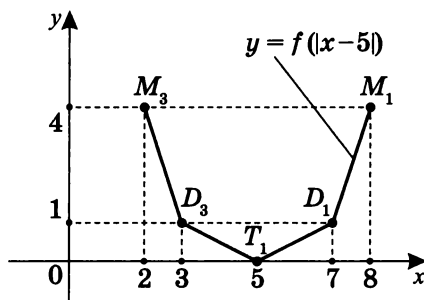
$$M_2(-3; 4) \rightarrow M_3(2; 4);$$

$$P_2(7; 0) \rightarrow P_3(12; 0);$$

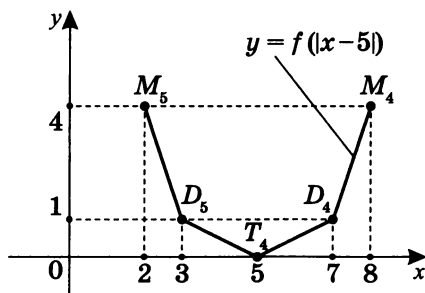
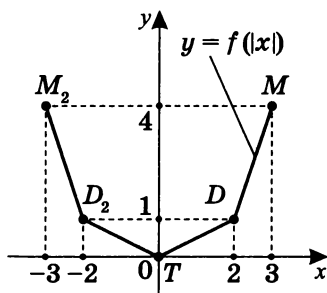
$$K_2(4; 5; 0) \rightarrow K_3(9; 5; 0);$$

$$T_2(0; 0) \rightarrow T_3(5; 0).$$

г) Потом склеим график функции $y = f(x - 5)$ при $x \geq 5$ и график функции $y = f(5 - x)$ при $x < 5$:

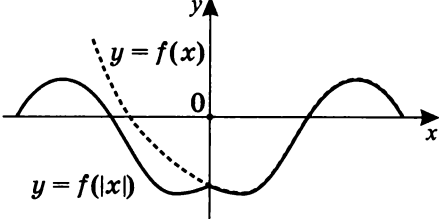
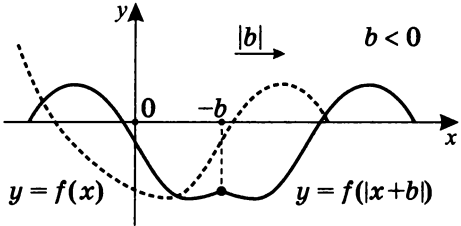
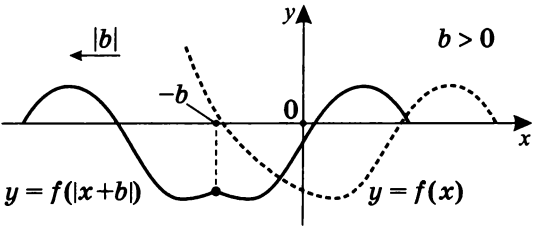


Примечание. Можно выстроить и другую последовательность: сначала построить график функции $y = f(|x|)$, а затем сдвинуть его на 5 вправо, получим $y = f(|x - 5|)$.

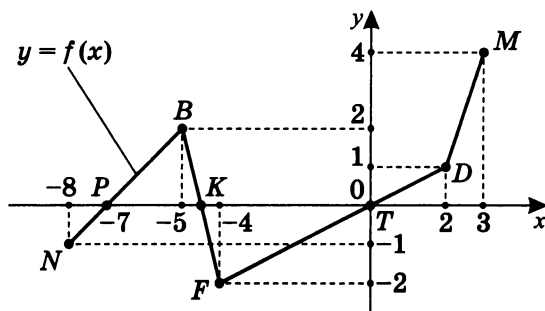


$$\begin{aligned} M(3; 4) &\rightarrow M_4(8; 4); \\ D(2; 1) &\rightarrow D_4(7; 1); \\ T(0; 0) &\rightarrow T_4(5; 0); \\ D_2(-2; 1) &\rightarrow D_5(3; 1); \\ M_2(-3; 4) &\rightarrow M_5(2; 4). \end{aligned}$$

Результаты построения данного графика можно обобщить.

$y = f(x + b)$	<p>Для построения данного графика сначала построим график $y = f(x)$:</p> 
<p>13. $y = f(x + b)$ ($b < 0$)</p>	<p>График $y = f(x)$ сдвинем вправо на b, если $b < 0$</p> 
<p>14. $y = f(x + b)$ ($b > 0$)</p>	<p>График $y = f(x)$ сдвинем влево на b, если $b > 0$</p> 

2. Построим график функции $y = f(|x| + b)$.

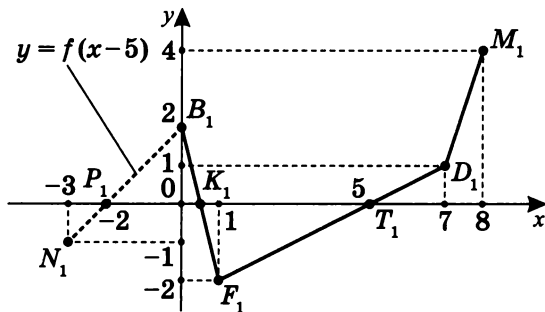


Пусть для примера $b = -5$.

$$\text{Так как } f(|x| + b) = \begin{cases} f(x + b), & x \geq 0 \\ f(-x + b), & x < 0 \end{cases},$$

то рассмотрим следующие промежутки.

а) Пусть $x \geq 0$.

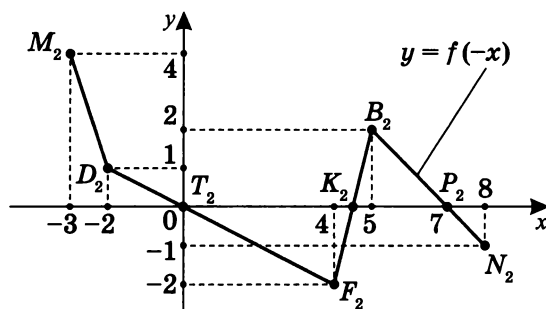


Имеет место сдвиг вправо на 5.

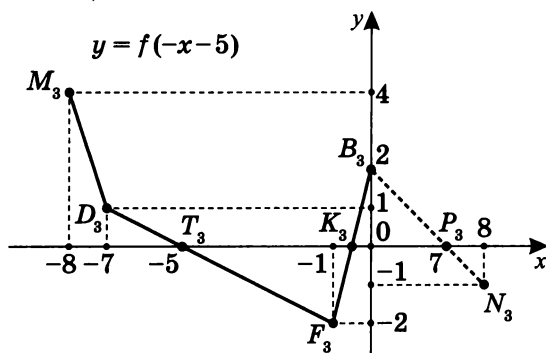
(Рассматривается график только в правой полуплоскости.)

б) Пусть $x < 0$.

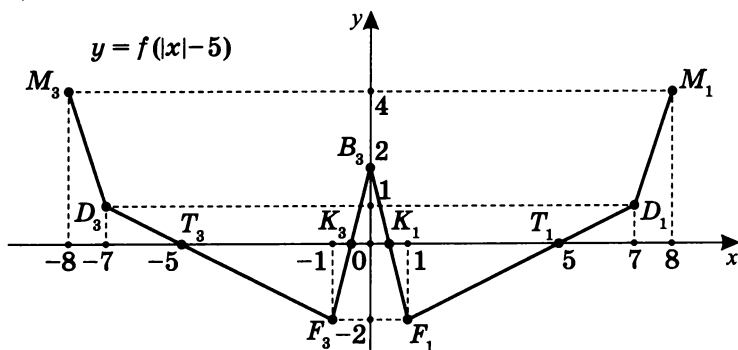
Сначала построим график функции $y = f(-x)$.



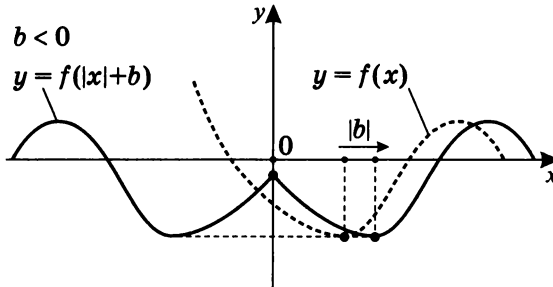
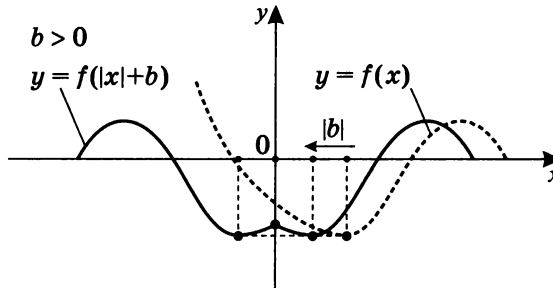
Теперь сдвинем его влево на 5 ($y = f(-(x + 5))$).
(Рассматривается график только в левой полуплоскости.)



в) Склеим обе части.



Результаты построения данного графика можно обобщить.

<p>15. $y = f(x +b)$ ($b < 0$)</p>	<p>Сдвиг графика $y = f(x)$ вправо на b и отражение полученного графика, находящегося в правой полуплоскости ($x \geq 0$), в левую полуплоскость. Затем склейка обеих частей графика.</p> 
<p>16. $y = f(x +b)$ ($b > 0$)</p>	<p>Сдвиг графика $y = f(x)$ влево на b и отражение полученного графика, находящегося в левой полуплоскости ($x < 0$), в правую полуплоскость. Затем склейка обеих частей графика.</p> 

Примечание. Заметим, что график функции $y = f(|x| + b)$ построить проще, если воспользоваться тем, что эта функция четная, а значит, ее график симметричен относительно оси ординат. Таким образом, достаточно построить график $y = f(x + b)$ в правой полуплоскости и симметрично относительно оси ординат отразить его в левую полуплоскость.

Практикум 7 (Использование комбинированных преобразований при построении графиков функций)

Постройте графики функций:

1. $y = \sqrt{2x + 6};$

2. $y = \sqrt{\frac{1}{2}x - 1};$

3. $y = \sqrt{-2 - \frac{1}{2}x};$

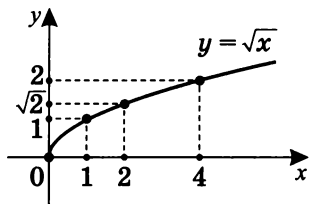
4. $y = \sqrt{3 - \frac{1}{2}|x|};$

5. $y = 2\sqrt{\left|\frac{1}{3}x + 3\right|}.$

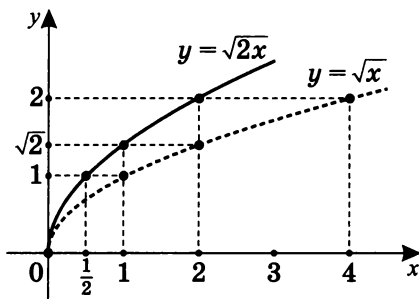
Решение практикума 7

1. $y = \sqrt{2x+6}$.

Для построения графика $y = \sqrt{2x+6}$ используем последовательность преобразований.

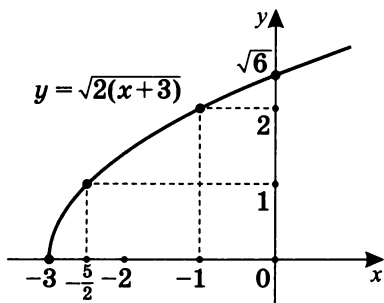


- а) Построим график $y = \sqrt{2x}$, сжав исходный график вдоль оси абсцисс в 2 раза.

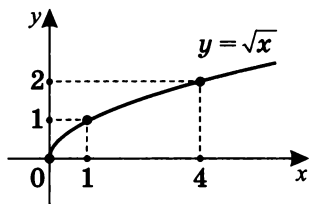


Примечание. Можно построить этот график и иначе. Так как $y = \sqrt{2x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x}$, то, растянув исходный график $y = \sqrt{x}$ вдоль оси ординат в $\sqrt{2}$ раз, получим тот же график $y = \sqrt{2x}$.

- б) Затем построим график $y = \sqrt{2(x+3)}$ сдвигом графика $y = \sqrt{2x}$ влево на 3.

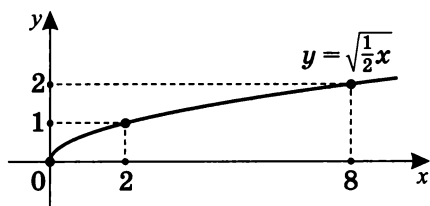


2. $y = \sqrt{\frac{1}{2}x - 1}$.

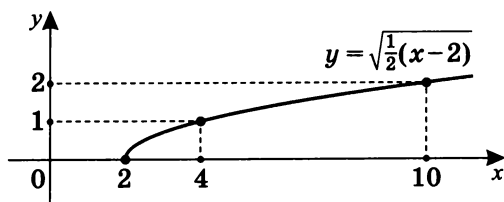


Для построения графика функции $y = \sqrt{\frac{1}{2}x - 1}$:

- а) Построим график $y = \sqrt{\frac{1}{2}x}$, растянув исходный график в два раза вдоль оси абсцисс.



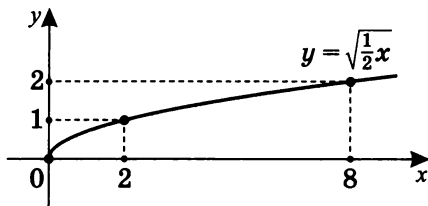
- б) Построим график $y = \sqrt{\frac{1}{2}(x-2)}$ сдвигом графика $y = \sqrt{\frac{1}{2}x}$ вправо на 2.



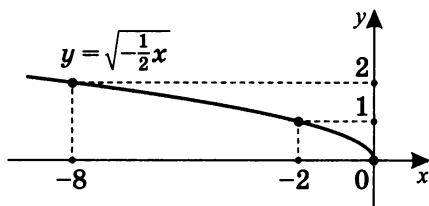
3. $y = \sqrt{-2 - \frac{1}{2}x}$.

Для построения графика функции $y = \sqrt{-2 - \frac{1}{2}x}$:

- а) Построим график $y = \sqrt{\frac{1}{2}x}$, растянув график функции $y = \sqrt{x}$ в два раза относительно оси абсцисс.



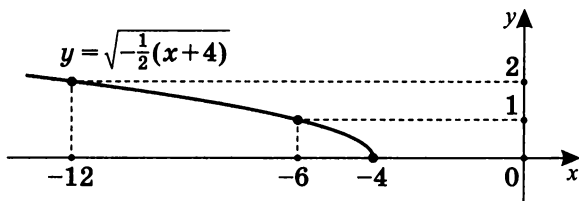
- б) Построим график функции $y = \sqrt{-\frac{1}{2}x}$ симметрией относительно оси ординат.



- в) Построим график функции

$$y = \sqrt{-2 - \frac{1}{2}x} = \sqrt{-\frac{1}{2}(x+4)}$$

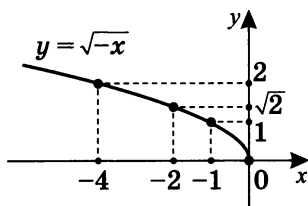
сдвигом графика $y = \sqrt{-\frac{1}{2}x}$ влево на 4.



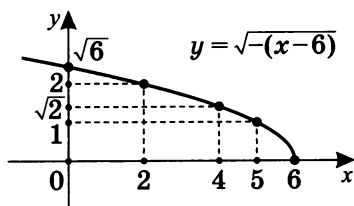
4. $y = \sqrt{3 - \frac{1}{2}|x|}$.

Для построения графика функции $y = \sqrt{3 - \frac{1}{2}|x|}$:

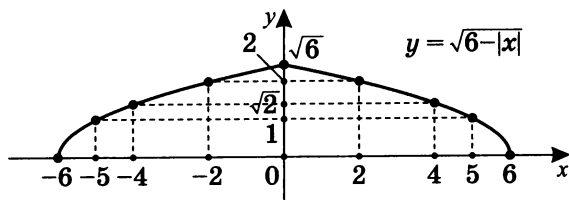
- а) Построим график функции $y = \sqrt{-x}$, симметрично отразив базовый график $y = \sqrt{x}$ относительно оси ординат.



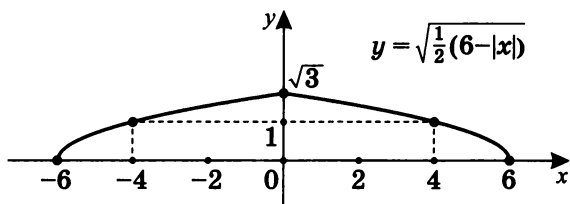
- б) Построим график функции $y = \sqrt{6-x} = \sqrt{-(x-6)}$ сдвигом графика $y = \sqrt{-x}$ вправо на 6.



- в) Построим график функции $y = \sqrt{6-|x|}$, используя правило построения графика $y = f(|x|)$, т. е. симметрию относительно оси ординат.



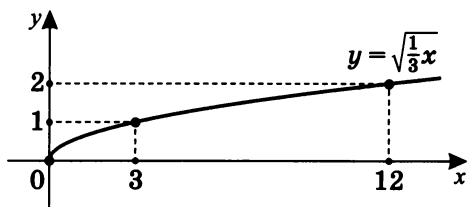
- г) Построим график $y = \sqrt{\frac{1}{2}(6 - |x|)}$ сжатием в $\sqrt{2}$ раз вдоль оси ординат графика $y = \sqrt{6 - |x|}$, так как $\sqrt{\frac{1}{2}(6 - |x|)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{6 - |x|}$.



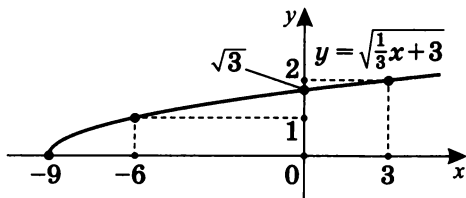
5. $y = 2\sqrt{\left|\frac{1}{3}x + 3\right|}$.

Для построения графика функции $y = 2\sqrt{\left|\frac{1}{3}x + 3\right|}$ используем последовательность преобразований.

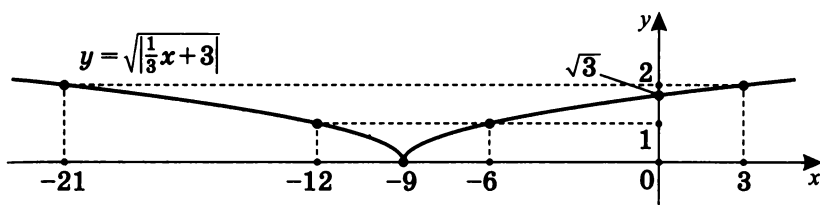
- а) Построим график $y = \sqrt{\frac{1}{3}x}$ растяжением графика $y = \sqrt{x}$ в три раза вдоль оси абсцисс.



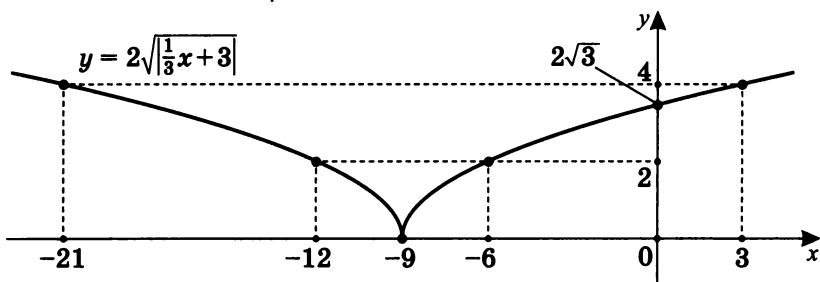
- б) Построим $y = \sqrt{\frac{1}{3}x + 3} = \sqrt{\frac{1}{3}(x + 9)}$ сдвигом графика $y = \frac{1}{3}x$ влево на 9.



в) Построим $y = \sqrt{\left|\frac{1}{3}x + 3\right|}$, используя для этого преобразование вида $y = f(|x + b|)$ (см. с. 135).



г) Построим график $y = 2\sqrt{\left|\frac{1}{3}x + 3\right|}$ растяжением графика $y = \sqrt{\left|\frac{1}{3}x + 3\right|}$ в два раза вдоль оси ординат.



Примечание. Обратите внимание на то, что для построения итоговых графиков могут быть использованы *различные* последовательности элементарных преобразований исходных графиков. Важно, чтобы при этом они были возможны и корректны, т. е. чтобы мы точно представляли, благодаря какому известному нам преобразованию можно перейти от графика одного вида к графику другого вида. Не помешает и вычислительно проверить по точкам итоговый график.

Самостоятельная работа 1

Зная график $y = f(x) = \frac{1}{x}$, постройте графики:

1. $y = \frac{1}{x-1}$;

2. $y = \frac{1}{-x}$;

3. $y = 1 - \frac{1}{x}$;

4. $y = \frac{1}{x+2} - 1$;

5. $y = \left| \frac{1}{x} - 2 \right|$;

6. $y = \frac{1}{|x+3|}$;

7. $y = \frac{1}{|x|-2}$;

8. $y = \left| \frac{1}{1-x} - 3 \right|$;

9. $y = \left| \frac{1}{|x-1|} - 3 \right|$;

10. $y = \left| \frac{1}{|x|-3} - 1 \right|$.

Самостоятельная работа 2

Зная график $y = f(x)$, постройте графики:

1. $y = f(x - 3)$;
2. $y = f(|x - 3|)$;
3. $y = 1 - f(|x - 3|)$,

где

- а) $y = f(x) = \frac{1}{x}$;
- б) $y = f(x) = \sqrt{x}$;
- в) $y = f(x) = x^3$.

Самостоятельная работа 3

Постройте графики:

1. $y = \frac{1}{(3 - |x|)^2}$;
2. $y = (2 - x)^3$;
3. $y = \left| \frac{1}{(4 - |x|)^2} - 1 \right|$;
4. $y = \left| (2 - x)^3 - 1 \right|$;
5. $y = (|x| - 2)^2$;
6. $y = \left| 1 - (|x| - 2)^2 \right|$.

Самостоятельная работа 4

Постройте графики функций:

1. $y = \sqrt{x-1}$;

2. $y = \sqrt{x} + 3$;

3. $y = \sqrt{x+2} - 1$;

4. $y = \sqrt{-x}$;

5. $y = 1 - \sqrt{x-1}$;

6. $y = |\sqrt{x} - 2|$;

7. $y = |\sqrt{1-x} - 3|$;

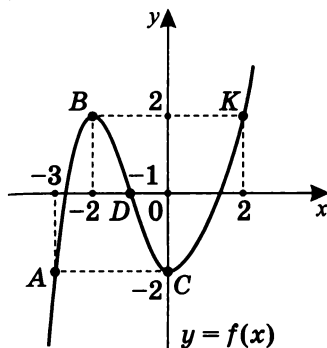
8. $y = \sqrt{|x| - 2}$;

9. $y = \sqrt{|x+3|}$;

10. $y = \left| \sqrt{|x| - 1} - 2 \right|$.

Самостоятельная работа 5

Дан график функции $f(x)$:



Постройте на одном чертеже (или в одной системе координат) графики функций:

Вариант I

1. $y = f(x)$ и $y = f(x) + 1$;

2. $y = f(x)$ и $y = f(x - 1)$;

3. $y = f(x)$ и $y = 2f(x)$;

4. $y = f(x)$ и $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$;

5. $y = f(x)$ и $y = f(|x|)$.

Вариант II

1. $y = f(x)$ и $y = f(x + 1)$;

2. $y = f(x)$ и $y = f(x) - 1$;

3. $y = f(x)$ и $y = \frac{1}{2}f(x)$;

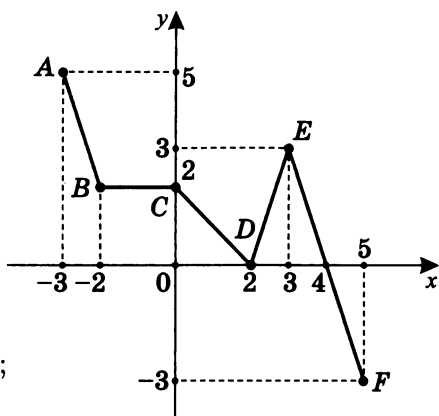
4. $y = f(x)$ и $y = f(2x)$;

5. $y = f(x)$ и $y = |f(x)|$.

Практикум 8

1. По данному графику функции исследуйте ее и опишите ее свойства:

- $D(f)$;
- $E(f)$;
- корни (нули) функции;
- промежутки знакопостоянства;
- вид функции в смысле четности;
- периодичность;
- промежутки монотонности;
- y_{\max} , y_{\min} ;
- y_{\max} , y_{\min} .



2. Постройте графики.

- $y = f(x - 3)$;
- $y = f(x) + 2$;
- $y = f(x + 2)$;
- $y = f(x) - 3$.

Исследуйте и опишите свойства графика после преобразования.

- $y = f(x - 1) - 4$.

Решение практикума 8

1. По данному графику функции исследуем ее и опишем ее свойства:

а) $D(f) = [-3; 5]$.

б) $E(f) = [-3; 5]$.

в) $x = 2, x = 4$ — корни.

г) $f(x) \geq 0$ на $[-3; 4]$;
 $f(x) < 0$ на $(4; 5]$.

д) Общего вида
 в смысле четности.

е) Непериодическая.

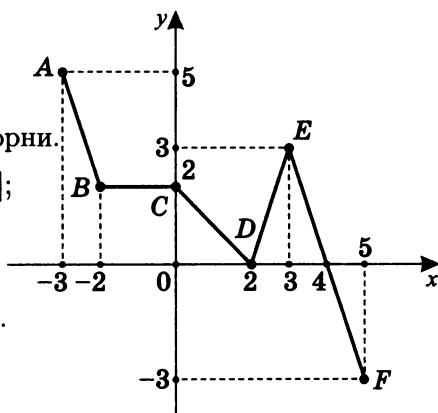
ж) $y(x) \uparrow$ на $[2; 3]$;

$y(x) \downarrow$ на $[-3; -2] \cup [0; 2] \cup [3; 5]$;

$y(x) = \text{const}$ на $[-2; 0]$.

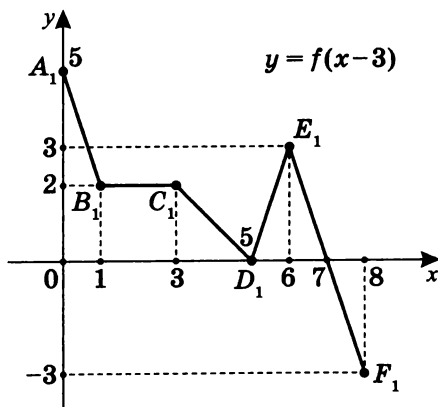
з) $y_{\max} = y(3) = 3$; $y_{\min} = y(2) = 0$.

и) $y_{\max} = y(-3) = 5$; $y_{\min} = y(5) = -3$.

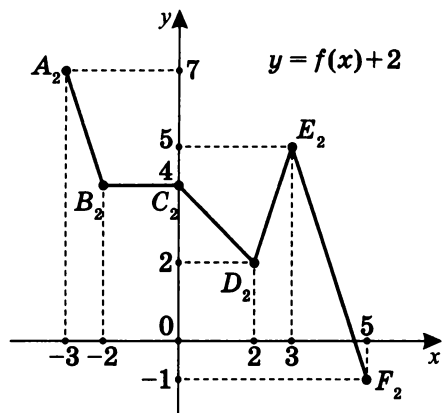


2. Построим графики.

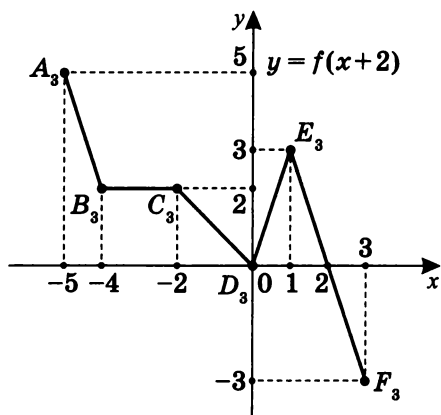
а) $y = f(x - 3)$.



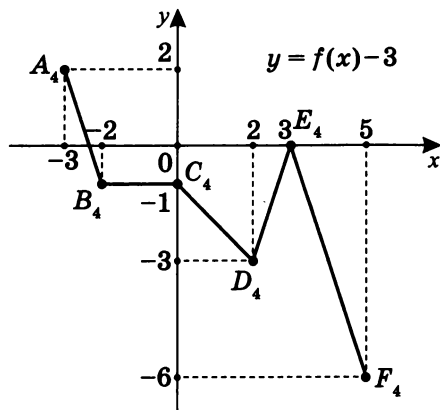
б) $y = f(x) + 2$.



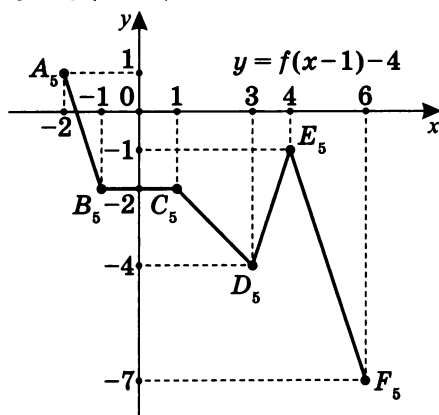
в) $y = f(x + 2)$.



г) $y = f(x) - 3$.



д) $y = f(x - 1) - 4$.

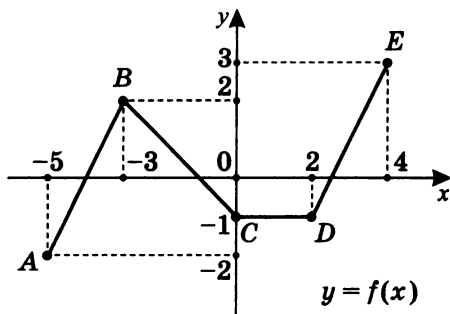


1. $D(f) = [-2; 6]$.
2. $E(f) = [-7; 1]$.
3. $x = -1\frac{2}{3}$.
4. $f(x) \geq 0$ на $[-2; -1\frac{2}{3}]$; $f(x) \leq 0$ на $[-1\frac{2}{3}; 6]$.
5. Общего вида в смысле четности.
6. Непериодическая.
7. $y = f(x) \uparrow$ на $[3; 4]$;
 $y = f(x) \downarrow$ на $[-2; -1] \cup [1; 3] \cup [4; 6]$.
8. $y_{\max} = y(4) = -1$; $y_{\min} = y(3) = -4$.
9. $y_{\max} = y(-2) = 1$; $y_{\min} = y(6) = -7$.

Самостоятельная работа 6

Вариант I

Дан график функции $y = f(x)$:

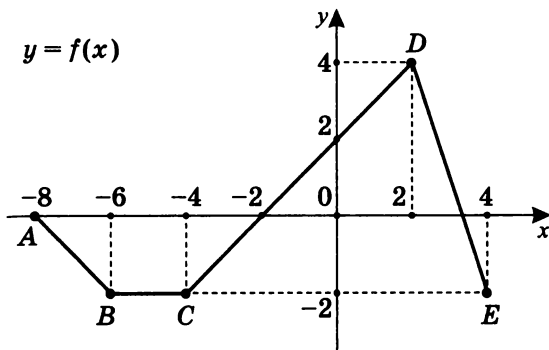


Постройте графики:

1. $y = f(x - 2) + 3$;
2. $y = f(x + 1) - 2$;
3. $y = -f(x)$;
4. $y = f(-x)$;
5. $y = f(|x|)$;
6. $y = |f(x)|$;
7. $y = |f(x + 2) - 1|$;
- 8*. $y = |f(|x| - 2) - 2|$.

Вариант II

Дан график функции $y = f(x)$:



Постройте графики:

1. $y = f(-x)$;
2. $y = |f(x)|$;
3. $y = f(|x|)$;
4. $y = 2f(x)$;
5. $y = \frac{1}{2}f(x)$;
6. $y = f(2x)$;
7. $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$;
8. $y = |f(|x|)|$.

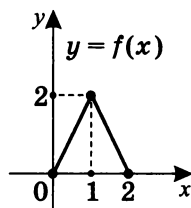
Домашняя тренировочная работа

Вариант I

1. Постройте график функции $y = |\sqrt{x+3} - 2|$.

2. Постройте график функции $y = \frac{2}{|x|} + 1$.

3. Дана функция



а) Постройте график $y = f\left(\frac{x}{2} + 1\right)$.

б) Постройте график $y = |2f(|x| - 1) - 1|$ и исследуйте после преобразований получившийся график.

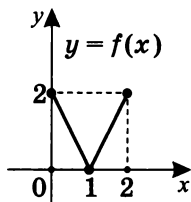
в) Постройте график $y = |2f(|x - 1|) - 1|$ и выясните, сколько корней имеет уравнение $|2f(|x - 1|) - 1| = a$ в зависимости от значения параметра a .

Вариант II

1. Постройте график функции $y = \left|\frac{1}{x-3} + 2\right|$.

2. Постройте график функции $y = 2\sqrt{|x|} - 1$.

3. Дана функция



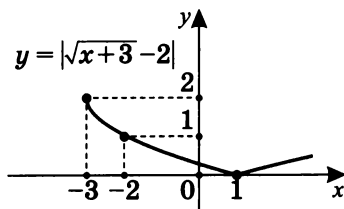
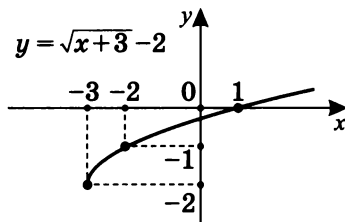
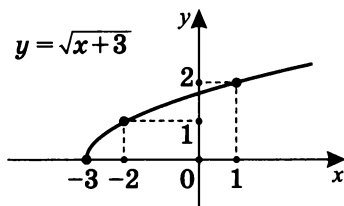
а) Постройте график $y = f(2x - 2)$.

б) Постройте график $y = |2f(|x| - 1) - 1|$ и выясните, сколько корней имеет уравнение $|2f(|x| - 1) - 1| = a$ в зависимости от значения параметра a .

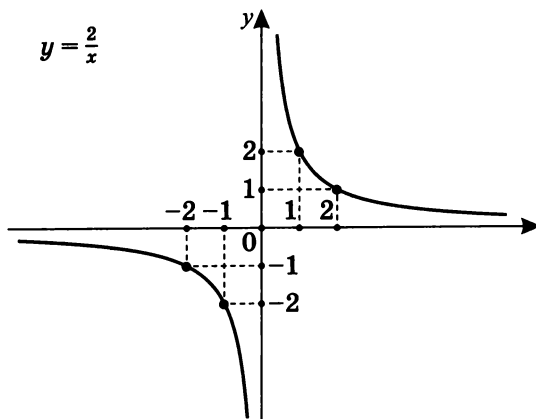
в) Постройте график $y = |2f(|x - 1|) - 1|$ и исследуйте получившийся после преобразований график.

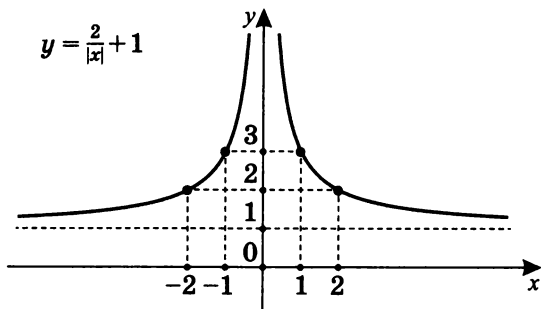
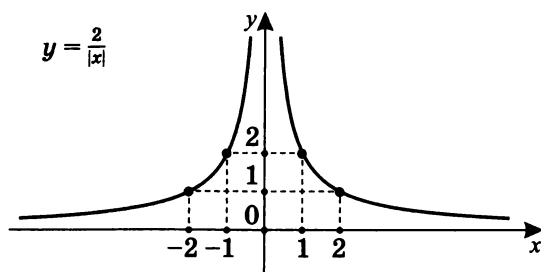
*Решение домашней тренировочной работы***Вариант I**

1. Построим график функции $y = |\sqrt{x+3} - 2|$.



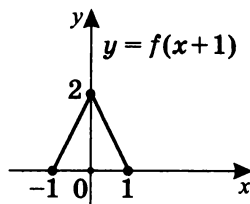
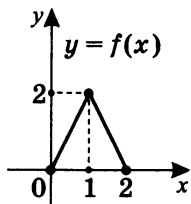
2. Построим график функции $y = \frac{2}{|x|} + 1$.



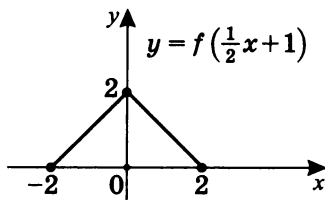


3. а) Построим график $y = f\left(\frac{x}{2} + 1\right)$.

Вначале построим график $y = f(x + 1)$ сдвигом исходного графика влево на 1:

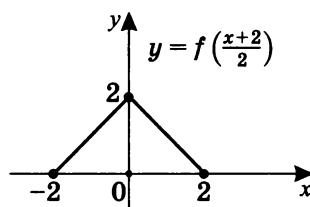
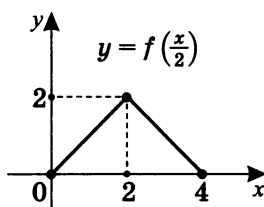


Затем построим график $y = f\left(\frac{x}{2} + 1\right)$, растянув график $y = f(x + 1)$ в два раза вдоль оси абсцисс.



Можно использовать другую последовательность построения графика $y = f\left(\frac{x}{2} + 1\right)$.

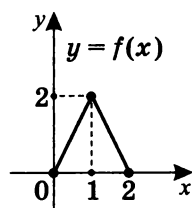
Если сразу построить график $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$, растянув в два раза исходный график $y = f(x)$, то можно воспользоваться преобразованием сдвига влево на 2, чтобы получить из графика $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$ график $y = f\left(\frac{x+2}{2}\right)$, а это и есть график $y = f\left(\frac{x}{2} + 1\right)$.



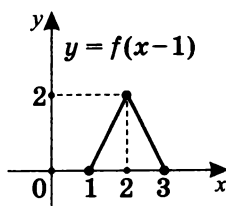
б) Построим график $y = |2f(|x| - 1) - 1|$.

Составим последовательный план преобразований:

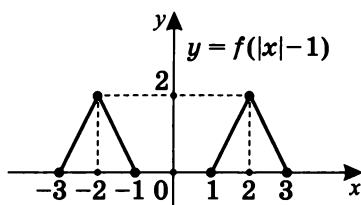
1. $y = f(x - 1)$;
2. $y = f(|x| - 1)$;
3. $y = 2f(|x| - 1)$;
4. $y = 2f(|x| - 1) - 1$;
5. $y = |2f(|x| - 1) - 1|$.



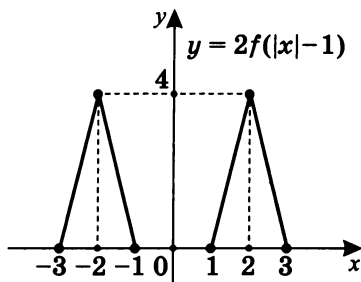
1. $y = f(x - 1)$.



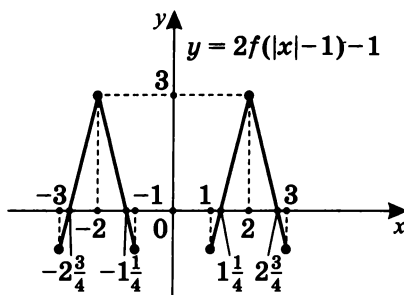
$$2. \ y = f(|x| - 1).$$



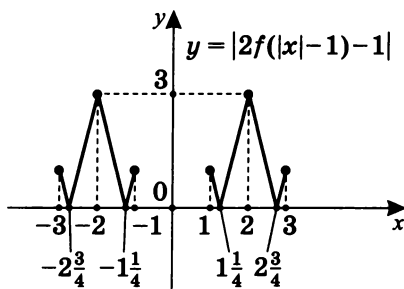
$$3. \ y = 2f(|x| - 1).$$



$$4. \ y = 2f(|x| - 1) - 1.$$



$$5. \ y = |2f(|x| - 1) - 1|.$$



Теперь исследуем получившуюся функцию по графику.

1. $D(f) = [-3; -1] \cup [1; 3]$.

2. $E(f) = [0; 3]$.

3. Промежутки монотонности:

на $\left[-3; -2\frac{3}{4}\right]$ — убывает;

на $\left[-2\frac{3}{4}; -2\right]$ — возрастает;

на $\left[-2; -1\frac{1}{4}\right]$ — убывает;

на $\left[-1\frac{1}{4}; -1\right]$ — возрастает;

на $\left[1; 1\frac{1}{4}\right]$ — убывает;

на $\left[1\frac{1}{4}; 2\right]$ — возрастает;

на $\left[2; 2\frac{3}{4}\right]$ — убывает;

на $\left[2\frac{3}{4}; 3\right]$ — возрастает.

4. $y_{\min} = y\left(-2\frac{3}{4}\right) = 0;$

$$y_{\min} = y\left(-1\frac{1}{4}\right) = 0;$$

$$y_{\min} = y\left(1\frac{1}{4}\right) = 0;$$

$$y_{\min} = y\left(2\frac{3}{4}\right) = 0;$$

$$y_{\max} = y(-2) = 3;$$

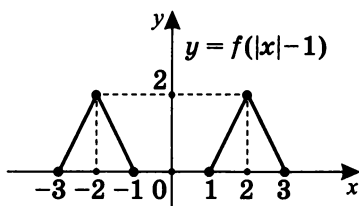
$$y_{\max} = y(2) = 3.$$

5. $y_{\text{наиб}} = 3; \quad y_{\text{наим}} = 0.$

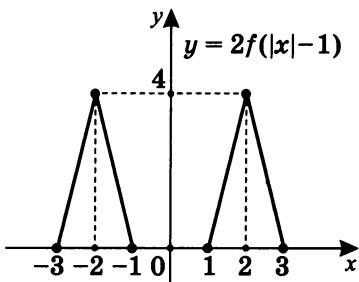
6. Четная.

7. Непериодическая.

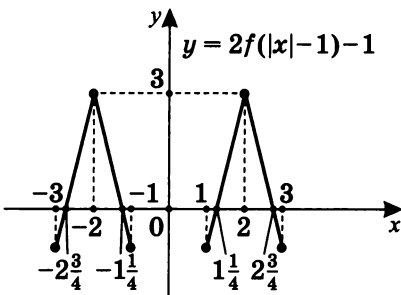
2. $y = f(|x| - 1)$.



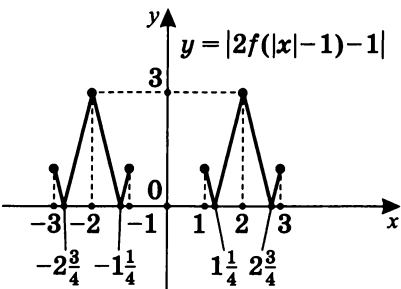
3. $y = 2f(|x| - 1)$.



4. $y = 2f(|x| - 1) - 1$.



5. $y = |2f(|x| - 1) - 1|$.



Теперь исследуем получившуюся функцию по графику.

1. $D(f) = [-3; -1] \cup [1; 3]$.

2. $E(f) = [0; 3]$.

3. Промежутки монотонности:

на $\left[-3; -2\frac{3}{4}\right]$ — убывает;

на $\left[-2\frac{3}{4}; -2\right]$ — возрастает;

на $\left[-2; -1\frac{1}{4}\right]$ — убывает;

на $\left[-1\frac{1}{4}; -1\right]$ — возрастает;

на $\left[1; 1\frac{1}{4}\right]$ — убывает;

на $\left[1\frac{1}{4}; 2\right]$ — возрастает;

на $\left[2; 2\frac{3}{4}\right]$ — убывает;

на $\left[2\frac{3}{4}; 3\right]$ — возрастает.

4. $y_{\min} = y\left(-2\frac{3}{4}\right) = 0;$

$$y_{\min} = y\left(-1\frac{1}{4}\right) = 0;$$

$$y_{\min} = y\left(1\frac{1}{4}\right) = 0;$$

$$y_{\min} = y\left(2\frac{3}{4}\right) = 0;$$

$$y_{\max} = y(-2) = 3;$$

$$y_{\max} = y(2) = 3.$$

5. $y_{\text{наиб}} = 3; \quad y_{\text{наим}} = 0.$

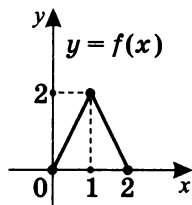
6. Четная.

7. Непериодическая.

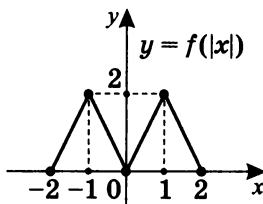
в) Построим график $y = |2f(|x-1|) - 1|$.

Составим последовательный план преобразований:

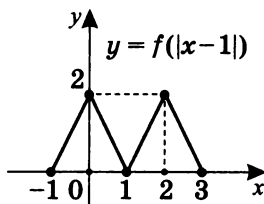
1. $y = f(|x|)$;
2. $y = f(|x-1|)$;
3. $y = 2f(|x-1|)$;
4. $y = 2f(|x-1|) - 1$;
5. $y = |2f(|x-1|) - 1|$.



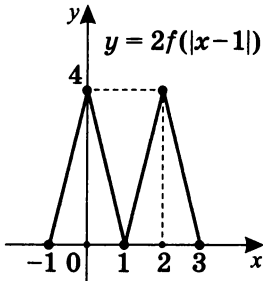
1. $y = f(|x|)$.



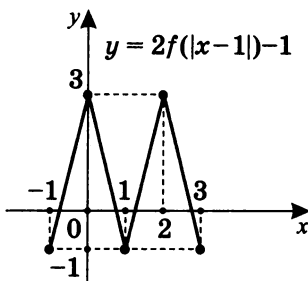
2. $y = f(|x-1|)$.



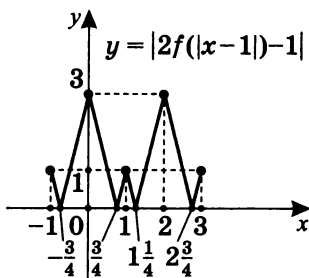
3. $y = 2f(|x-1|)$.



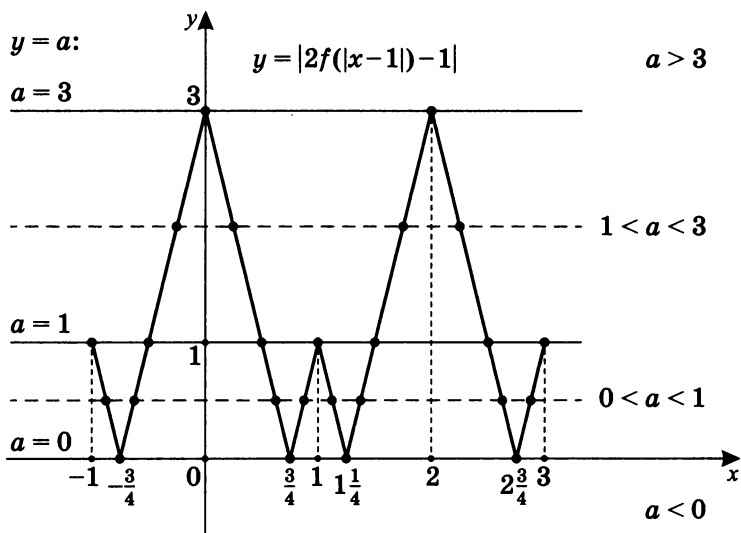
4. $y = 2f(|x-1|) - 1$.



5. $y = |2f(|x-1|) - 1|$.



6. Теперь выясним по графику, сколько корней имеет уравнение $|2f(|x-1|) - 1| = a$ в зависимости от значения параметра a :



При $a < 0$ — корней нет.

При $a = 0$ — четыре корня.

При $0 < a < 1$ — восемь корней.

При $a = 1$ — семь корней.

При $1 < a < 3$ — четыре корня.

При $a = 3$ — два корня.

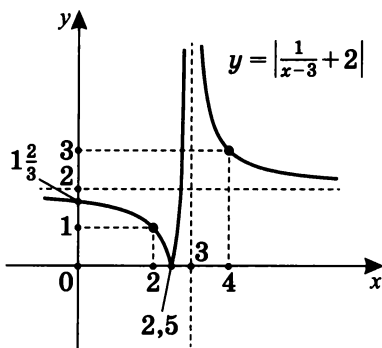
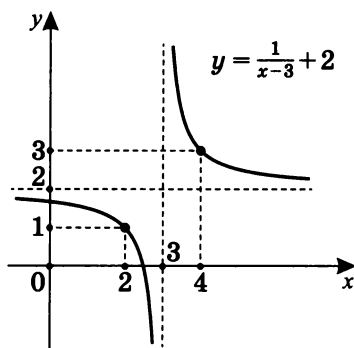
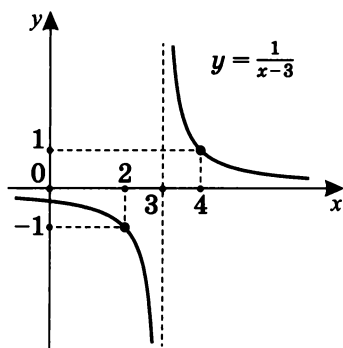
При $a > 3$ — корней нет.

Примечания. 1. В данной домашней тренировочной работе речь идет о том, сколько точек пересечения будет иметь прямая, параллельная оси абсцисс (вида $y = a$) с графиком кусочно-монотонной функции в зависимости от значения параметра a .

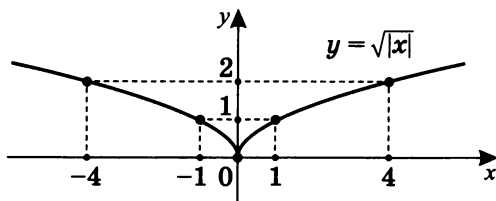
2. Более подробно вопрос о количестве корней в уравнении с параметром в зависимости от значения этого параметра см.: Шахмейстер А. Х. Построение и преобразования графиков. Параметры. Часть 1. СПб.; М., 2014. С. 128–171.

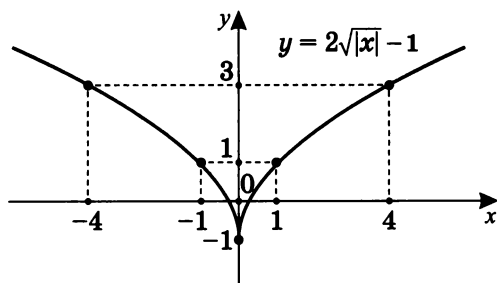
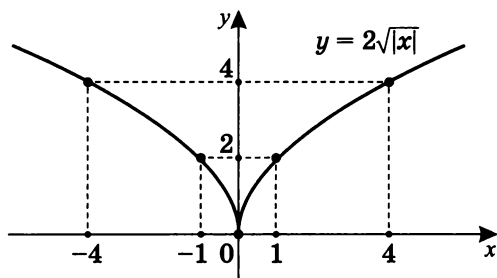
Вариант II

1. Построим график функции $y = \left| \frac{1}{x-3} + 2 \right|$.

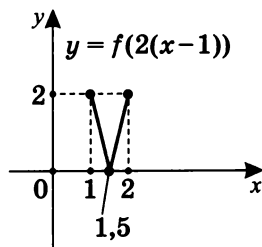
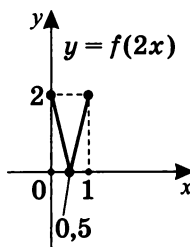
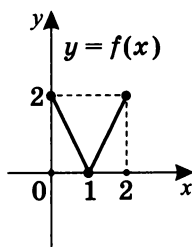


2. Построим график функции $y = 2\sqrt{|x|} - 1$.



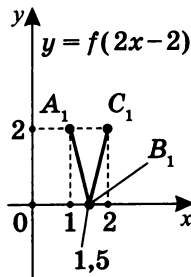
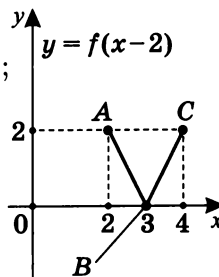


3. а) Построим график $y = f(2x - 2)$.

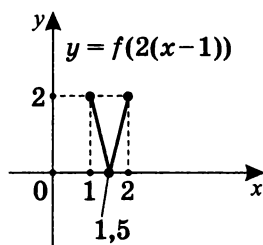
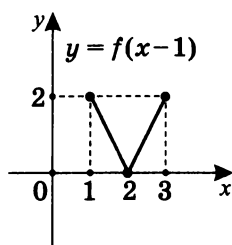


Примечание. Если сначала построить график функции $y = f(x - 2)$, то чтобы из него получить график $y = f(2x - 2)$, необходимо уменьшить абсциссы точек в два раза (т. е. сжать в два раза к оси Oy).

$A(2; 2) \rightarrow A_1(1; 2);$
 $B(3; 0) \rightarrow B_1(1.5; 0);$
 $C(4; 2) \rightarrow C_1(2; 2).$



Но можно предложить и иную последовательность преобразований: например, построить $y = f(x - 1)$, а затем $y = f(2(x - 1))$:



При переходе от графика $y = f(x - 1)$ к графику $y = f(2(x - 1))$ происходит сжатие к оси $x = 1$ в два раза.

Точка $(2; 0)$ переходит в точку $(1,5; 0)$, т. е. расстояние между точками $(1; 0)$ и $(2; 0)$ изначально равно 1 и сокращается в два раза.

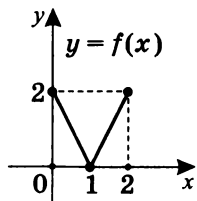
Аналогично точка $(3; 2)$ переходит в точку $(2; 2)$, т. е. расстояние между точками $(3; 2)$ и $(1; 2)$ изначально равно 2 и также сокращается в два раза.

В данном случае оказалось возможным построить график необходимой функции тремя способами. В других случаях это может быть невозможно.

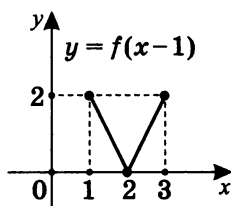
б) Построим график $y = |2f(|x| - 1) - 1|$.

Составим последовательный план преобразований:

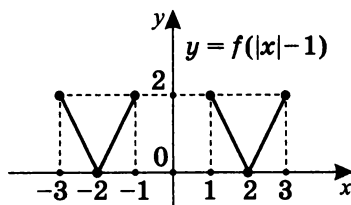
1. $y = f(x - 1)$;
2. $y = f(|x| - 1)$;
3. $y = 2f(|x| - 1)$;
4. $y = 2f(|x| - 1) - 1$;
5. $y = |2f(|x| - 1) - 1|$.



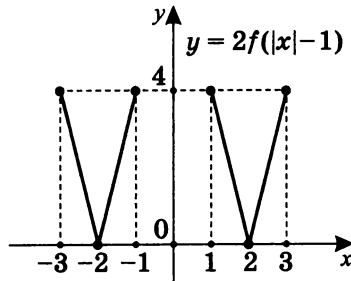
1. $y = f(x - 1)$.



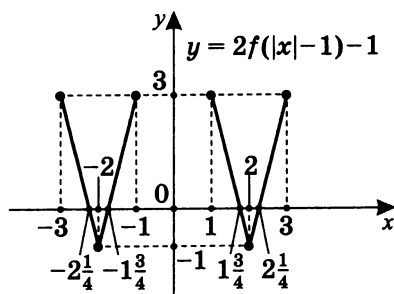
2. $y = f(|x| - 1)$.



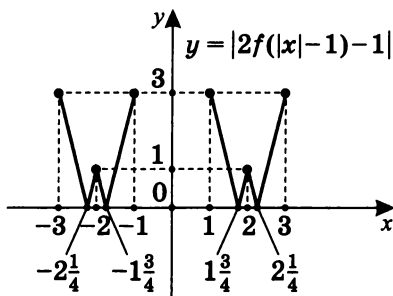
3. $y = 2f(|x| - 1)$.



4. $y = 2f(|x| - 1) - 1$.



5. $y = |2f(|x| - 1) - 1|$.



6. Теперь выясним по графику, сколько корней имеет уравнение $|2f(|x| - 1) - 1| = a$ в зависимости от значения параметра a .

При $a < 0$ — корней нет.

При $a = 0$ — четыре корня.

При $0 < a < 1$ — восемь корней.

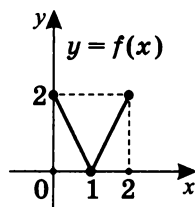
При $a = 1$ — шесть корней.

При $1 < a \leq 3$ — четыре корня.

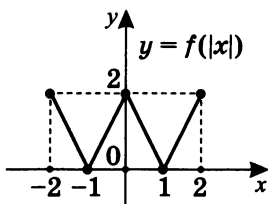
При $a > 3$ — корней нет.

в) Построим график

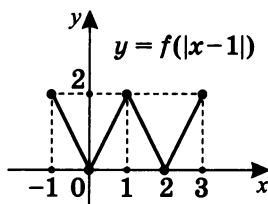
$$y = |2f(|x - 1|) - 1|.$$



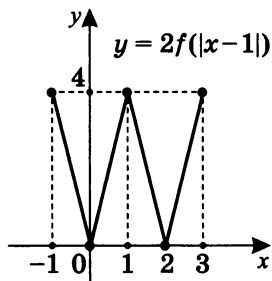
1. $y = f(|x|)$.



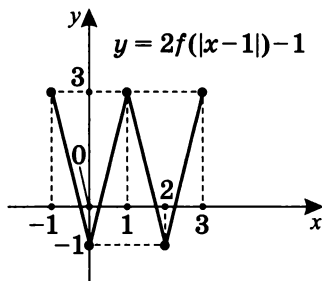
2. $y = f(|x - 1|)$.



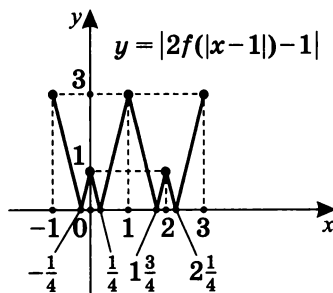
3. $y = 2f(|x - 1|)$.



4. $y = 2f(|x - 1|) - 1$.



5. $y = |2f(|x - 1|) - 1|$.



Исследуем по графику.

1. $D(f) = [-1; 3]$.

2. $E(f) = [0; 3]$.

3. Промежутки монотонности:

на $\left[-1; -\frac{1}{4}\right]$ — убывает;

на $\left[-\frac{1}{4}; 0\right]$ — возрастает;

на $\left[0; \frac{1}{4}\right]$ — убывает;

на $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$ — возрастает;

на $\left[1; 1\frac{3}{4}\right]$ — убывает;

на $\left[1\frac{3}{4}; 2\right]$ — возрастает;

на $\left[2; 2\frac{1}{4}\right]$ — убывает;

на $\left[2\frac{1}{4}; 3\right]$ — возрастает.

4. $y_{\min} = y\left(-\frac{1}{4}\right) = 0;$

$$y_{\min} = y\left(\frac{1}{4}\right) = 0;$$

$$y_{\min} = y\left(1\frac{3}{4}\right) = 0;$$

$$y_{\min} = y\left(2\frac{1}{4}\right) = 0;$$

$$y_{\max} = y(0) = 1;$$

$$y_{\max} = y(1) = 3;$$

$$y_{\max} = y(2) = 1.$$

5. $y_{\text{наиб}} = 3; \quad y_{\text{наим}} = 0.$

6. Общего вида в смысле четности.

7. Непериодическая.

Тренировочная работа 2

Постройте графики функций и выясните, сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$ в зависимости от значения параметра a .

Вариант I

1. $y = \log_{\frac{1}{2}}(2 - |x|)$;
2. $y = |3^{|x-2|} - 3|$;
3. $y = \left| \frac{1}{|x|+2} - 1 \right|$;
4. $y = ||x - 4| - 2|$;
5. $y = |x^2 - 2|x| - 8|$.

Вариант II

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2-|x|}$;
2. $y = \left| \log_{\frac{1}{3}} |x + 2| - 3 \right|$;
3. $y = \left| \frac{1}{|x|-1} + 1 \right|$;
4. $y = ||x + 4| - 1|$;
5. $y = |x^2 - 3|x| - 4|$.

Примечание. Ответ на вопрос о количестве корней попробуйте получить самостоятельно, сверившись затем с ответами на странице 182 (вариант I) и 184 (вариант II).

Решение тренировочной работы 2. Графики

Вариант I

1. Построим график функции $y = \log_{\frac{1}{2}}(2 - |x|)$.

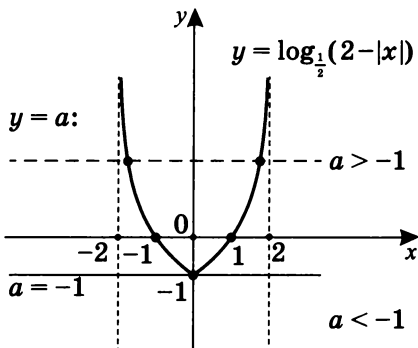
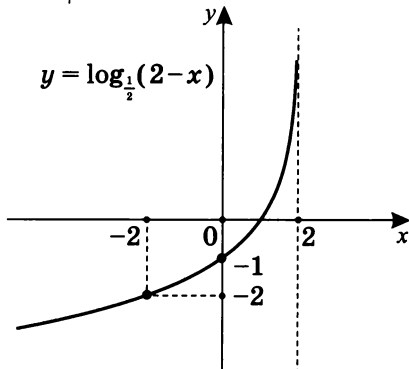
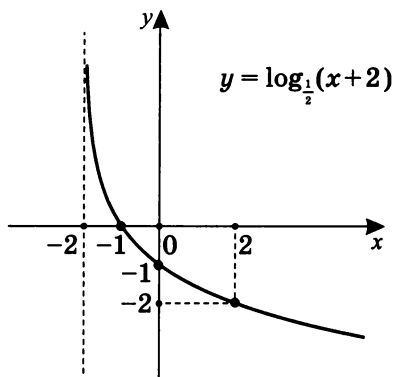
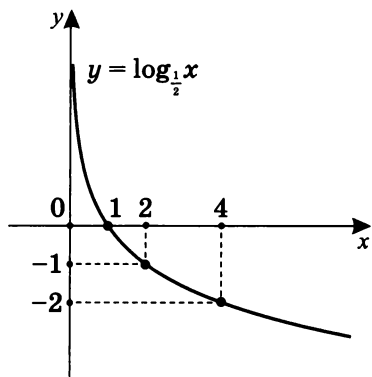
Составим последовательность преобразований исходного базового графика $y = \log_{\frac{1}{2}} x$:

$$y = \log_{\frac{1}{2}}(x + 2); \quad y = \log_{\frac{1}{2}}(-x + 2); \quad y = \log_{\frac{1}{2}}(2 - |x|)$$

или

$$y = \log_{\frac{1}{2}}(-x) \quad y = \log_{\frac{1}{2}}(-(x - 2)) \quad (y = \log_{\frac{1}{2}}(-x + 2));$$

$$y = \log_{\frac{1}{2}}(2 - |x|).$$



Самостоятельно используйте для построения вторую последовательность преобразований исходного графика.

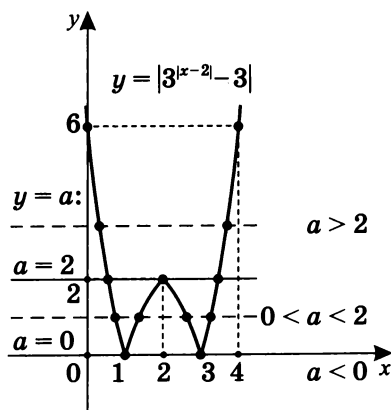
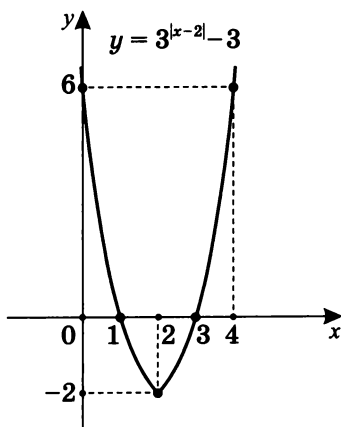
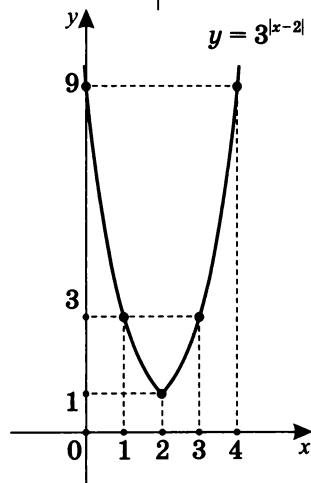
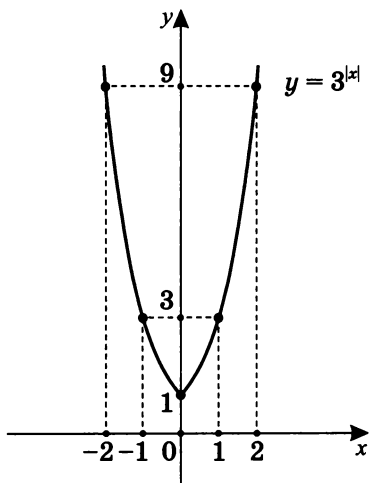
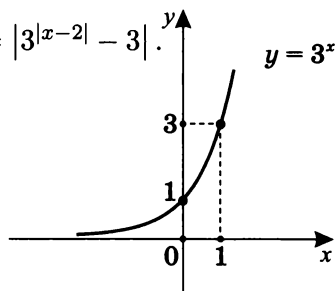
2. Построим график функции $y = |3^{|x-2|} - 3|$.

Составим последовательность преобразований исходного графика $y = 3^x$:

$$y = 3^{|x|}; \quad y = 3^{|x-2|};$$

$$y = 3^{|x-2|} - 3;$$

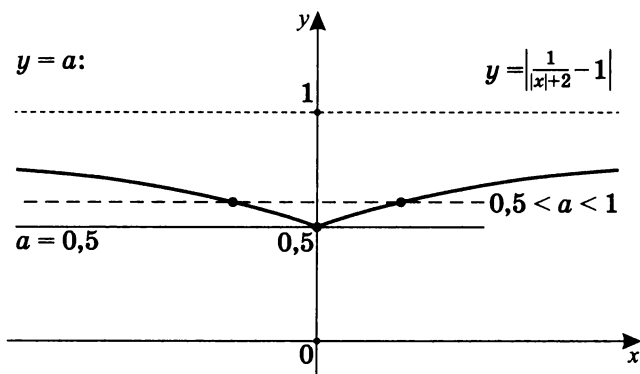
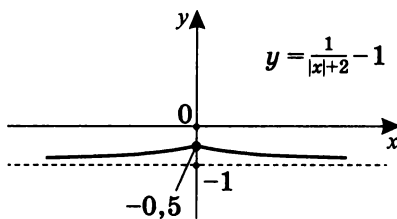
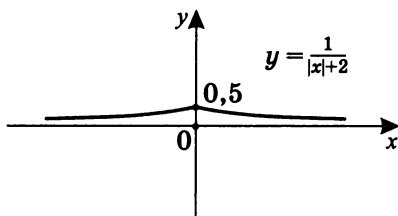
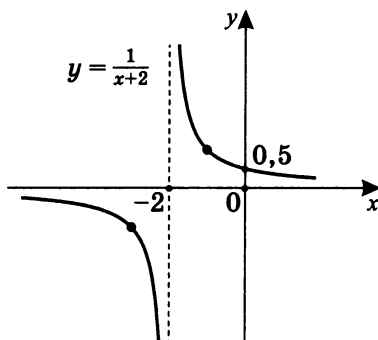
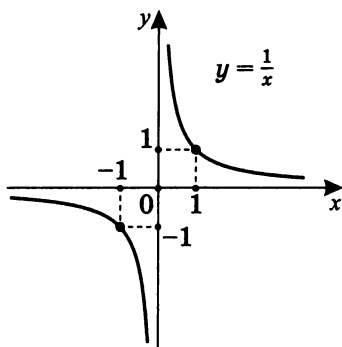
$$y = |3^{|x-2|} - 3|.$$



Примечание. Для построения графика $y = 3^{|x-2|}$ можно воспользоваться преобразованием вида $y = f(|x - 2|)$ (см. с. 135).

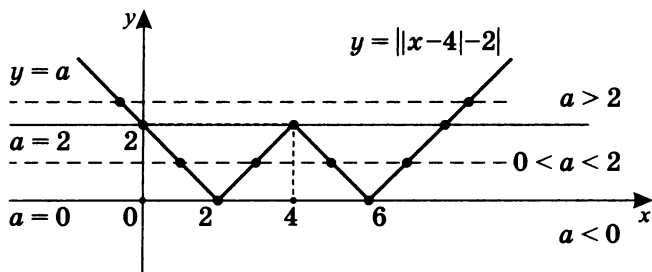
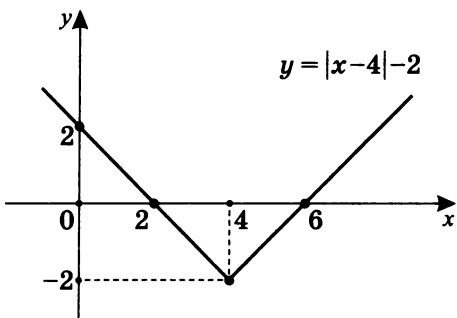
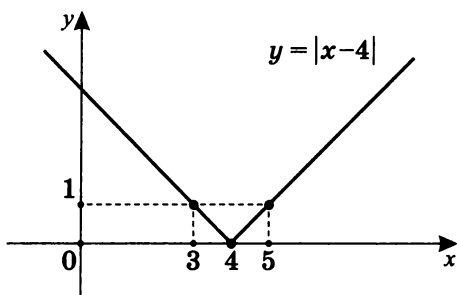
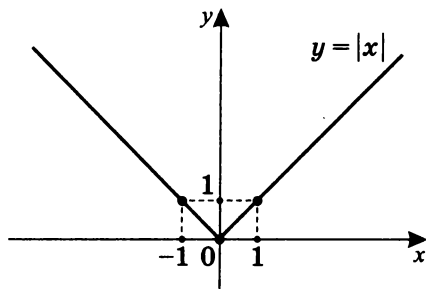
3. Построим график функции $y = \left| \frac{1}{|x|+2} - 1 \right|$.

Составим последовательность преобразований исходного графика $y = \frac{1}{x}$:



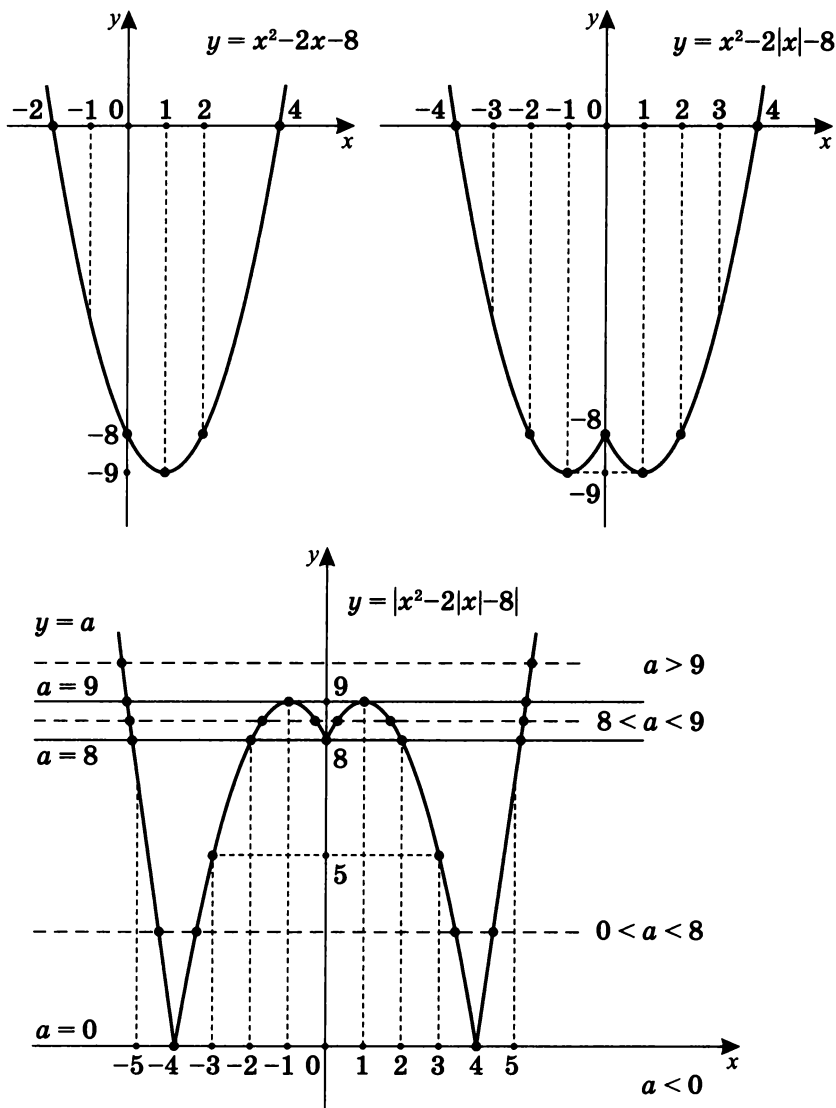
4. Построим график функции $y = ||x - 4| - 2|$.

Исходный график $y = |x|$.



5. Построим график функции $y = |x^2 - 2|x| - 8|$.

Базовый график $y = x^2 - 2x - 8 = (x - 1)^2 - 9$.



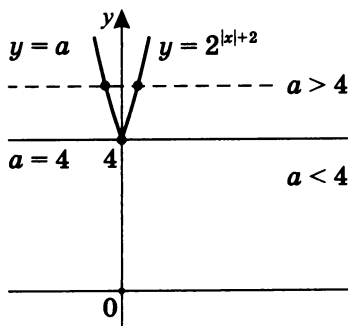
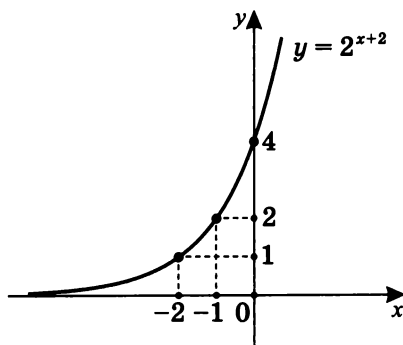
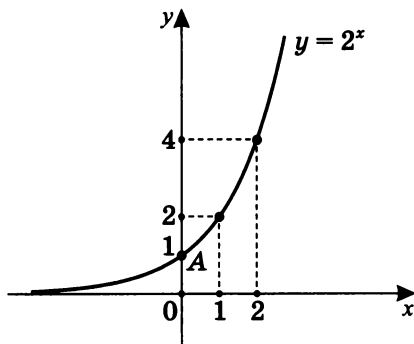
Примечание. Заметим, что так как $x^2 = |x|^2$,
то $f(x) = x^2 - 2|x| - 8 = f(|x|)$.

Вариант II

1. Построим график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2-|x|}$.

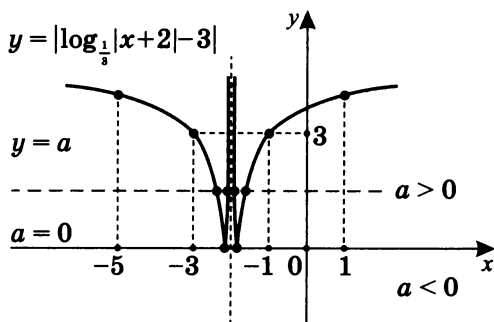
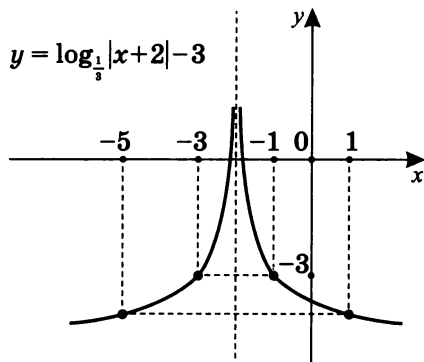
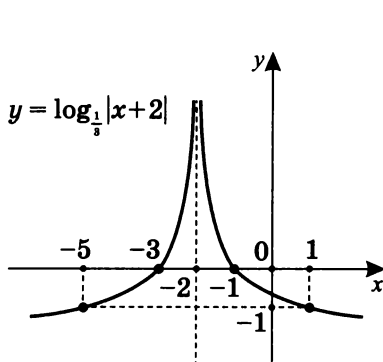
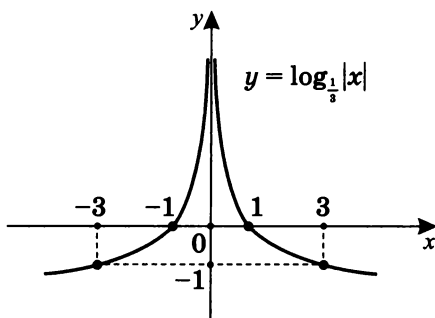
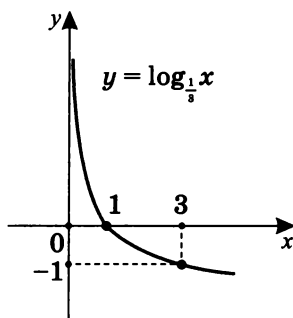
Функцию можно представить в виде $y = 2^{|x|+2}$.

Базовый график — $y = 2^x$.



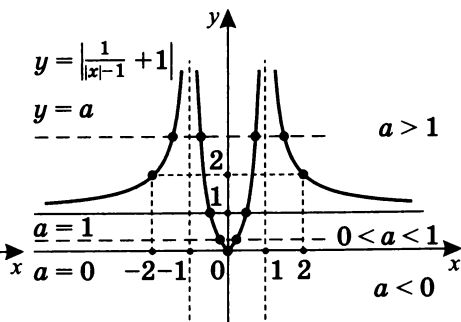
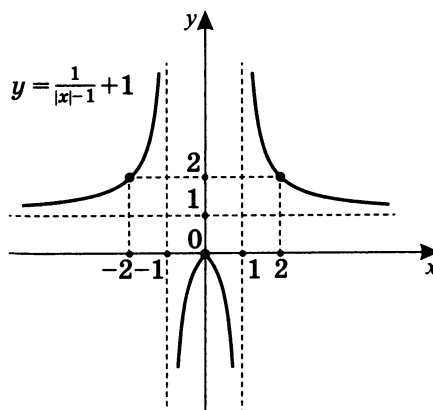
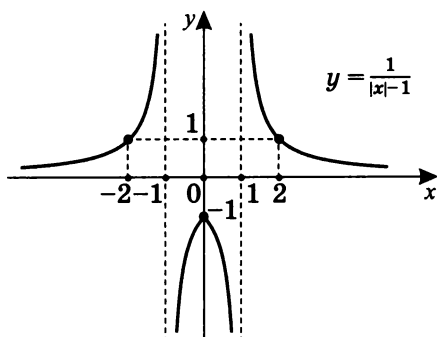
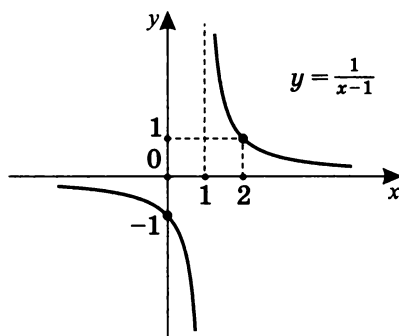
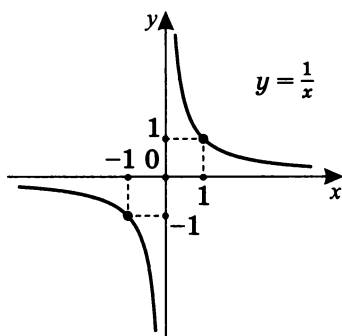
2. Построим график функции $y = \left| \log_{\frac{1}{3}} |x+2| - 3 \right|$.

Базовый график — $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.



3. Построим график функции $y = \left| \frac{1}{|x|-1} + 1 \right|$.

Базовый график — $y = \frac{1}{x}$.



Ответы на тренировочную работу 2.

Параметры

Вариант I

Сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$ в зависимости от значения параметра a ?

1. У уравнения $\log_{\frac{1}{2}}(2 - |x|) = a$ (см. график на с. 172):
при $a \in (-\infty; -1)$ — корней нет;
при $a = -1$ — один корень;
при $a \in (-1; \infty)$ — два корня.
2. У уравнения $|3^{|x-2|} - 3| = a$ (см. график на с. 173):
при $a \in (-\infty; 0)$ — корней нет;
при $a = 0$ — два корня;
при $a \in (0; 2)$ — четыре корня;
при $a = 2$ — три корня;
при $a \in (2; \infty)$ — два корня.
3. У уравнения $\left| \frac{1}{|x|+2} - 1 \right| = a$ (см. график на с. 174):
при $a \in (-\infty; 0,5)$ — корней нет;
при $a = 0,5$ — один корень;
при $a \in (0,5; 1)$ — два корня;
при $a \in [1; \infty)$ — корней нет.
4. У уравнения $||x - 4| - 2| = a$ (см. график на с. 175):
при $a \in (-\infty; 0)$ — корней нет;
при $a = 0$ — два корня;
при $a \in (0; 2)$ — четыре корня;
при $a = 2$ — три корня;
при $a \in (2; \infty)$ — два корня.

5. У уравнения $|x^2 - 2|x| - 8| = a$ (см. график на с. 176):
- при $a \in (-\infty; 0)$ — корней нет;
 - при $a = 0$ — два корня;
 - при $a \in (0; 8)$ — четыре корня;
 - при $a = 8$ — пять корней;
 - при $a \in (8; 9)$ — шесть корней;
 - при $a = 9$ — четыре корня;
 - при $a \in (9; \infty)$ — два корня.

Вариант II

Сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$ в зависимости от значения параметра a ?

1. У уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2-|x|} = a$ (см. график на с. 177):
при $a \in (-\infty; 4)$ — корней нет;
при $a = 4$ — один корень;
при $a \in (4; \infty)$ — два корня.
2. У уравнения $\left|\log_{\frac{1}{3}}|x+2| - 3\right| = a$ (см. график на с. 178):
при $a \in (-\infty; 0)$ — корней нет;
при $a = 0$ — два корня;
при $a \in (0; \infty)$ — четыре корня.
3. У уравнения $\left|\frac{1}{|x|-1} + 1\right| = a$ (см. график на с. 179):
при $a \in (-\infty; 0)$ — корней нет;
при $a = 0$ — один корень;
при $a \in (0; 1]$ — два корня;
при $a \in (1; \infty)$ — четыре корня.
4. У уравнения $||x+4| - 1| = a$ (см. график на с. 180):
при $a \in (-\infty; 0)$ — корней нет;
при $a = 0$ — два корня;
при $a \in (0; 1)$ — четыре корня;
при $a = 1$ — три корня;
при $a \in (1; \infty)$ — два корня.
5. У уравнения $|x^2 - 3|x| - 4| = a$ (см. график на с. 181):
при $a \in (-\infty; 0)$ — корней нет;
при $a = 0$ — два корня;
при $a \in (0; 4)$ — четыре корня;
при $a = 4$ — пять корней;
при $a \in (4; 6,25)$ — шесть корней;
при $a = 6,25$ — четыре корня;
при $a \in (6,25; \infty)$ — два корня.

3

Графическое решение уравнений и систем

Практикум 9

Решите графически систему уравнений.

1. $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 4 \end{cases};$

2. $\begin{cases} |x + y| = 2 \\ y = x^2 - 4 \end{cases};$

3. $\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ y|x| = 2 \end{cases};$

4. $\begin{cases} |x + y - 1| = 2 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 = 2^2 \end{cases};$

5. $\begin{cases} |x| + |y| = 4 \\ |xy| = 3 \end{cases};$

6. $\begin{cases} y = \frac{3(x-1)^2}{2|x-1|} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ y = x^2 - \frac{|x|}{x} - 2 \end{cases};$

7. $\begin{cases} y = 1 - |x| \\ (|x|-1)^2 + (y+1)^2 = 1 \end{cases};$

8. $\begin{cases} x^2 + (|y| - 1)^2 = 1 \\ |y| = 2 - x^2 \end{cases};$

Определите графически количество корней уравнения:

9. $2^x = x^2.$

Решение практикума 9²

Решим графически систему уравнений.

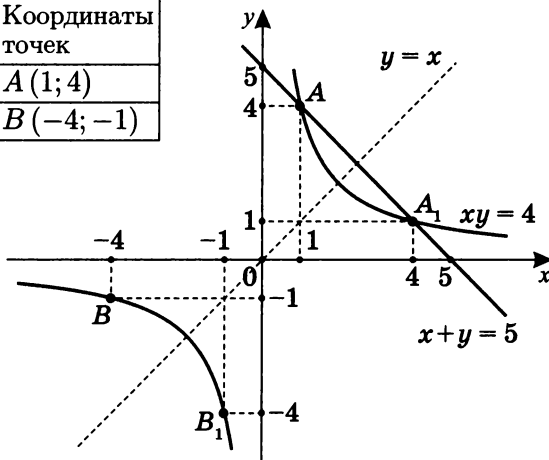
$$1. \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 4 \end{cases}.$$

Прежде всего, обратим внимание на то, что данная система — система симметричных уравнений, т. е. уравнений, для которых замена x на y (и y на x) не меняет их вида³.

Как известно, графики таких уравнений симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов, т. е. графика $y = x$. Соответственно, и решения такой системы также симметричны, т. е. если $(x_0; y_0)$ — решение системы, то и $(y_0; x_0)$ — решение.

$xy = 4$. График этого уравнения — гипербола $y = \frac{4}{x}$.

x	y	Координаты точек
1	4	$A(1; 4)$
-4	-1	$B(-4; -1)$



² Здесь мы не будем обсуждать построение и преобразования графиков функции и уравнений, которые мы изучали ранее — в предыдущей главе.

³ Более подробно см.: Шахмейстер А. Х. Решение систем уравнений. СПб.; М., 2014. С. 65–67 и Шахмейстер А. Х. Построение и преобразование графиков. Параметры. Часть I. СПб.; М., 2014. С. 47–53.

Очевидно, что координаты точек A_1 и B_1 , симметричных относительно прямой $y = x$ данным точкам A и B , — $A_1(4; 1)$ и $B_1(-1; -4)$.

Отметим, что это точки, координаты которых обращают уравнение $xy = 4$ в верное числовое равенство.

Кроме того, для данного уравнения $xy = 4$, если $(x_0; y_0) \in \Gamma(xy = 4)$, то и $(-x_0; -y_0) \in \Gamma(xy = 4)$.

Из графиков уравнений наглядно следует, что только $(1; 4)$ и $(4; 1)$ принадлежат обоим графикам. Проверка подтверждает это, что важно, так как графическое решение систем уравнений может быть и приближенным.

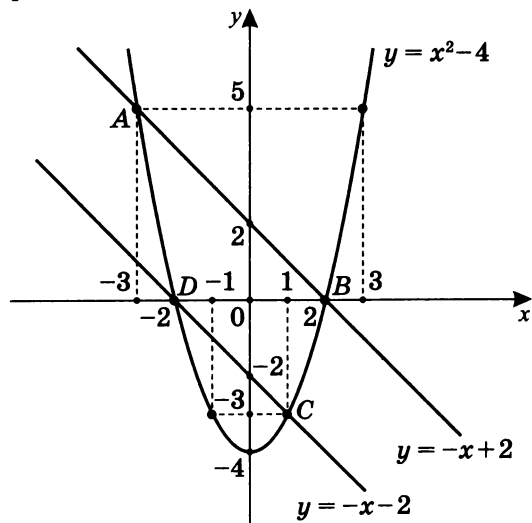
Ответ: $\{(1; 4); (4; 1)\}$.

$$2. \begin{cases} |x + y| = 2 \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$$

Так как $|x + y| = 2$ означает, что

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = -2 \end{cases}, \text{ т. е. } \begin{cases} y = -x + 2 \\ y = -x - 2 \end{cases}, \text{ то график этого уравнения есть пара параллельных прямых.}$$

Построим графики уравнений $|x + y| = 2$ и $y = x^2 - 4$ на одном чертеже:



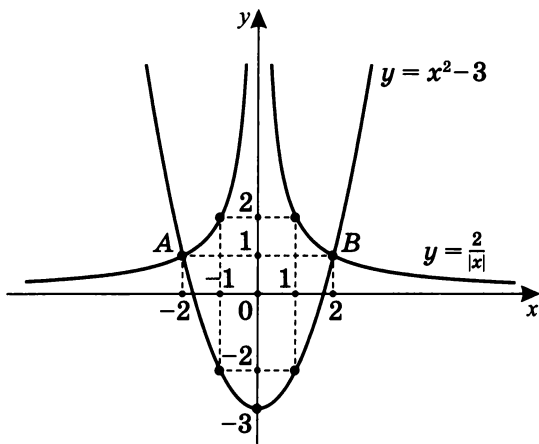
Из графических соображений похоже, что только точки A , B , C и D являются общими для графиков данных уравнений. Для проверки подставим координаты этих точек в систему уравнений и убедимся в том, что они обращают систему уравнений в систему верных числовых равенств.

Ответ: $\{(-3; 5); (2; 0); (1; -3); (-2; 0)\}$.

3.
$$\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ y|x| = 2 \end{cases}$$

Из уравнения $y|x| = 2$ следует, что $x \neq 0$, тогда исходное уравнение можно привести к виду $y = \frac{2}{|x|}$ — уравнение, график которого симметричен относительно оси ординат.

Построим графики уравнений $y = x^2 - 3$ и $y|x| = 2$ на одном чертеже:



Из чертежа очевидно, что только точки A и B — общие точки графиков уравнений. При проверке убеждаемся, что координаты точек $A(-2; -1)$ и $B(2; -1)$ обращают систему уравнений в систему верных числовых равенств.

Ответ: $\{(-2; -1); (2; -1)\}$.

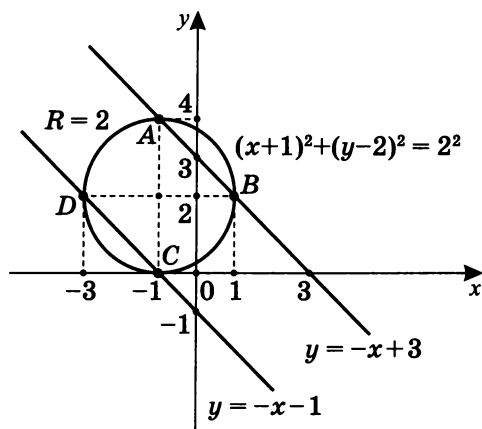
$$4. \begin{cases} |x + y - 1| = 2 \\ (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 2^2 \end{cases}.$$

Так как уравнение $|x + y - 1| = 2$ распадается на два уравнения —

$$\begin{cases} x + y - 1 = 2 \\ x + y - 1 = -2 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = -x + 3 \\ y = -x - 1 \end{cases}, \quad -$$

то здесь мы имеем дело с парой уравнений параллельных прямых.

$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 2^2$ — уравнение окружности с центром в точке $(-1; 2)$ и радиусом $R = 2$.

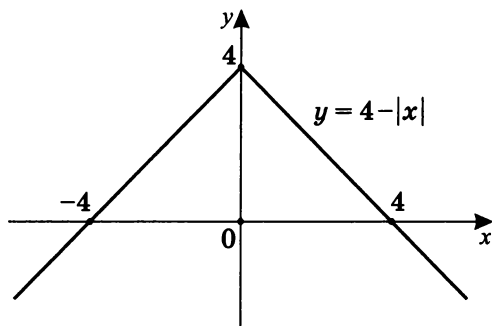


Графически только точки A, B, C и D — общие для графиков двух уравнений. Проверка подстановкой подтверждает, что координаты этих точек удовлетворяют системе уравнений.

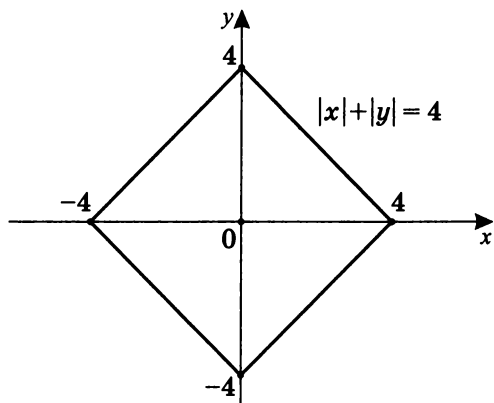
Ответ: $\{(-1; 4); (1; 2); (-1; 0); (-3; 2)\}$.

5.
$$\begin{cases} |x| + |y| = 4 \\ |xy| = 3 \end{cases}.$$

- а) Из первого уравнения следует, что $|y| = 4 - |x|$. Известно, что график $y = 4 - |x|$ есть график $y = |x|$, отраженный симметрично относительно оси абсцисс и поднятый на 4 единицы вверх.



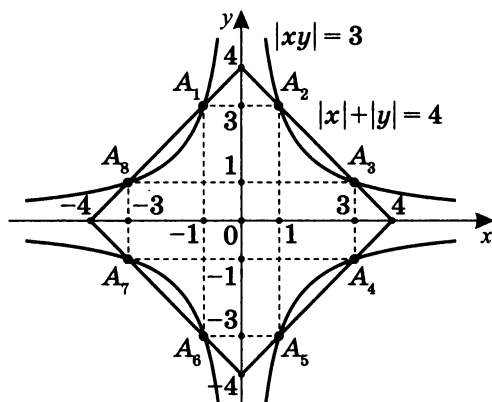
- б) Так как $|y| = \begin{cases} y, & y \geq 0 \\ -y, & y < 0 \end{cases}$, то $|y| = \begin{cases} 4 - |x|, & y \geq 0 \\ |x| - 4, & y < 0 \end{cases}$.



- в) Очевидно, что график уравнения $|xy| = 3$ симметричен относительно оси абсцисс и оси ординат.

Так как график уравнения $xy = 3$ это гипербола, то общий график уравнения $|xy| = 3$ состоит из четырех ветвей гиперболы.

г) Построим графики уравнений на одном чертеже.



Только точки $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$ — общие точки графиков уравнений системы.

Проверка подтверждает, что координаты этих точек есть решения системы.

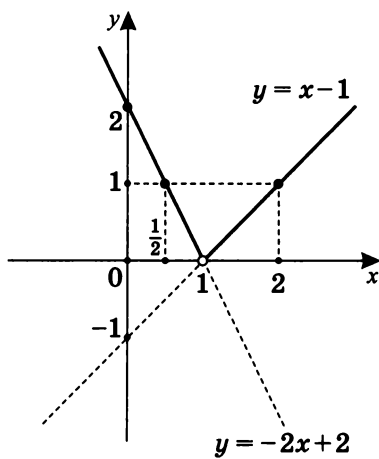
Ответ: $\{(-1; 3); (1; 3); (3; 1); (3; -1); (1; -3); (-1; -3);$
 $(-3; -1); (-3; 1)\}.$

$$6. \begin{cases} y = \frac{3(x-1)^2}{2|x-1|} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ y = x^2 - \frac{|x|}{x} - 2 \end{cases}.$$

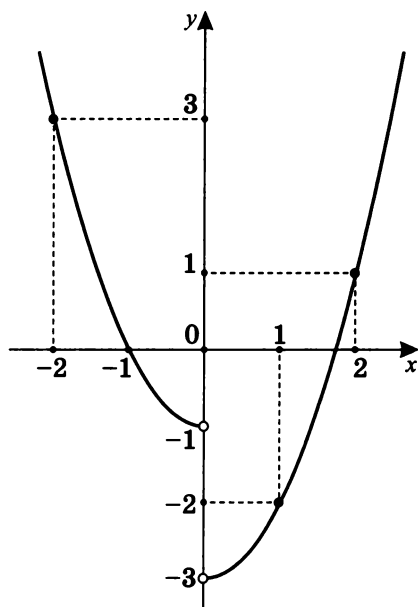
$$a) y = \frac{3}{2} \cdot \frac{(x-1)^2}{|x-1|} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} =$$

$$= \begin{cases} \frac{3}{2}(x-1) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, & x > 1 \\ -\frac{3}{2}(x-1) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, & x < 1 \end{cases},$$

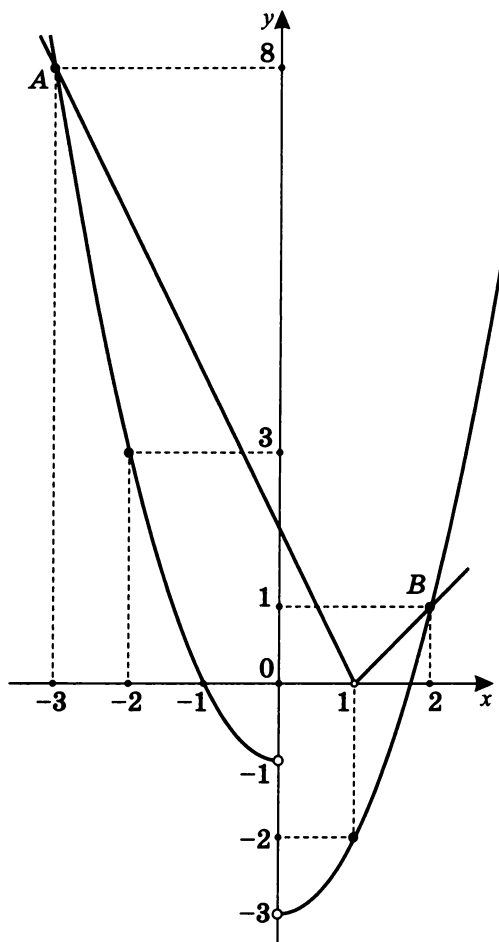
$$\text{т. е. } \begin{cases} x-1, & x > 1 \\ -2x+2, & x < 1 \end{cases}.$$



$$6) \ y = x^2 - \frac{|x|}{x} - 2 = \begin{cases} x^2 - 3, & x > 0 \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}.$$



в) Построим на одном чертеже графики обоих уравнений:



Общие точки графиков уравнений системы — только A и B .

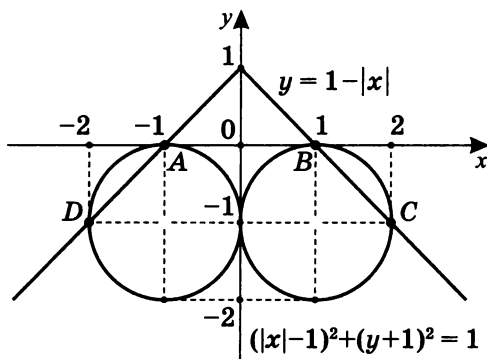
При проверке убеждаемся в том, что координаты этих точек и есть решение системы уравнений.

Ответ: $\{(-3; 8); (2; 1)\}$.

7.
$$\begin{cases} y = 1 - |x| \\ (|x| - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1 \end{cases}$$

а) Второе уравнение похоже на уравнение окружности. Разница в том, что наличие модуля x отразит окружность симметрично относительно оси ординат, и получится две окружности — с центрами в точках $(1; -1)$ и $(-1; -1)$ и радиусом $R = 1$.

б) Построим графики уравнений на одном чертеже:



в) Только точки A , B , C и D — общие для графиков двух уравнений.

г) Координаты этих точек обращают данную систему уравнений в систему верных числовых равенств.

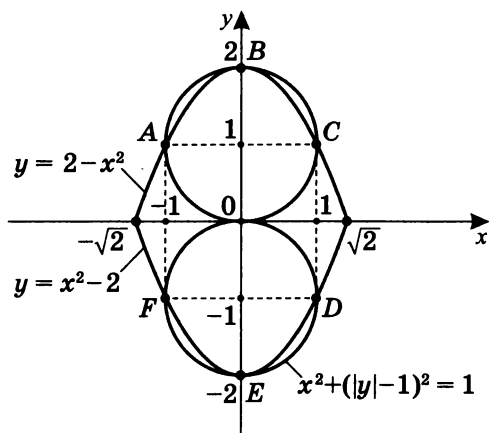
Ответ: $\{(-1; 0); (1; 0); (2; -1); (-2; -1)\}$.

8.
$$\begin{cases} x^2 + (|y| - 1)^2 = 1 \\ |y| = 2 - x^2 \end{cases}$$

а) Первое уравнение есть уравнение двух окружностей, симметричных относительно оси абсцисс с центрами в точках $(0; 1)$ и $(0; -1)$ и радиусом $R = 1$.

б)
$$|y| = \begin{cases} 2 - x^2, & y \geq 0 \\ x^2 - 2, & y < 0 \end{cases}$$

в) Построим оба графика на одном чертеже:



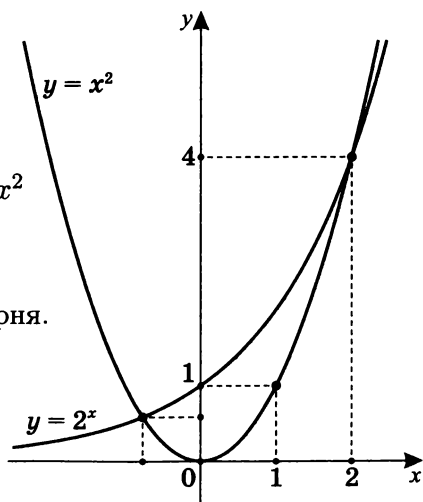
г) Только точки A , B , C , D , E и F — общие точки графиков уравнений системы.

При проверке убеждаемся в том, что только координаты этих точек есть решения данной системы уравнений.

Ответ: $\{(-1; 1); (0; 2); (1; 1); (1; -1); (0; -2); (-1; -1)\}$.

9. Оценим графически количество корней уравнения $2^x = x^2$.

Построим графики функций $y = 2^x$ и $y = x^2$ на одном чертеже. На первый взгляд, уравнение имеет два корня.



Однако более тщательный анализ скорости возрастания функций $y = x^2$ и $y = 2^x$ на $(2; \infty)$ указывает на то, что на этом промежутке функция $y = 2^x$ растет быстрее, чем функция $y = x^2$, а значит, существует еще один корень.

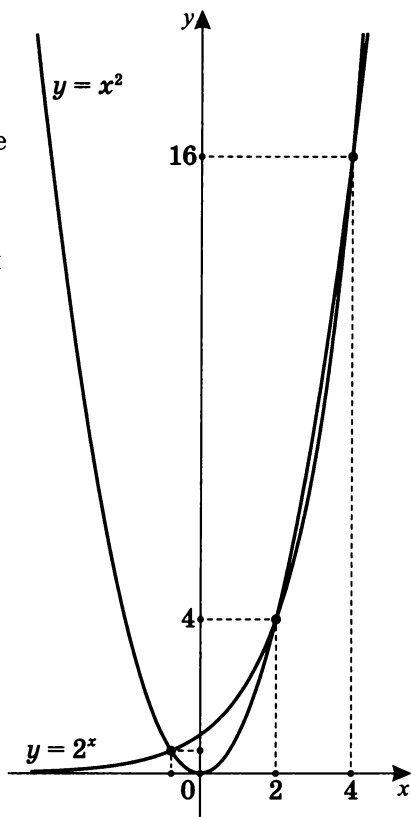
Действительно, $2^4 = 4^2$:

для $y = 2^x$ $2^4 = 16$;

для $y = x^2$ $4^2 = 16$,

а значит, $x = 4$ — также решение уравнения.

Следовательно, уравнение $2^x = x^2$ имеет три корня.



Примечание 1. Обратите внимание: в данном примере мы свели решение уравнения $f(x) = g(x)$ к решению системы уравнений $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$.

Примечание 2. При графическом решении уравнений и систем наиболее сложен вопрос о полноте решения: все ли корни уравнения или системы найдены?

В дальнейшем при графическом решении уравнений и систем уравнений эти соображения необходимо иметь в виду.

Естественно, применение методов математического анализа делает процесс решения более точным и надежным. Но это не означает, что предложенные в данных тренировочных и самостоятельных работах решения содержат ошибки.

Чаще всего корни уравнений или систем очевидны, если *на конкретном промежутке* графики данных уравнений имеют разные виды монотонности, т.е. график одного уравнения возрастает, а график другого — убывает. Упрощают нахождение корней сравнение видов выпуклости, сравнение наибольших и наименьших значений функций, находящихся в обеих частях уравнения и т.д.

Тренировочная работа 3

Решите графически уравнения и системы уравнений.

1. $(x - 1)^2 = -|x - 1|;$

2. $\sqrt{x} = |x - 2|;$

3. $3 - x^2 = \frac{6}{2-x};$

4. $\sqrt{9 - x^2} = x^2 + 3;$

5*. $\frac{1}{x^2+1} = |x| + 1;$

6*. $\sqrt{x^2 + 3x + 6} + \sqrt{x + 1} = 2;$

7. $3x^3 + 2x = 4 + (2 - x)^2;$

8. $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 3|x| - 2 \end{cases};$

9. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ |x| \cdot y = -2 \end{cases};$

10. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x \cdot |y| = 4 \end{cases};$

11. $\begin{cases} |y| = -x^2 + 2x + 3 \\ x^2 + y^2 = 9 + 2x \end{cases};$

12. $\begin{cases} y \cdot |x| = 4 \\ |y| = 5 - |x| \end{cases}.$

Решение тренировочной работы 3

Решите графически уравнения и системы уравнений.

1. $(x - 1)^2 = -|x - 1|$.

Положим $f(x) = (x - 1)^2$; $g(x) = -|x - 1|$.

График функции $y = f(x)$ — параболa, полученная сдвигом $y = x^2$ вправо на 1.

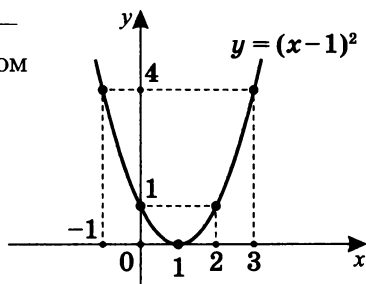
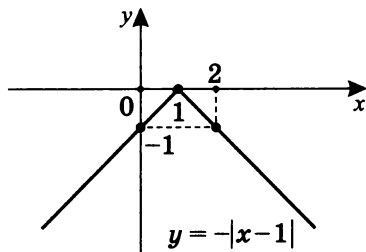


График функции $y = g(x)$ получается из графика $y = |x|$ сдвигом вправо на 1 и отражением симметрично относительно оси Ox .



Построим оба графика в одной системе координат, т. е. на одном чертеже.

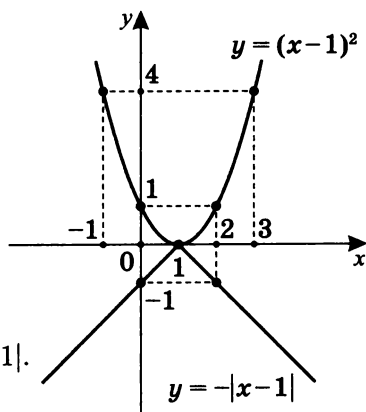
Подстановка $x = 1$ в исходное уравнение

обращает его в верное числовое равенство:

$$(1 - 1)^2 = -|1 - 1|; \quad 0 = 0.$$

Значит $x = 1$ — корень уравнения $(x - 1)^2 = -|x - 1|$.

Ответ: $x = 1$.

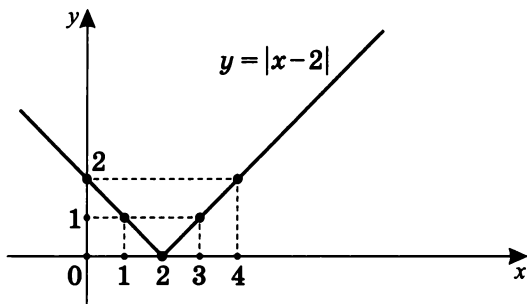
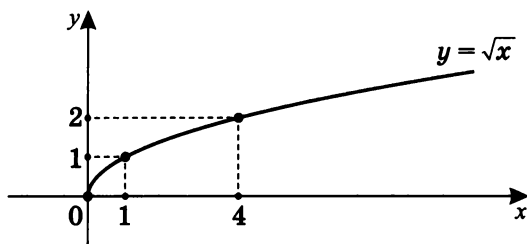


Примечание. Обратите внимание, что в примерах 1–7 решение уравнений вида $f(x) = g(x)$ сводится к решению систем уравнений $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$.

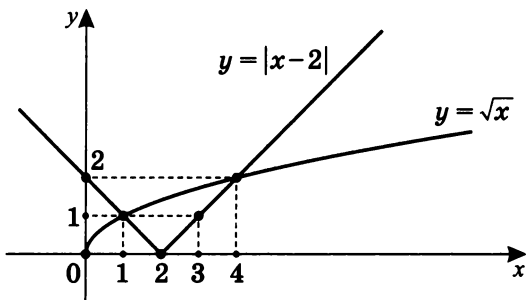
2. $\sqrt{x} = |x - 2|$.

Положим $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = |x - 2|$.

Построим графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$.



Теперь построим оба графика в одной системе координат, т. е. на одном чертеже.



Графики имеют только две общие точки с абсциссами $x = 1$ и $x = 4$, что подтверждается проверкой.

Значит $x = 1$ и $x = 4$ — корни уравнения $\sqrt{x} = |x - 2|$.

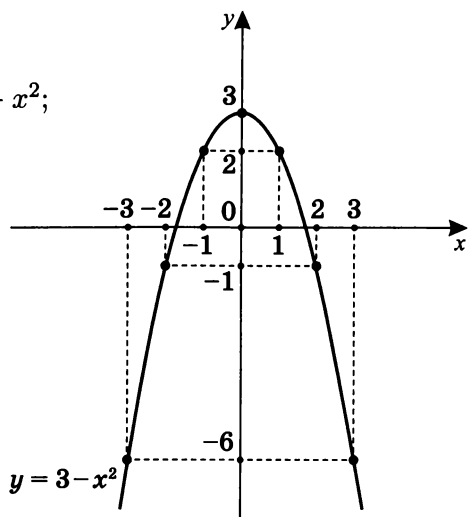
Ответ: $x = 1$, $x = 4$.

3. $3 - x^2 = \frac{6}{2-x}$.

Положим $f(x) = 3 - x^2$;

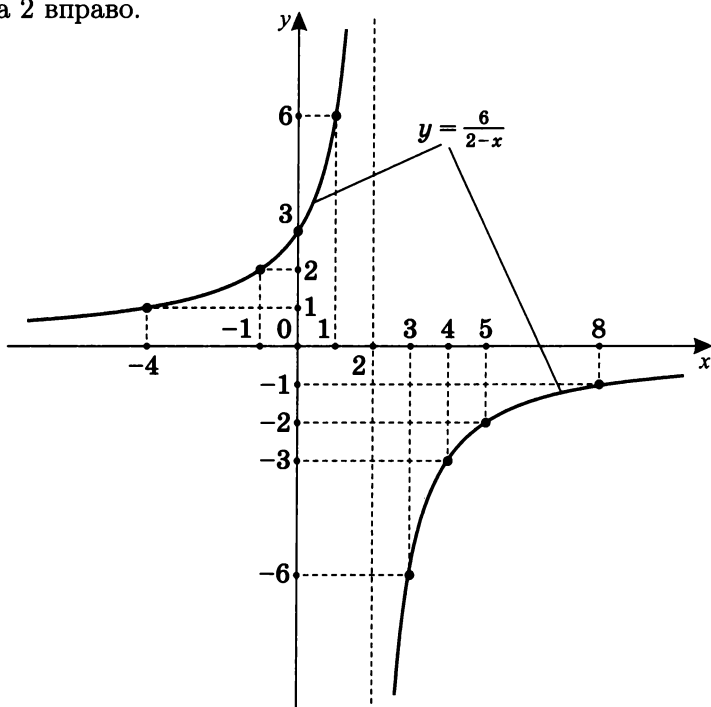
$$g(x) = \frac{6}{2-x}.$$

Построим график функции $f(x)$.

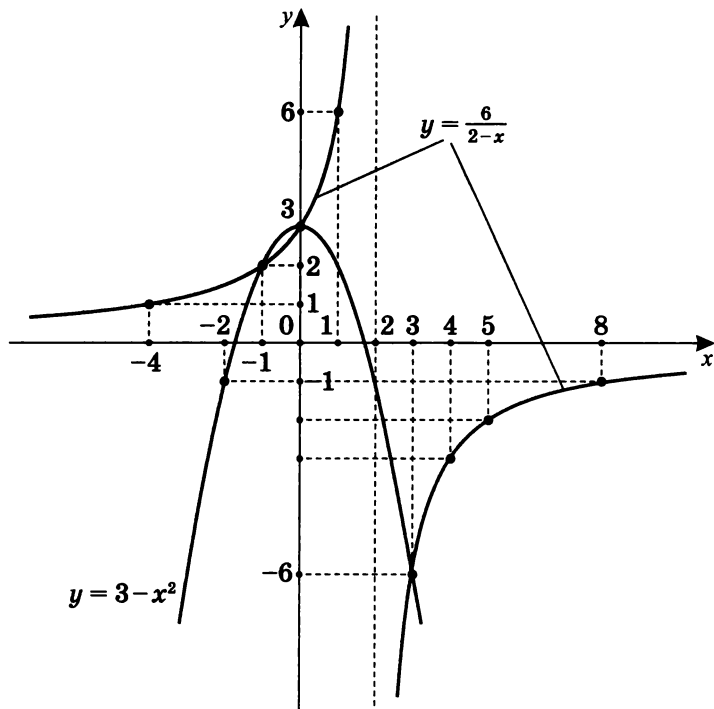


Построим график функции $g(x)$.

Это гипербола, полученная сдвигом гиперболы $y = -\frac{6}{x}$ на 2 вправо.



Теперь построим оба графика в одной системе координат, т. е. на одном чертеже.



Графики имеют только три общие точки с абсциссами $x = -1$, $x = 0$ и $x = 3$. Найденные значения x при подстановке в исходное уравнение обращают его в верное равенство. Таким образом, $x = -1$, $x = 0$ и $x = 3$ — корни уравнения $3 - x^2 = \frac{6}{2-x}$.

Ответ: $x = -1$, $x = 0$, $x = 3$.

4. $\sqrt{9 - x^2} = x^2 + 3$.

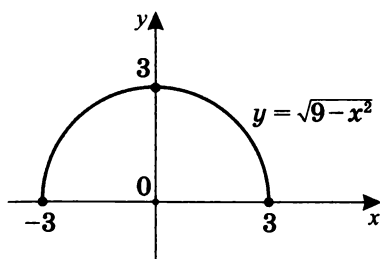
Положим $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$; $g(x) = x^2 + 3$.

Очевидно, что из $y = \sqrt{9 - x^2}$ следует, что при $y \geq 0$

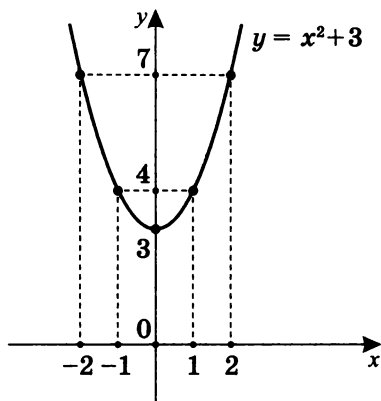
$$9 - x^2 = y^2, \text{ т. е. } \begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \\ y \geq 0 \end{cases}.$$

При $y < 0$ решений нет (см. выше).

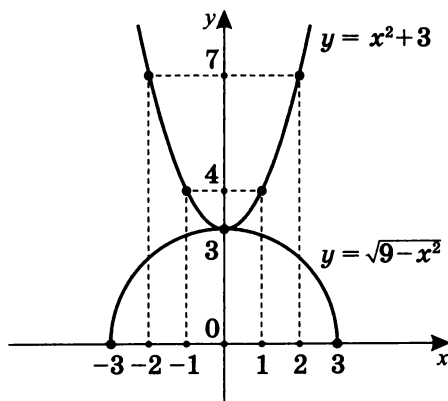
Следовательно, график функции $f(x)$ — это полуокружность радиуса 3 с центром в начале координат, расположенная в верхней полуплоскости.



Теперь построим график функции $y = g(x)$.



Наконец, построим оба графика в одной системе координат, т. е. на одном чертеже.



Очевидно, что общая точка двух графиков имеет абсциссу $x = 0$, следовательно, $x = 0$ — корень уравнения $\sqrt{9 - x^2} = x^2 + 3$. Проверка это подтверждает.

Ответ: $x = 0$.

5*. $\frac{1}{x^2+1} = |x| + 1.$

Положим $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$; $g(x) = |x| + 1.$

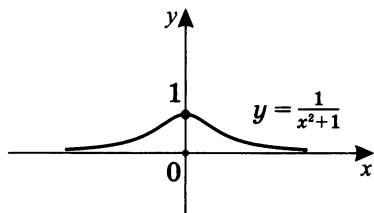
Построим график функции $y = f(x).$

Для корректного построения графика $y = \frac{1}{x^2+1}$ требуется исследование функции $y = f(x)$ с помощью производной или инверсии. Но мы используем для построения асимптоты:

$$(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow 0);$$

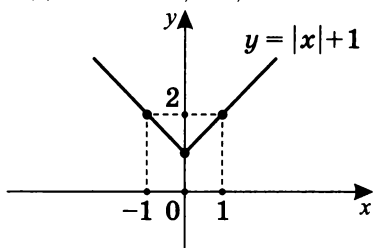
$$(x \rightarrow -\infty) \Rightarrow (y \rightarrow 0);$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 1.$$

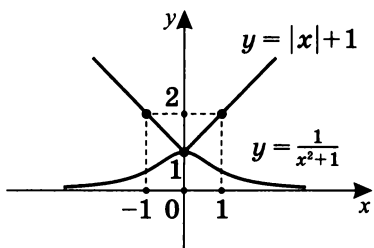


Подробнее см.: Шахмейстер А. Х. Построение графиков функции элементарными методами. СПб.; М., 2011.

Построим график функции $y = g(x).$



Построим оба графика в одной системе координат, т. е. на одном чертеже.



Графики имеют только одну общую точку. Ее абсцисса $x = 0$. Найденное значение подставим для проверки в исходное уравнение, получим верное числовое равенство.

Таким образом, $x = 0$ является корнем уравнения

$$\frac{1}{x^2+1} = |x| + 1.$$

Ответ: $x = 0.$

6*. $\sqrt{x^2 + 3x + 6} + \sqrt{x + 1} = 2$.

Положим $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 6}$; $g(x) = 2 - \sqrt{x + 1}$.

Построим график функции $y = f(x)$.

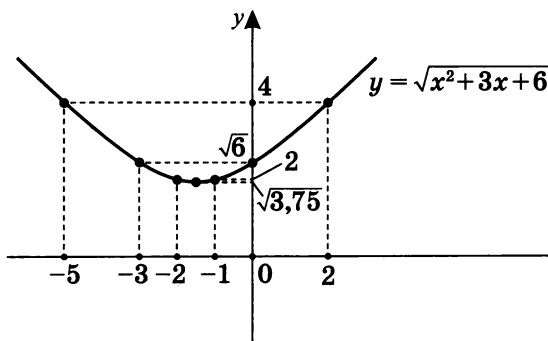
Очевидно, что для такого построения *можно* использовать производную, но мы используем иные соображения.

Так как $\sqrt{x^2 + 3x + 6} = \sqrt{(x + 1,5)^2 + 3,75}$,

то $x = -1,5$ — ось симметрии графика $y = f(x)$.

Здесь для построения графика $y = f(x)$ используется тот факт, что $t(x) = x^2 + 3x + 6$ — квадратичная функция, а извлечение квадратного корня ($f(x) = \sqrt{t(x)}$) не изменяет характер монотонности графика, лишь сжимая его, т. е. $(-1,5; 3,75) \rightarrow (-1,5; \sqrt{3,75})$ и т. п.

При $x = -3$	$y = \sqrt{6}$;
$x = -2$	$y = 2$;
$x = -1,5$	$y = \sqrt{3,75} = 0,5\sqrt{15}$;
$x = -1$	$y = 2$;
$x = 0$	$y = \sqrt{6}$.



Теперь построим график функции $y = g(x)$.

Очевидно, что для этого необходимо выполнить ряд графических преобразований:

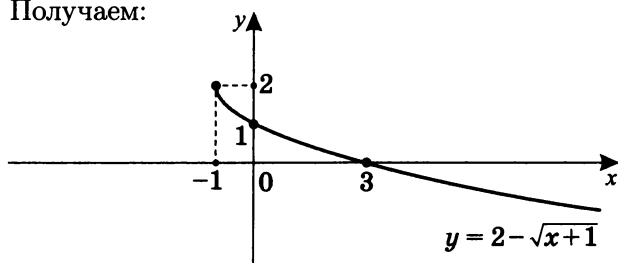
$g_1(x) = \sqrt{x}$ — базовый график;

$g_2(x) = -\sqrt{x}$ — получен из графика $y = g_1(x)$ симметрией относительно оси Ox ;

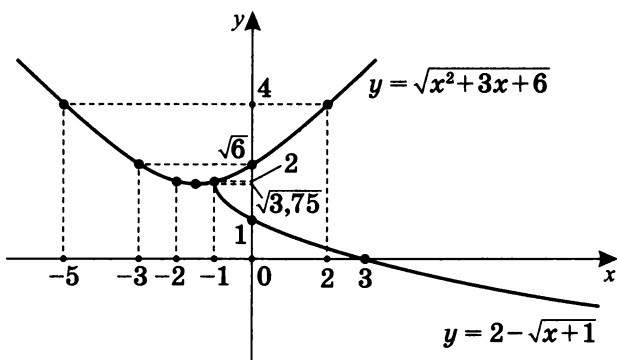
$g_3(x) = -\sqrt{x+1}$ — получен из графика $y = g_2(x)$ сдвигом на единицу влево;

$g(x) = 2 - \sqrt{x+1}$ — получен из графика $y = g_3(x)$ сдвигом вверх на 2 относительно оси Ox .

Получаем:



Построим оба графика на одном чертеже, т.е. в одной системе координат.



Графики имеют только одну общую точку, ее абсцисса $x = -1$. Подставим найденное значение $x = -1$ в исходное уравнение, получим верное числовое равенство.

Значит, $x = -1$ — корень уравнения

$$\sqrt{x^2 + 3x + 6} + \sqrt{x + 1} = 2.$$

Ответ: $x = -1$.

Напоминание. При решении уравнений графическим способом всегда необходимо проверять их корни непосредственной подстановкой в уравнение.

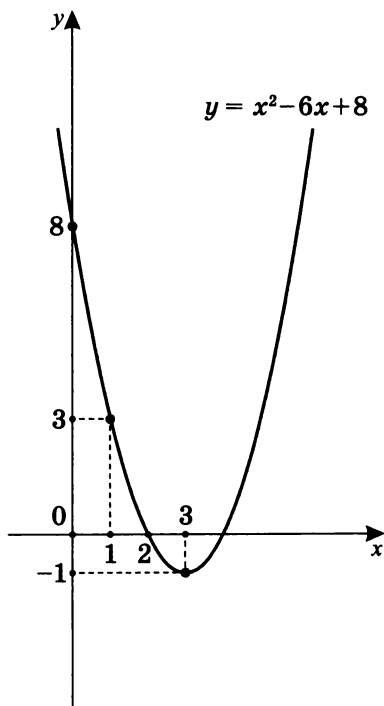
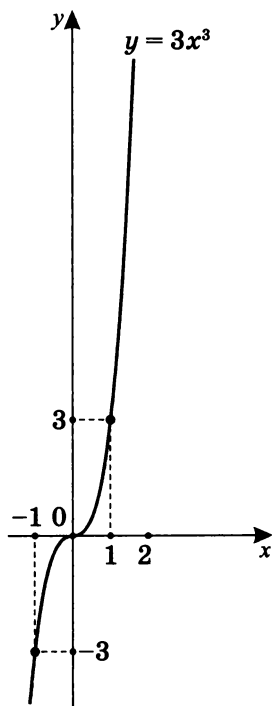
7. $3x^3 + 2x = 4 + (2 - x)^2$.

Положим $f(x) = 3x^3$;

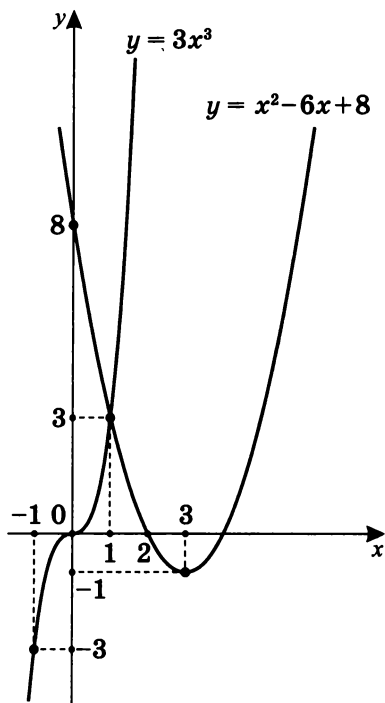
$$g(x) = 4 + (2 - x)^2 - 2x.$$

После преобразований получим: $g(x) = x^2 - 6x + 8$.

Построим графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$.



Построим оба графика в одной системе координат, т. е. на одном чертеже.



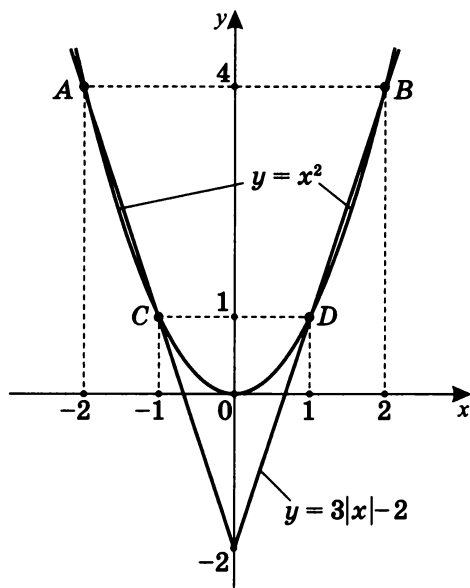
Графики имеют только одну общую точку, ее абсцисса $x = 1$. Подставим найденное значение $x = 1$ в исходное уравнение, получим верное числовое равенство.

Значит, $x = 1$ — корень уравнения $3x^3 + 2x = 4 + (2 - x)^2$.

Ответ: $x = 1$.

Примечание. Так как при $x > 1$ $f(x) = 3x^3$ растет быстрее, чем $g(x) = x^2 - 6x + 8$, то новых точек пересечения графиков данных функций не будет.

8. $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 3|x| - 2 \end{cases}$



Построив графики уравнений $y = x^2$ и $y = 3|x| - 2$, графически найдем координаты всех общих точек:

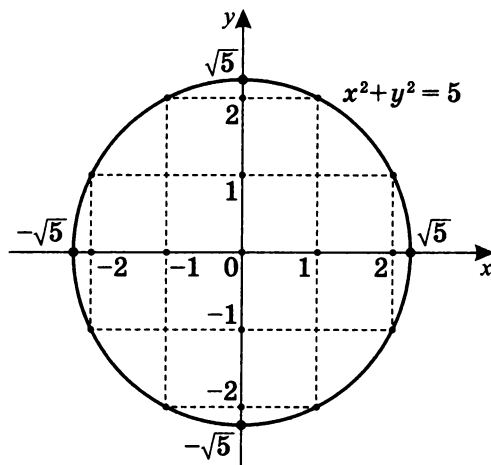
$A(-2; 4)$; $B(2; 4)$; $C(-1; 1)$; $D(1; 1)$.

При подстановке координат всех найденных точек пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = 3|x| - 2$ получаем системы верных числовых равенств.

Ответ: $\{(-2; 4); (-1; 1); (1; 1); (2; 4)\}$.

9.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ |x| \cdot y = -2 \end{cases}$$

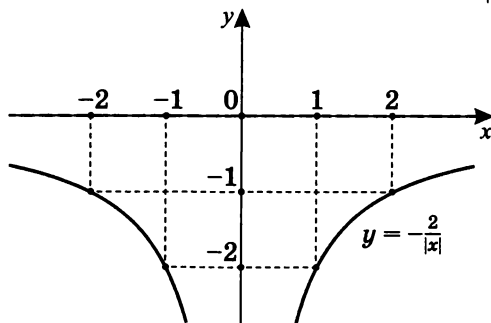
- а) Очевидно, что $x^2 + y^2 = 5$ — уравнение окружности с центром в точке $(0; 0)$ и радиусом $R = \sqrt{5}$. Построим график этого уравнения:



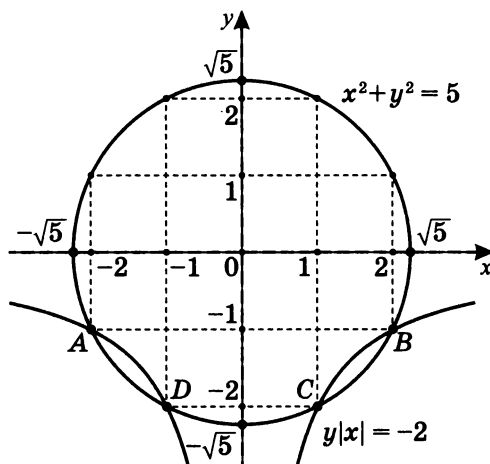
- б) Так как при $x = 0$ $0 \cdot y = -2$ — ложное равенство, то уравнение $|x| \cdot y = -2$ можно привести к виду $y = -\frac{2}{|x|}$.

$$-\frac{2}{|x|} = \begin{cases} -\frac{2}{x}, & x > 0 \\ \frac{2}{x}, & x < 0 \end{cases}$$

Построим график уравнения $y = -\frac{2}{|x|}$:



- в) Построим графики уравнений системы в одной системе координат, т. е. на одном чертеже. Найдем графически координаты всех общих точек.



Получили графически все общие точки двух уравнений, координаты которых

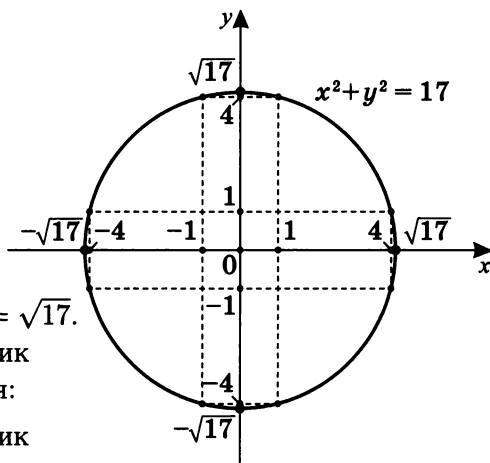
$A(-2; -1); \quad B(2; -1); \quad C(1; -2); \quad D(-1; -2).$

При подстановке координат всех общих точек в систему уравнений получим систему верных числовых равенств.

Ответ: $\{(-2; -1); (2; -1); (1; -2); (-1; -2)\}.$

10.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x \cdot |y| = 4 \end{cases}$$

а) Очевидно, что $x^2 + y^2 = 17$ — уравнение окружности с центром в точке $(0; 0)$ и радиусом $R = \sqrt{17}$. Построим график этого уравнения:

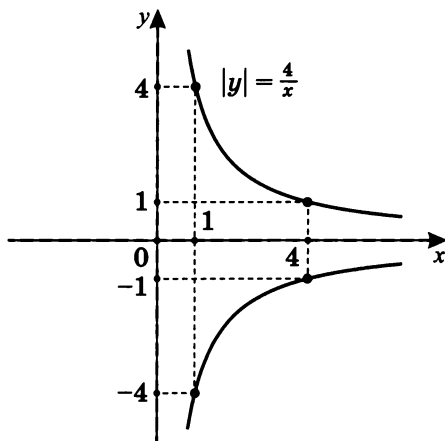


б) Построим график уравнения $x|y| = 4$.

Очевидно, что $x \neq 0$ и $|y| = \frac{4}{x}$ (см. с. 188).

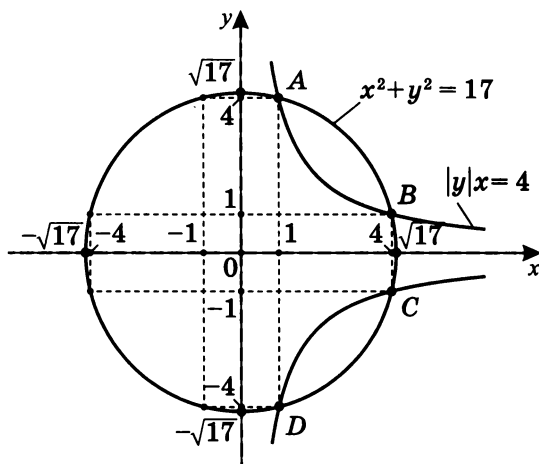
Так как $|y| = \begin{cases} y, & y \geq 0 \\ -y, & y < 0 \end{cases}$, то $x > 0$. Значит, это график правой ветви гиперболы $y = \frac{4}{x}$ ($x > 0$).

Но $|y| = \frac{4}{x}$ — график, симметричный относительно оси абсцисс (правая полуплоскость), он имеет две ветви и функциональным, конечно, не является⁴.



⁴ Более подробно см.: Шахмейстер А. Х. Множества. Функции. Последовательности. СПб.; М., 2014. С. 55–88.

- в) Построим графики уравнений $x^2 + y^2 = 17$ и $x|y| = 4$ на одном чертеже, т. е. в одной системе координат. Найдем графически общие точки графиков данных уравнений.



Получили графически все общие точки графиков данных уравнений, координаты которых

$A(1; 4); \quad B(4; 1); \quad C(4; -1); \quad D(1; -4).$

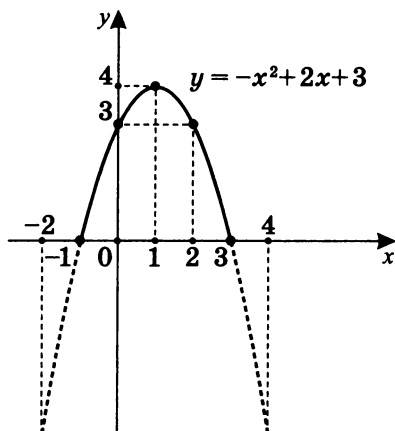
При проверке убедимся в том, что координаты этих точек при подстановке в систему данных уравнений обращают их в системы верных числовых равенств.

Ответ: $\{(1; 4); (4; 1); (4; -1); (1; -4)\}.$

11.
$$\begin{cases} |y| = -x^2 + 2x + 3 \\ x^2 + y^2 = 9 + 2x \end{cases}.$$

а) Построим график уравнения $|y| = -x^2 + 2x + 3$.

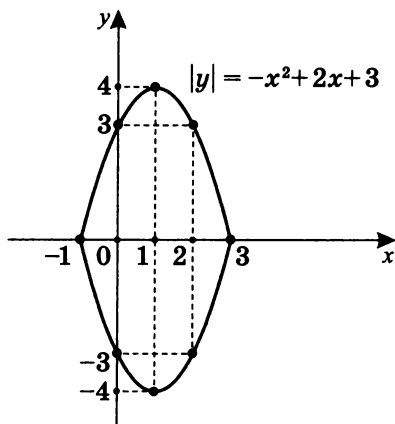
$|y| \geq 0$, значит, $-x^2 + 2x + 3 \geq 0$ ($y = -(x-1)^2 + 4$).



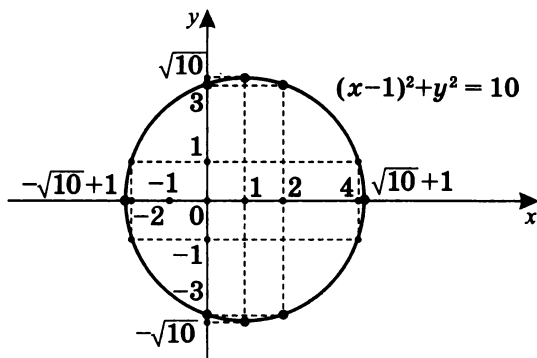
б) $|y| = -x^2 + 2x + 3$ ($-1 \leq x \leq 3$).

Так как $|y| = \begin{cases} y, & y \geq 0 \\ -y, & y < 0 \end{cases}$,

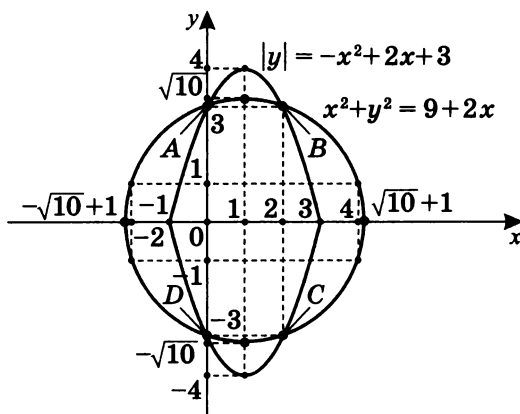
то $|y| = \begin{cases} -x^2 + 2x + 3, & y \geq 0 \\ x^2 - 2x - 3, & y < 0 \end{cases}$.



- в) $x^2 + y^2 = 9 + 2x$ можно представить в виде $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 9 + 1$, т.е. $(x - 1)^2 + y^2 = 10$ — это уравнение окружности с центром в точке $(1; 0)$ и радиусом $R = \sqrt{10}$.



- г) Построим графики уравнений $|y| = -x^2 + 2x + 3$ и $(x - 1)^2 + y^2 = 10$ на одном чертеже, т.е. в одной системе координат, и графически найдем все общие точки.



$A(0; 3); \quad B(2; 3); \quad C(2; -3); \quad D(0; -3).$

При подстановке координат всех общих точек в систему уравнений получаем системы верных числовых равенств.

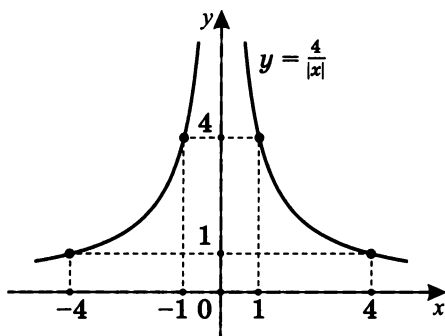
Ответ: $\{(0; 3); (2; 3); (2; -3); (0; -3)\}$.

12.
$$\begin{cases} y \cdot |x| = 4 \\ |y| = 5 - |x| \end{cases}$$

а) Построим график $y \cdot |x| = 4$.

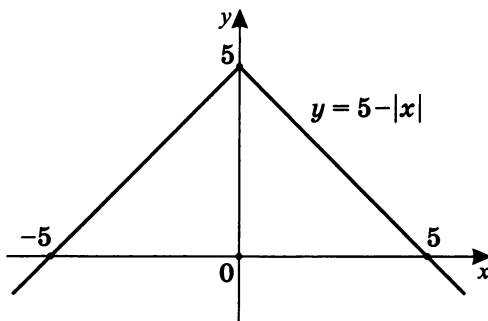
Так как при $x = 0$ $y \cdot 0 = 4$ — ложное равенство, то уравнение $y \cdot |x| = 4$ можно привести к виду $y = \frac{4}{|x|}$.

В силу симметричности относительно оси ординат получим:



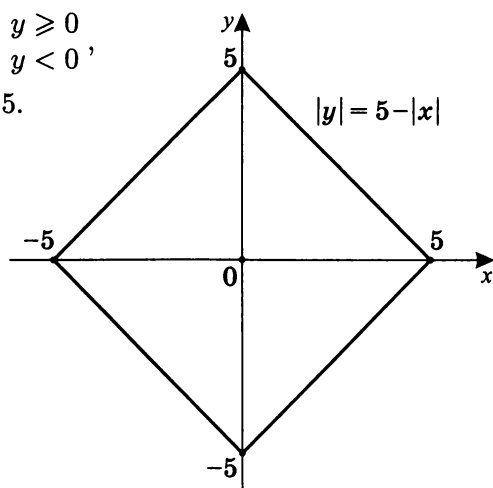
б) $|y| = \begin{cases} y, & y \geq 0 \\ -y, & y < 0 \end{cases}$

Построим график функции $y = 5 - |x|$. (Отметим, что здесь также имеет место симметрия относительно оси ординат.)

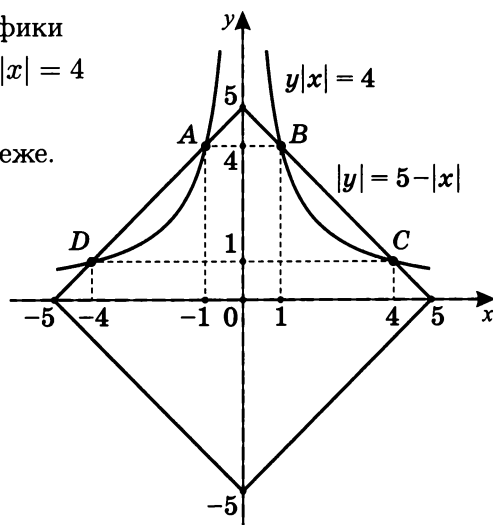


$$\text{в) } |y| = \begin{cases} 5 - |x|, & y \geq 0 \\ |x| - 5, & y < 0 \end{cases},$$

т. е. $-5 \leq x \leq 5$.



г) Построим графики уравнений $y \cdot |x| = 4$ и $|y| = 5 - |x|$ на одном чертеже.



Получим графически все общие точки графиков двух уравнений: $A(-1; 4)$; $B(1; 4)$; $C(4; 1)$; $D(-4; 1)$. При подстановке координат всех общих точек в систему уравнений получаем системы верных числовых равенств.

Ответ: $\{(-1; 4); (1; 4); (4; 1); (-4; 1)\}$.

Самостоятельная работа 7

Решите графически систему уравнений.

Вариант I

1. $\begin{cases} y - x^2 = 3 \\ x + y = 5 \end{cases};$

2. $\begin{cases} xy = -12 \\ x - y = 8 \end{cases};$

3. $\begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 = 25 \\ x^2 + y = 14 \end{cases}.$

Вариант II

1. $\begin{cases} x^2 - y = 5 \\ x^2 y = 36 \end{cases};$

2. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = -2 \end{cases};$

3. $\begin{cases} (x + 1)y + 8 = 0 \\ 1 + x + y^2 = 0 \end{cases}.$

Вариант III

1. $\begin{cases} (x + 1)^2 + y^2 = 25 \\ y^2 - x = 6 \end{cases};$

2. $\begin{cases} xy = 2 \\ 2x^2 + 7x - 2y = 5 \end{cases};$

3. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ (y - x^2)(|x| \cdot y + 1) = 0 \end{cases}.$

Вариант IV

1. $\begin{cases} y = 7 - x^2; \\ |xy| = 6 \end{cases};$
2. $\begin{cases} y = ||x| - 2| \\ (|x| - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4; \end{cases}$
3. $\begin{cases} (|y| + x - 2)(|y| + x) = 0 \\ y^2 + x = 2 \end{cases}.$

Вариант V

1. $\begin{cases} |xy| = 3 \\ 3y^2 - 10|xy| + 3x^2 = 0; \end{cases}$
2. $\begin{cases} (|x| - 3)^2 + y^2 = 1; \\ y^2 = 4 - |x| \end{cases};$
3. $\begin{cases} |y| = |x + 2| + 2 \\ |y| = |x^2 + 4x| \end{cases}.$

Вариант VI

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10; \\ |x| + |y| = 4; \end{cases}$
2. $\begin{cases} (y + |x| - 2) \cdot (y + |x|) = 0; \\ y + x^2 = 2 \end{cases};$
3. $\begin{cases} |xy| = 2 \\ (1 - |x|)^2 + (|y| - 1)^2 = 1. \end{cases}$

4

Графическое решение уравнений и систем с параметром

В этой главе мы рассмотрим решение более сложных уравнений и систем с параметрами. Для этого будем использовать весь набор методов построения и преобразования графиков, изученных ранее⁵.

Практикум 10

Сколько решений имеет уравнение в зависимости от значения параметра a ?

1. $\frac{|x+3|}{x^2+3x} = a;$

2. $\frac{x^2+2x}{|x^2+x-2|} = a;$

3. $\frac{x}{1-|x|} = a;$

4. $x^2 + a = \frac{|x^2-3x|}{x-3};$

5. $2|2|x| - a^2| = x - a.$

⁵ Задания, связанные с графиками линейных функций и их комбинациями, см.: Шахмейстер А.Х. Построение и преобразование графиков. Параметры. Часть 1. Линейные функции и уравнения. СПб.; М., 2014. Там же рассмотрены методы, связанные с различными видами симметрии.

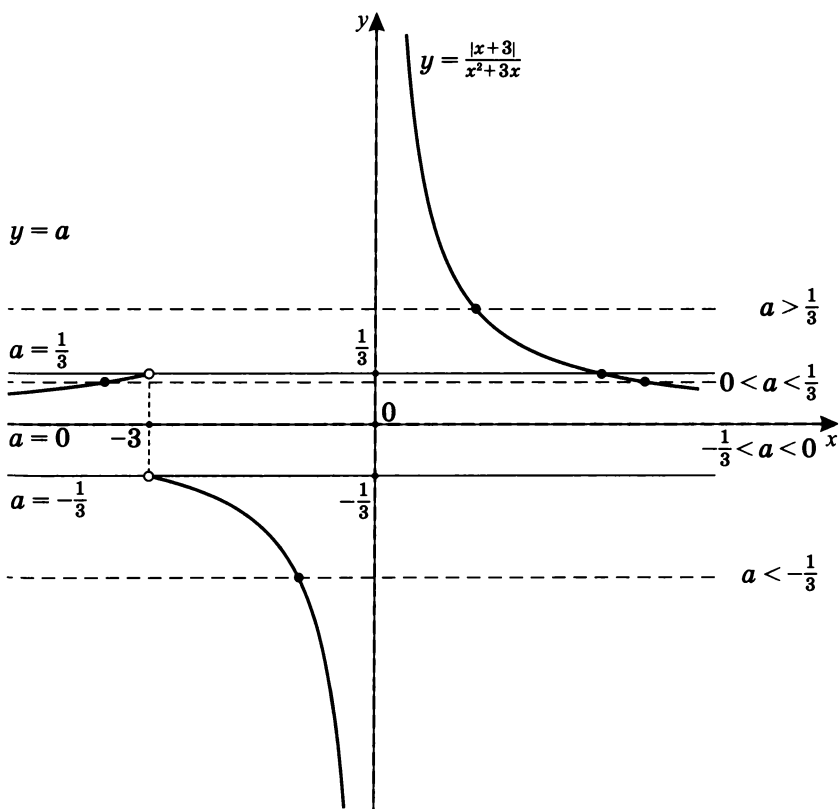
Решение практикума 10

Сколько решений имеет уравнение в зависимости от значения параметра a ?

1. $\frac{|x+3|}{x^2+3x} = a$. Пусть $y = \frac{|x+3|}{x^2+3x}$. $D(y) = \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -3 \end{cases}$.

$$|x+3| = \begin{cases} x+3, & x+3 \geq 0 \\ -(x+3), & x+3 < 0 \end{cases}. \text{ Тогда } y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > -3 \\ -\frac{1}{x}, & x < -3 \end{cases}.$$

Решение данного уравнения равносильно решению системы уравнений $\begin{cases} y = \frac{|x+3|}{x^2+3x} \\ y = a \end{cases}$.



Ответ: уравнение $\frac{|x+3|}{x^2+3x} = a$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ — один корень.

2. При $a \in \left[-\frac{1}{3}; 0\right]$ — корней нет.

3. При $a \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$ — два корня.

4. При $a \in \left[\frac{1}{3}; \infty\right)$ — один корень.

2. $\frac{x^2+2x}{|x^2+x-2|} = a.$

Пусть $y = \frac{x^2+2x}{|x^2+x-2|}.$

$$D(y): x^2 + x - 2 \neq 0; \quad \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq 1 \end{cases}.$$

$$|x^2 + x - 2| = \begin{cases} x^2 + x - 2, & x^2 + x - 2 \geq 0 \\ -(x^2 + x - 2), & x^2 + x - 2 < 0 \end{cases}.$$

$$t(x) = (x+2)(x-1)$$



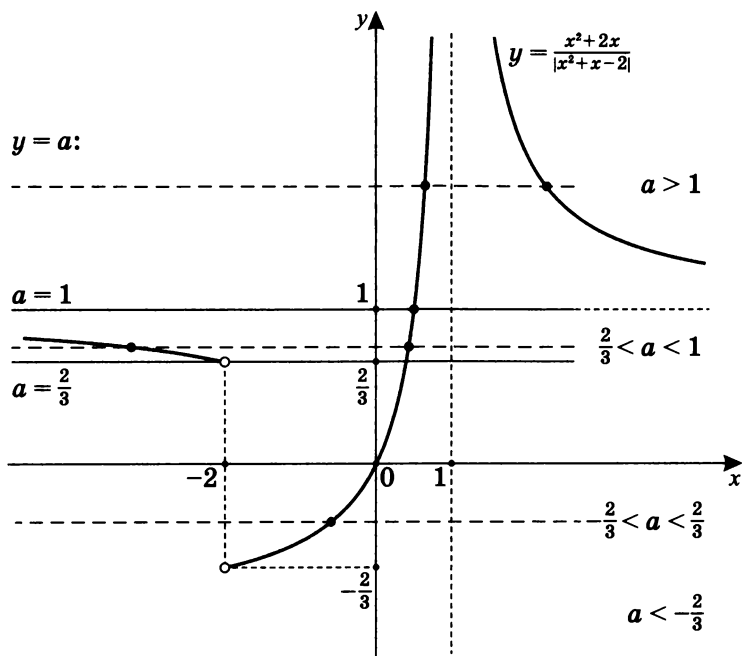
$$y = \begin{cases} \frac{x}{x-1}, & x < -2, x > 1 \\ -\frac{x}{x-1}, & -2 < x < 1 \end{cases}, \text{ где } y = \frac{x(x+2)}{|(x+2)(x-1)|}.$$

После преобразования получим:

$$y = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$$

$$\text{и } y = \frac{-x}{x-1} = -1 - \frac{1}{x-1}.$$

Построим графики $y = 1 + \frac{1}{x-1}$ и $y = -1 - \frac{1}{x-1}$ на своих промежутках.



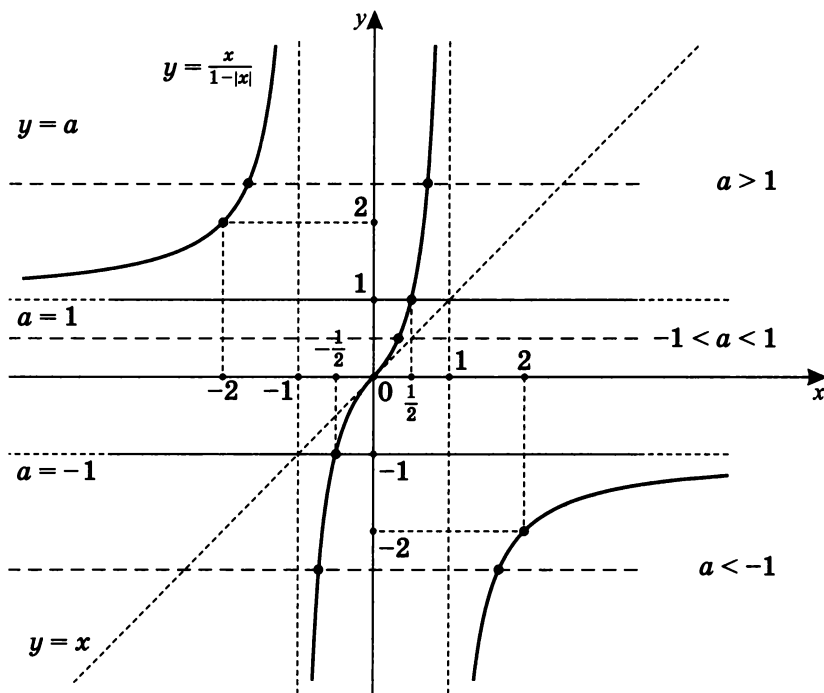
Ответ: уравнение $\frac{x^2 + 2x}{x^2 + x - 2} = a$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right]$ — корней нет.
2. При $a \in \left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right]$ — один корень.
3. При $a \in \left(\frac{2}{3}; 1\right)$ — два корня.
4. При $a = 1$ — один корень.
5. При $a \in (1; \infty)$ — два корня.

3. $\frac{x}{1-|x|} = a$. Пусть $y = \frac{x}{1-|x|}$. $D(y): \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$.

$$y = \begin{cases} \frac{x}{1-x}, & x \geq 0 \\ \frac{x}{x+1}, & x < 0 \end{cases}; \quad y = \begin{cases} -1 - \frac{1}{x-1}, & x \geq 0 \\ 1 - \frac{1}{x+1}, & x < 0 \end{cases}.$$

Построим график, состоящий из двух частей, на одном чертеже.



Ответ: уравнение $\frac{x}{1-|x|} = a$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a \in (-\infty; -1)$ — два корня.
2. При $a \in [-1; 1]$ — один корень.
3. При $a \in (1; \infty)$ — два корня.

Примечание. Можно доказать, что $y = \frac{x}{1-|x|}$ — нечетная функция, а значит, ее график центрально-симметричен относительно начала координат, и это мож-

но использовать, построив график только при $x \geq 0$, а затем отразить его относительно точки $O(0; 0)$ в левую полуплоскость.

$$4. x^2 + a = \frac{|x^2 - 3x|}{x - 3}.$$

Пусть $y = \frac{|x^2 - 3x|}{x - 3}$. $D(y): x \neq 3$.

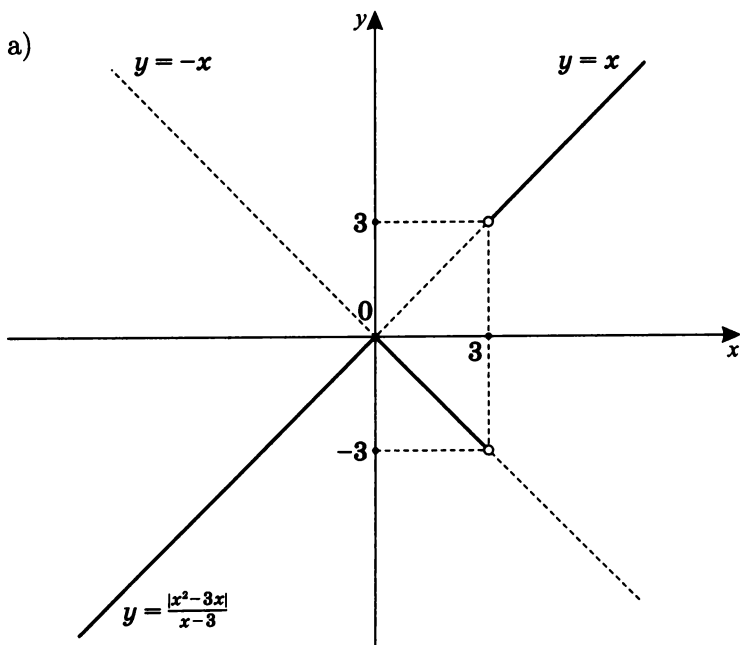
Решение исходного уравнения равносильно решению системы уравнений
$$\begin{cases} y = \frac{|x^2 - 3x|}{x - 3} \\ y = x^2 + a \end{cases}.$$

Обозначим $t(x) = x^2 - 3x$.

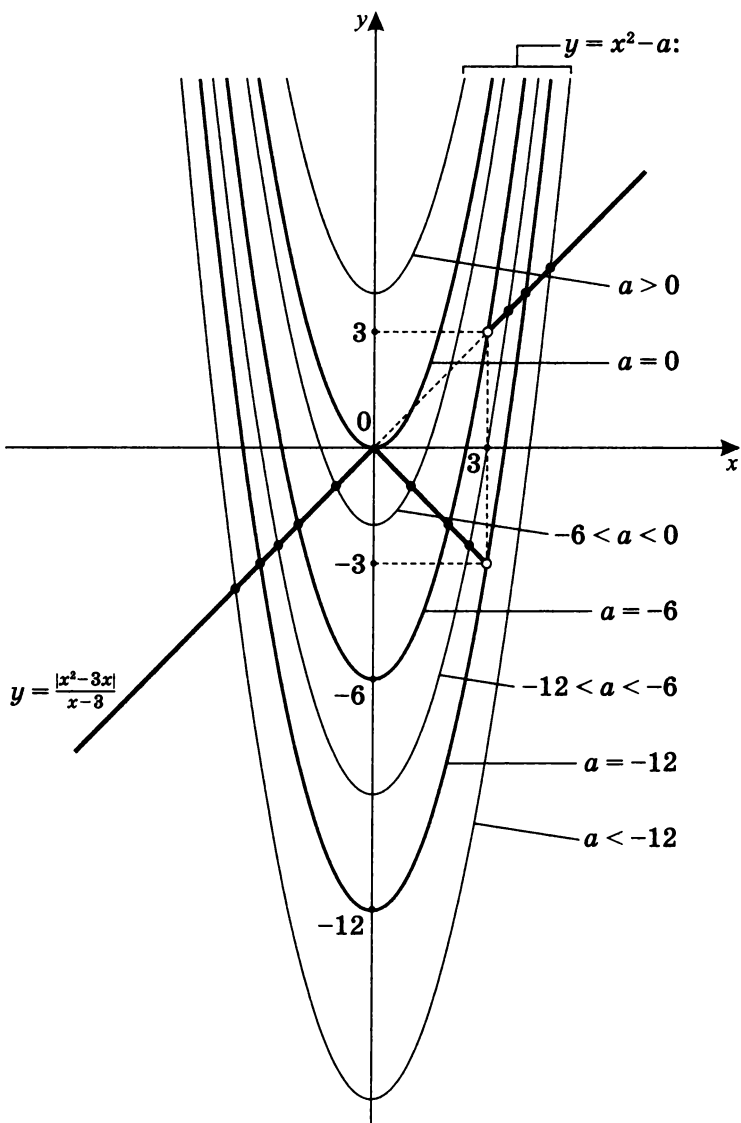


Тогда
$$\frac{|x^2 - 3x|}{x - 3} = \begin{cases} x, & x > 3, \ x \leq 0 \\ -x, & 0 < x < 3 \end{cases}.$$

На одном чертеже построим график, состоящий из нескольких частей, на своих промежутках.



- б) Положим $g(x) = x^2 + a$. Построим графики $y = g(x)$ и $y = \frac{|x^2 - 3x|}{x - 3}$ на одном чертеже, т. е. в одной системе координат.



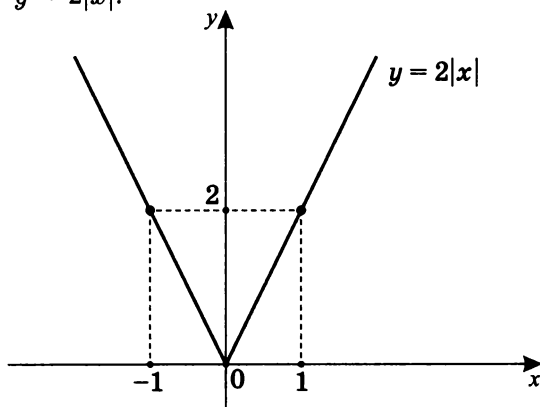
Ответ: уравнение $x^2 + a = \frac{|x^2 - 3x|}{x - 3}$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a \in (-\infty; -12]$ — два корня.
2. При $a \in (-12; -6)$ — три корня.
3. При $a \in [-6; 0)$ — два корня.
4. При $a = 0$ — один корень.
5. При $a \in (0; \infty)$ — корней нет.

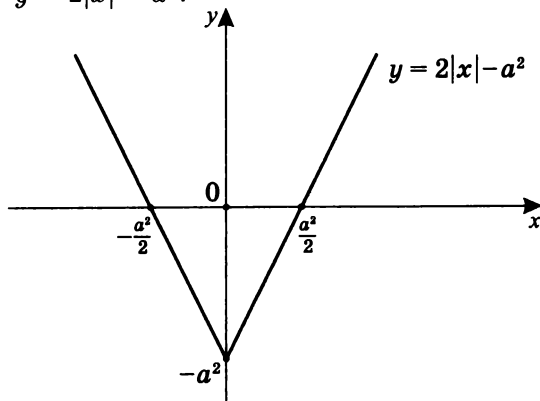
5. $2|2|x| - a^2| = x - a$.

Построим график $y = 2|2|x| - a^2|$.

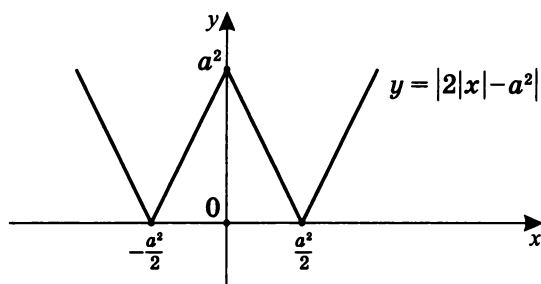
а) $y = 2|x|$.



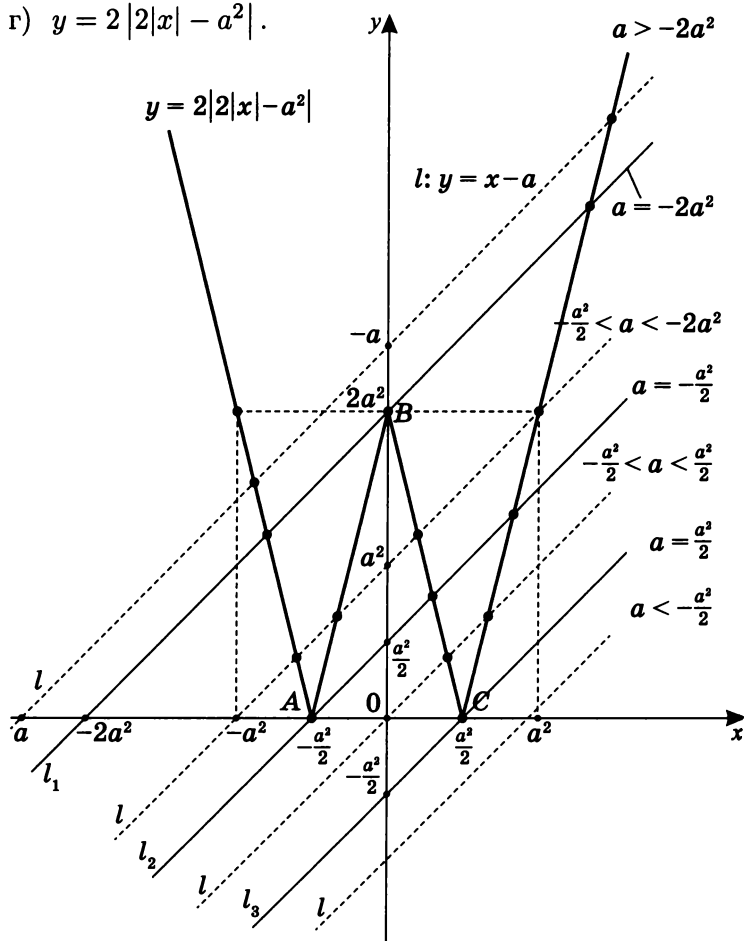
б) $y = 2|x| - a^2$.



в) $y = |2|x| - a^2|$.



г) $y = 2|2|x| - a^2|$.



Отметим, что прямая $l: y = x - a$ пересекает ось ординат в точке с координатами $(0; -a)$, а ось абсцисс в точке с координатами $(a; 0)$.

Исследование по графику.

1. Если $a = 0$, то исходное уравнение принимает вид $4|x| = x$, и $x = 0$ — единственный корень.
2. Если $-a < -\frac{a^2}{2}$, то $2a - a^2 > 0$, и это случай, при котором прямая $l: y = x - a$ ниже прямой l_3 ,

т.е. $a(2 - a) > 0$

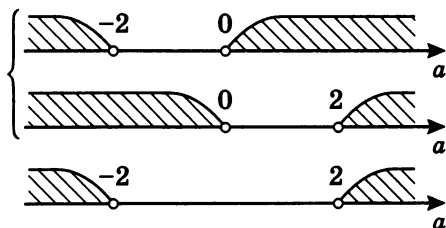


Значит, при $a \in (0; 2)$ корней нет.

3. Если $-a = -\frac{a^2}{2}$, то $2a - a^2 = 0$.

Случай, когда прямая $l \equiv l_2$ (прямые совпадают) $a = 0$, мы уже исследовали, значит, при $a = 2$ есть только один корень.

4. Если $\frac{a^2}{2} > -a > -\frac{a^2}{2}$, то $\begin{cases} a(a+2) > 0 \\ a(a-2) > 0 \end{cases}$.



Это случай, при котором прямая $y = x - a$ находится между прямыми l_2 и l_3 .

Значит, при $a \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$ есть два корня.

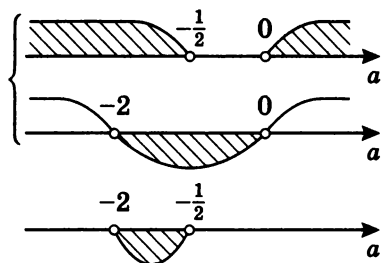
5. Если $-a = \frac{a^2}{2}$,

это случай, при котором прямые $l_2 \equiv l$, т.е. совпадают.

Тогда $a(a+2) = 0$; $\begin{cases} a = 0 & \text{— не подходит} \\ a = -2 \end{cases}$,

т.е. при $a = -2$ есть три корня.

6. Если $2a^2 > -a > \frac{a^2}{2}$, то $\begin{cases} a(2a+1) > 0 \\ a(a+2) < 0 \end{cases}$.



Это случай, при котором прямая $l: y = x - a$ находится между прямыми l_1 и l_2 .

Значит, при $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$ есть четыре корня.

7. Если $-a = 2a^2$, то $a(2a+1) = 0$.

Это случай, при котором прямые $l \equiv l_1$ (совпадают).

Значит, при $a = -\frac{1}{2}$ есть три корня.

8. Если $-a > 2a^2$,

то $a(2a+1) < 0$.



Это случай, при котором прямая $l: y = x - a$ находится выше прямой l_3 .

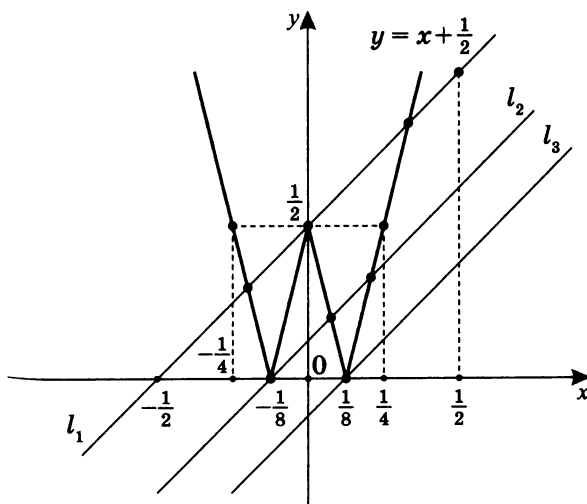
Значит, при $a \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ есть два корня.

Ответ: уравнение $2|2|x| - a^2| = x - a$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a \in (-\infty; -2)$ — два корня.
2. При $a = -2$ — три корня.
3. При $a \in (-2; -\frac{1}{2})$ — четыре корня.
4. При $a = -\frac{1}{2}$ — три корня.
5. При $a \in (-\frac{1}{2}; 0)$ — два корня.
6. При $a = 0$ — один корень.
7. При $a \in (0; 2)$ — корней нет.
8. При $a = 2$ — один корень.
9. При $a \in (2; \infty)$ — два корня.

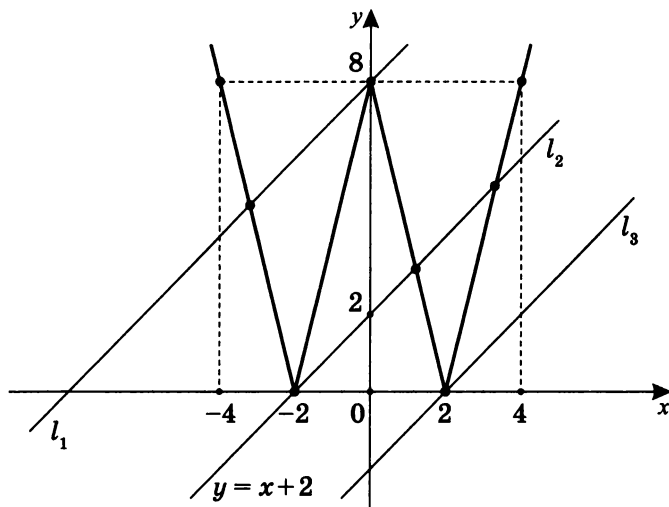
Примечание. 1. При $a = -\frac{1}{2}$ $l_1: y = x + \frac{1}{2}$.

График $y = 2|2|x| - \frac{1}{4}|$ будет выглядеть так:



2. При $a = -2$ $l_2: y = x + 2$.

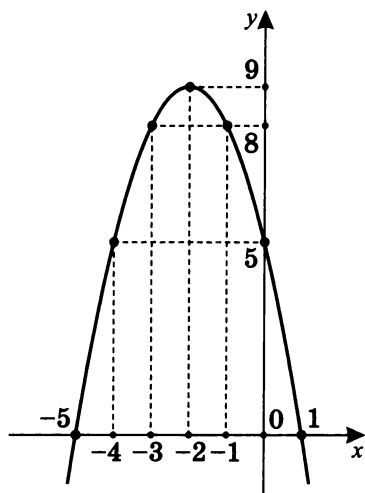
График $y = 2|2|x| - 4|$ будет выглядеть так:



Очевидно, что при различных значениях a график по форме не изменяется, так как $\triangle ABC$ (с. 228) равнобедренный с основанием $AC = a^2$ и высотой $OB = 2a^2$. Поэтому прямая l_1 всегда выше прямой l_2 , которая выше прямой l_3 . Но при *разных* значениях a возможно $l_1: y = x + \frac{1}{2}$ ниже $l_2: y = x + 2$.

Тренировочная работа 4**Вариант I**

1. Дан график функции



С помощью графика определите:

- а) значения y , при которых $x = 0$;
 - б) значения x , при которых $y = 5$;
 - в) значения x , при которых $y \leq 0$;
 - г) значения x , при которых $5 < y \leq 8$;
 - д) аналитическую формулу и найдите значения a , b и c .
2. а) Постройте график уравнения $y + 3x = 2$.
- б) Постройте график уравнения $y = -x^2 + 2x + 8$.
- в) Решите графически систему уравнений
- $$\begin{cases} y + 3x = 2 \\ y = -x^2 + 2x + 8 \end{cases}.$$

3. Дана функция $f(x) = -x^2 + 6x + 7$.

а) Постройте ее график.

б) Исследуйте график.

1. $y = f(x) \uparrow$.

2. $y = f(x) \downarrow$.

3. $y_{\max} = ?$ при $x = ?$

4. $y > 0$.

5. $y \leq 0$.

6. $y = 12$.

7. $7 < y \leq 12$.

8. Найдите абсциссы точек пересечения данной параболы с прямой $y = 2x - 5$.

в) Вычислите $\frac{1}{f(2+\sqrt{5})} + \frac{1}{f(2-\sqrt{5})}$.

г) Сколько решений имеет уравнение $a = -x^2 + 6|x| + 7$ в зависимости от значения параметра a ?

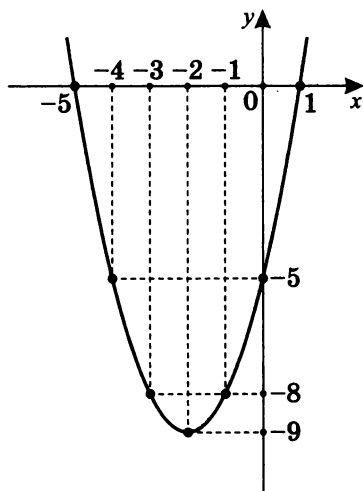
4. Определите, при каких значениях k уравнение

$$kx^2 - 6x + k^2 = 0$$
 имеет два решения.

Примечание. Примеры исследования графика функции см.: Шахмейстер А. Х. Построение и преобразование графиков. Параметры. Часть 1. Линейные функции и уравнения. СПб.; М., 2014. С. 94–99, а также практикум 1 данной книги (с. 31–50).

Вариант II

1. Дан график функции.



С помощью графика определите:

- а) значения y , при которых $x = 0$;
- б) значения x , при которых $y = -5$;
- в) значения x , при которых $y > 0$;
- г) значения x , при которых $-8 < y \leq -5$;
- д) аналитическую формулу и найдите значения a , b и c .

2. а) Постройте график уравнения $y - 3x = 2$.

б) Постройте график уравнения $y = -x^2 - 2x + 8$.

в) Решите графически систему уравнений

$$\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = -x^2 - 2x + 8 \end{cases}.$$

3. Дана функция $f(x) = -x^2 + 6x - 8$.

а) Постройте ее график.

б) Исследуйте график.

1. $y = f(x) \uparrow$.

2. $y = f(x) \downarrow$.

3. $y_{\max} = ?$ при $x = ?$

4. $y > 0$.

5. $y \leq 0$.

6. $y = -3$.

7. $-3 > y \geq -8$.

8. Найдите абсциссы точек пересечения данной параболы с прямой $y = -x - 2$.

в) Вычислите $\frac{1}{f(4-\sqrt{3})} + \frac{1}{f(4+\sqrt{3})}$.

г) Сколько решений имеет уравнение $a = -x^2 + 6|x| - 8$ в зависимости от значения параметра a ?

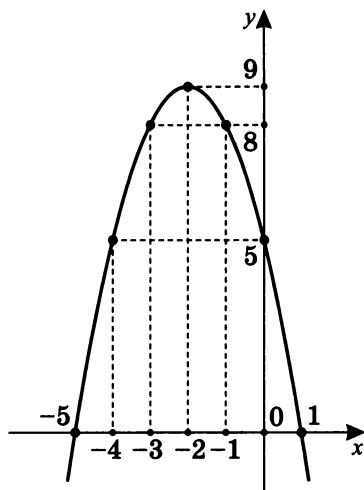
4. Определите, при каких значениях k уравнение

$$kx^2 - 5x + \frac{1}{4}k = 0$$
 имеет два решения.

Решение тренировочной работы 4

Вариант I

1. Дан график функции:



С помощью графика определим:

а) Если $x = 0$, то $y = 5$.

б) Если $y = 5$, то $\begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$.

в) Если $y \leq 0$, то $x \in (-\infty; -5] \cup [1; \infty)$.

г) Если $5 < y \leq 8$, то $x \in (-4; -3] \cup [-1; 0)$.

д) Так как $y = ax^2 + bx + c$, найдем a , b и c .

$f(0) = 5$; $f(-4) = 5$; $f(1) = 0$. Значит

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 5 \\ a \cdot 16 - 4 \cdot b + c = 5 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c = 5 \\ 16a - 4b = 0 \\ a + b = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 5 \\ 4a = b \\ a + b = -5 \end{cases} \quad \text{II} + \text{III} \quad \begin{cases} c = 5 \\ a = -1 \\ b = 4 \cdot (-1) \end{cases} \quad \begin{cases} c = 5 \\ a = -1 \\ b = -4 \end{cases}$$

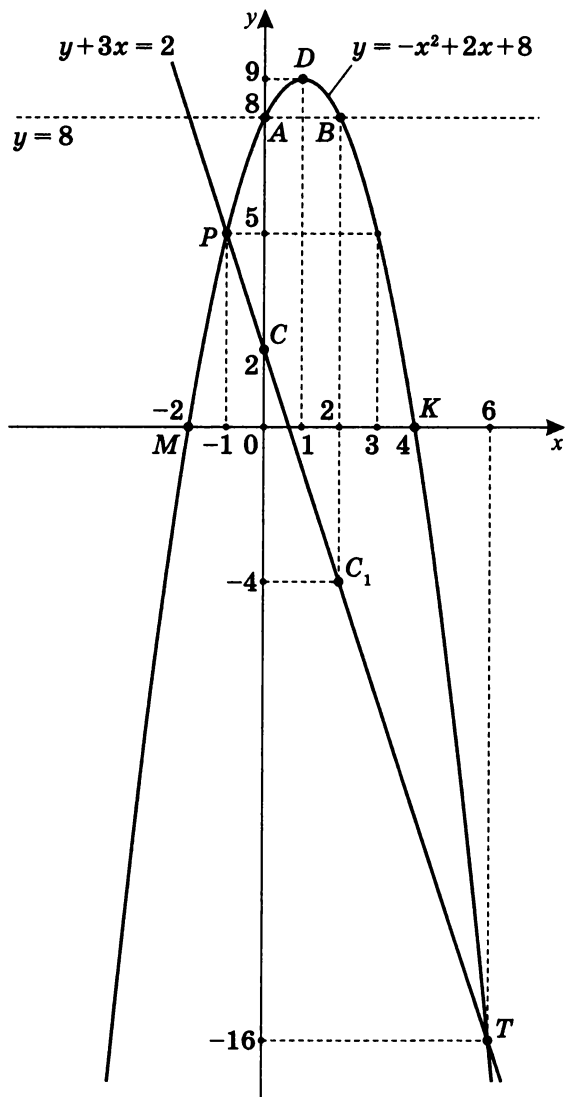
т.е. $y = -x^2 - 4x + 5$.

Разумеется, возможны и другие способы.

2. а) Постройте график уравнения $y + 3x = 2$.

x	y	Координаты точек
0	2	$C(0; 2)$
2	-4	$C_1(2; -4)$

- б) Постройте график уравнения $y = -x^2 + 2x + 8$.



1. $y = 8$; $-x^2 + 2x = 0$; $-x(x - 2) = 0$;
 $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; $A(0; 8)$; $B(2; 8)$.
2. $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $x_0 = \frac{0 + 2}{2} = 1$;
 $y_0 = f(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 + 8 = 9$; $D(1; 9)$.
3. $y = 0$; $-x^2 + 2x + 8 = 0$;
 $x^2 - 2x - 8 = 0$; $\begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases}$;
 $K(4; 0)$; $M(-2; 0)$.

в) Решим графически систему уравнений:

$$\begin{cases} y + 3x = 2 \\ y = -x^2 + 2x + 8 \end{cases}$$

Из графиков следует, что абсциссы точек пересечения графиков находятся или на промежутке $(-2; 0)$ или на промежутке $(4; \infty)$. Можно расширить координатное поле, а можно перебирать значения двух данных функций до их совпадения.

Контрольные точки

для $y = -x^2 + 2x + 8$:

$$f(4) = -4^2 + 2 \cdot 4 + 8 = 0;$$

$$f(5) = -5^2 + 2 \cdot 5 + 8 = -7;$$

$$f(6) = -6^2 + 2 \cdot 6 + 8 = -16;$$

$$f(-1) = -1^2 - 2 \cdot 1 + 8 = 5.$$

x	4	5	6	-2	-1
y	0	-7	-16	0	5

Контрольные точки

для $y = 2 - 3x$:

x	4	5	6	-1
y	-10	-13	-16	5

Из сравнения табличных значений следует, что есть общие точки, т.е. точки пересечения двух графиков функций.

$$\Gamma(y = -x^2 + 2x + 8) \cap \Gamma(y = 2 - 3x) = \{P; T\},$$

Тогда $T(6; -16)$; $P(-1; 5)$.

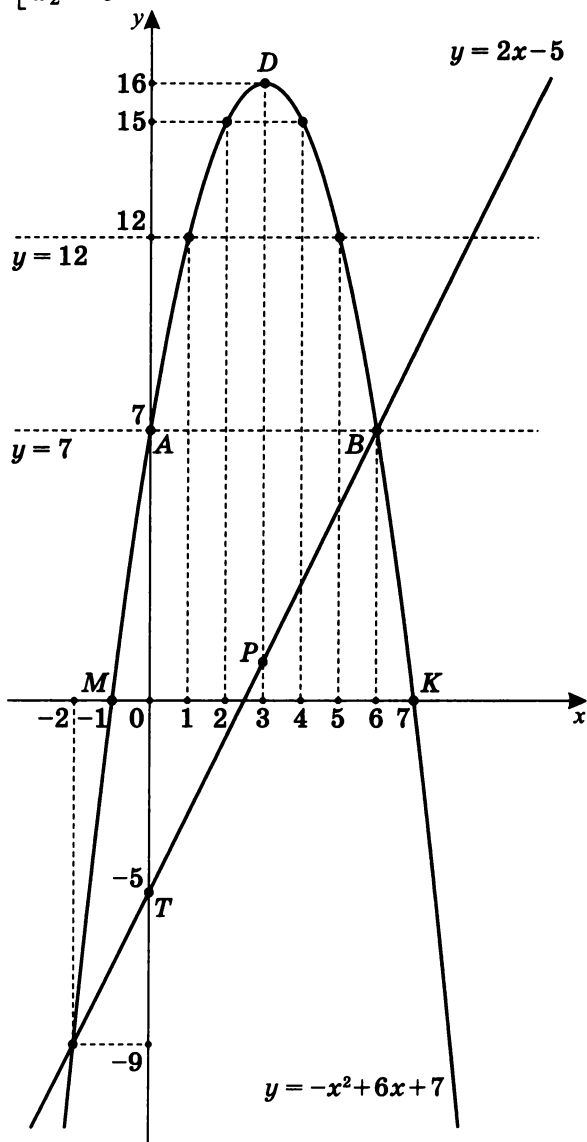
Ответ: $\{(6; -16), (-1; 5)\}$ или $\begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \\ x = 6 \\ y = -16 \end{cases}$.

3. Дана функция $y = -x^2 + 6x + 7$.

а) Построим ее график.

1. Пусть $y = 7$, тогда $-x^2 + 6x = 0$; $-x(x-6) = 0$;

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 6 \end{cases}; \quad A(0; 7), \quad B(6; 7).$$



2. $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{0+6}{2} = 3;$
 $y_0 = f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 + 7 = 16,$ т.е. $D(3; 16).$
3. Пусть $y = 0,$ тогда
 $-x^2 + 6x + 7 = 0; \quad x^2 - 6x - 7 = 0;$
 $x_{3,4} = 3 \pm \sqrt{9+7} = 3 \pm 4;$

$$\begin{cases} x_3 = 7, & K(7; 0) \\ x_4 = -1, & M(-1; 0) \end{cases}.$$

б) Исследуем график.

- $y = f(x) \uparrow$ на $(-\infty; 3].$
- $y = f(x) \downarrow$ на $[3; \infty).$
- $y_{\max} = 16$ при $x = 3.$
- $y > 0$ на $(-1; 7).$
- $y \leq 0$ на $(-\infty; -1] \cup [7; \infty).$
- $y = 12$ при $x = 1$ и $x = 5.$
- $7 < y \leq 12$ на $(0; 1] \cup [5; 6).$
- Найдем абсциссы точек пересечения данной параболы с прямой $y = 2x - 5.$

Вначале построим график $y = 2x - 5.$

x	y	Координаты точек
0	-5	$T(0; -5)$
3	1	$P(3; 1)$

Из графиков следует, что абсциссы точек пересечения — $x = -2$ и $x = 6.$ Проверка убеждает в этом. Следовательно, $x = -2$ или $x = 6.$

в) Вычислим $\frac{1}{f(2+\sqrt{5})} + \frac{1}{f(2-\sqrt{5})}.$

$$\begin{aligned} f(2+\sqrt{5}) &= -(2+\sqrt{5})^2 + 6(2+\sqrt{5}) + 7 = \\ &= -4 - 4\sqrt{5} - 5 + 12 + 6\sqrt{5} + 7 = 2\sqrt{5} + 10; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2-\sqrt{5}) &= -(2-\sqrt{5})^2 + 6(2-\sqrt{5}) + 7 = \\ &= -4 + 4\sqrt{5} - 5 + 12 - 6\sqrt{5} + 7 = -2\sqrt{5} + 10. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{Следовательно, } \frac{1}{f(2+\sqrt{5})} + \frac{1}{f(2-\sqrt{5})} = \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{5}+10} + \frac{1}{-2\sqrt{5}+10} = \frac{-2\sqrt{5}+10+2\sqrt{5}+10}{(10+2\sqrt{5})(10-2\sqrt{5})} = \\
 &= \frac{20}{100-20} = \frac{20}{80} = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

г) Определим, сколько решений имеет уравнение

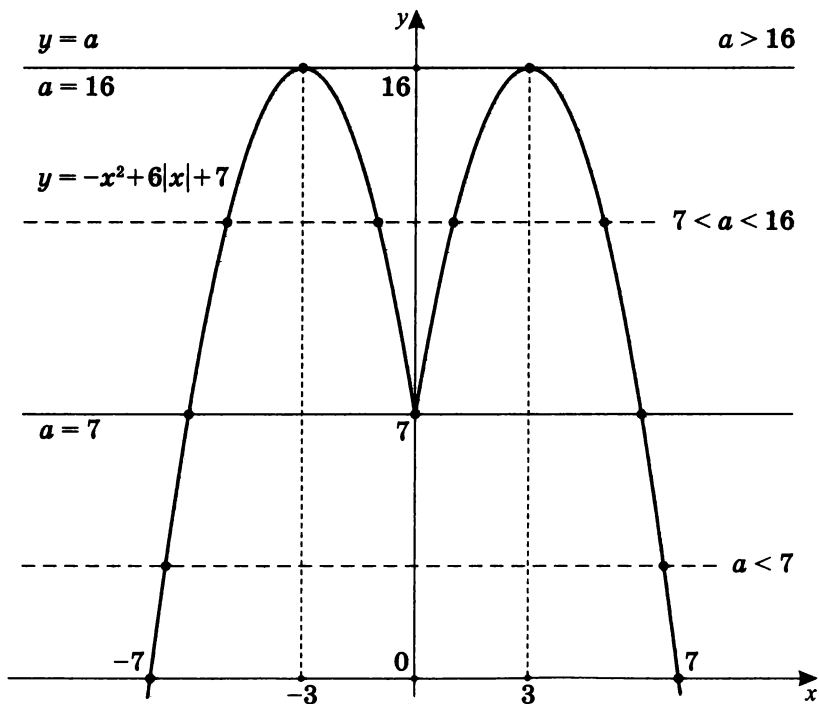
$$\begin{aligned}
 &a = -x^2 + 6|x| + 7 \text{ в зависимости от значе-} \\
 &\text{ния параметра } a, \text{ т.е. необходимо решить систему} \\
 &\begin{cases} y = -x^2 + 6|x| + 7 \\ y = a \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Пусть $\varphi(x) = -x^2 + 6|x| + 7$, $f(x) = a$.

$D(\varphi) = (-\infty; \infty)$;

$$\varphi(-x) = -(-x)^2 + 6|-x| + 7 = -x^2 + 6|x| + 7 = \varphi(x),$$

значит $\varphi(x)$ — четная, и ее график симметричен относительно оси Oy .



В данном случае наиболее удобным является графическое решение.

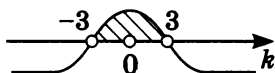
Очевидно, что количество точек пересечения графика уравнения $y = \varphi(x)$ и прямой $y = a$ и есть ответ на вопрос: сколько решений имеет уравнение $-x^2 + 6|x| + 7 = a$ в зависимости от значения параметра a .

Ответ: уравнение $-x^2 + 6|x| + 7 = a$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a \in (16; \infty)$ — корней нет.
 2. При $a = 16$ — два корня.
 3. При $a \in (7; 16)$ — четыре корня.
 4. При $a = 7$ — три корня.
 5. При $a \in (-\infty; 7)$ — два корня.
4. Определите, при каких значениях k уравнение $kx^2 - 6x + k^2 = 0$ имеет два решения.

Чтобы данное уравнение было квадратным, необходимо условие $k \neq 0$, а чтобы было два корня, необходимо $D > 0$.

Значит $\begin{cases} k \neq 0 \\ 3^2 - k^2 > 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} k \neq 0 \\ (3 - k)(3 + k) > 0 \end{cases}$.

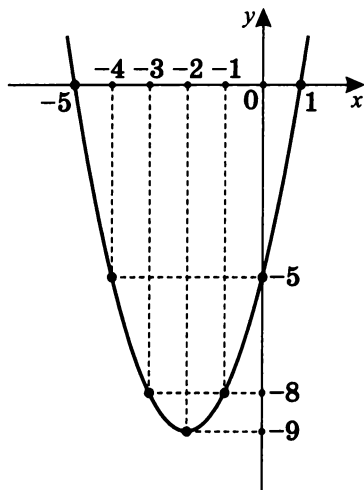


Ответ: уравнение $kx^2 - 6x + k^2 = 0$ имеет два корня при $k \in (-3; 0) \cup (0; 3)$.

Примечание. В данном случае исследовать и определить, при каких значениях k уравнение имеет два корня, проще было *аналитически*.

Вариант II

1. Дан график функции.



С помощью графика определим:

а) если $x = 0$, то $y = -5$;б) если $y = -5$, то $\begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$;в) если $y > 0$, то $x \in (-\infty; -5) \cup (1; \infty)$;г) если $-8 < y \leq -5$, то $x \in [-4; -3] \cup (-1; 0]$;д) так как $y = ax^2 + bx + c$, найдем a , b и c . $f(0) = -5$; $f(-4) = -5$; $f(1) = 0$, значит

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = -5 \\ a \cdot 16 + b \cdot (-4) + c = -5; \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

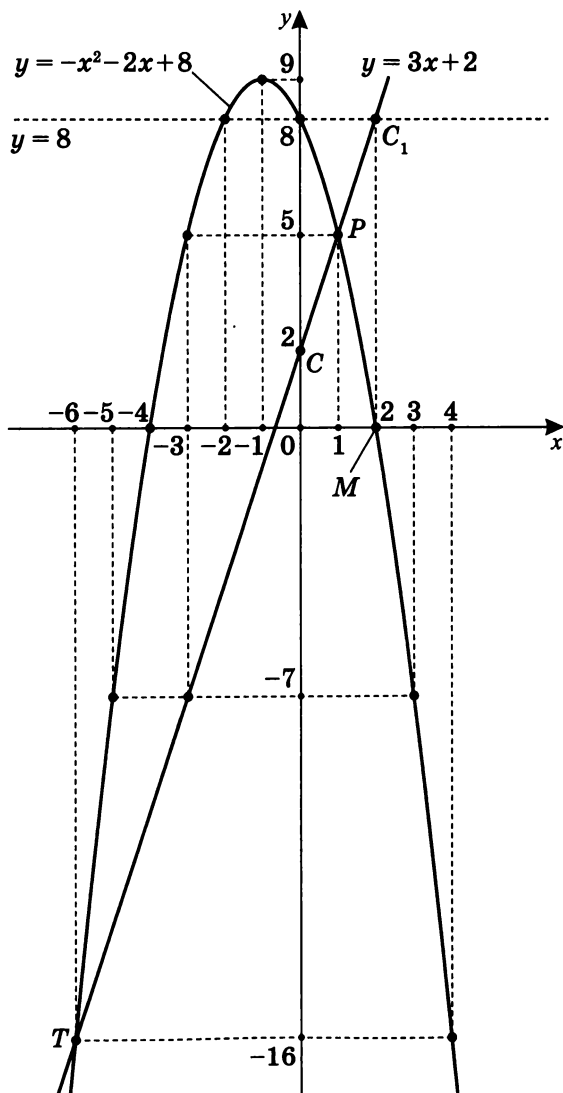
$$\begin{cases} c = -5 \\ 16a - 4b = 0; \\ a + b = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} c = -5 \\ 4a = b \\ a + b = 5 \end{cases} \quad \text{II} + \text{III}$$

$$\begin{cases} c = -5 \\ a = 1 \\ b = 4 \cdot 1 \end{cases} \quad \begin{cases} c = -5 \\ a = 1 \\ b = 4 \end{cases} \quad y = x^2 + 4x - 5.$$

2. а) Построим график уравнения $y - 3x = 2$.

x	y	Координаты точек
0	2	$C(0; 2)$
2	8	$C_1(2; 8)$

- б) Построим график уравнения $y = -x^2 - 2x + 8$.



1. Пусть $y = 8$, тогда $-x^2 - 2x = 0$; $\begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$.

Получаем точки $A(0; 8)$ и $B(-2; 8)$.

2. $x_0 = \frac{0+(-2)}{2} = -1$;

$$y_0 = f(-1) = -(-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 8 = 9,$$

получаем точку $D(-1; 9)$.

3. Пусть $y = 0$, тогда $-x^2 - 2x + 8 = 0$; $\begin{cases} x = -4 \\ x = 2 \end{cases}$.

Получаем точки $K(-4; 0)$ и $M(2; 0)$.

в) Решим графически систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = -x^2 - 2x + 8 \end{cases}$$

Контрольные точки для $y = -x^2 - 2x + 8$:

x	-6	-3	0	1	2
y	-16	5	8	5	0

Контрольные точки для $y = 3x + 2$:

x	1	-3	-5	-6
y	5	-7	-13	-16

Абсциссы контрольных точек выбираем так, чтобы, по возможности, значения двух данных функций совпали. Естественно, при этом ориентируемся на графики этих функций.

Значит $\Gamma(y = -x^2 - 2x + 8) \cap \Gamma(y = 3x + 2) = \{P; T\}$,

где $P(1; 5)$, $T(-6; -16)$.

Ответ: $\{(1; 5), (-6; -16)\}$ или $\begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \\ x = -6 \\ y = -16 \end{cases}$.

3. Дана функция $y = -x^2 + 6x - 8$.

а) Построим ее график.

1. Пусть $y = -8$, тогда $-x^2 + 6x = 0$;

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}; \quad A(0; -8) \text{ и } B(6; -8).$$

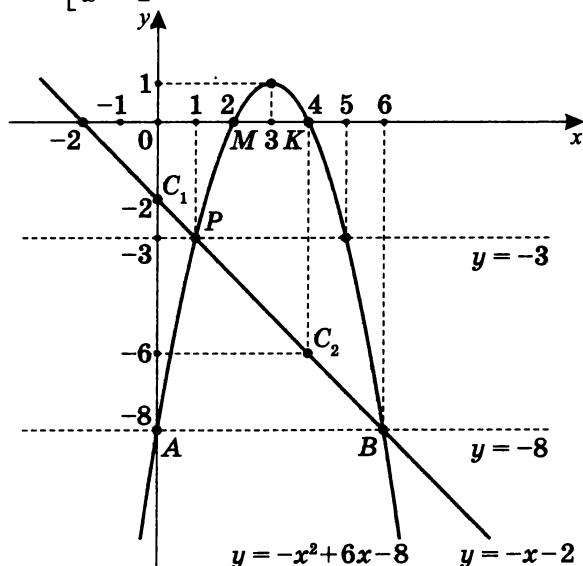
2. $x_0 = \frac{0+6}{2} = 3$;

$$y_0 = -3^2 + 6 \cdot 3 - 8 = 1,$$

т.е. получили точку $D(3; 1)$.

3. Пусть $y = 0$, тогда $-x^2 + 6x - 8 = 0$;

$$\begin{cases} x = 4 \\ x = 2 \end{cases}; \quad K(4; 0) \text{ и } M(2; 0).$$



б) Исследуем график:

1. $y = f(x) \uparrow$ на $(-\infty; 3]$.
2. $y = f(x) \downarrow$ на $[3; \infty)$.
3. $y_{\max} = 1$ при $x = 3$.
4. $y > 0$ на $(2; 4)$.
5. $y \leq 0$ на $(-\infty; 2) \cup (4; \infty)$.
6. $y = -3$ при $x = 1$ и $x = 5$.

7. $-3 > y \geq -8$ на $[0; 1) \cup (5; 6]$.

8. Найдем абсциссы точек пересечения данной параболы с прямой $y = -x - 2$.

Вначале построим
график $y = -x - 2$.

x	y	Координаты точек
0	-2	$C_1(0; -2)$
4	-6	$C_2(4; -6)$

Очевидно, что точки $P(1; -3)$ и $B(6; -8)$ — точки пересечения прямой и параболы. Проверка это подтверждает.

Значит, искомые абсциссы — $x = 1$ и $x = 6$.

в) Вычислим $\frac{1}{f(4-\sqrt{3})} + \frac{1}{f(4+\sqrt{3})}$,

где $f(x) = -x^2 + 6x - 8$.

$$\begin{aligned} f(4-\sqrt{3}) &= -(4-\sqrt{3})^2 + 6(4-\sqrt{3}) - 8 = \\ &= -16 + 8\sqrt{3} - 3 + 24 - 6\sqrt{3} - 8 = 2\sqrt{3} - 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(4+\sqrt{3}) &= -(4+\sqrt{3})^2 + 6(4+\sqrt{3}) - 8 = \\ &= -16 - 8\sqrt{3} - 3 + 24 + 6\sqrt{3} - 8 = -2\sqrt{3} - 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \frac{1}{f(4-\sqrt{3})} + \frac{1}{f(4+\sqrt{3})} &= \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}-3} + \frac{1}{-2\sqrt{3}-3} = \frac{2\sqrt{3}+3-(2\sqrt{3}-3)}{(2\sqrt{3}-3)(2\sqrt{3}+3)} = \\ &= \frac{6}{4\cdot 3-9} = \frac{6}{3} = 2. \end{aligned}$$

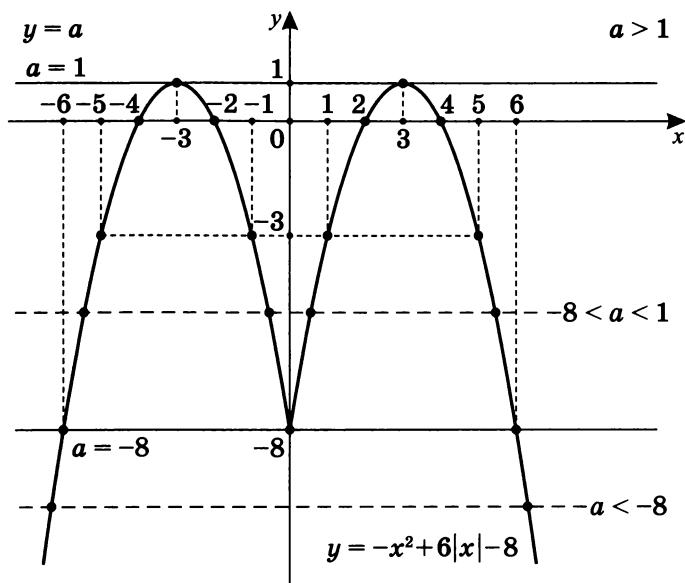
Итак, $\frac{1}{f(4-\sqrt{3})} + \frac{1}{f(4+\sqrt{3})} = 2$.

г) Сколько решений имеет уравнение $a = -x^2 + 6|x| - 8$ в зависимости от значения параметра a ?

Пусть $\varphi(x) = -x^2 + 6|x| - 8$.

Так как

$$\begin{aligned} \varphi(-x) &= -(-x)^2 + 6|-x| - 8 = -x^2 + 6|x| - 8 = \varphi(x), \\ \text{то } \varphi(x) &\text{ — четная функция, график которой симметричен относительно оси } Oy. \end{aligned}$$



Ответ: уравнение $a = -x^2 + 6|x| - 8$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a \in (-\infty; -8)$ — два корня.
2. При $a = -8$ — три корня.
3. При $a \in (-8; 1)$ — четыре корня.
4. При $a = 1$ — два корня.
5. При $a \in (1; \infty)$ — корней нет.

4. Определите, при каких значениях k уравнение

$$kx^2 - 5x + \frac{1}{4}k = 0 \text{ имеет два решения.}$$

1. При $k \neq 0$ уравнение является квадратным.
2. При $D > 0$ существуют два корня,

т. е. $\begin{cases} k \neq 0 \\ D = 5^2 - k^2 > 0 \end{cases}$



Ответ: при $k \in (-5; 0) \cup (0; 5)$ уравнение $kx^2 - 5x + \frac{1}{4}k = 0$ имеет два корня.

Самостоятельная работа 8

Сколько решений имеет уравнение в зависимости от значения параметра a ?

1. $\frac{|x-2|}{x^2-2x} = a;$

2. $\frac{1}{|x|-1} = a;$

3. $\left| \frac{x^2-2x}{x^2-x-2} \right| = a;$

4. $\frac{x^2+2|x|}{4-x^2} = a;$

5. $a - x^2 = \frac{|x^2-2x|}{x-2};$

6. $\frac{|x|}{x} + a = \frac{x+2}{|x^2+2x|};$

7. $a - \frac{1}{x-2} = \frac{|x-2| \cdot |x|}{x^2-2x};$

8. $a - \frac{x}{|x|} = \frac{|x^2-4|}{x^2-x-2}.$

Практикум 11

1. Сколько корней имеет уравнение $|x^3 - 1| + |2 - x^3| = a$ в зависимости от значения параметра a ?
2. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $x^2 - a = |x^2 + 2x - 3|$ имеет более двух корней.
3. Напишите уравнение графика, которого касаются любые окружности вида $(x-a)^2 + (y-2a)^2 = 2^2$, где a — любое.
4. Найдите все значения a , при каждом из которых множеством решений неравенства $\sqrt{5-x} + |x+a| \leq 3$ является отрезок.
5. Сколько корней имеет уравнение $|2x^2 - 3x - 2| = a - 2x^2 - 8x$ в зависимости от значения параметра a ?
6. Сколько корней имеет уравнение $\left|\frac{5}{x} - 3\right| = ax - 2$ в зависимости от значения параметра a ?
7. Выясните, сколько корней имеет уравнение $|x^2 + x + a| + |x| = 10$ в зависимости от параметра a .

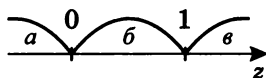
Решение практикума 11

1. Сколько корней имеет уравнение $|x^3 - 1| + |2 - x^3| = a$ в зависимости от значения параметра a ?

$$|x^3 - 1| + |2 - x^3| = a \text{ равносильно } |x^3 - 1| + |x^3 - 2| = a.$$

Положим $z = x^3 - 1$, тогда уравнение принимает вид $|z| + |z - 1| = a$.

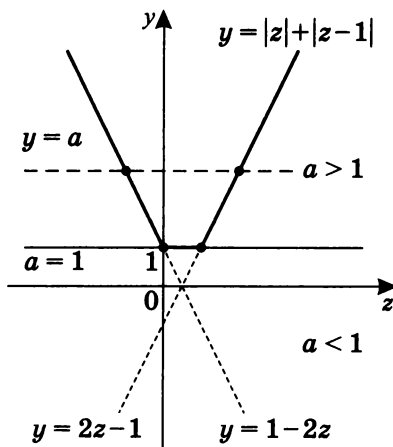
Построим график $y = |z| + |z - 1|$.



а) $z < 0$, тогда $y = -z + 1 - z = 1 - 2z$; $y = 1 - 2z$;

б) $0 \leq z < 1$, тогда $y = z + 1 - z = 1$; $y = 1$;

в) $z \geq 1$, тогда $y = z + z - 1 = 2z - 1$; $y = 2z - 1$.



Графически решая систему уравнений $\begin{cases} y = |z| + |z + 1| \\ y = a \end{cases}$, получим все виды возможных решений.

1. При $a = 1$ $0 \leq z \leq 1$;

так как $z = x^3 - 1$, то

$$0 \leq x^3 - 1 \leq 1 \text{ или } 1 \leq x^3 \leq 2.$$

Значит при $a = 1$ $x \in [1; \sqrt[3]{2}]$ — бесконечное множество решений.

2. При $a > 1$ существует два корня:

$$2z - 1 = a; \quad 2(x^3 - 1) - 1 = a; \quad x^3 = \frac{3+a}{2}; \quad x = \sqrt[3]{\frac{3+a}{2}}.$$

$$1 - 2z = a; \quad 1 - 2(x^3 - 1) = a; \quad x^3 = \frac{3-a}{2}; \quad x = \sqrt[3]{\frac{3-a}{2}}.$$

Значит, при $a > 1$ действительно существуют два корня: $x = \sqrt[3]{\frac{3+a}{2}}$ и $x = \sqrt[3]{\frac{3-a}{2}}$.

3. При $a < 1$ решения нет.

Ответ:

1. При $a = 1$ существует бесконечное множество

корней: $x \in [1; \sqrt[3]{2}]$.

2. При $a > 1$ существуют два корня

$$\begin{cases} x = \sqrt[3]{\frac{3+a}{2}} \\ x = \sqrt[3]{\frac{3-a}{2}} \end{cases}.$$

3. При $a < 1$ корней нет.

2. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $x^2 - a = |x^2 + 2x - 3|$ имеет более двух корней.

Введем вспомогательную функцию

$$g(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3|.$$

Построим ее график.

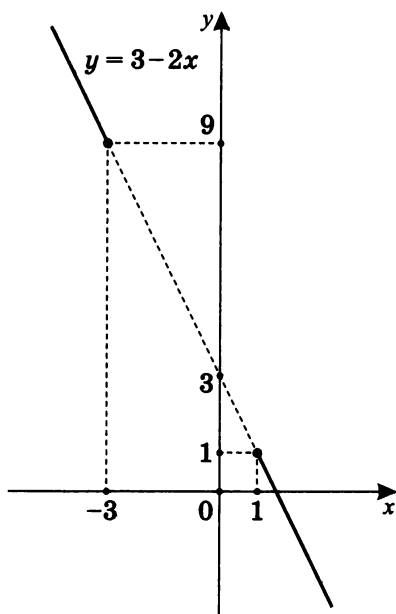
а) Пусть $x^2 + 2x - 3 \geq 0$.



Тогда при $x \in (-\infty; -3] \cup [1; \infty)$

$$g(x) = x^2 - x^2 - 2x + 3 = 3 - 2x;$$

$$g(1) = 1; \quad g(-3) = 9.$$



б) Пусть $x^2 + 2x - 3 < 0$.

Тогда при $x \in (-3; 1)$

$$g(x) = x^2 + x^2 + 2x - 3 = 2x^2 + 2x - 3.$$

$$\text{При } g(x) = -3 \quad x^2 + 2x = 0; \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}.$$

$$x_{\text{в}} = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2} \quad (x_{\text{в}} - \text{абсцисса вершины});$$

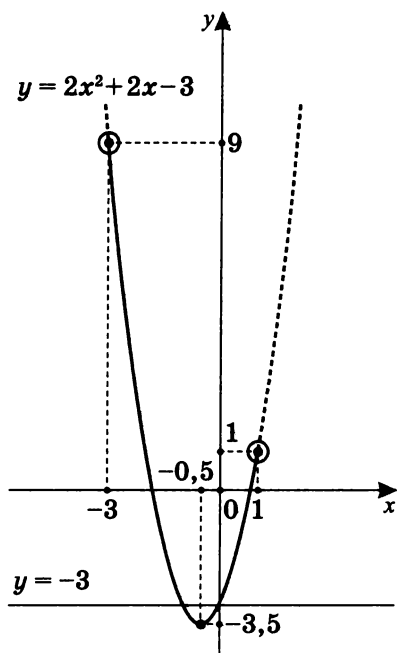
$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = -3,5,$$

т. е. $y_{\text{в}} = -3,5$ ($y_{\text{в}}$ — ордината вершины).

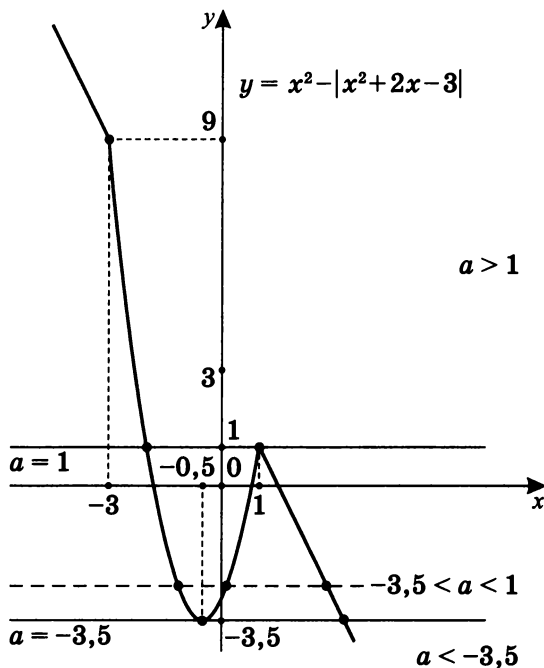
Значит, $(-0,5; -3,5)$ — координаты вершины параболы $y = 2x^2 + 2x - 3$.

$$g(-3) = 2 \cdot (-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 3 = 9;$$

$$g(1) = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 3 = 1.$$



Очевидно, что исходное уравнение можно преобразовать к виду $x^2 - |x^2 + 2x - 3| = a$, т. е. условие можно переформулировать так: при каких значениях a график функции $g(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3|$ пересекается прямой $y = a$ более чем в двух точках?



Из графика $g(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3|$ следует, что это возможно при $-3,5 < a < 1$.

Ответ: при $a \in (-3,5; 1)$ уравнение $x^2 - a = |x^2 + 2x - 3|$ имеет более двух корней.

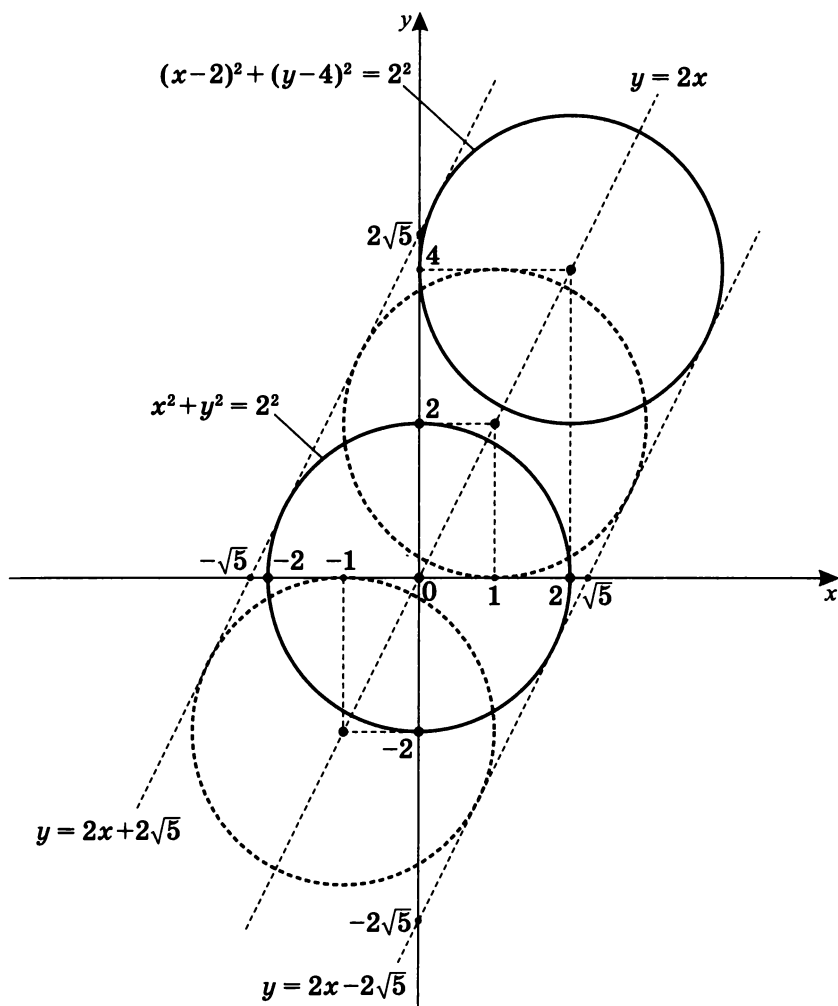
3. Напишите уравнение графика, которого касаются любые окружности вида $(x-a)^2 + (y-2a)^2 = 2^2$, где a — любое.

а) Вначале построим график $x^2 + y^2 = 2^2$ ($a = 0$).

б) Затем построим график

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 2^2 \quad (a = 2).$$

в) Так как $O(a; 2a)$ — центр окружностей — перемещается по прямой $y = 2x$, то график уравнения, которого касаются любые окружности вида $(x-a)^2 + (y-2a)^2 = 2^2$, есть график прямой, параллельной $y = 2x$, а значит, имеющей уравнение вида $y = 2x + b$.



г) Следовательно, окружность $x^2 + y^2 = 2^2$ касается прямой $y = 2x + b$. Получаем систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2^2 \\ y = 2x + b \end{cases}; \quad x^2 + (2x + b)^2 = 4.$$

Найдем, при каких b $D = 0$ (корень единственный).

$$x^2 + 4x^2 + 4bx + b^2 - 4 = 0;$$

$$5x^2 + 4bx + b^2 - 4 = 0;$$

$$D = 4b^2 - 5(b^2 - 4) = -b^2 + 20 = 0; \quad \begin{cases} b = 2\sqrt{5} \\ b = -2\sqrt{5} \end{cases},$$

т. е. $l_1: y = 2x + 2\sqrt{5}$ и $l_2: y = 2x - 2\sqrt{5}$.

Ответ: окружности вида $(x-a)^2 + (y-2a)^2 = 2^2$ касаются прямых $y = 2x + 2\sqrt{5}$ и $y = 2x - 2\sqrt{5}$, т. е. все окружности вида $(x-a)^2 + (y-2a)^2 = 2^2$ находятся внутри полосы, заданной прямыми $2x - 2\sqrt{5} \leq y \leq 2x + 2\sqrt{5}$.

Примечание. Вопрос может быть задан по-другому: укажите все прямые, которые не имеют с окружностями вида $(x-a)^2 + (y-2a)^2 = 2^2$ ни одной общей точки.

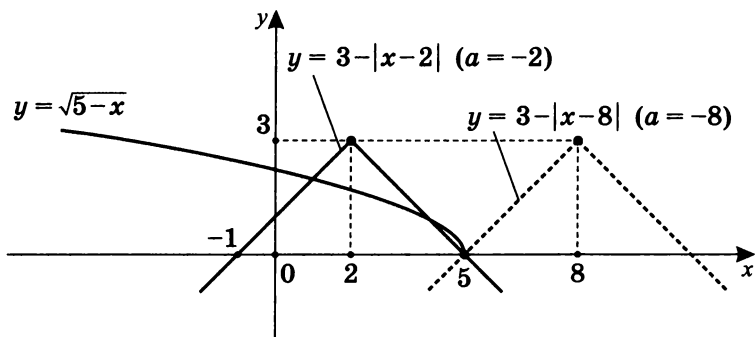
4. Найдите все значения a , при каждом из которых множеством решений неравенства $\sqrt{5-x} + |x+a| \leq 3$ является отрезок.

Преобразуем исходное неравенство в равносильное:

$$\sqrt{5-x} \leq 3 - |x+a|.$$

Так как $D(y = \sqrt{5-x}) = (-\infty; 5]$, то рассмотрим график правой части ($y = 3 - |x+a|$), учитывая что при возрастании значения a данный график «скользит» вдоль оси абсцисс влево.

При $x = 5$ $a = -8$ или $a = -2$ ($|5+a| = 3$). Сравним с графиком $y = \sqrt{5-x}$.



Отметим, что график $y = 3 - |x + a|$ это график $y = |x|$, отраженный симметрично относительно оси Ox в нижнюю полуплоскость и поднятый на 3 единицы вверх. Он «скользит» вдоль оси абсцисс *противоположно направлению изменения a* : вправо при уменьшении значения a и влево при его возрастании.

При $a = -2$ решением является отрезок и точка $(5; 0)$, при $a = -8$ решением неравенства является только одна точка $(5; 0)$ (а точка не есть отрезок). Следовательно, значения $a = -2$ и $a = -8$ в ответ не включаются.

Найдем такие a , при которых $y = 3 - |x + a|$ касается $y = \sqrt{5 - x}$.

Пусть $y = -x + b$ — уравнение касательной к $y = \sqrt{5 - x}$. В этом случае уравнение $-x + b = \sqrt{5 - x}$ имеет единственное решение.

$$(b - x)^2 = 5 - x \quad (x \leq b); \quad x^2 - 2bx + b^2 - 5 + x = 0;$$

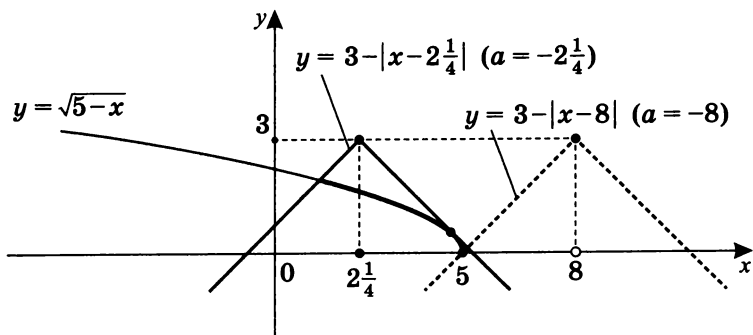
$$x^2 - (2b - 1)x + b^2 - 5 = 0.$$

Это уравнение при $D = 0$ имеет единственное решение.

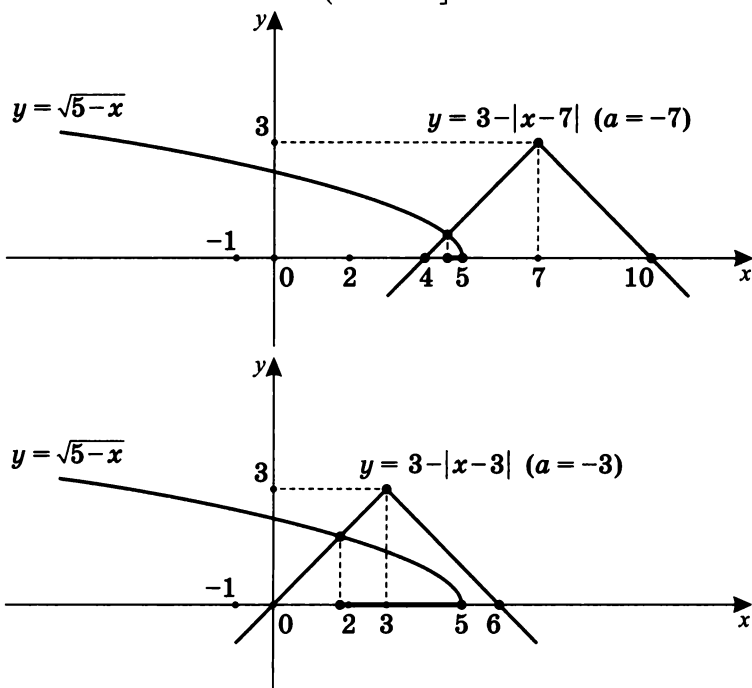
$$D = (2b - 1)^2 - 4b^2 + 20 = 0; \quad b = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}.$$

$$\text{Значит, } 5\frac{1}{4} - x = 3 - |x + a|; \quad |x + a| = x - 2\frac{1}{4},$$

$$\text{следовательно, } a = -2\frac{1}{4}.$$



Чтобы окончательно разобраться с решением, построим графики $y = 3 - |x + a|$ при $a = -7$ и $a = -3$, принадлежащих промежутку $\left(-8; -2\frac{1}{4}\right]$.



Вывод: при $-8 < a \leq -2\frac{1}{4}$ решением неравенства $\sqrt{5-x} \leq 3 - |x + a|$ является отрезок.

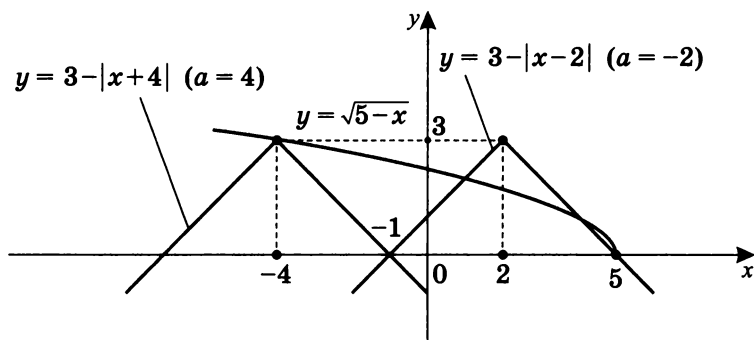
Чертежи лишь иллюстрируют верность вывода.

Теперь рассмотрим случаи, при которых графики

$y = 3 - |x + a|$ располагаются левее точки $(5; 0)$.

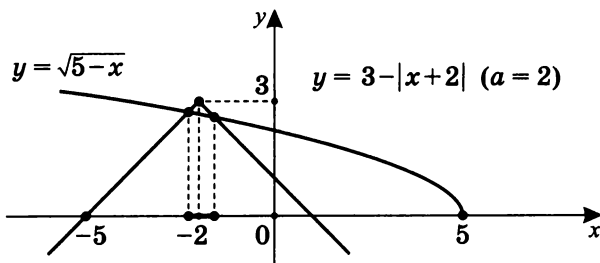
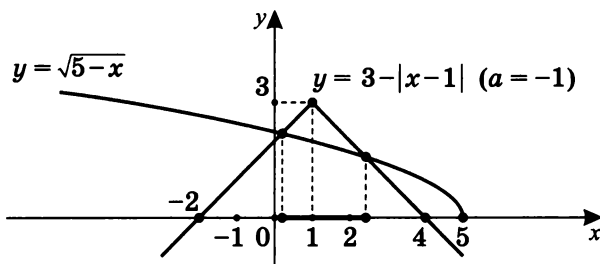
Вершина пика $y = 3 - |x + a|$ — это точка с координатами вида $(x; 3)$. Это возможно, только если $3 = 3 - |x + a|$, т. е. при $x = a$.

Если при этом график $y = \sqrt{5-x}$ проходит через вершину пика, то $3 = \sqrt{5-x}$, т. е. $x = -4$, тогда $-4 = -a$, $\boxed{a = 4}$.



Отметим, что при $a = 4$ решением является точка $(-4; 3)$, что не подходит по условию, так же, как $(5; 0)$ при $a = -2$.

Рассмотрим чертежи при $a = -1$ и $a = 2$, чтобы лучше иллюстрировать решение.



Вывод: неравенство $\sqrt{5-x} \leq 3 - |x+a|$ при $-2 < a < 4$ имеет решение в виде отрезка.

Ответ: при $a \in \left(-8; -2\frac{1}{4}\right] \cup (-2; 4)$ решением неравенства $\sqrt{5-x} \leq 3 - |x+a|$ является отрезок.

Примечание. При $-2\frac{1}{4} < a \leq -2$ решение состоит из объединения отрезков или объединения отрезка с точкой.

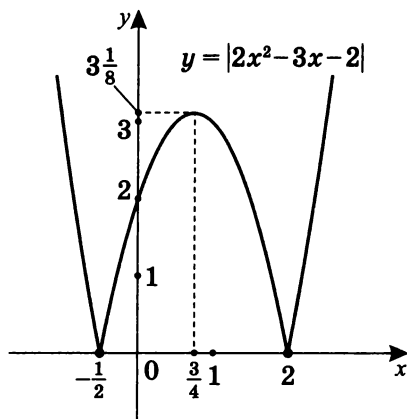
5. Сколько корней имеет уравнение

$|2x^2 - 3x - 2| = a - 2x^2 - 8x$ в зависимости от значения параметра a ?

Положим $f(x) = |2x^2 - 3x - 2|$; $\varphi(x) = -2x^2 - 8x + a$.

Построим график $y = f(x)$.

$$f(x) = 0; \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$



Отметим, что $x = \frac{3}{4}$ — ось симметрии для графика $y = |2x^2 - 3x - 2|$, а $x = -2$ — ось симметрии графика $y = a - 2x^2 - 8x$.

$$\begin{aligned} (a - 2x^2 - 8x = -2(x^2 + 4x + 4) + 8 + a = \\ = -2(x + 2)^2 + 8 + a.) \end{aligned}$$

Найдем точку касания

$$y = -2x^2 - 8x + a \text{ и } y = 2x^2 - 3x - 2,$$

т.е. условие единственного решения.

$$2x^2 - 3x - 2 = -2x^2 - 8x + a; \quad 4x^2 + 5x - 2 - a = 0;$$

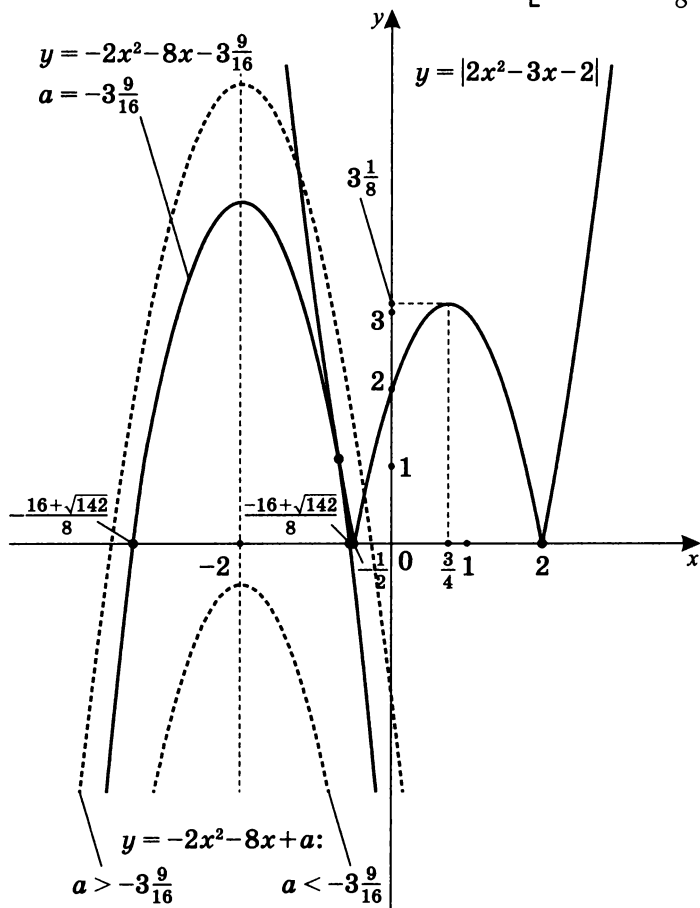
$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{57 + 16a}}{8}.$$

$$D = 25 + 32 + 16a = 0; \quad a = -\frac{57}{16} = -3\frac{9}{16},$$

значит, решение единственное при $a = -3\frac{9}{16}$.

Следовательно, $y = -2x^2 - 8x - 3\frac{9}{16}$.

Найдем корни $-2x^2 - 8x - 3\frac{9}{16} = 0$;
$$\begin{cases} x = \frac{-16 + \sqrt{142}}{8} \\ x = -\frac{16 + \sqrt{142}}{8} \end{cases}.$$

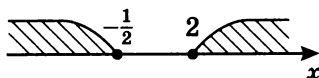


Возможно и другое, более простое решение.

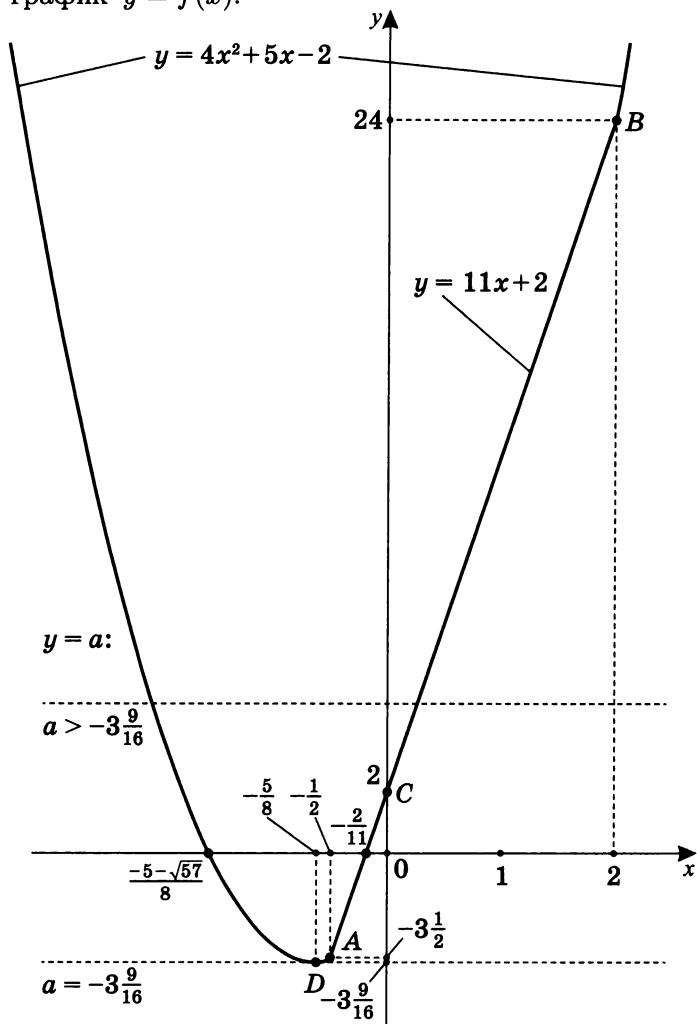
Пусть $f(x) = |2x^2 - 3x - 2| + 2x^2 + 8x$.

Тогда
$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 + 5x - 2, & 2x^2 - 3x - 2 \geq 0 \\ 11x + 2, & 2x^2 - 3x - 2 < 0 \end{cases}.$$

$2x^2 - 3x - 2 = 0$;
$$\begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$



- а) $2x^2 - 3x - 2 \geq 0$. $f(x) = 4x^2 + 5x - 2$. Построим график $y = f(x)$.



$$y = -2; \quad 4x^2 + 5x = 0; \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{5}{4} \end{cases}; \quad x_0 = \frac{0 - \frac{5}{4}}{2} = -\frac{5}{8};$$

$$y_0 = 4 \cdot \left(-\frac{5}{8}\right)^2 - 5 \cdot \left(-\frac{5}{8}\right) - 2 = \frac{25}{16} - \frac{25}{8} - 2 = -3\frac{9}{16}.$$

Получили точку $D\left(-\frac{5}{8}; -3\frac{9}{16}\right)$.

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 2 = 1 - 2,5 - 2 = -3,5.$$

$$f(2) = 4 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 2 = 24;$$

Получили точки $A\left(-\frac{1}{2}; -3,5\right)$ и $B(2; 24)$.

б) $2x^2 - 3x - 2 < 0$; $f(x) = 11x + 2$.

При $x = 0$ получим точку $C(0; 2)$;

при $x = 2$ получим точку $B(2; 24)$.

Тогда очевидно, что из графических соображений следует ответ.

Ответ: уравнение $|2x^2 - 3x - 2| = a - 2x^2 - 8x$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a = -3\frac{9}{16}$ — один корень.

2. При $a > -3\frac{9}{16}$ — два корня.

3. При $a < -3\frac{9}{16}$ — корней нет.

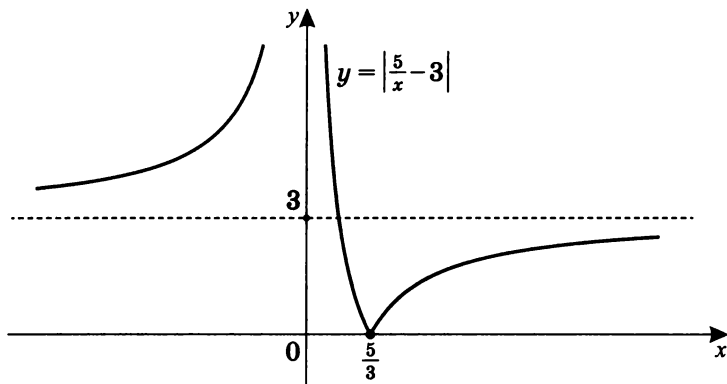
6. Сколько корней имеет уравнение $\left|\frac{5}{x} - 3\right| = ax - 2$ в зависимости от значения параметра a ?

Положим $f(x) = \left|\frac{5}{x} - 3\right|$; $\varphi(x) = ax - 2$. Тогда данное уравнение равносильно уравнению $f(x) = \varphi(x)$.

а) Сначала построим график $y = f(x) = \left|\frac{5}{x} - 3\right|$.

Для этого последовательно построим графики $y = \frac{5}{x}$, $y = \frac{5}{x} - 3$, $y = \left|\frac{5}{x} - 3\right|$, где $y = 3$ — горизонтальная асимптота.

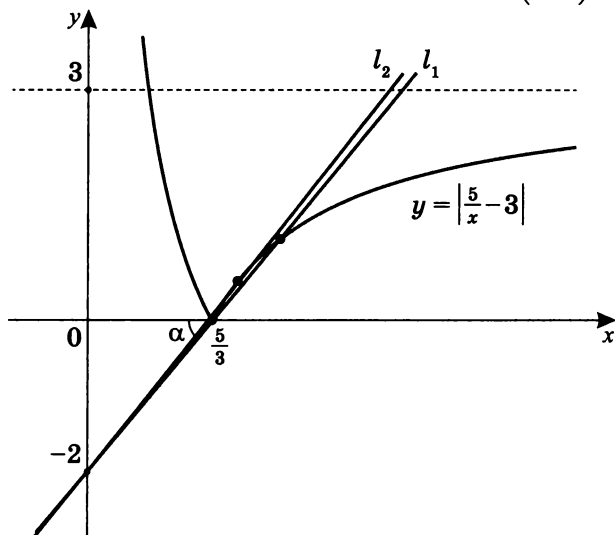
В результате получится такой график:



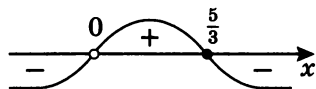
Учтем, что уравнение $y = ax - 2$ при каждом значении параметра a есть уравнение прямой.

Отметим, что все эти прямые образуют пучок прямых, проходящих через точку $(0; -2)$.

- б) Теперь построим в одной системе координат график $y = f(x)$ и графики $y = \varphi(x)$ в случае касания и в случае прохождения через точку $(\frac{5}{3}; 0)$.



Пусть $t(x) = \frac{5}{x} - 3$,



т. е. на $\left[\frac{5}{3}; \infty\right)$ $\left|\frac{5}{x} - 3\right| = 3 - \frac{5}{x}$.

1. Случай прохождения через точку $\left(\frac{5}{3}; 0\right)$.

$$l_1: \operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{-2}{\frac{5}{3}} \right| = \frac{6}{5}, \text{ т. е. } l_1: y = \frac{6}{5}x - 2.$$

2. Случай касания $y = ax - 2$ и кривой $y = 3 - \frac{5}{x}$.

$$ax - 2 = 3 - \frac{5}{x}; \quad ax^2 - 5x + 5 = 0;$$

$$D = 25 - 20a = 0; \quad a = \frac{5}{4}.$$

$$\text{Значит, } l_2: y = \frac{5}{4}x - 2.$$

Теперь очевидно, что из графических соображений следует ответ.

Ответ: уравнение $\left|\frac{5}{x} - 3\right| = ax - 2$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a > \frac{5}{4}$ или $0 < a < \frac{6}{5}$ — один корень;
 2. При $a = \frac{5}{4}$ или $a = \frac{6}{5}$ — два корня;
 3. При $\frac{6}{5} < a < \frac{5}{4}$ — три корня;
 4. При $a < 0$ — корней нет.
7. Выясните, сколько корней имеет уравнение

$|x^2 + x + a| + |x| = 10$ в зависимости от параметра a .

Положим $f(x) = |x^2 + x + a|$ и $\varphi(x) = 10 - |x|$ и попробуем графически решить уравнение $f(x) = \varphi(x)$.

$$y = x^2 + x + a = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + a - \frac{1}{4},$$

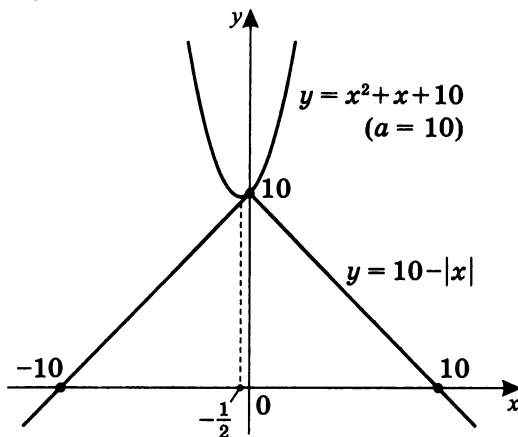
значит, $x = -\frac{1}{2}$ — ось симметрии графиков $y = x^2 + x + a$ и $y = |x^2 + x + a|$.

$$x_{\text{в}} = -\frac{1}{2}; \quad y_{\text{в}} = a - \frac{1}{4},$$

т. е. $D\left(-\frac{1}{2}; a - \frac{1}{4}\right)$ — вершина параболы.

а) Пусть $a \geq 0$.

1. Пусть $a = 10$.



$$f(0) = |0^2 + 0 + a| = |a|; \quad \varphi(0) = 10 - |0| = 10,$$

$$\text{т. е. } |a| = 10; \quad a = 10.$$

$$f(x) = x^2 + x + 10 = (x + 0,5)^2 + 9,75.$$

$$f(-0,5) = 9,75, \quad \varphi(-0,5) = 9,5,$$

$$\text{т. е. } \varphi(-0,5) < f(-0,5).$$

Итак, при $a = 10$ существует единственный корень уравнения $|x^2 + x + a| + |x| = 10$.

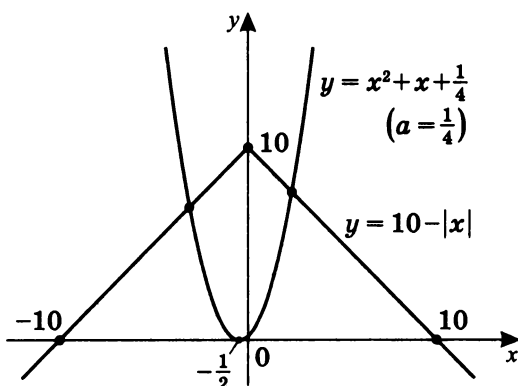
Можно в этом убедиться, и непосредственно решая уравнение $x^2 + x + 10 = 10 - |x|$ ($x \leq 0$).

2. Пусть $a > 10$. Тогда корней нет.

3. Пусть $0 \leq a < 10$.

Выясним, при каких значениях a график параболы $y = x^2 + x + a$ касается оси абсцисс.

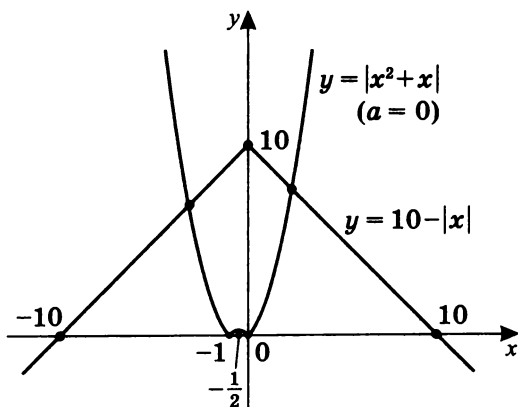
Так как $x^2 + x + a = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + a - \frac{1}{4}$,
 то если $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$,
 тогда $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + a = 0$; $a = \frac{1}{4}$.



Очевидно, что при $a = \frac{1}{4}$ график параболы $y = x^2 + x + a$ касается оси абсцисс.

Значит, при $\frac{1}{4} \leq a < 10$ существуют два корня.

При $0 \leq a < \frac{1}{4}$ также имеются только два корня:



Вывод: при $0 \leq a < 10$ существуют только два корня.

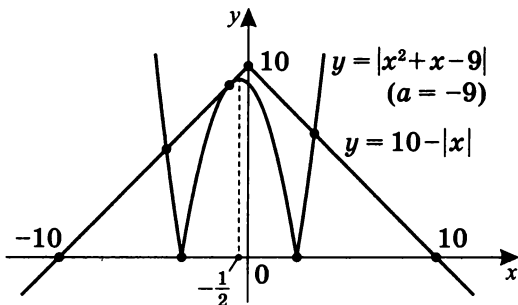
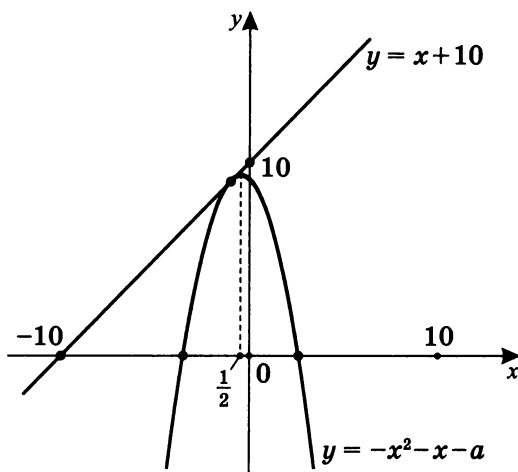
б) Пусть $a < 0$. Рассмотрим случаи касания графиков.

1. Рассмотрим график параболы $y = -x^2 - x - a$ и график прямой $y = x + 10$ ($|x| = -x$ при $x < 0$).

$$-x^2 - x - a = x + 10; \quad x^2 + 2x + a + 10 = 0;$$

$$D = 1 - a - 10 = 0; \quad a = -9.$$

Это случай касания графика $y = |x^2 + x - 9|$ левой ветвью графика $y = 10 - |x|$.



Значит, при $a = -9$ существуют три корня, а при $-9 < a < 0$ — только два корня.

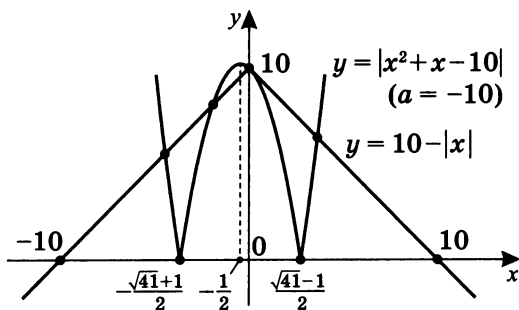
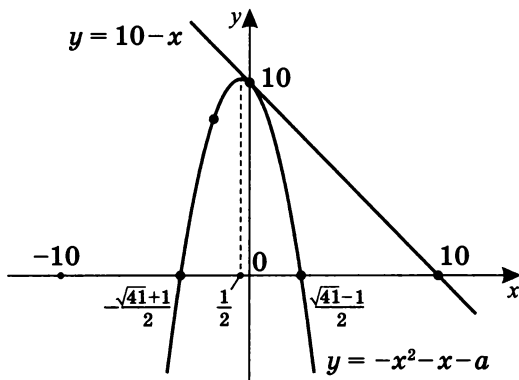
2. Рассмотрим случай касания графика параболы $y = -x^2 - x - a$ прямой $y = 10 - x$.

$$-x^2 - x - a = 10 - x; \quad x^2 = -a - 10.$$

При $a = -10$ существует единственная точка касания $(0; 10)$, т.е. $x = 0$ — корень уравнения.

$$y = -x^2 - x + 10 = 0; \quad \begin{cases} x = \frac{\sqrt{41}-1}{2} \\ x = -\frac{\sqrt{41}+1}{2} \end{cases} \text{ — абс-}$$

циссы точек перегиба графика $y = |x^2 + x - 10|$.

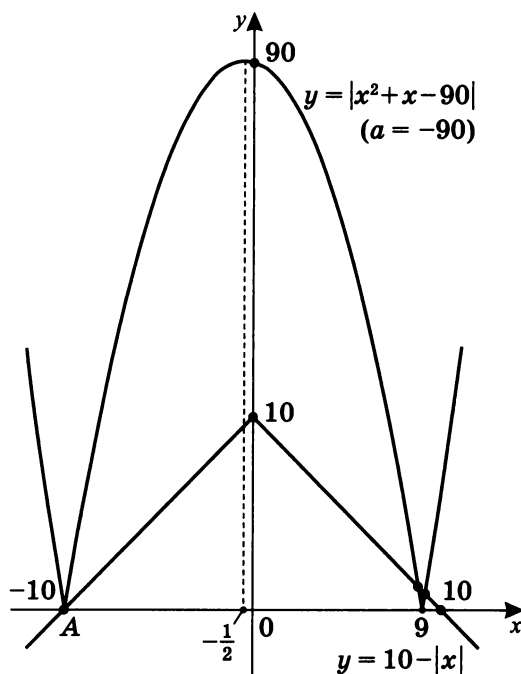


Значит, при $a = -10$ существуют четыре корня (см. график выше).

Вывод: при $-10 \leq a < -9$ уравнение

$|x^2 + x + a| + |x| = 10$ имеет только четыре корня.

- в) Рассмотрим случай, при котором точка перегиба графика $y = |x^2 + x + a|$ совпадает с точкой пересечения графиком $y = 10 - |x|$ оси абсцисс — $A(-10; 0)$.



$$f(-10) = |x^2 + x + a| = 0,$$

$$\text{т. е. } |100 - 10 + a| = 0;$$

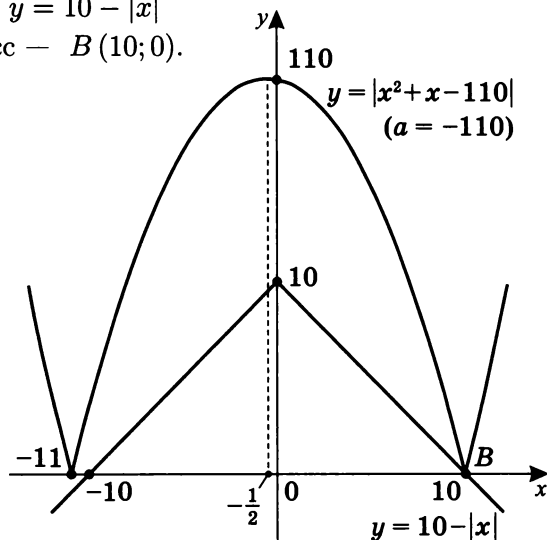
$$a = -90.$$

$$\text{Тогда при } |x^2 + x - 90| = 0 \quad \begin{cases} x = 9 \\ x = -10 \end{cases}.$$

Значит, при $a = -90$ существуют три корня.

Таким образом, при $-90 < a < -9$ существуют четыре корня.

- г) Рассмотрим случай, при котором точка перегиба графика $y = |x^2 + x + a|$ совпадает с точкой пересечения графиком $y = 10 - |x|$ осей абсцисс — $B(10; 0)$.



$$f(10) = |10^2 + 10 + a| = 0;$$

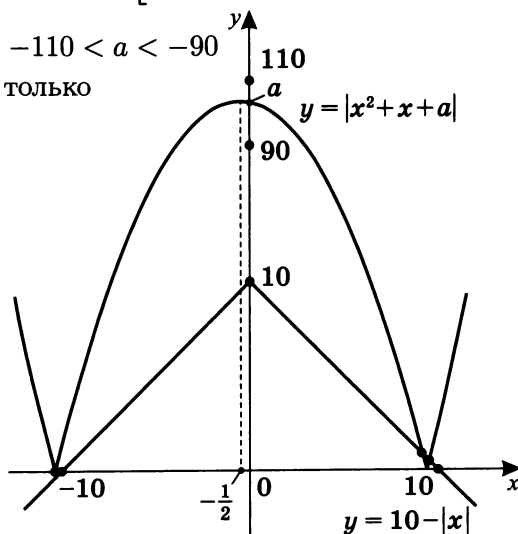
$a = -110$ — существует один корень, так как если

$$|x^2 + x - 110| = 0, \text{ то } \begin{cases} x = -11 \\ x = 10 \end{cases}.$$

Значит, при $-110 < a < -90$

существуют только

два корня.



е) Рассмотрим случай, при котором абсциссы точек перегиба $y = |x^2 + x + a|$ находятся вне отрезка $[-10; 10]$. Очевидно, при таком условии точек пересечения графиков $y = |x^2 + x + a|$ и $y = 10 - |x|$ нет.

Значит, при $a < -110$ корней нет.

Ответ: уравнение $|x^2 + x + a| + |x| = 10$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a > 10$ — корней нет.
2. При $a = 10$ — один корень.
3. При $-9 < a < 10$ — два корня.
4. При $a = -9$ — три корня.
5. При $-90 < a < -9$ — четыре корня.
6. При $a = -90$ — три корня.
7. При $-110 < a < -90$ — два корня.
8. При $a = -110$ — один корень.
9. При $a < -110$ — корней нет.

Примечание. Разумеется, в чистом виде такие задачи на экзаменах не предлагаются. Но отдельные вопросы по данному уравнению вполне возможны. Например:

1. При каких значениях параметра a уравнение $|x^2 + x + a| + |x| = 10$ имеет единственный корень?
2. При каких значениях параметра a уравнение $|x^2 + x + a| + |x| = 10$ имеет два корня?
3. При каких значениях параметра a уравнение $|x^2 + x + a| + |x| = 10$ имеет три корня?
4. При каких значениях параметра a уравнение $|x^2 + x + a| + |x| = 10$ имеет четыре корня?

Домашняя творческая работа-исследование

Сколько корней имеет уравнение $|x + a^2| = |a + x^2|$ в зависимости от значения параметра a ?

Самостоятельная работа 9

1. Найдите все значения a , при каждом из которых график функции $f(x) = x^2 - 3x + 2 - |x^2 - 5x + 4| - a$ пересекает ось абсцисс менее чем в трех различных точках.
2. Определите графически, сколько корней имеет уравнение в зависимости от значения параметра a :
 $(5 - |x|)(x + 1) = a$.
3. При каких значениях параметра a уравнение $|x^2 - x + a| + |x| = 9$ имеет:
а) нечетное число корней;
б) четное число корней?
4. Сколько корней имеет уравнение $a|x - 3|(x + 2) = 5$ в зависимости от неотрицательного значения параметра a ?
5. Сколько корней имеет уравнение в зависимости от значения параметра a : $\left| \frac{5}{x-1} - 3 \right| = ax - (a + 2)$?
6. При каких значениях параметра a уравнение $|x + a^2| = |x^2 - a|$ имеет ровно три корня?

Практикум 12

1. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x + a \\ (x-1)^2 + (y+3)^2 = 2^2 \end{cases}$$

в зависимости от параметра a ?

2. Сколько решений существует у системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ 2|x| + |y| = 4 \end{cases} \quad \text{в зависимости от положительного значения параметра } a?$$

3. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 6x + y^2 - 6y + 17 = 0 \\ x^2 - 2a(x+y) + y^2 + a^2 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

4. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} 1 - |x-1| = 5|y| \\ 25y^2 + 4a = 2x - x^2 - 1 \end{cases} \quad \text{имеет четыре решения?}$$

Примечание. Отметим, что большое количество примеров на графическое решение уравнений с параметром есть в книге Шахмейстер А.Х. Задачи с параметрами на экзаменах. СПб.; М., 2011, 2015. С. 19, 20, 116, 135, 165, 168, 189, 191, 192, 193, 194, 196, 197, 201, 202, 213, 215, 216, 223, 224, 228, 229, 231, 232, 233, 235, 238, 245.

Решение практикума 12

1. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x + a \\ (x-1)^2 + (y+3)^2 = 2^2 \end{cases}$$

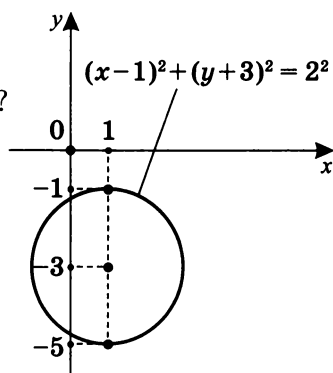
в зависимости от параметра a ?

Построим график уравнения

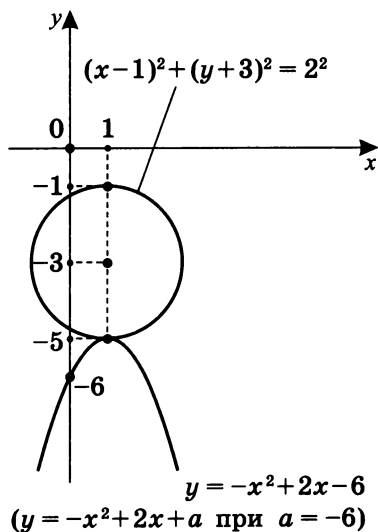
$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 2^2$$

это окружность с центром

в точке $(1; -3)$ и радиусом 2.

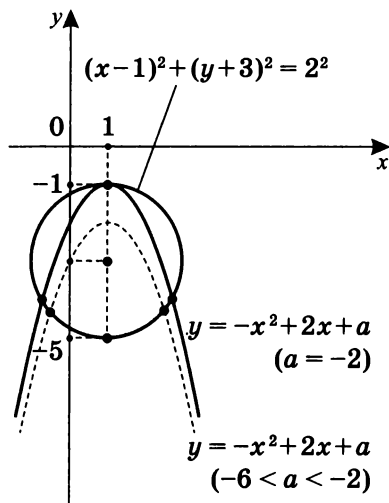


- а) Так как $y = -x^2 + 2x + a$ — парабола, ветви которой направлены вниз, и ее уравнение представимо в виде $y = -(x-1)^2 + a + 1$, то при $a + 1 = -5$ ($a = -6$) существует единственная точка пересечения окружности и параболы. Эта точка имеет координаты $(1; -5)$, и это единственное решение.



- б) При $a + 1 = -1$
 ($a = -2$) существуют
 3 корня, т. е. есть
 три решения.

- в) При $-6 < a < -2$
 существуют 2 корня
 (парабола показана
 пунктиром),
 т. е. есть два
 решения.



- г) Найдем случай касания параболы окружности в двух точках.

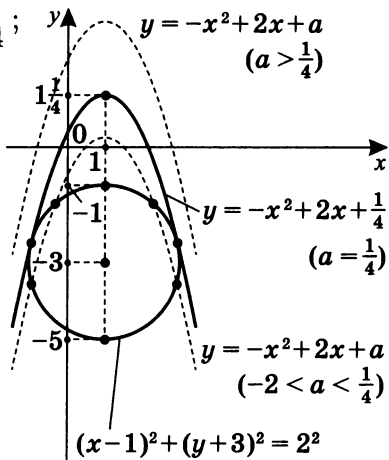
$$\begin{cases} y = -(x-1)^2 + a + 1 \\ (x-1)^2 + (y+3)^2 = 4 \end{cases};$$

$$a + 1 - y + (y + 3)^2 = 4;$$

$$y^2 + 5y + a + 6 = 0;$$

$$D = 25 - 4a - 24 = 0;$$

$$a = \frac{1}{4}.$$



Значит, при $a = \frac{1}{4}$
 существуют 2 точки
 касания, т. е. два решения.

При $a > \frac{1}{4}$, очевидно, точек пересечения параболы с окружностью нет (этот случай обозначен верхним пунктиром).

- д) При $-2 < a < \frac{1}{4}$ существуют 4 точки пересечения (нижняя пунктирная парабола), т. е. есть четыре решения.

Ответ: система уравнений $\begin{cases} y = -x^2 + 2x + a \\ (x-1)^2 + (y+3)^2 = 2^2 \end{cases}$

в зависимости от параметра a имеет:

1. При $a > \frac{1}{4}$ — решений нет.
2. При $a = \frac{1}{4}$ — три решения.
3. При $-2 < a < \frac{1}{4}$ — четыре решения.
4. При $a = -2$ — три решения.
5. При $-6 < a < -2$ — два решения.
6. При $a = -6$ — одно решение.
7. При $a < -6$ — решений нет.

Примечание. Очевидно, что не любой график уравнения является графиком функции (например, уравнение окружности, уравнение параболы $y^2 = x$ и т. д.). Более подробно см.: Шахмейстер А. Х. Множества. Функции. Последовательности. СПб.; М., 2014. С. 85–92.

2. Сколько решений существует у системы уравнений

$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ 2|x| + |y| = 4 \end{cases}$ в зависимости от положительного значения параметра a ?

Построим график уравнения

$$2|x| + |y| = 4.$$

I случай $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

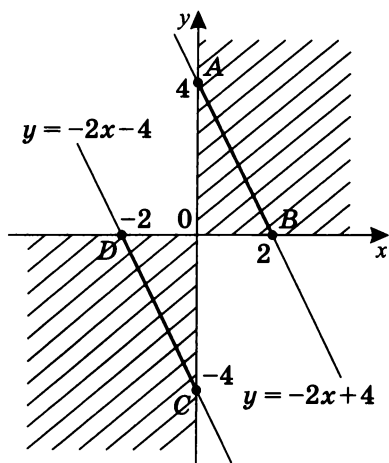
x	y
0	4
2	0

 $A(0; 4);$
 $B(2; 0)$

II случай $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \\ -2x - y = 4 \end{cases}$

x	y
0	-4
-2	0

 $C(0; -4);$
 $D(-2; 0)$



III случай $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$

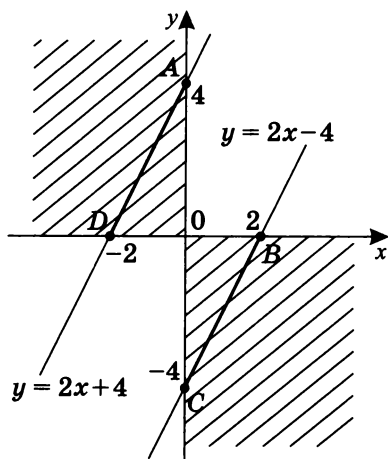
x	y
0	-4
2	0

$C(0; -4);$
 $B(2; 0)$

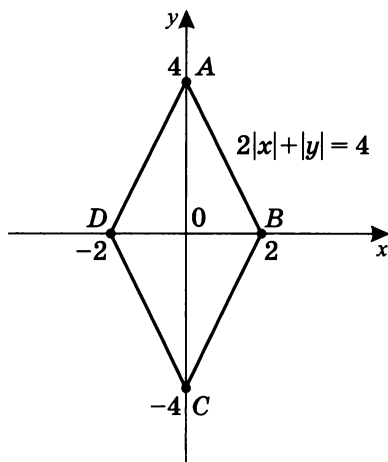
IV случай $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$

x	y
0	4
-2	0

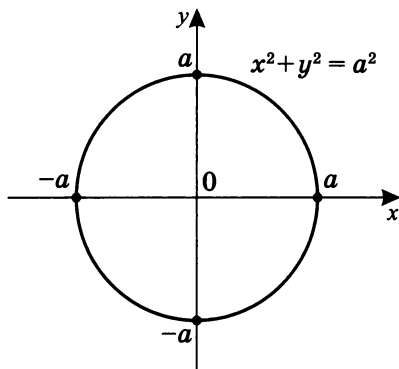
$A(0; 4)$
 $D(-2; 0)$



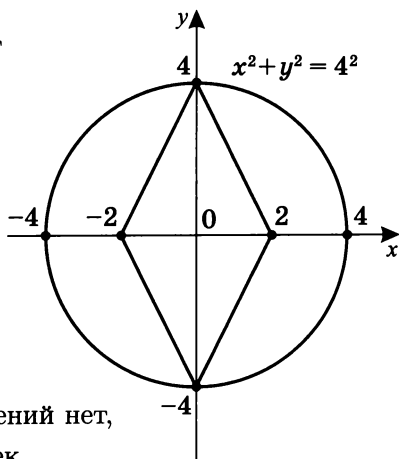
Собирая, получим график уравнения $2|x| + |y| = 4$:



Рассмотрим график уравнения $x^2 + y^2 = a^2$. Так как по условию $a > 0$, то это окружность с центром в начале координат и радиусом a .

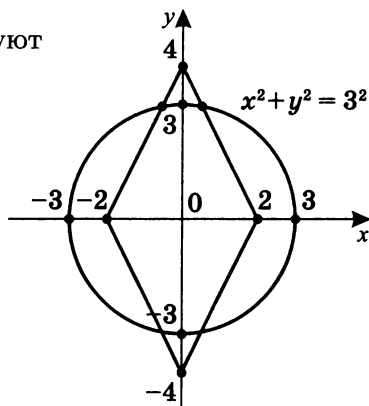


- а) При $a = 4$ существуют 2 решения, так как имеются две общие точки:

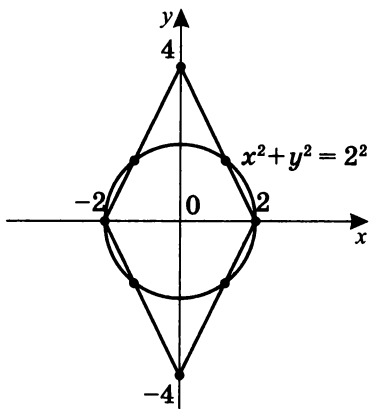


Значит при $a > 4$ решений нет, так как нет общих точек.

- б) При $2 < a < 4$ существуют 4 решения, так как имеются четыре общие точки.



- в) При $a = 2$ существуют 6 решений, так как имеются шесть общих точек.



- г) Рассмотрим случай касания окружностью сторон ромба.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD;$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = 16.$$

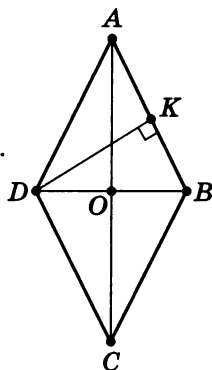
$$2r_{\text{в}} = DK, \text{ но } S_{ABCD} = DK \cdot AB.$$

$$2r_{\text{в}} = \frac{S_{ABCD}}{AB}; \quad r_{\text{в}} = \frac{16}{2AB} = \frac{8}{AB}.$$

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2};$$

$$AB = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}.$$

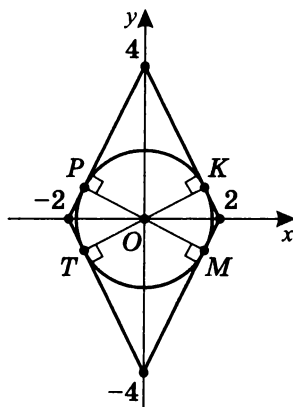
$$\text{Значит } r_{\text{в}} = \frac{8}{2\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}\sqrt{5}.$$



Таким образом, при

$$a = r_{\text{в}} = \frac{4}{5}\sqrt{5}$$

существуют 4 решения,
так как имеются четыре
общие точки.



д) При $\frac{4}{5}\sqrt{5} < a < 2$

существуют 8 решений, так как
имеются восемь общих точек.

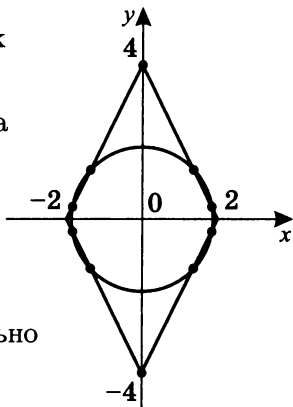
Например, пусть $a = 1,9$, тогда

$$\frac{16}{5} < 1,9^2 < 2^2, \text{ и система}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1,9^2 \\ 2|x| + |y| = 4 \end{cases}$$

имеет восемь решений.

Убедитесь в этом, самостоятельно
аналитически решив систему
уравнений.



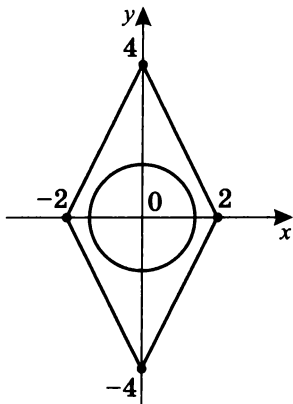
е) При $a < \frac{4}{5}\sqrt{5}$ решений нет,
так как общих точек нет.

Ответ: система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ 2|x| + |y| = 4 \end{cases} \text{ в зависимости}$$

от положительного значения
параметра a имеет:

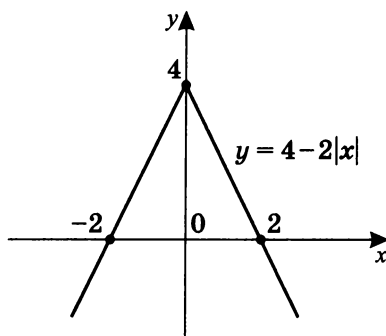
1. При $a > 4$ — решений нет.
2. При $a = 4$ — два решения.



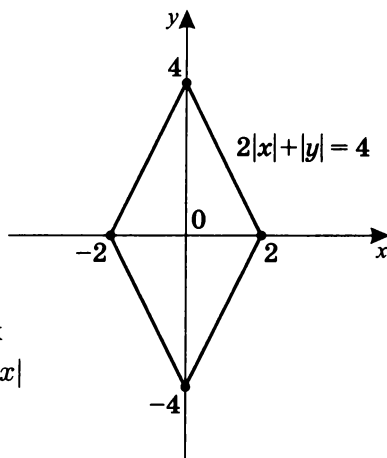
3. При $2 < a < 4$ — четыре решения.
4. При $a = 2$ — шесть решений.
5. При $\frac{4}{5}\sqrt{5} < a < 2$ — восемь решений.
6. При $a = \frac{4}{5}\sqrt{5}$ — четыре решения.
7. При $a < \frac{4}{5}\sqrt{5}$ — решений нет.

Примечание. График уравнения $2|x| + |y| = 4$ можно построить проще, используя преобразование графиков.

- а) Сначала построим график $y = 4 - 2|x|$.



- б) Так как $|y|$ сохраняет график в верхней полуплоскости и симметрично относительно оси абсцисс отражает его в нижнюю полуплоскость, то график $|y| = 4 - 2|x|$ будет выглядеть так:



Очевидно, что график уравнения $|y| = 4 - 2|x|$ не может быть функцией.

3. При каких положительных значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} x^2 - 6x + y^2 - 6y + 17 = 0 \\ x^2 - 2a(x + y) + y^2 + a^2 = 0 \end{cases}$ имеет единственное решение?

а) Так как известно, что графиком уравнения второй степени с двумя переменными в содержательном (не вырожденном) смысле является либо парабола, либо гипербола, либо эллипс (в частном случае, окружность), то попытаемся алгебраически преобразовать уравнения системы, чтобы понять, с какими кривыми мы имеем дело. (В вырожденном случае это пучок прямых, например, $x^2 = y^2$.)

1. $x^2 - 6x + y^2 - 6y + 17$ можно представить в виде $\underline{x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 - 6y + 9 - 9 + 17 = 0}$,
т. е. $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 1$.

Очевидно, в этом случае мы имеем дело с окружностью с центром в точке $O(3; 3)$ радиуса 1.

2. $x^2 - 2a(x + y) + y^2 + a^2 = 0$;
 $x^2 - 2ax - 2ay + y^2 + a^2 = 0$;
 $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2ay + a^2 = a^2$;
 $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$.

Очевидно, что это тоже окружность — с центром в точке $O_1(a; a)$ и радиуса a .

3. Таким образом, исходная система приняла вид:

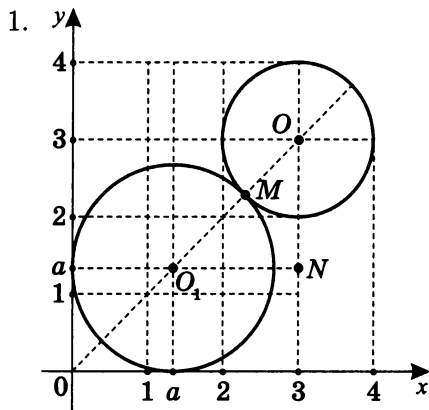
$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 1 \\ (x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2 \end{cases}.$$

Значит, мы имеем дело с двумя окружностями. Тогда единственное решение возможно только в случае касания этих окружностей.

- б) Построим графики уравнений $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$ и $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$.

Отметим, что окружность $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$ при всех a касается оси ординат и оси абсцисс, т. е. центр принадлежит прямой $y = x$.

Для $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$ $O(3; 3)$ также принадлежит прямой $y = x$.



$$\text{Из } \triangle O_1ON \quad O_1N^2 + ON^2 = O_1O^2,$$

$$\text{где } O_1N = 3 - a; \quad ON = 3 - a.$$

Здесь неявно задано условие $a < 3$.

$$O_1O = O_1M + MO = a + 1.$$

Тогда

$$2(3-a)^2 = (a+1)^2;$$

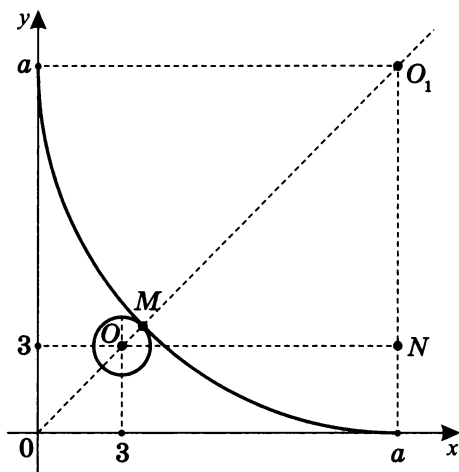
$$18 - 12a + 2a^2 = a^2 + 2a + 1;$$

$$a^2 - 14a + 17 = 0;$$

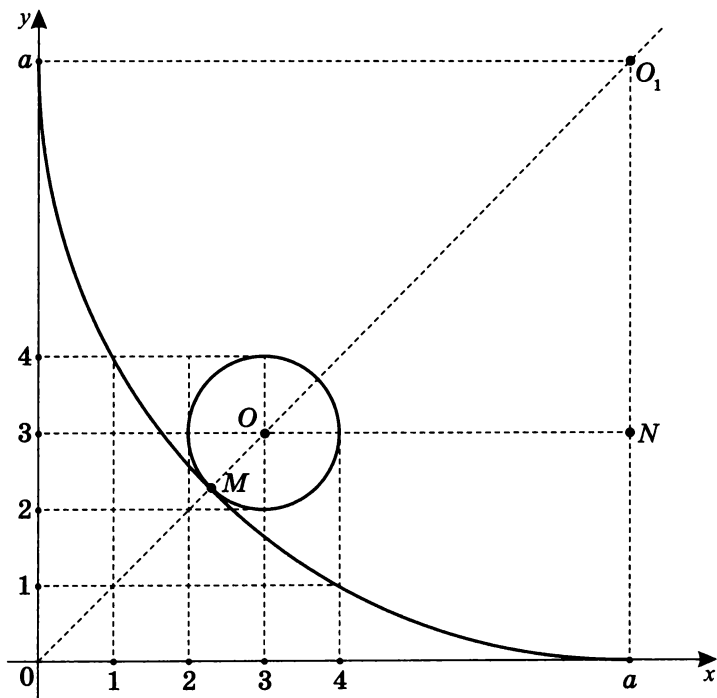
$$a_{1,2} = 7 \pm \sqrt{49 - 17} = 7 \pm 4\sqrt{2}.$$

Очевидно, что $a = 7 - 4\sqrt{2}$ — иллюстрация случая *внешнего касания*, который изображен на рисунке выше.

2. Рассмотрим случай $a > 3$. При $a = 7 + 4\sqrt{2}$ также существует внешнее касание:



3. Возможны случаи внутреннего касания.



Из $\triangle OO_1N$ (здесь неявно задано условие $a > 3$):

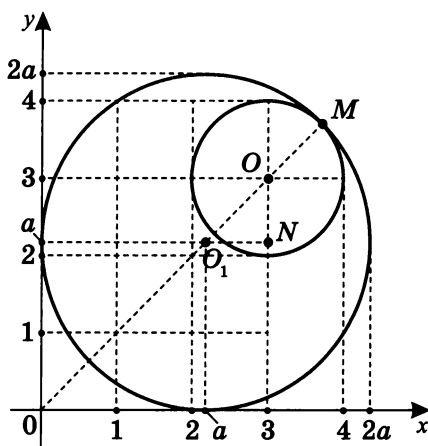
$$ON = a - 3; \quad O_1N = a - 3; \quad OO_1 = a - 1;$$

$$ON^2 + O_1N^2 = OO_1^2; \quad 2(a - 3)^2 = (a - 1)^2;$$

$$a^2 - 10a + 17 = 0; \quad a_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{2}.$$

При $a = 5 + 2\sqrt{2}$ см. рис. на с. 287, п. 3.

4. Рассмотрим случай $a < 3$. При $a = 5 - 2\sqrt{2}$ см. данный рисунок:



Ответ: система уравнений
$$\begin{cases} x^2 - 6x + y^2 - 6y + 17 = 0 \\ x^2 - 2a(x + y) + y^2 + a^2 = 0 \end{cases}$$

в зависимости от значения параметра a :

при $a = 7 \pm 4\sqrt{2}$ имеет единственное решение, связанное с внешним касанием данных окружностей;

при $a = 5 \pm 2\sqrt{2}$ имеет единственное решение, связанное с внутренним касанием данных окружностей.

Примечание 1.

При $a \in (7 - 4\sqrt{2}; 5 - 2\sqrt{2}) \cup (5 + 2\sqrt{2}; 7 + 4\sqrt{2})$ существует больше одного решения.

При $a \in (-\infty; 7 - 4\sqrt{2}) \cup (5 - 2\sqrt{2}; 5 + 2\sqrt{2}) \cup (7 + 4\sqrt{2}; \infty)$ решений нет (проверьте это сами).

Примечание 2. Возможно и иное решение.

Пусть $O_1(x_1; y_1)$ — центр окружности радиуса R_1 ;
 $O_2(x_2; y_2)$ — центр окружности радиуса R_2 .

Так как единственное решение возможно только если расстояние между центрами окружностей равно либо сумме их радиусов, либо их разности, то в общем виде

$$\begin{cases} (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (R_1 + R_2)^2 \\ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (R_1 - R_2)^2 \end{cases}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} (x - 3 - x + 1)^2 + (y - 3 - x + a)^2 = (a + 1)^2 \\ (x - 3 - x + 1)^2 + (y - 3 - x + a)^2 = (a - 1)^2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2(a - 3)^2 = (a + 1)^2 \\ 2(a - 3)^2 = (a - 1)^2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a^2 - 14a + 17 = 0 \\ a^2 - 10a + 17 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a = 7 + 4\sqrt{2} \\ a = 7 - 4\sqrt{2} \\ a = 5 + 2\sqrt{2} \\ a = 5 - 2\sqrt{2} \end{cases};$$

$$\{7 \pm 4\sqrt{2}; 5 \pm 2\sqrt{2}\}.$$

Решение домашней творческой работы-исследования

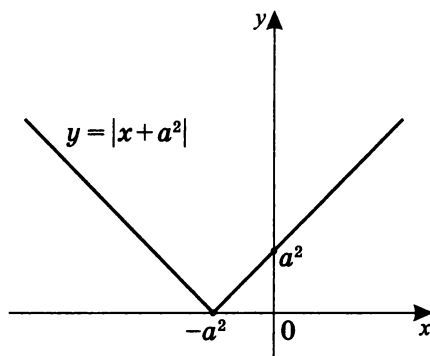
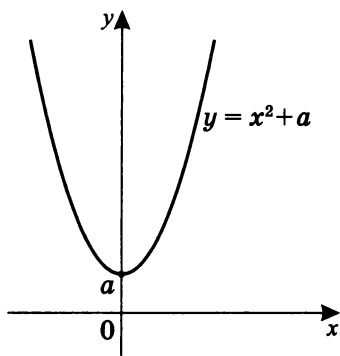
Рассмотрим графоаналитический способ решения.

Положим $f(x) = |x + a^2|$; $g(x) = |x^2 + a|$.

Тогда необходимо графически решить систему уравнений

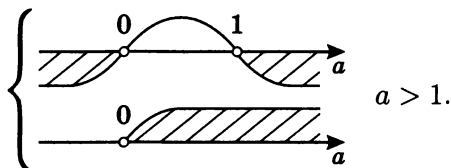
$$\begin{cases} y = |x + a^2| \\ y = |x^2 + a| \end{cases}.$$

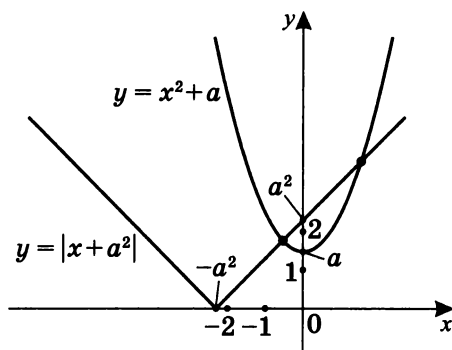
- I. При $a > 0$ $|x^2 + a| = x^2 + a > 0$ (парабола находится в верхней полуплоскости), а график $y = |x + a^2|$ касается только левой части оси абсцисс.



1. Пусть точка пересечения графика $y = |x + a^2|$ с осью ординат *выше* соответствующей точки пересечения графика $y = x^2 + a$ с осью ординат.

Значит, $0 < a < a^2$; $\begin{cases} a(1 - a) < 0 \\ a > 0 \end{cases}.$





Очевидно, что при этих значениях a существуют два корня, так как имеются две общие точки.

Эту гипотезу можно иллюстрировать. Рассмотрим удобное значение $a = 2$ ($a > 1$). Тогда получается уравнение:

$$|x + 4| = x^2 + 2; \quad \begin{cases} x^2 + 2 = x + 4 \\ x^2 + 2 = -x - 4 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 & x = 2; x = -1 \\ x^2 + x + 6 = 0 & D < 0 \end{cases}$$

Гипотеза подтвердилась. Попробуйте сами доказать эту гипотезу в общем виде

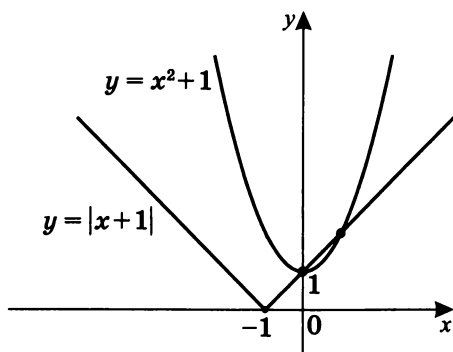
2. Пусть точка пересечения графика $y = |x + a^2|$ с осью ординат совпадает с точкой пересечения оси ординат графиком параболы $y = x^2 + a$.

$$\text{Тогда } \begin{cases} a^2 = a \\ a > 0 \end{cases}; \quad a = 1.$$

Рассмотрим наличие и количество корней при $a = 1$.

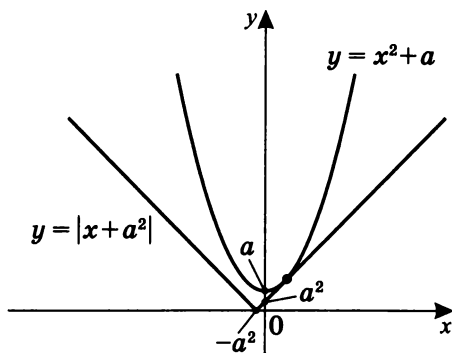
$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = x + 1 \end{cases}; \quad x^2 + 1 = x + 1; \quad x^2 = x; \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases},$$

значит и при $a = 1$ существуют два корня ($x = 0$ и $x = 1$).



3. Рассмотрим случай касания правой ветвью графика $y = |x + a^2|$ параболы $y = |x^2 + a|$ — в данном случае $y = x^2 + a$ ($a > 0$).

Тогда точка пересечения графика $y = |x + a^2|$ с осью ординат *ниже* точки пересечения графика $y = x^2 + a$ с осью ординат. Более подробно остальные случаи рассмотрим в следующем пункте.



По сути, нам нужно найти точку касания прямой $y = x + a^2$ с графиком уравнения параболы $y = x^2 + a$.

В данном случае прямая $y = x + a^2$ имеет ровно одну общую точку с графиком параболы $y = x^2 + a$, тогда $x + a^2 = x^2 + a$; $x^2 - x + a - a^2 = 0$;

$D = 1 - 4a + 4a^2$. $D = 0$ при $a = \frac{1}{2}$ ($x_1 = x_2$),
т. е. при $a = \frac{1}{2}$ существует один корень.

Это возможно только для графиков уравнений

$$y = x^2 + \frac{1}{2} \text{ и } y = x + \frac{1}{4}.$$

4. Теперь рассмотрим остальные случаи, при которых точка пересечения графика $y = |x + a^2|$ с осью ординат *ниже* точки пересечения графика $y = |x^2 + a|$ с осью ординат,

т. е. $\begin{cases} 0 < a^2 < a \\ a \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} a(a-1) < 0 \\ a > 0 \\ a \neq \frac{1}{2} \end{cases} ; \quad 0 < a < \frac{1}{2} \text{ или } \frac{1}{2} < a < 1.$$

С другой стороны, рассмотрим случаи, при которых $x^2 + a < x + a^2$, т. е. необходимо выяснить, при каких a существуют точки графика $y = x^2 + a$ (параболы) *ниже* соответствующих точек графика $y = x + a^2$ (прямой) (т. е. имеющие одну и ту же абсциссу). См. чертеж на с. 295, 296, 297.

$$x^2 - x + a - a^2 < 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a + 4a^2}}{2} = \frac{1 \pm (2a - 1)}{2}; \quad \begin{cases} x = a \\ x = 1 - a \end{cases}.$$

При $x_1 \neq x_2$, следовательно,

$$\begin{cases} \text{если } 1 - a > a, \text{ то } a < x < 1 - a, \text{ при } 0 < a < \frac{1}{2}; \\ \text{если } 1 - a < a, \text{ то } 1 - a < x < a, \text{ при } \frac{1}{2} < a < 1. \end{cases}$$

5. Выясним, при каких значениях

$a \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right)$ существуют три корня.

Это возможно только если $x^2 + a = |x + a^2|$ имеет три корня, что выполняется, если график $y = x^2 + a$ касается левой ветви графика $y = |x + a^2|$ и пересекается с его правой ветвью (см. график на с. 295).

Следовательно,
$$\begin{cases} x^2 + a = x + a^2 \\ x^2 + a = -(x + a^2) \end{cases};$$

$$\begin{cases} x^2 - x + a - a^2 = 0 \\ x^2 + x + a + a^2 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = a \\ x = 1 - a \quad \left(a \neq \frac{1}{2}\right) \\ D = 1 - 4a - 4a^2 = 0 \end{cases};$$

$$4a^2 + 4a - 1 = 0;$$

$$\begin{cases} a = \frac{-2+2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} > 0, \text{ и } \frac{\sqrt{2}-1}{2} \in \left(0; \frac{1}{2}\right); \\ a = \frac{-2-2\sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{2}+1}{2} < 0 - \text{ не подходит } (a > 0). \end{cases}$$

$$\text{Значит при } a = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \quad x_1 = x_2 = \frac{-1 \pm 0}{2} = -\frac{1}{2}.$$

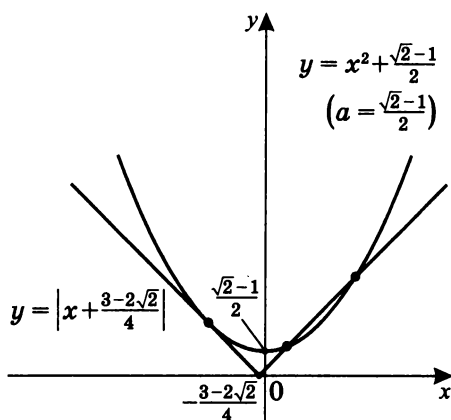
Таким образом, при $D = 0 \quad x = -\frac{1}{2}$,

и при $a = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ существуют три корня:

$$\begin{cases} x = a = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \\ x = 1 - a = 1 - \frac{\sqrt{2}-1}{2} = \frac{3-\sqrt{2}}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Так как $a = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$, то получается, что графики уравнений $y = x^2 + \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ и $y = x + \frac{3-2\sqrt{2}}{4}$

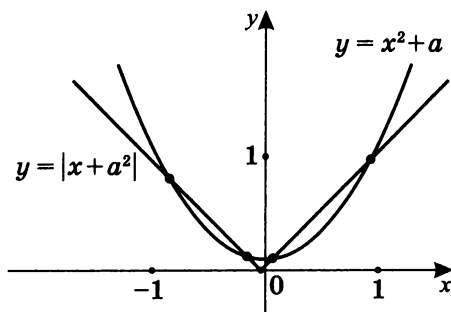
$\left(\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2 = \frac{3-2\sqrt{2}}{4}\right)$ имеют три общих точки.



6. При $0 < a < \frac{\sqrt{2}-1}{2}$, похоже, существуют четыре корня, так как, возможно, график $y = x^2$ опускается вниз на a быстрее, чем график $y = |x|$ сдвигается влево на a^2 (так как $a^2 < a$ на $\left(0; \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$).

Можно привести и другие обоснования.

При $0 < a < \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ график $y = x^2 + a$ пересекает левую ветвь графика $y = |x + a^2|$ в двух точках. Далее при $0 < a < \frac{\sqrt{2}-1}{2} < \frac{1}{2}$ правая ветвь $y = |x + a^2|$ пересекает график $y = x^2 + a$ также в двух точках.



Проверим эту гипотезу.

$$\frac{\sqrt{2}-1}{2} \approx \frac{0,4}{2} = 0,2 \text{ (с недостатком), тогда}$$

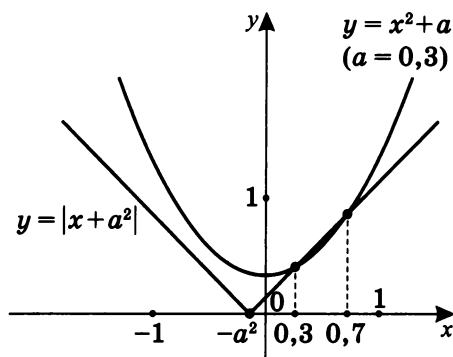
$$|x + 0,04| = x^2 + 0,2; \quad \begin{cases} x^2 + 0,2 = x + 0,04 \\ x^2 + 0,2 = -x - 0,04 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x^2 - x + 0,16 = 0 \\ x^2 + x + 0,24 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} D = 1 - 0,64 = 0,36 > 0 \\ D = 1 - 0,96 = 0,04 > 0 \end{cases}.$$

Итак, действительно в этом случае существуют четыре корня — $\{-0,6; -0,4; 0,3; 0,8\}$.

7. При $\frac{\sqrt{2}-1}{2} < a < \frac{1}{2}$, похоже, существуют два корня.

Проверим эту гипотезу.



$$\frac{\sqrt{2}-1}{2} < 0,3 < \frac{1}{2}, \text{ т. е. } |x + 0,09| = x^2 + 0,3;$$

$$\begin{cases} x^2 + 0,3 = x + 0,09 \\ x^2 + 0,3 = -x - 0,09 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 - x + 0,21 = 0 \\ x^2 + x + 0,39 = 0 \end{cases}.$$

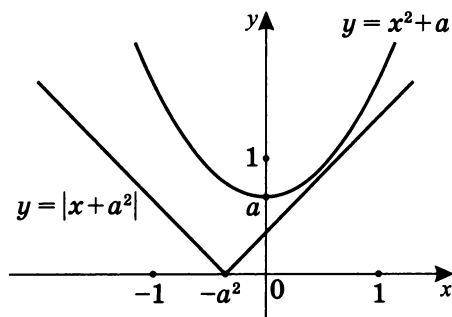
$$\begin{cases} D = 1 - 0,84 > 0 - 2 \text{ корня } (x = 0,3, x = 0,7) \\ D = 1 - 1,56 < 0 \quad \emptyset \quad \text{(корней нет)} \end{cases}.$$

Действительно, существуют только два корня (см. иллюстрацию на чертеже выше при $a = 0,3$).

8. Рассмотрим случай $\frac{1}{2} < a < 1$.

Так как, похоже, график параболы $y = x^2$ сдвигается вверх на a ($a > 0$) быстрее, чем график прямой $y = |x|$ сдвигается влево на a^2 , а при $a = \frac{1}{2}$ график $y = x^2 + \frac{1}{2}$ касается прямой $y = x + \frac{1}{4}$, то общих точек графиков в этом случае нет, а значит, и корней нет.

Проверим эту гипотезу.



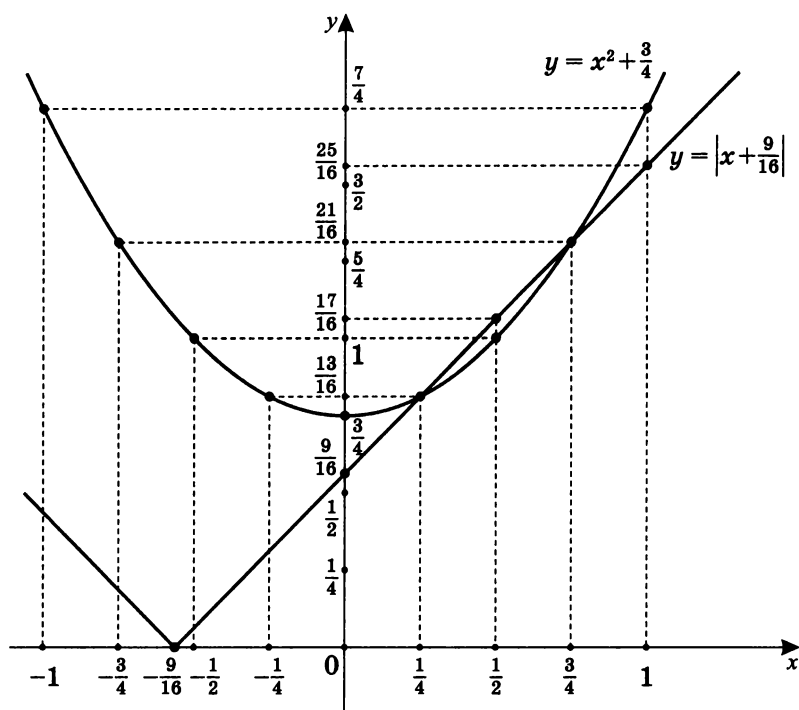
Пусть $a = \frac{3}{4}$, где $\frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1$, тогда $\left|x + \frac{9}{16}\right| = x^2 + \frac{3}{4}$;

$$\begin{cases} x^2 + \frac{3}{4} = x + \frac{9}{16} \\ x^2 + \frac{3}{4} = -x - \frac{9}{16} \end{cases}; \quad \begin{cases} 16x^2 - 16x + 3 = 0 \\ 16x^2 + 16x + 21 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} D = 8^2 - 3 \cdot 16 > 0 - \text{два корня: } \left(x = \frac{1}{4}, x = \frac{3}{4}\right) \\ D = 8^2 - 21 \cdot 16 < 0 - \emptyset \text{ (корней нет)} \end{cases}$$

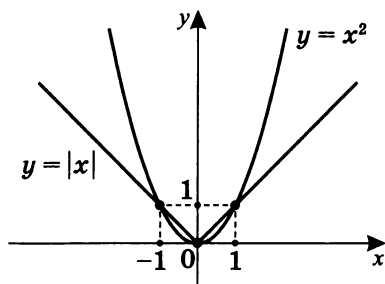
Таким образом, гипотеза и картинка ложны, и существуют два корня.

Построим график $y = \left|x + \frac{9}{16}\right|$ и $y = x^2 + \frac{3}{4}$ в одной системе координат.



Примечание. Соображение о том, что график $y = x^2$ сдвигается вверх на a быстрее, чем график $y = x$ влево на a^2 , оказалось в данном случае неверным.

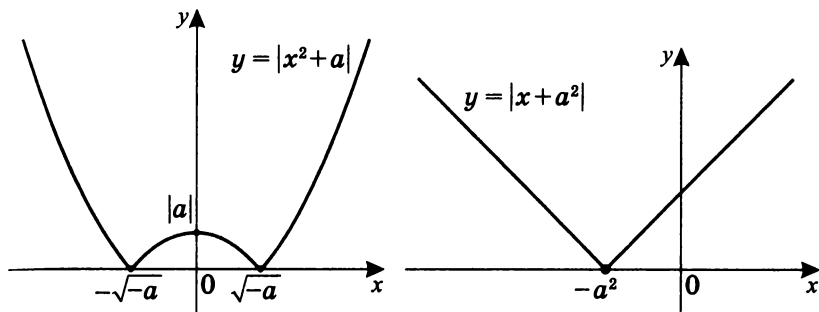
II. Пусть $a = 0$. Тогда $\begin{cases} y = x^2 \\ y = |x| \end{cases}$.



Значит, существуют три корня, так как имеются три общие точки.

III. Пусть $a < 0$. Тогда $|a| = -a$.

В этом случае графики функций имеют следующий вид:



1. Прежде всего, рассмотрим случай, при котором абсцисса точки пересечения графиков $y = |x^2 + a|$ и $y = |x + a^2|$ с осью абсцисс совпадают.

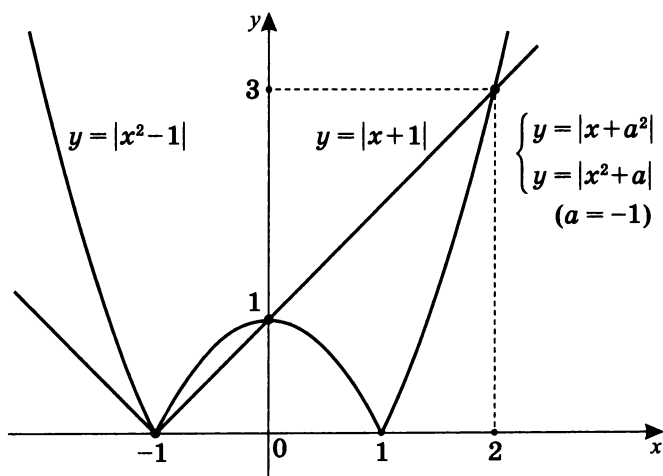
$$-a^2 = -\sqrt{-a}; \quad a^2 = \sqrt{-a}; \quad a^4 = -a;$$

$$a(a^3 + 1) = 0; \quad a(a + 1)(a^2 - a + 1) = 0.$$

$$a \in (-\infty; 0), \text{ т. е. } a \neq 0,$$

$$a^2 - a + 1 \neq 0, \text{ так как } D < 0.$$

Остается лишь $a = -1$, и функции имеют вид $y = |x^2 - 1|$ и $y = |x + 1|$.

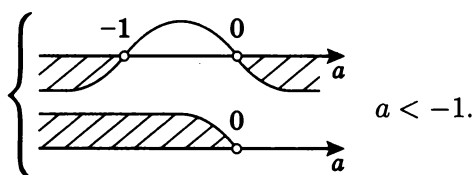


Отметим, что точки пересечения графиков $y = |x + a^2|$ и $y = |x^2 + a|$ с осью ординат совпадают.

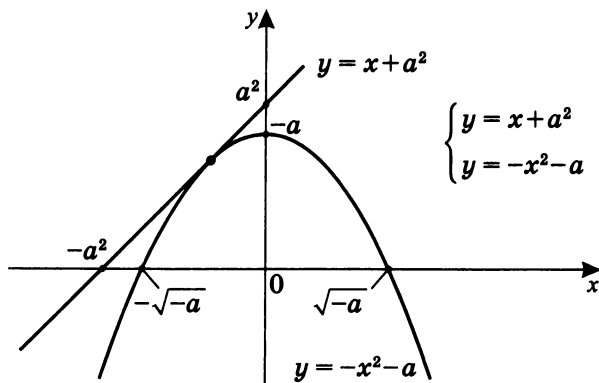
Очевидно, что в этом случае уравнение имеет три корня: $x = -1$, $x = 0$ и $x = 2$.

2. Рассмотрим случай, когда ордината точки пересечения графика $y = |x + a^2|$ с осью ординат *выше* ординаты точки пересечения графика $y = |x^2 + a|$ с осью ординат. Это связано с тем, что только правая ветвь графика $y = |x + a^2|$ пересекает ось ординат. Значит, в этом случае возможно рассматривать только график прямой $y = x + a^2$.

Тогда $a^2 > -a$, т.е. $\begin{cases} a(a+1) > 0; \\ a < 0 \end{cases}$;



Для того чтобы найти другие возможные случаи существования трех решений, определим точку касания графиков $y = x + a^2$ и $y = -x^2 - a$ ($-a > 0$).



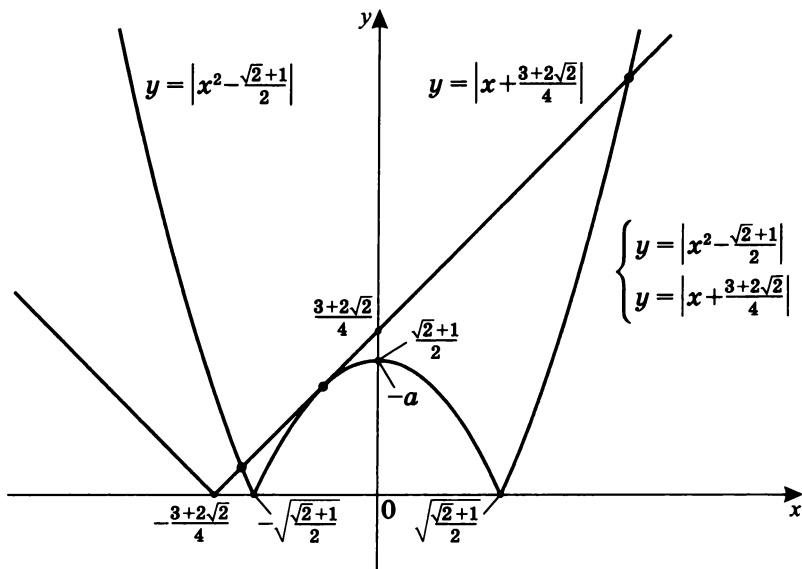
$$|x^2 + a| = \begin{cases} x^2 + a, & x^2 > -a \text{ (любой } x \text{ при } a > 0) \\ -x^2 - a, & x^2 < -a \text{ (возможно при } a < 0) \end{cases}$$

$$\text{Итак, } x + a^2 = -x^2 - a; \quad x^2 + x + a^2 + a = 0;$$

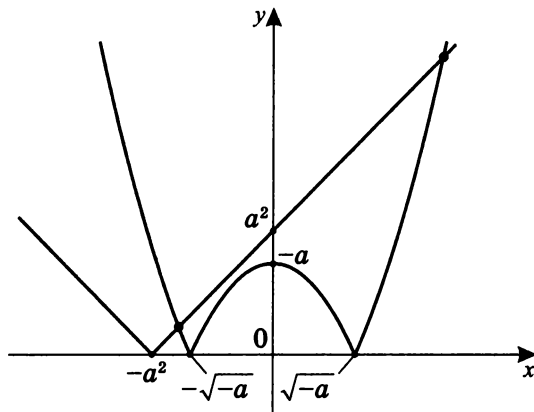
$$D = 1 - 4a^2 - 4a; \quad D = 0, \text{ тогда}$$

$$\begin{cases} a = \frac{-1-\sqrt{2}}{2} < -1 < 0 \\ a = \frac{-1+\sqrt{2}}{2} > 0 \text{ (не подходит, так как } a < 0) \end{cases}$$

Значит для графиков $y = |x + a^2|$ и $y = |x^2 + a|$ при $a = -\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ существуют три точки пересечения, а для уравнения $|x + a^2| = |x^2 + a|$ — три корня.



3. При $a < -\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ похоже, что будут только две точки пересечения графиков $y = |x + a^2|$ и $y = |x^2 + a|$.



Соответственно, у уравнения $|x + a^2| = |x^2 + a|$ будет два корня.

В этом случае $-a^2 < -\sqrt{-a}$ (см. чертеж), т. е. точки касания графиком $y = |x + a^2|$ оси абсцисс левее точки касания графиком $y = |x^2 + a|$ оси абсцисс.

Одновременно с этим точки пересечения графиком $y = |x + a^2|$ оси ординат выше точки пересечения графиком $y = |x^2 + a|$ оси ординат.

$$\text{Тогда } \begin{cases} a^2 > -a \\ a^2 > \sqrt{-a} \end{cases}; \quad \begin{cases} a(a+1) > 0 \\ a(a+1)(a^2 - a + 1) > 0 \end{cases},$$

т. е. $a(a+1) > 0$, значит $a < -1$ ($a < 0$).

Проверим гипотезу существования двух корней.

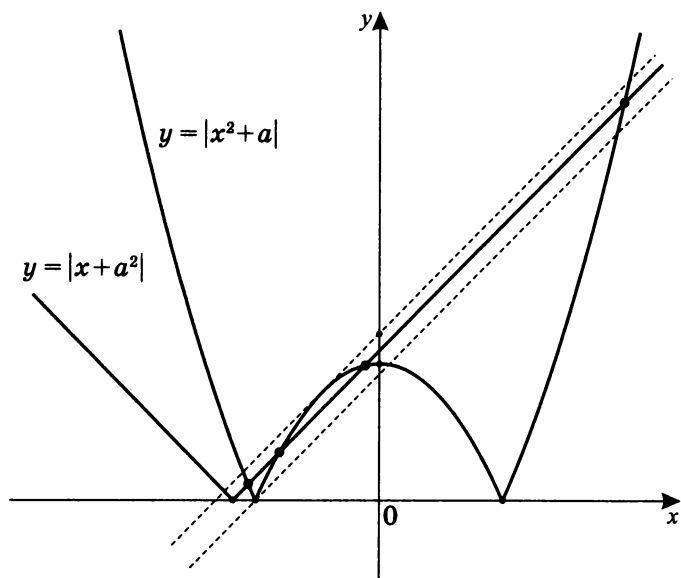
Выберем $a = -2 < -\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. Тогда

$$|x + 4| = |x^2 - 2|; \quad \left| \frac{x^2 - 2}{x + 4} \right| = 1; \quad \begin{cases} \frac{x^2 - 2}{x + 4} = 1 \\ \frac{x^2 - 2}{x + 4} = -1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 = 0, x = 3, x = -2 \\ x^2 + x + 2 = 0, D < 0 \end{cases}.$$

Гипотеза подтвердилась.

4. Рассмотрим случай $-\frac{1+\sqrt{2}}{2} < a < -1$ (случаи $a = -\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ и $a = -1$ мы уже рассматривали).

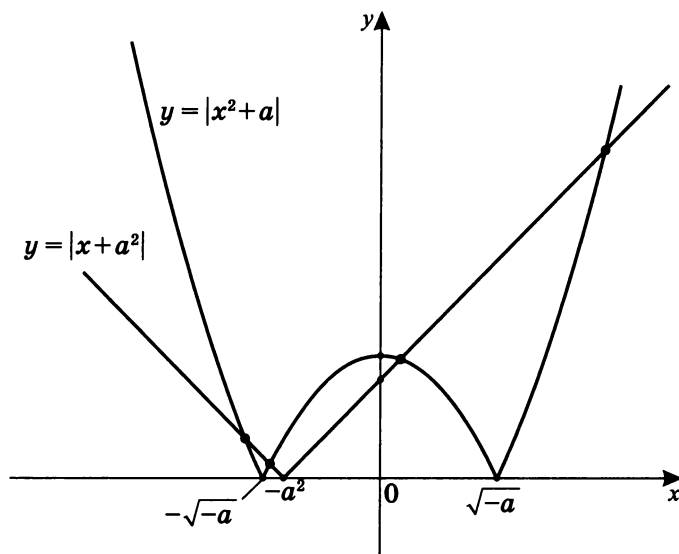


Возможно, что в этом случае существуют четыре точки пересечения графиков $y = |x + a^2|$ и $y = |x^2 + a|$.

Для проверки этой гипотезы достаточно рассмотреть, $a = -1,2$ $\left(-\frac{1+\sqrt{2}}{2} < -1,2 < -1\right)$ и, решив уравнение $|x + 1,44| = |x^2 - 1,2|$, убедиться в наличии четырех корней ($x = -1,2$, $x = -0,51$, $x = -0,49$, $x = 2,2$).

Отметим, что при этом точки касания графиком $y = |x + a^2|$ оси абсцисс левее точки касания графиком $y = |x^2 + a|$ оси абсцисс, а точка пересечения оси ординат графиком $y = |x + a^2|$ выше точки пересечения оси ординат графиком $y = |x^2 + a|$.

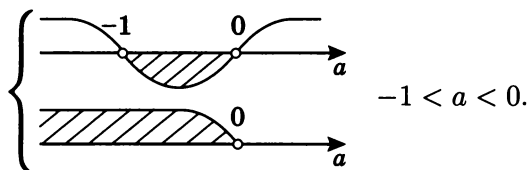
5. Рассмотрим случай, когда точка пересечения оси ординат графиком $y = |x + a^2|$ ниже соответствующей точки пересечения оси ординат графиком $y = |x^2 + a|$, при этом точка пересечения графика $y = |x + a^2|$ с осью абсцисс находится правее точки пересечения графика $y = |x^2 + a|$ с осью абсцисс:



$$-a^2 > -\sqrt{-a}; \quad a^2 < \sqrt{-a}; \quad a^4 < -a;$$

$$a(a^3 + 1) < 0; \quad a(a + 1)(a^2 - a + 1) < 0.$$

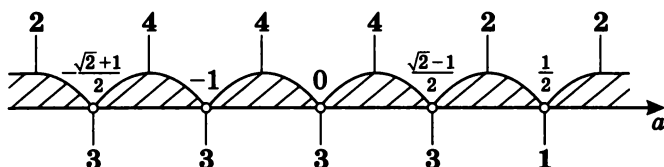
Так как $a^2 - a + 1 > 0$ для всех a , то $a(a + 1) < 0$.



Значит, и в этом случае, возможно, графики $y = |x + a^2|$ и $y = |x^2 + a|$ пересекаются в четырех точках.

Для проверки гипотезы рассмотрите $a = -0,5$ ($-1 < -0,5 < 0$) и убедитесь в наличии четырех корней в уравнении $|x + 0,25| = |x^2 - 0,5|$: $x = -\frac{\sqrt{2}+1}{2}$, $x = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{2}$.

Теперь обобщим все случаи и запишем ответ. Чтобы не пропустить какие-нибудь случаи, изобразим количество ответов на параметрической прямой:



Ответ: у уравнения $|x^2 + a| = |x + a^2|$ в зависимости от значения параметра a :

1. При $a < -\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ существуют два корня.
2. При $a = -\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ существуют три корня.
3. При $-\frac{1+\sqrt{2}}{2} < a < -1$ существуют четыре корня.
4. При $a = -1$ существуют три корня.
5. При $-1 < a < 0$ существуют четыре корня.
6. При $a = 0$ существуют три корня.
7. При $0 < a < \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ существуют четыре корня.
8. При $a = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ существуют три корня.
9. При $\frac{\sqrt{2}-1}{2} < a < \frac{1}{2}$ существуют два корня.
10. При $a = \frac{1}{2}$ существует один корень.
11. При $a > \frac{1}{2}$ существуют два корня.

Самостоятельная работа 10

Сколько решений имеет система уравнений в зависимости от значения параметра?

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x^2 + b \end{cases};$

2. $\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 4 \\ y^2 = 2x + m \end{cases};$

3. $\begin{cases} x + y = a \\ (y^2 - x - 2)(y - x^2 + 2) = 0 \end{cases};$

4. $\begin{cases} (|x| + |y| - 10)(9 - |xy|) = 0 \\ x^2 + y^2 = a^2 \ (a > 0) \end{cases};$

5. $\begin{cases} (x-a)^2 + (y+a)^2 = 4 \\ ||x| - 2| = y \end{cases}.$

Итоговая самостоятельная работа

- I. 1. Графически решите уравнение с параметрами:

$$(x^2 + y^2 - 5) \cdot (xy + 2) = a.$$

2. Графически решите уравнение с параметрами:

$$(x^2 + y^2 - 10) \cdot (|xy| - 3) = a.$$

- II. 1. При каких значениях параметра a существует не единственное решение системы

$$\begin{cases} x^2 - 6x + y^2 - 6y + 14 = 0 \\ x^2 - 2a(x + y) + y^2 + a^2 = 0 \end{cases} ?$$

2. Сколько решений имеет система уравнений в зависимости от значения параметра a : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 2|x| + |y| = a \end{cases} ?$

3. Сколько решений имеет система уравнений в зависимости от значения параметра a :

$$\begin{cases} x + y = a - 1 \\ xy = 3a - 8 \end{cases} ?$$

4. Сколько решений имеет система уравнений в зависимости от значения параметра a :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1 + a) \\ xy = 7 - a \end{cases} ?$$

5. При каких значениях параметра a

система $\begin{cases} ax^2 + y + 2a = 0 \\ ay^2 + x + 2a = 0 \end{cases}$:

- а) имеет единственное решение;
- б) имеет два решения;
- в) не имеет решений.

- III. 1. Сколько корней имеет уравнение в зависимости от значения параметра a : $a - \frac{x}{|x|} = \frac{|x^2 - 4|}{x^2 - x - 2}$?
2. Сколько корней имеет уравнение $a|x - 2| = \frac{5}{x + 3}$ в зависимости от положительного значения параметра a : а) на $(-\infty; \infty)$; б) на $[-1; \infty)$?
3. При каких значениях параметра b уравнение $|x - b^2 + 4b - 2| + |x - b^2 + 2b + 3| = 2b - 5$ имеет хотя бы один корень на отрезке $[5; 23]$?
4. При каких значениях параметра a наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 7|$ больше 1?
- 5*. При каких значениях x неравенство $(a + 2)x^3 - (1 + 2a)x^2 - 6x + a^2 + 4a - 5 > 0$ справедливо для $a \in [-2; 1]$?
- 6*. Решите уравнение $(x - 1) \log_3 x = \frac{x + 1}{2}$.

5

ОТВЕТЫ

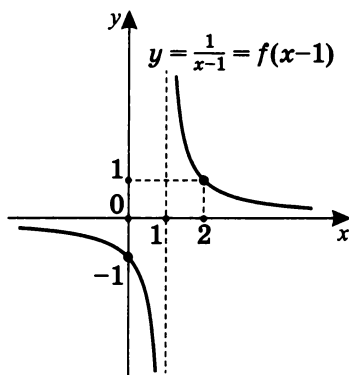
Ответы на самостоятельную работу 1

1. $y = \frac{1}{x-1}$.

Вид преобразования:

$$y = f(x-1),$$

где $y = f(x) = \frac{1}{x}$.



2. $y = \frac{1}{-x}$.

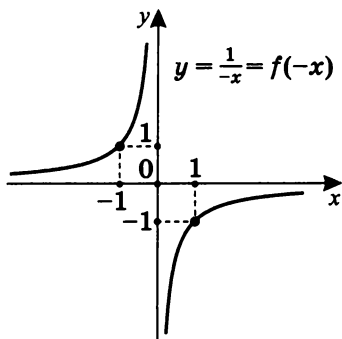
Вид преобразования:

$$y = f(-x),$$

где $y = f(x) = \frac{1}{x}$,

или, в данном случае,

$$y = -f(x).$$



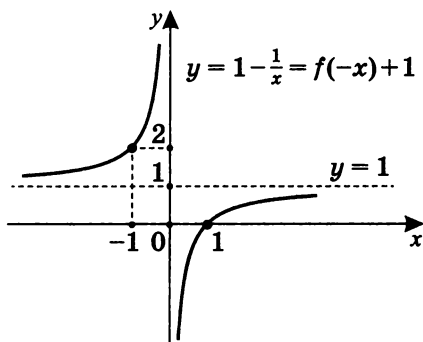
3. $y = 1 - \frac{1}{x}$.

Вид преобразования:

$$y = f(-x) + 1,$$

где $y = f(x) = \frac{1}{x}$,

или $y = 1 - f(x)$.

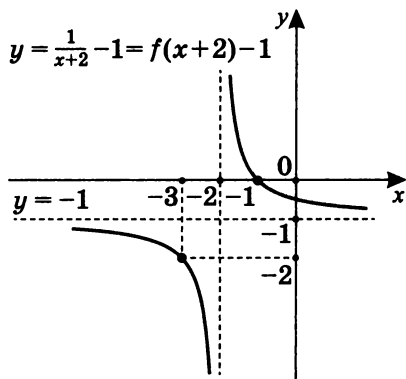


4. $y = \frac{1}{x+2} - 1$.

Вид преобразования:

$$y = f(x+2) - 1,$$

где $y = f(x) = \frac{1}{x}$.

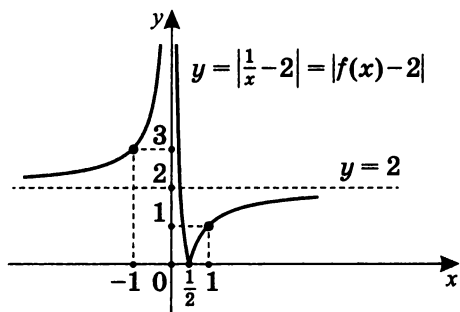


5. $y = \left| \frac{1}{x} - 2 \right|$.

Вид преобразования:

$$y = |f(x) - 2|,$$

где $y = f(x) = \frac{1}{x}$.



6. $y = \frac{1}{|x+3|}$.

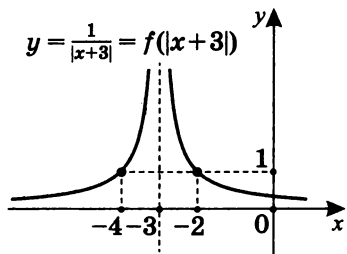
Вид преобразования:

$$y = f(|x+3|),$$

где $y = f(x) = \frac{1}{x}$,

или, в данном случае,

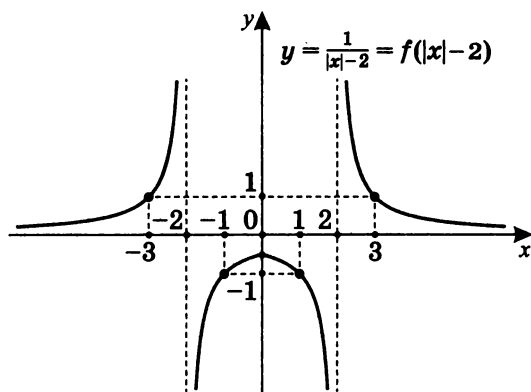
$$y = |f(x+3)|.$$



7. $y = \frac{1}{|x|-2}$.

Вид преобразования:

$y = f(|x| - 2)$, где $y = f(x) = \frac{1}{x}$.



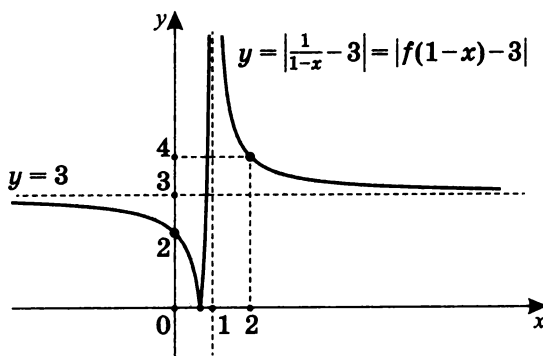
8. $y = \left| \frac{1}{1-x} - 3 \right|$.

Вид преобразования: $y = |f(1-x) - 3|$,

или так как можно преобразовать

$y = \left| -\frac{1}{x-1} - 3 \right| = \left| \frac{1}{x-1} + 3 \right|$,

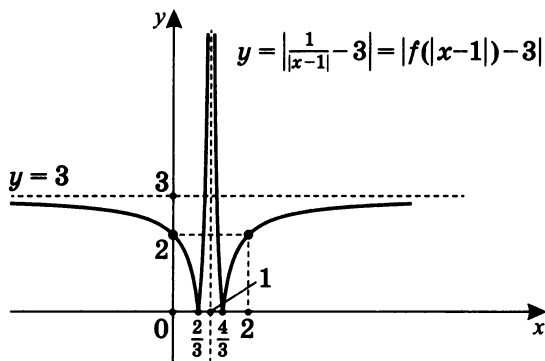
то $y = |f(x-1) + 3|$, причем $y = f(x) = \frac{1}{x}$.



9. $y = \left| \frac{1}{|x-1|} - 3 \right|$.

Вид преобразования:

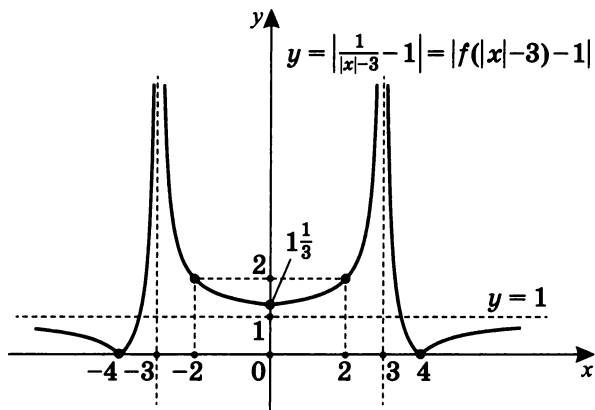
$y = |f(|x-1|) - 3|$, где $y = f(x) = \frac{1}{x}$.



10. $y = \left| \frac{1}{|x|-3} - 1 \right|$.

Вид преобразования:

$y = |f(|x| - 3) - 1|$, где $y = f(x) = \frac{1}{x}$.



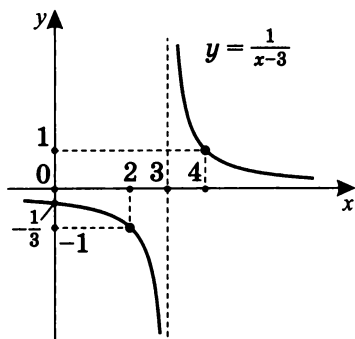
Ответы на самостоятельную работу 2

Зная график $y = f(x)$, постройте графики:

1. $y = f(x - 3)$.

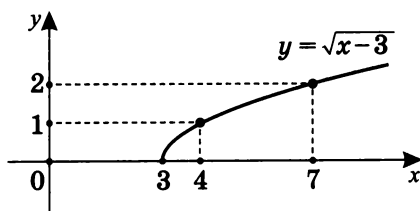
а) $y = f(x) = \frac{1}{x}$,

тогда $y = f(x - 3) = \frac{1}{x - 3}$.



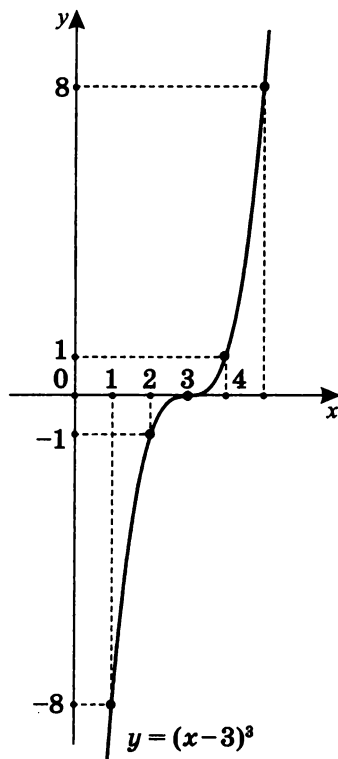
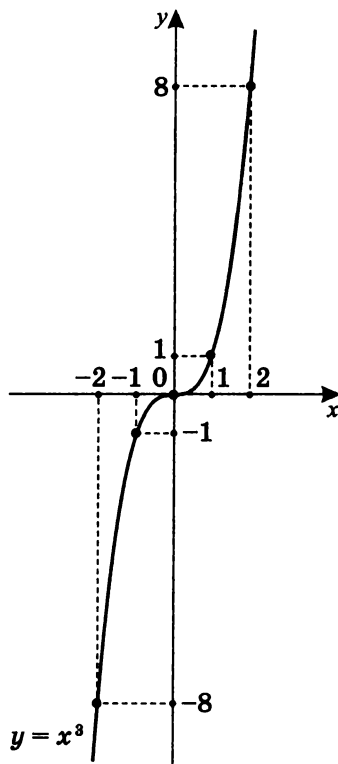
б) $y = f(x) = \sqrt{x}$,

тогда $y = f(x - 3) = \sqrt{x - 3}$.



в) $y = f(x) = x^3$,

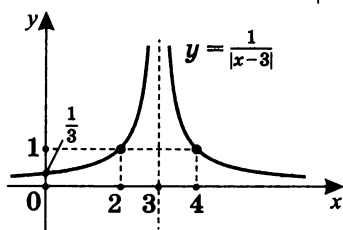
тогда $y = f(x - 3) = (x - 3)^3$.



2. $y = f(|x - 3|)$.

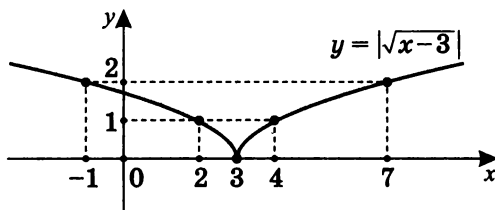
а) $y = f(x) = \frac{1}{|x|}$,

тогда $y = f(|x - 3|) = \frac{1}{|x - 3|}$.



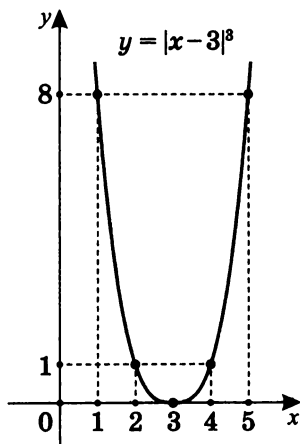
б) $y = f(x) = \sqrt{x}$,

тогда $y = f(|x - 3|) = \sqrt{|x - 3|}$.



в) $y = f(x) = x^3$,

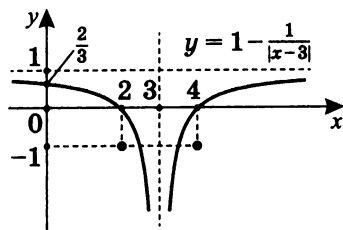
тогда $y = f(|x - 3|) = (|x - 3|)^3$.



3. $y = 1 - f(|x - 3|)$.

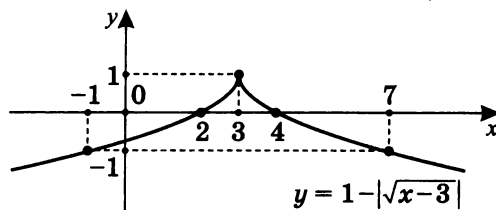
а) $y = f(x) = \frac{1}{x}$,

тогда $y = 1 - f(|x - 3|) = 1 - \frac{1}{|x - 3|}$.



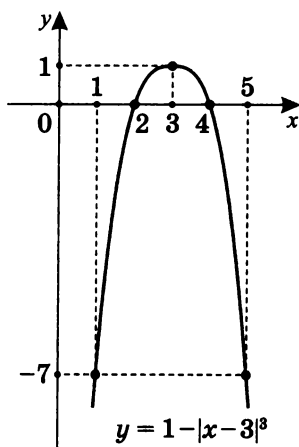
б) $y = f(x) = \sqrt{x}$,

тогда $y = 1 - f(|x - 3|) = 1 - \sqrt{|x - 3|}$.



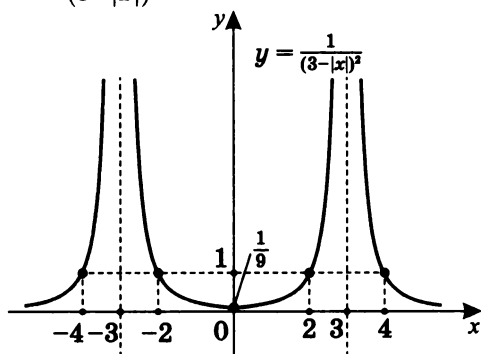
в) $y = f(x) = x^3$,

тогда $y = 1 - f(|x - 3|) = 1 - |x - 3|^3$.

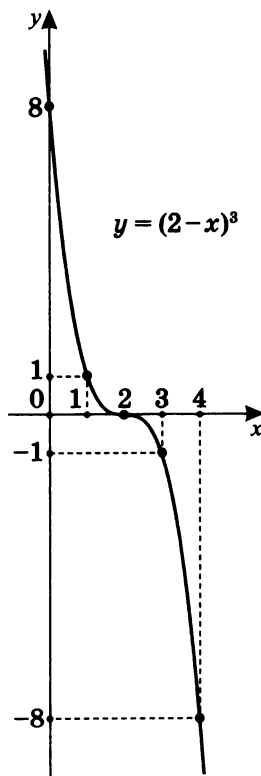


Ответы на самостоятельную работу 3

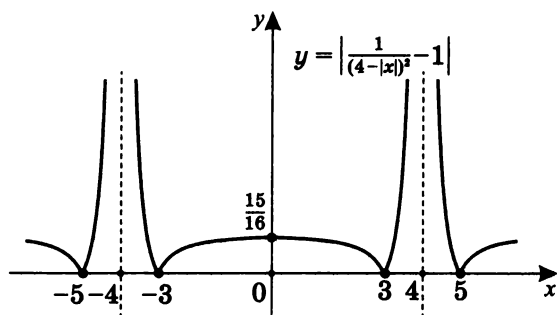
1. $y = \frac{1}{(3-|x|)^2}$.



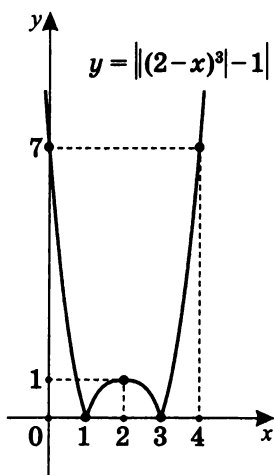
2. $y = (2-x)^3$.



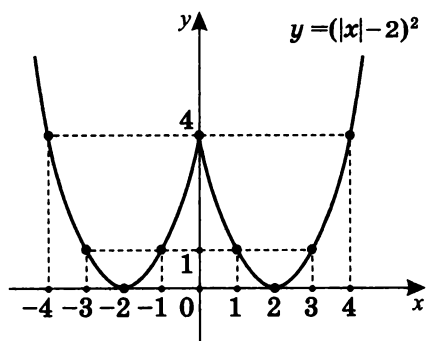
$$3. y = \left| \frac{1}{(4-|x|)^2} - 1 \right|.$$



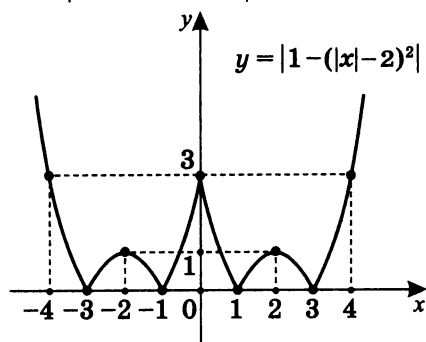
$$4. y = \left| |(2-x)^3| - 1 \right|.$$



5. $y = (|x| - 2)^2$.

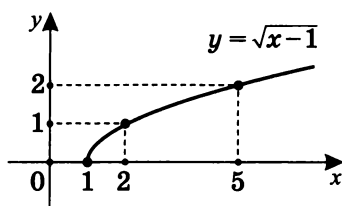


6. $y = |1 - (|x| - 2)^2|$.

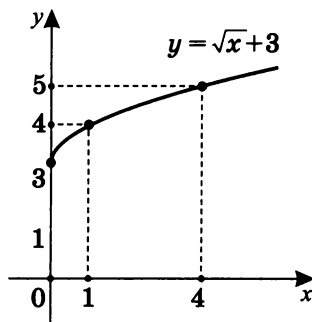


Ответы на самостоятельную работу 4

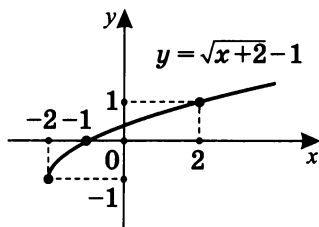
1. $y = \sqrt{x-1}$.



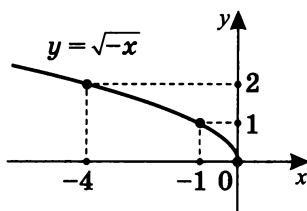
2. $y = \sqrt{x} + 3$.



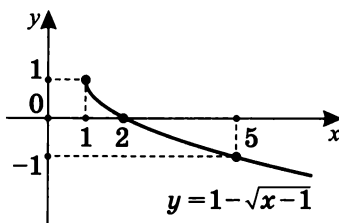
3. $y = \sqrt{x+2} - 1$.



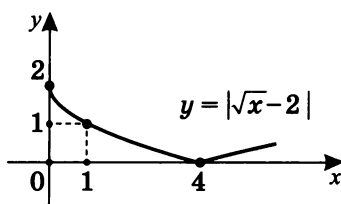
4. $y = \sqrt{-x}$.



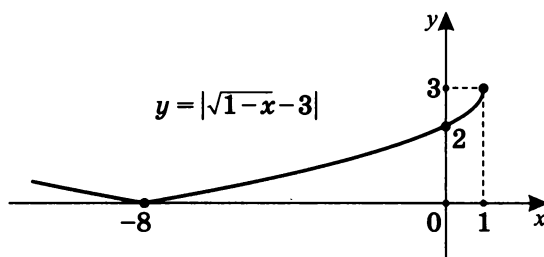
5. $y = 1 - \sqrt{x-1}$.



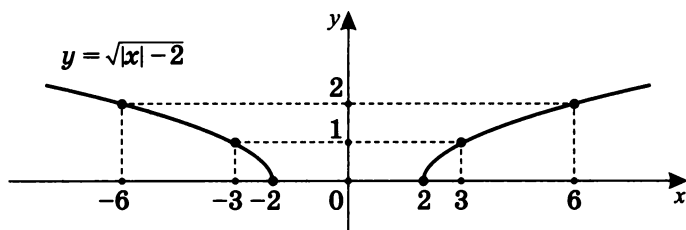
6. $y = |\sqrt{x} - 2|$.



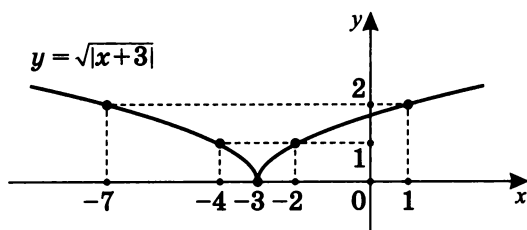
7. $y = |\sqrt{1-x} - 3|$.



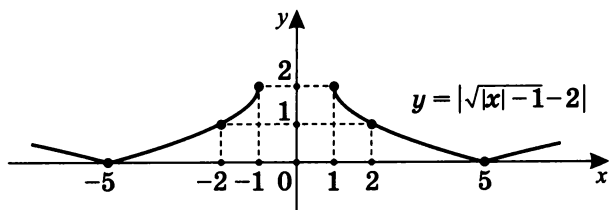
8. $y = \sqrt{|x| - 2}$.



9. $y = \sqrt{|x+3|}$.



10. $y = |\sqrt{|x| - 1} - 2|$.

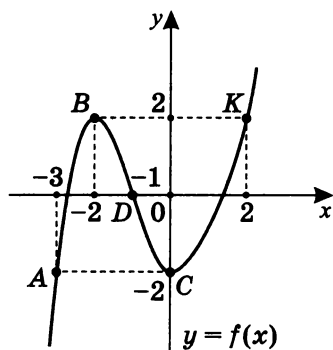


Ответы на самостоятельную работу 5

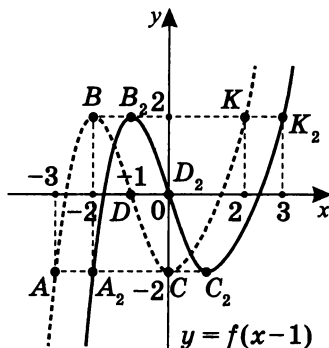
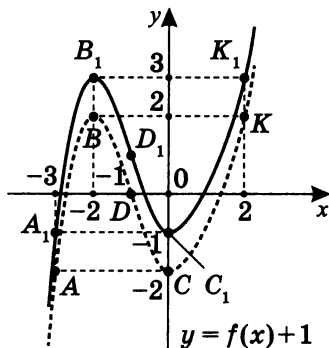
Вариант I

Дан график функции $f(x)$.

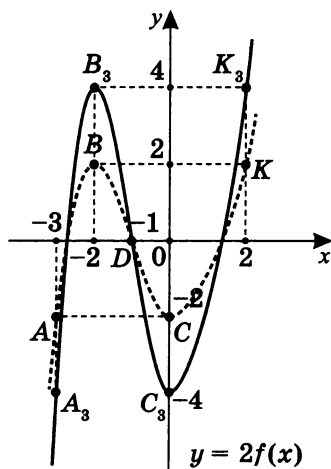
Построим на одном чертеже (или в одной системе координат) графики функций.



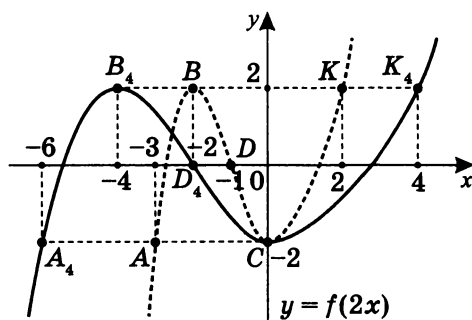
1. $y = f(x)$ и $y = f(x) + 1$. 2. $y = f(x)$ и $y = f(x - 1)$.



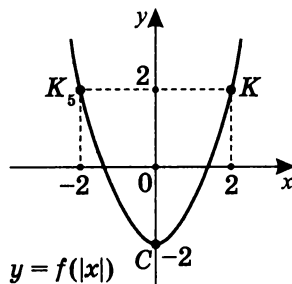
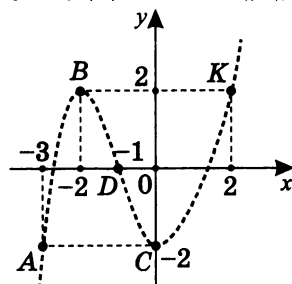
3. $y = f(x)$ и $y = 2f(x)$.



4. $y = f(x)$ и $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$.



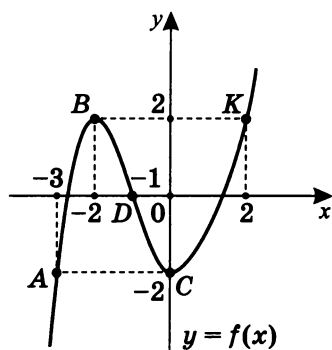
5. $y = f(x)$ и $y = f(|x|)$.



Вариант II

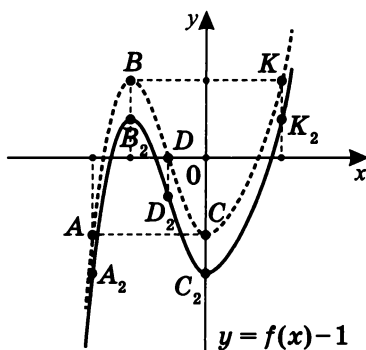
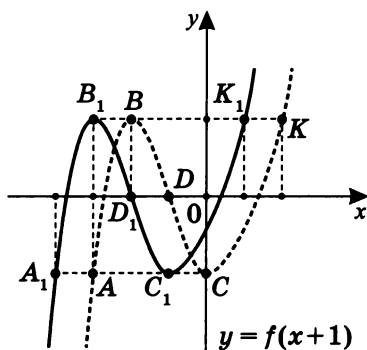
Дан график функции $f(x)$.

Построим на одном чертеже (или в одной системе координат) графики функций.



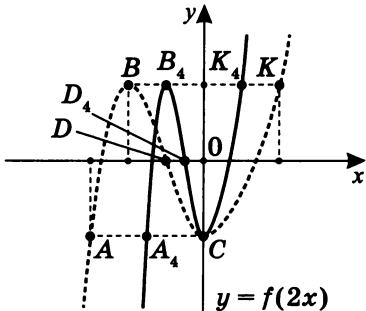
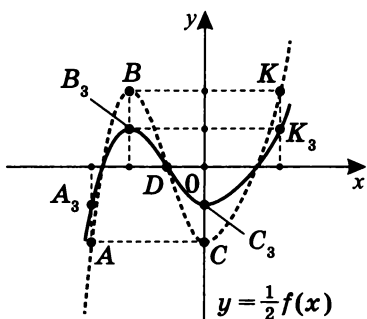
1. $y = f(x)$ и $y = f(x+1)$.

2. $y = f(x)$ и $y = f(x) - 1$.

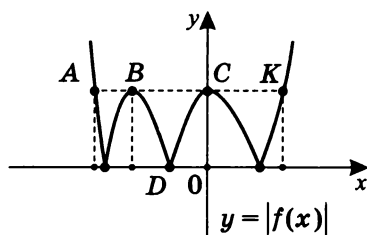
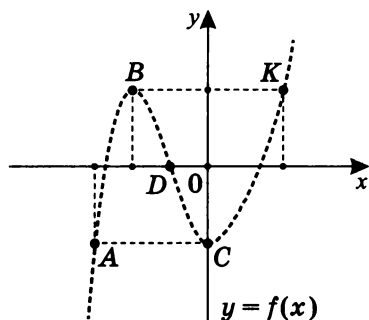


3. $y = f(x)$ и $y = \frac{1}{2}f(x)$.

4. $y = f(x)$ и $y = f(2x)$.



5. $y = f(x)$ и $y = |f(x)|$.

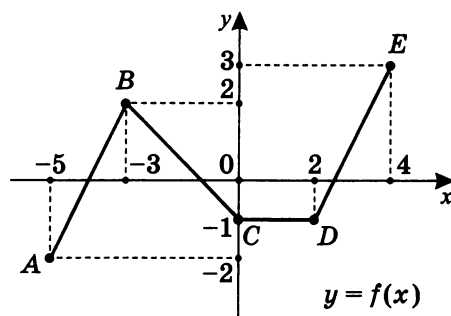


Примечание. На всех графиках пунктиром обозначен график исходной функции $f(x)$. Координаты его точек указаны на исходном графике и для лучшей читаемости на остальных графиках не указываются.

Ответы на самостоятельную работу 6

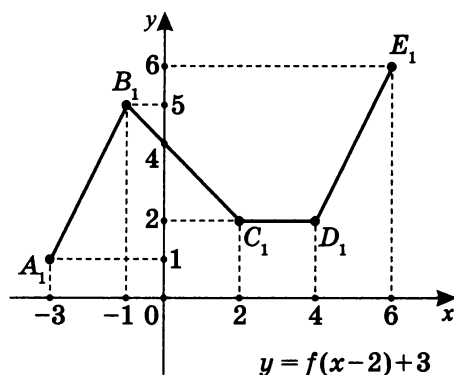
Вариант I

Дан график функции $y = f(x)$:

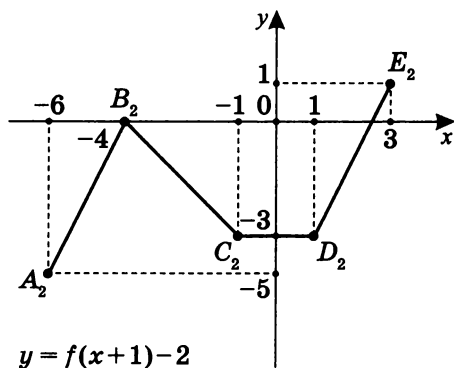


Построим графики:

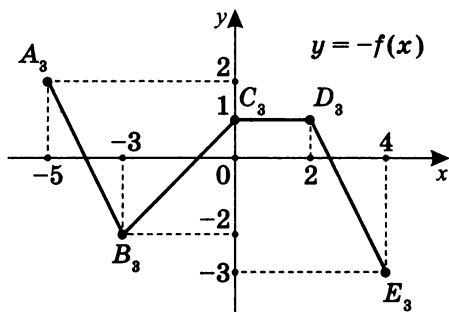
1. $y = f(x-2) + 3$.



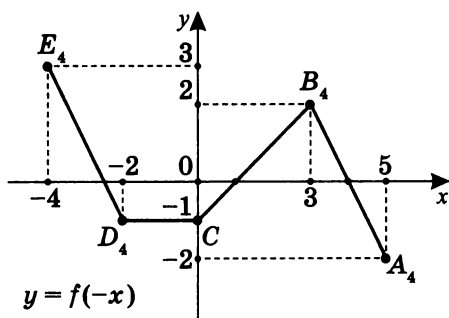
2. $y = f(x+1) - 2$.



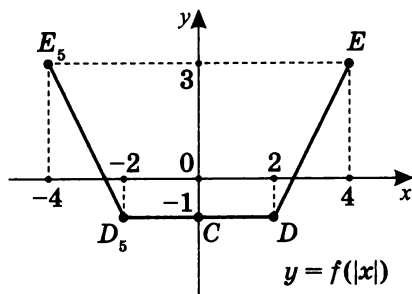
3. $y = -f(x)$.



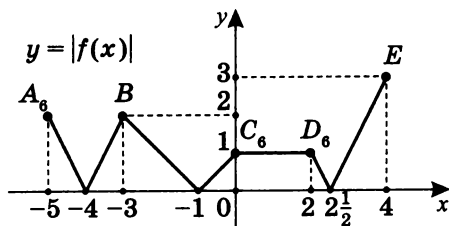
4. $y = f(-x)$.



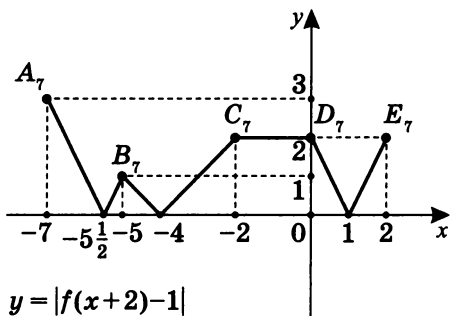
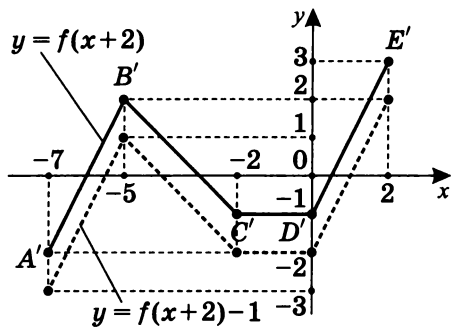
5. $y = f(|x|)$.



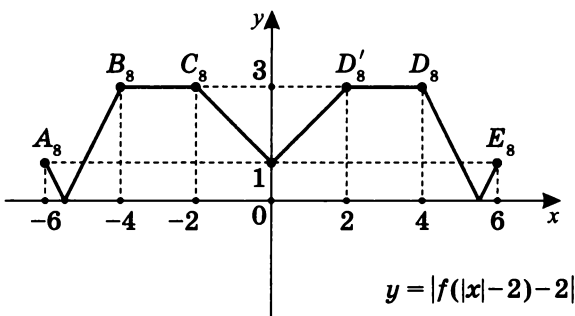
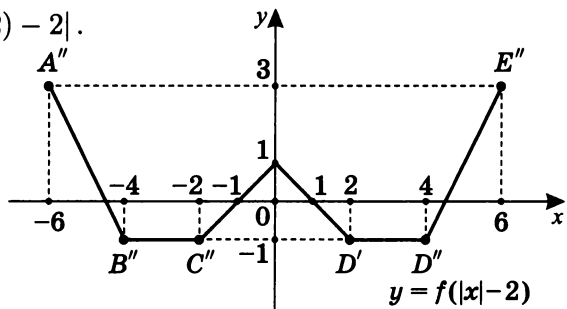
6. $y = |f(x)|$.



7. $y = |f(x+2) - 1|$.

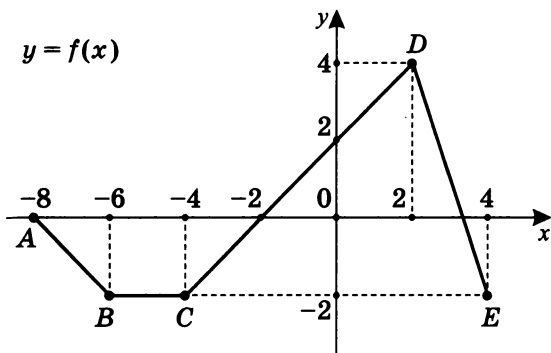


8. $y = |f(|x| - 2) - 2|$.



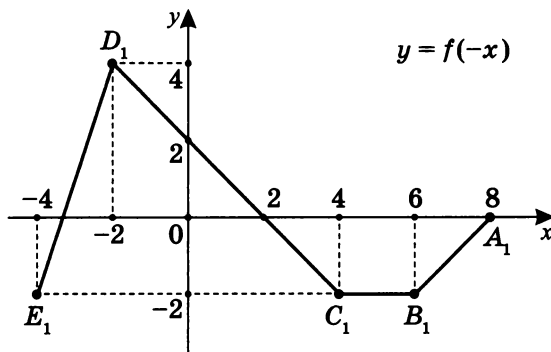
Вариант II

Дан график функции $y = f(x)$:

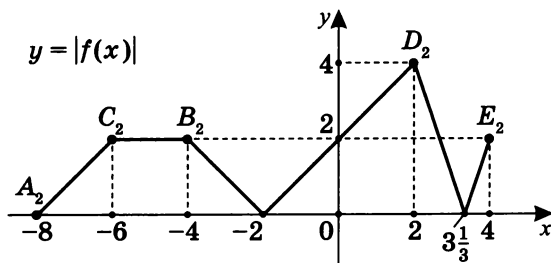


Построим графики:

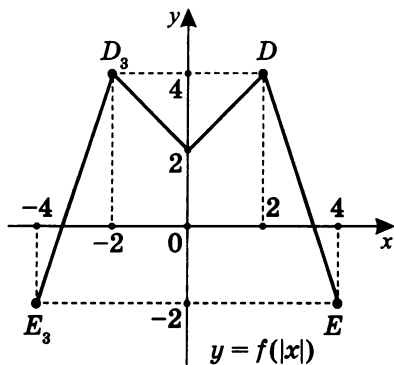
1. $y = f(-x)$;



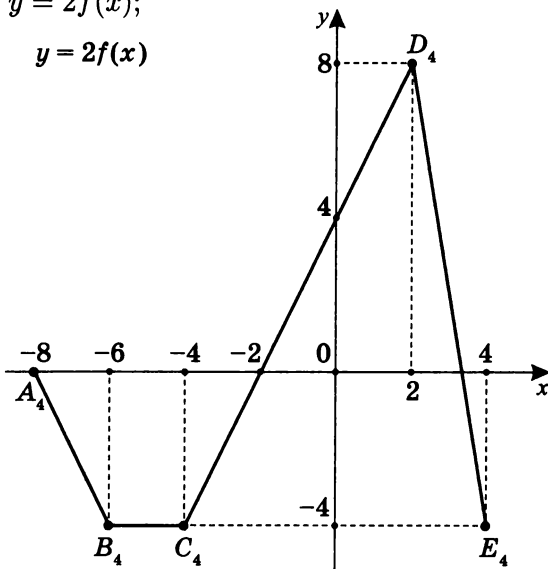
2. $y = |f(x)|$;



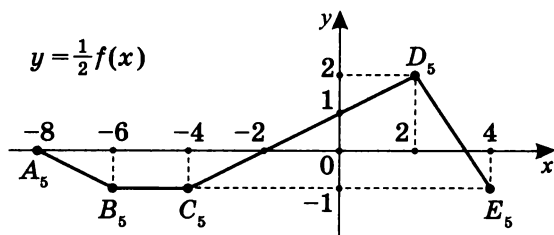
3. $y = f(|x|)$;



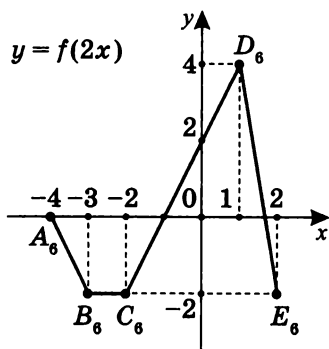
4. $y = 2f(x)$;



5. $y = \frac{1}{2}f(x)$;

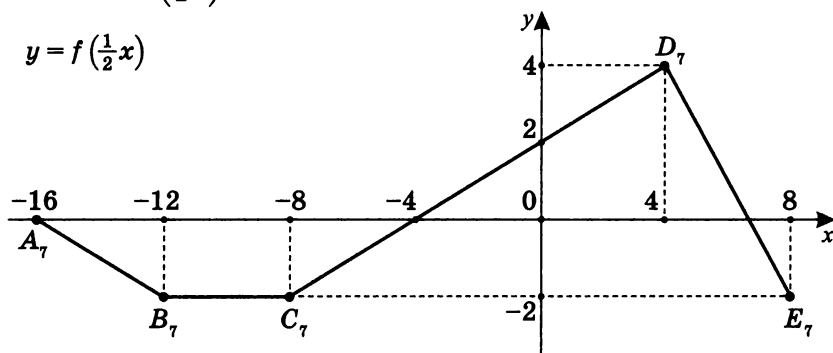


6. $y = f(2x)$;

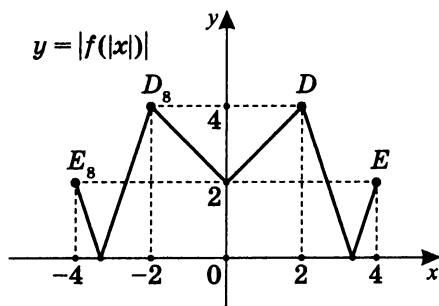


7. $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$;

$y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$



8. $y = |f(|x|)|$.

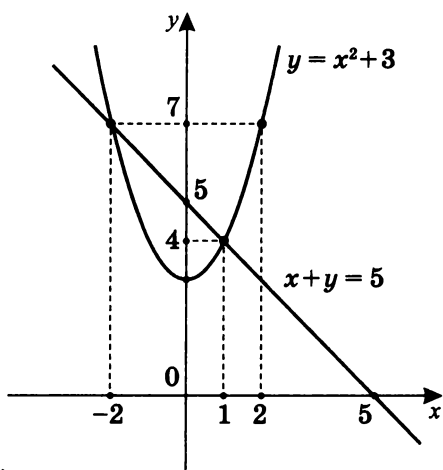


Решение самостоятельной работы 7

Построим графики систем уравнений и приведем ответы.

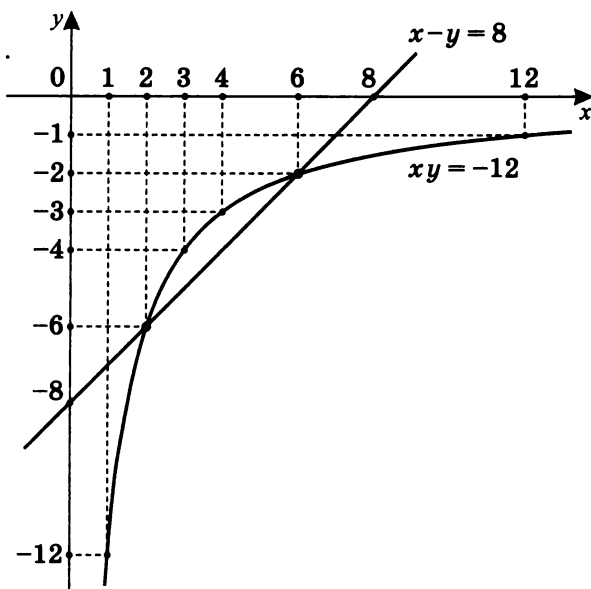
Вариант I

$$1. \begin{cases} y - x^2 = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$$



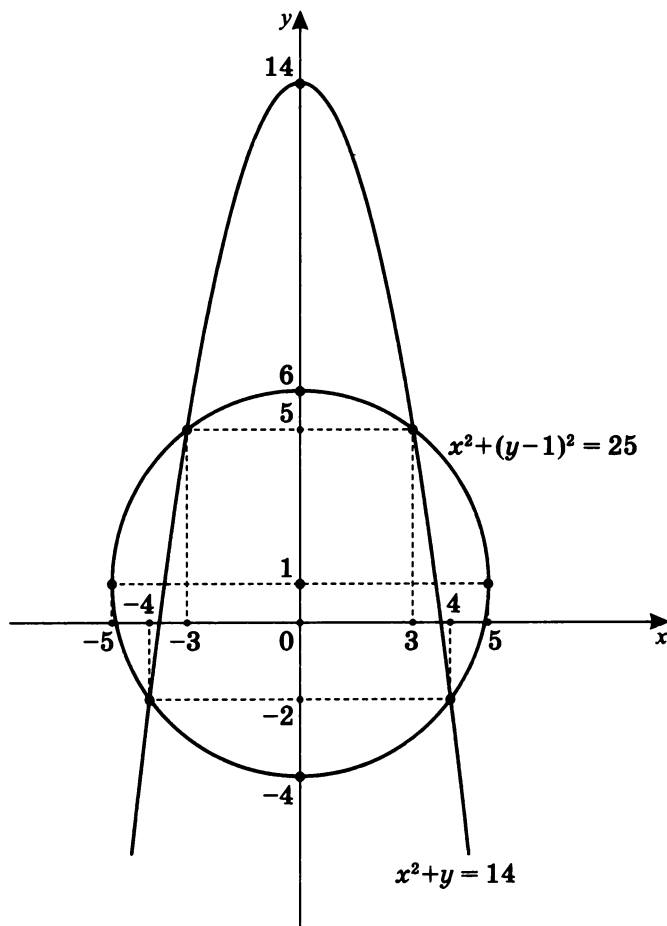
Ответ: $\{(-2; 7); (1; 4)\}$.

$$2. \begin{cases} xy = -12 \\ x - y = 8 \end{cases}$$



Ответ: $\{(2; -6); (6; -2)\}$.

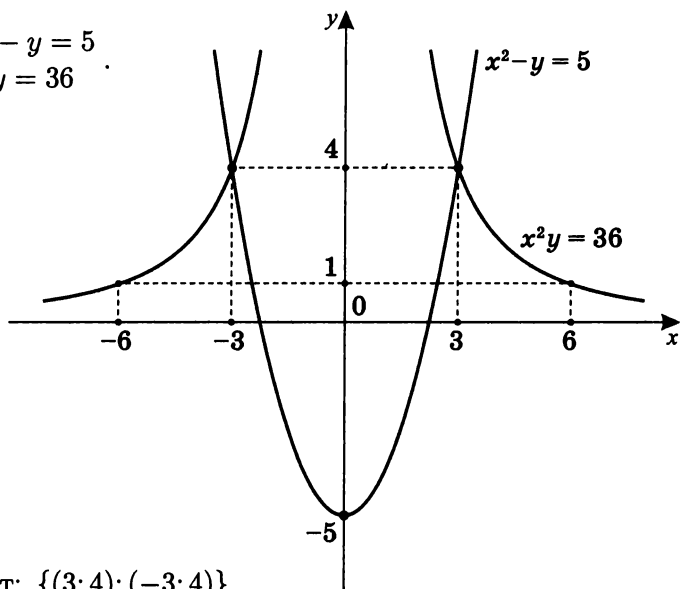
3.
$$\begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 = 25 \\ x^2 + y = 14 \end{cases}.$$



Ответ: $\{(3; 5); (-3; 5); (4; -2); (-4; -2)\}.$

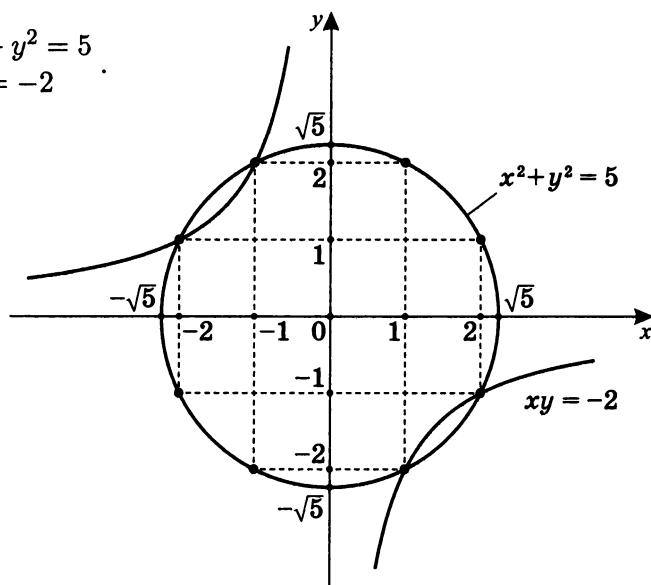
Вариант II

1. $\begin{cases} x^2 - y = 5 \\ x^2 y = 36 \end{cases}$



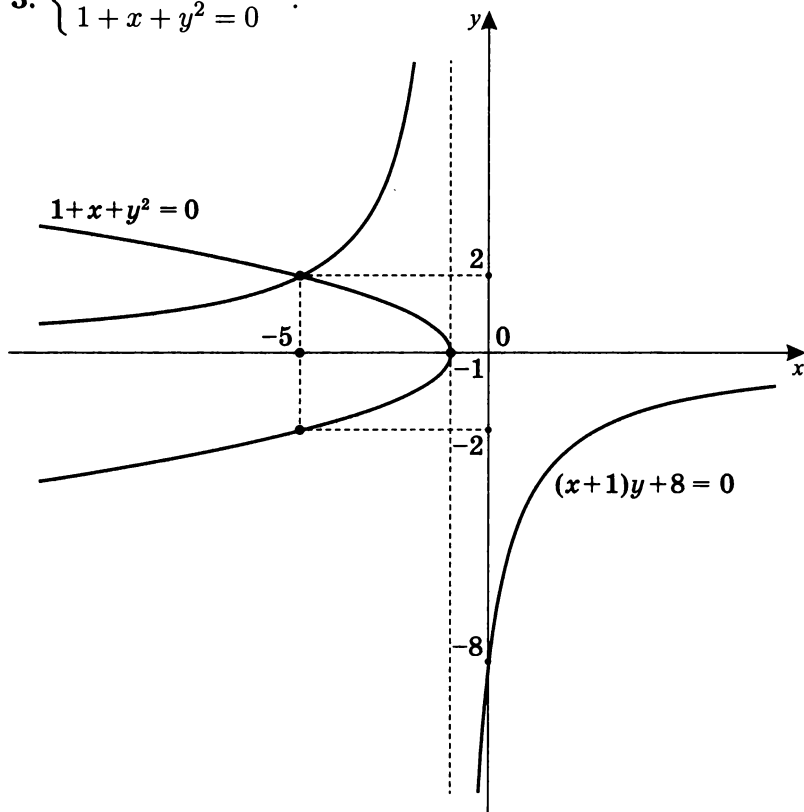
Ответ: $\{(3; 4); (-3; 4)\}$.

2. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = -2 \end{cases}$



Ответ: $\{(-1; 2); (-2; 1); (1; -2); (2; -1)\}$.

$$3. \begin{cases} (x+1)y+8=0 \\ 1+x+y^2=0 \end{cases}.$$



Ответ: $\{(-5; 2)\}$.

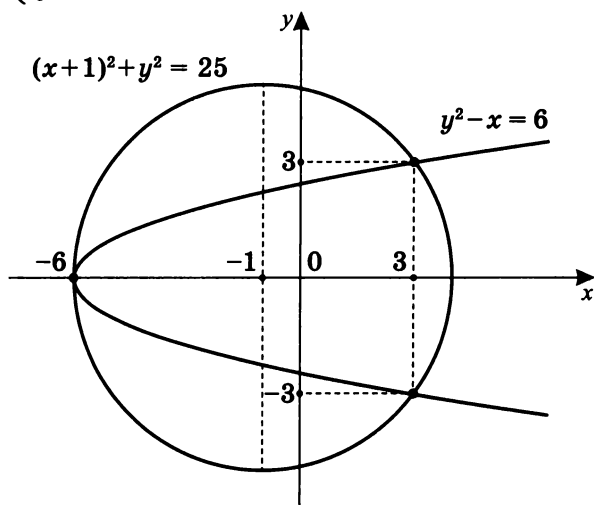
Примечание. Второе уравнение системы $1+x+y^2=0$ равносильно уравнению $y^2 = -x-1$, порождающему

$$\begin{cases} y = \sqrt{-x-1} & (-x-1 \geq 0) \\ y \geq 0 \\ y = -\sqrt{-x-1} & (-x-1 \geq 0) \\ y < 0 \end{cases}.$$

Первое уравнение системы $(x+1)y+8=0$ есть уравнение вида $y = -\frac{8}{x+1}$. Графиком его является гипербола $y = \frac{1}{x}$, сдвинутая влево на 1, симметрично отраженная относительно оси абсцисс и растянутая в 8 раз вдоль оси ординат.

Вариант III

$$1. \begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 25 \\ y^2 - x = 6 \end{cases}$$



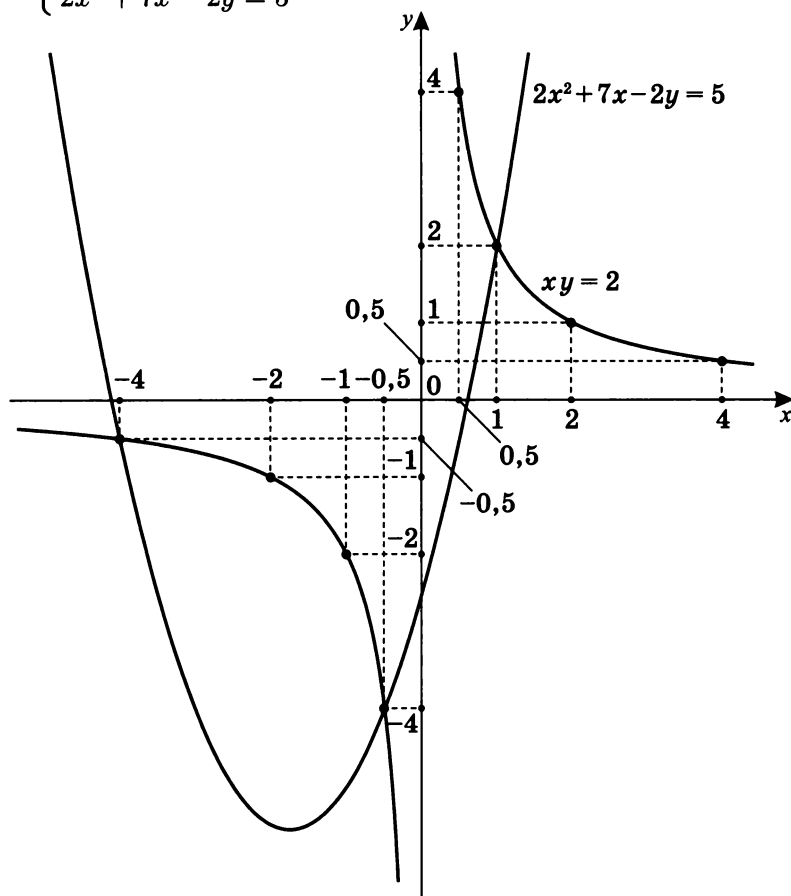
Ответ: $\{(-6; 0); (3; 3); (3; -3)\}$.

Примечание. Первое уравнение системы — окружность с центром в точке $(-1; 0)$ и радиусом 5.

Второе уравнение системы $y^2 - x = 6$ равносильно уравнению $y^2 = x + 6$, порождающему:

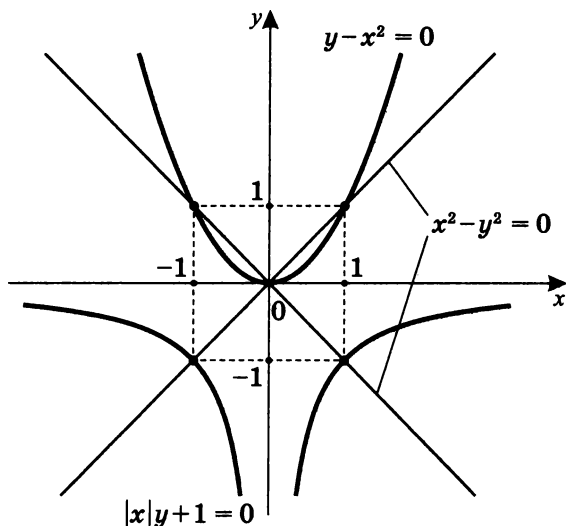
$$\left[\begin{cases} y = \sqrt{x+6} & (x+6 \geq 0) \\ y \geq 0 \\ y = -\sqrt{x+6} & (x+6 \geq 0) \\ y < 0 \end{cases} \right.$$

2. $\begin{cases} xy = 2 \\ 2x^2 + 7x - 2y = 5 \end{cases}$



Ответ: $\left\{ \left(-4; -\frac{1}{2} \right); \left(-\frac{1}{2}; -4 \right); (1; 2) \right\}$.

$$3. \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ (y - x^2)(|x| \cdot y + 1) = 0 \end{cases}$$



Ответ: $\{(1; 1); (1; -1); (-1; 1); (-1; -1); (0; 0)\}$.

Примечание. Первое уравнение системы $x^2 - y^2 = 0$ равносильно уравнению $|x| = |y|$, график которого есть пара пересекающихся прямых.

Второе уравнение системы $(y - x^2)(|x| \cdot y + 1) = 0$ порождает совокупность уравнений:

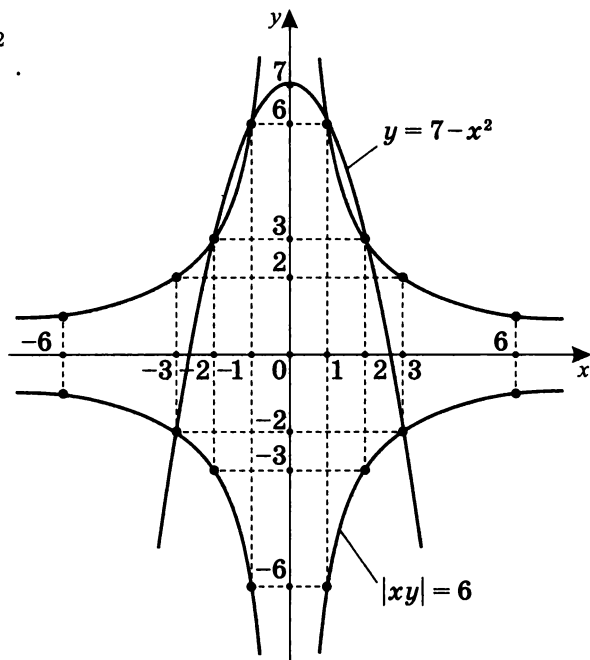
$$\begin{cases} y = x^2 \\ |x| \cdot y + 1 = 0 \end{cases}, \text{ где}$$

$y = x^2$ — парабола;

$y = -\frac{1}{|x|}$ — две ветви гиперболы в нижней полуплоскости.

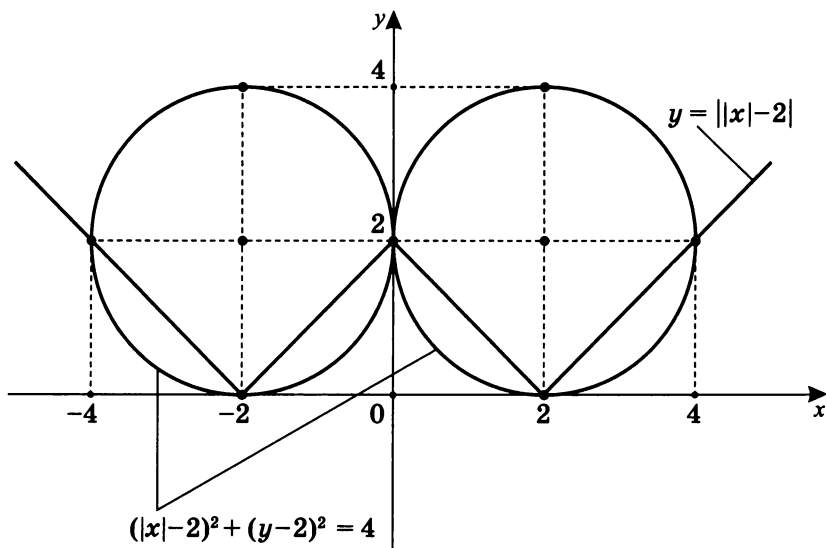
Вариант IV

1. $\begin{cases} y = 7 - x^2 \\ |xy| = 6 \end{cases}$.



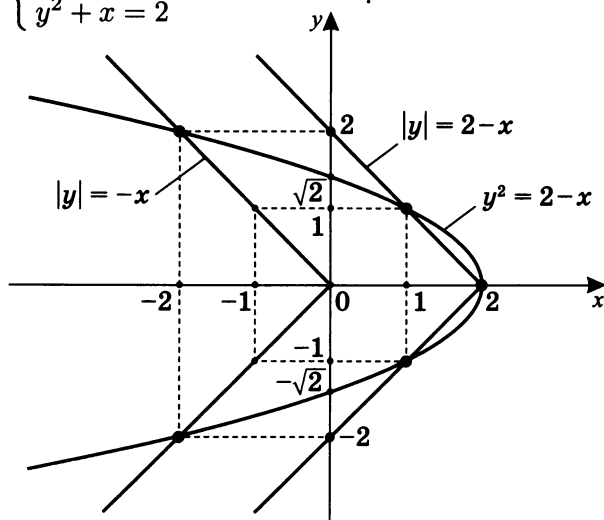
Ответ: $\{(-3; -2); (-2; 3); (-1; 6); (1; 6); (2; 3); (3; -2)\}$.

2. $\begin{cases} y = ||x| - 2| \\ (|x| - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4 \end{cases}$



Ответ: $\{(-4; 2); (-2; 0); (0; 2); (2; 0); (4; 2)\}$.

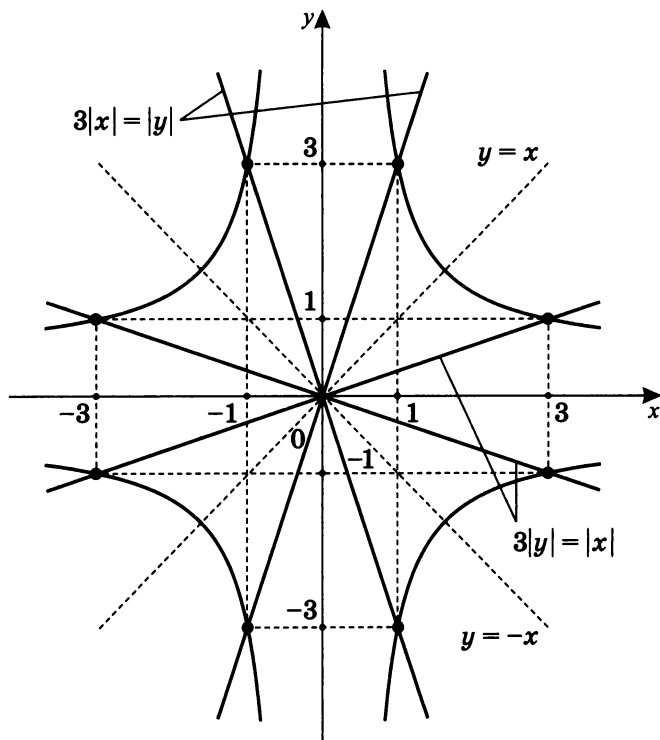
3. $\begin{cases} (|y| + x - 2)(|y| + x) = 0 \\ y^2 + x = 2 \end{cases}$



Ответ: $\{(-2; 2); (1; 1); (2; 0); (1; -1); (-2; -2)\}$.

Вариант V

$$1. \begin{cases} |xy| = 3 \\ 3y^2 - 10|xy| + 3x^2 = 0 \end{cases}.$$



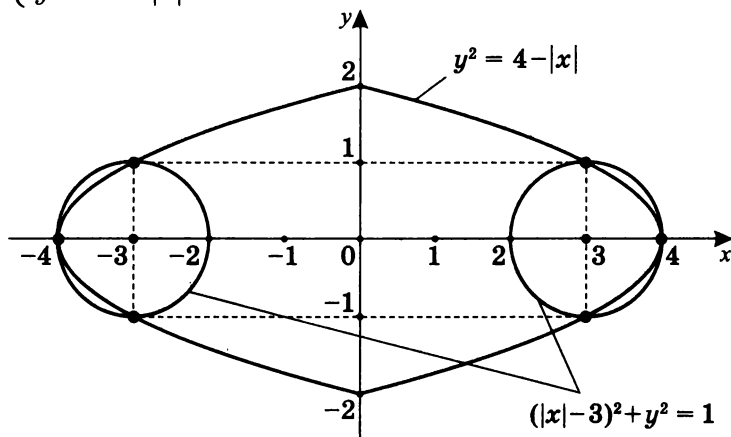
Ответ: $\{(1; 3); (3; 1); (3; -1); (1; -3); (-1; -3); (-3; -1); (-3; 1); (-1; 3)\}$.

Примечание.

$$3y^2 - 10|xy| + 3x^2 = (3|x| - |y|) \cdot (3|y| - |x|),$$

где $3|x| = |y|$ и $3|y| = |x|$ — две пары пересекающихся прямых.

$$2. \begin{cases} (|x| - 3)^2 + y^2 = 1 \\ y^2 = 4 - |x| \end{cases}.$$



Ответ: $\{(-4; 0); (-3; 1); (3; 1); (4; 0); (3; -1); (-3; -1)\}$.

Примечание.

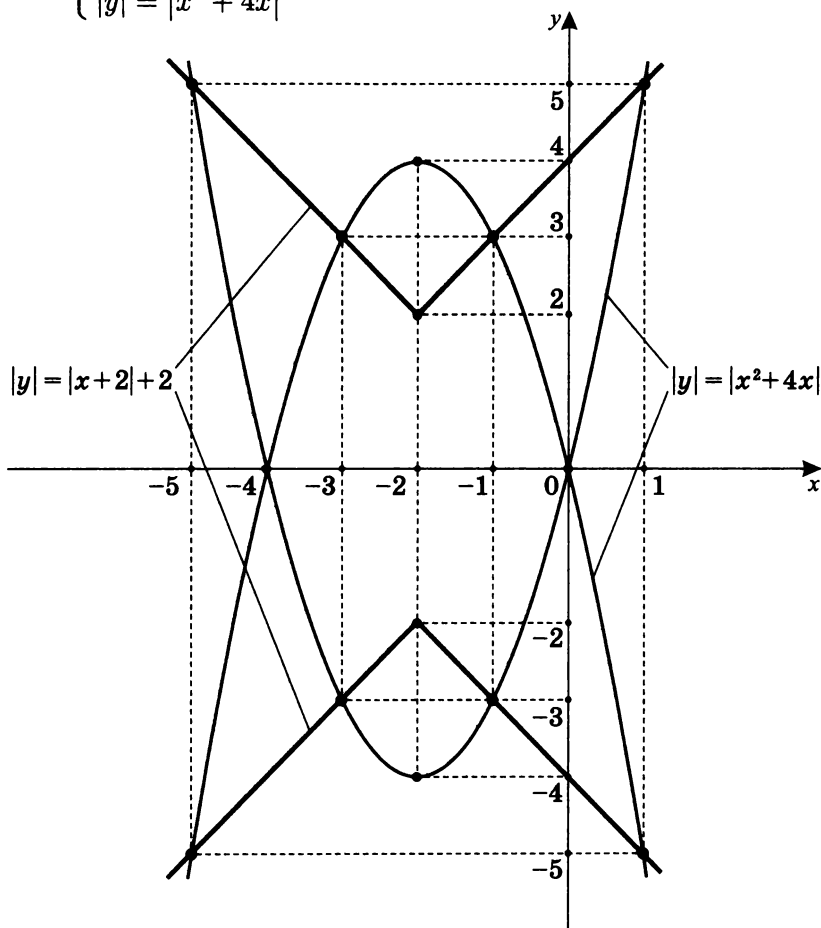
Уравнение $y^2 = 4 - |x|$ порождает $|y| = \sqrt{4 - |x|}$,

$$\text{т. е. } \begin{cases} \begin{cases} y = \sqrt{4 - |x|} & (4 - |x| \geq 0) \\ y \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -\sqrt{4 - |x|} & (4 - |x| \geq 0) \\ y < 0 \end{cases} \end{cases}.$$

Уравнение $(|x| - 3)^2 + y^2 = 1$ порождает

$$\begin{cases} \begin{cases} (x - 3)^2 + y^2 = 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x + 3)^2 + y^2 = 1 \\ x < 0 \end{cases} \end{cases}, \text{ т. е. две окружности радиуса 1.}$$

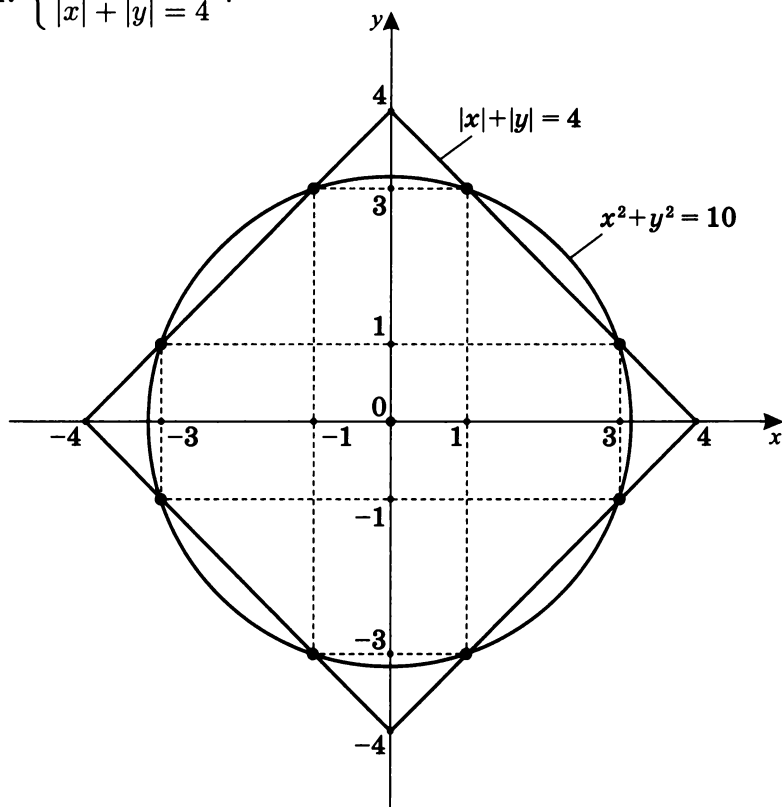
$$3. \begin{cases} |y| = |x+2| + 2 \\ |y| = |x^2 + 4x| \end{cases}.$$



Ответ: $\{(-5; 5); (-3; 3); (-1; 3); (1; 5); (1; -5);$
 $(-1; -3); (-3; -3); (-5; -5)\}.$

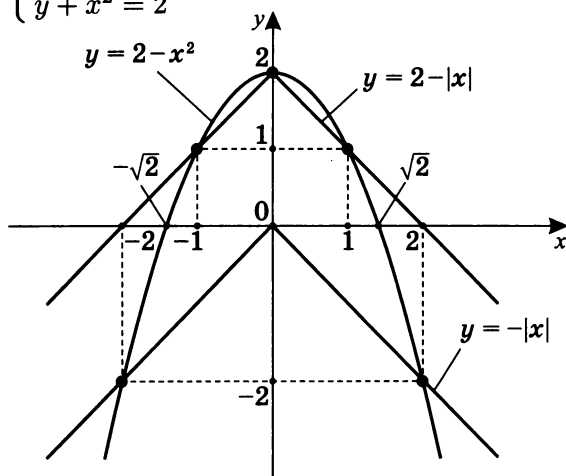
Вариант VI

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ |x| + |y| = 4 \end{cases}$



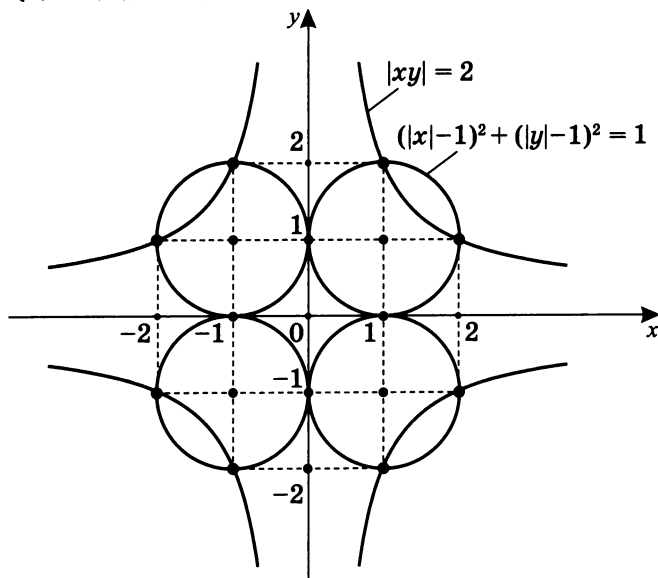
Ответ: $\{(1; 3); (3; 1); (3; -1); (-1; -3); (1; -3);$
 $(-3; -1); (-3; 1); (-1; 3)\}$.

$$2. \begin{cases} (y + |x| - 2) \cdot (y + |x|) = 0 \\ y + x^2 = 2 \end{cases}.$$



Ответ: $\{(0; 2); (1; 1); (2; -2); (-1; 1); (-2; -2)\}$.

$$3. \begin{cases} |xy| = 2 \\ (1 - |x|)^2 + (|y| - 1)^2 = 1 \end{cases}.$$

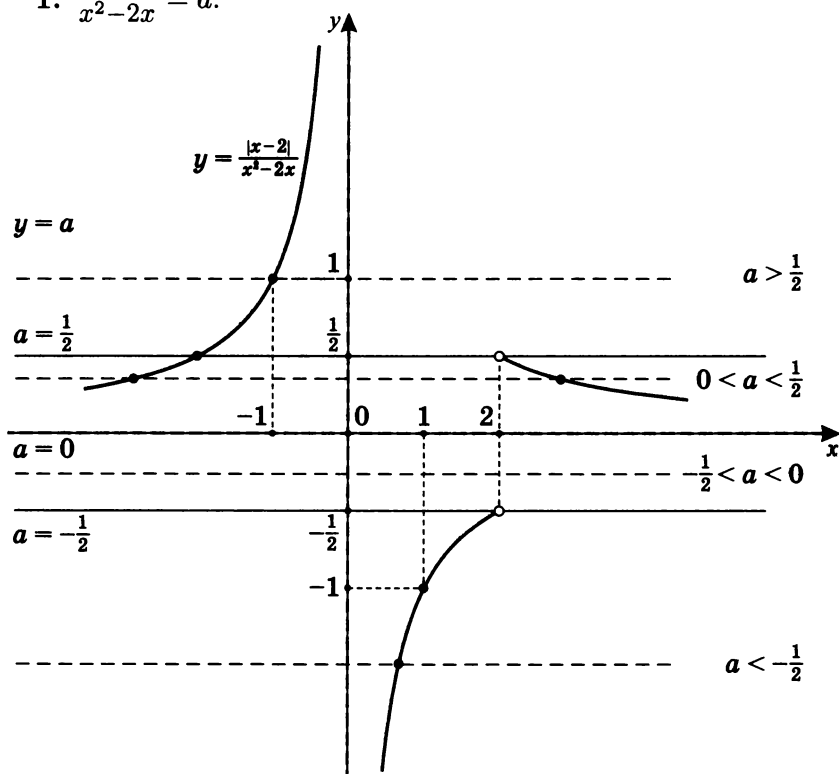


Ответ: $\{(1; 2); (2; 1); (2; -1); (1; -2); (-1; -2); (-2; -1); (-2; 1); (-1; 2)\}$.

Ответы на самостоятельную работу 8

Сколько решений имеет уравнение в зависимости от значения параметра a ?

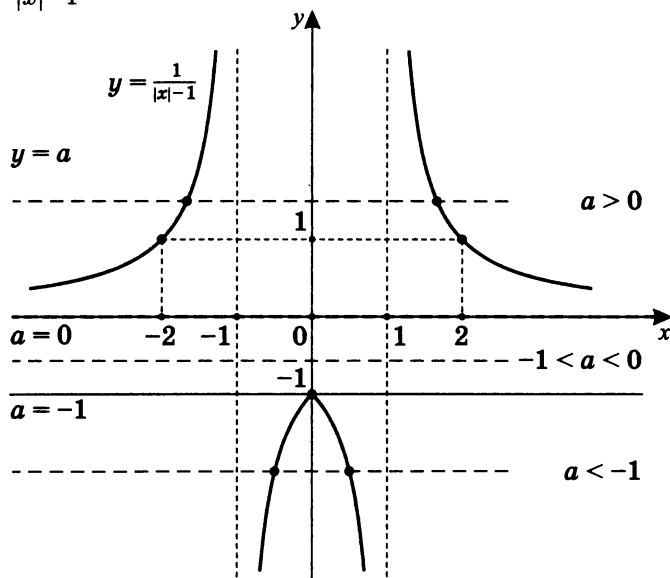
1. $\frac{|x-2|}{x^2-2x} = a.$



Ответ: уравнение $\frac{|x-2|}{x^2-2x} = a$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a \in (-\infty; -0,5)$ — один корень.
2. При $a \in [-0,5; 0]$ — корней нет.
3. При $a \in (0; 0,5)$ — два корня.
4. При $a \in [0,5; \infty)$ — один корень.

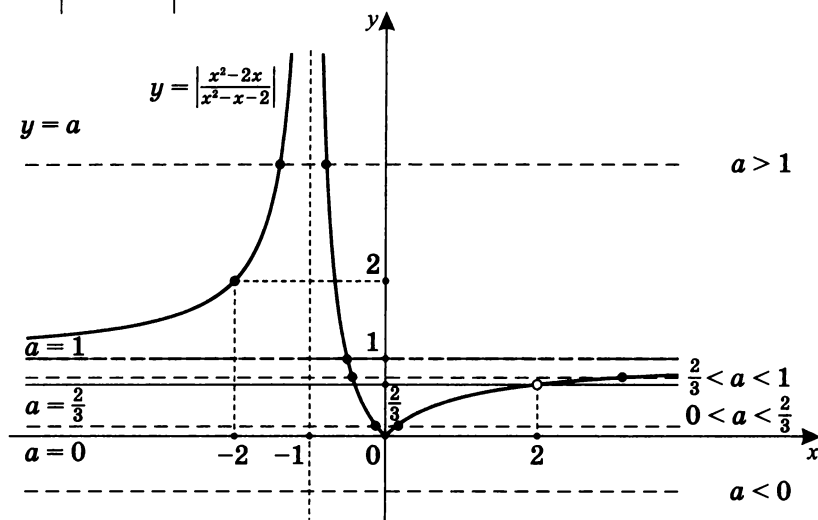
2. $\frac{1}{|x|-1} = a.$



Ответ: уравнение $\frac{1}{|x|-1} = a$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a \in (-\infty; -1)$ — два корня.
2. При $a = -1$ — один корень.
3. При $a \in (-1; 0]$ — корней нет.
4. При $a \in (0; \infty)$ — два корня.

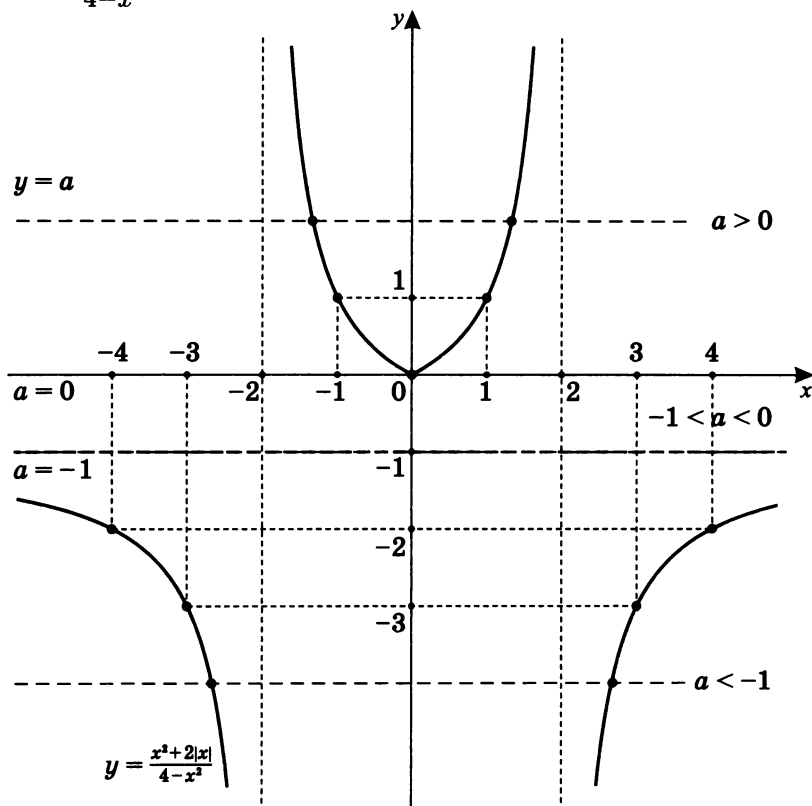
3. $\left| \frac{x^2-2x}{x^2-x-2} \right| = a.$



Ответ: уравнение $\left| \frac{x^2-2x}{x^2-x-2} \right| = a$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a \in (-\infty; 0)$ — корней нет.
2. При $a = 0$ — один корень.
3. При $a \in \left(0; \frac{2}{3}\right)$ — два корня.
4. При $a = \frac{2}{3}$ — один корень.
5. При $a \in \left(\frac{2}{3}; 1\right)$ — два корня.
6. При $a = 1$ — один корень.
7. При $a \in (1; \infty)$ — два корня.

4. $\frac{x^2+2|x|}{4-x^2} = a.$

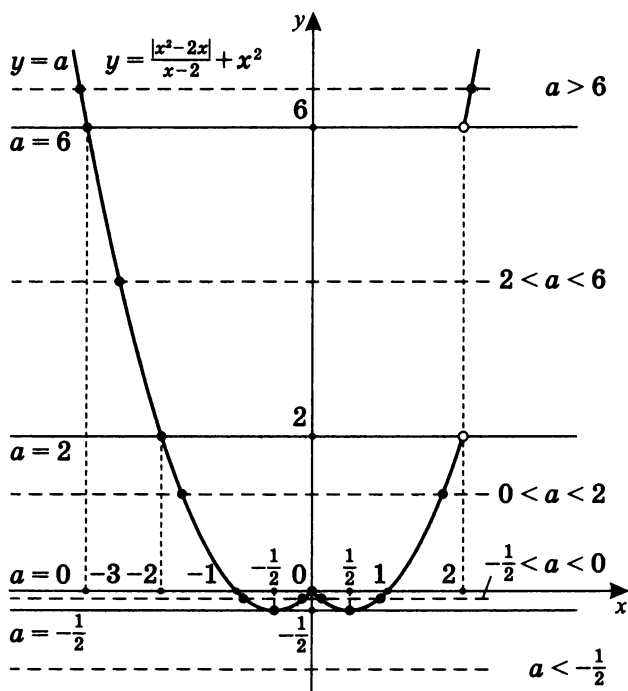


Ответ: уравнение $\frac{x^2+2|x|}{4-x^2} = a$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a \in (-\infty; 1)$ — два корня.
2. При $a \in [-1; 0)$ — корней нет.
3. При $a = 0$ — один корень.
4. При $a \in (0; \infty)$ — два корня.

5. $a - x^2 = \frac{|x^2 - 2x|}{x - 2}$.

Пусть $y = x^2 + \frac{|x^2 - 2x|}{x - 2}$.

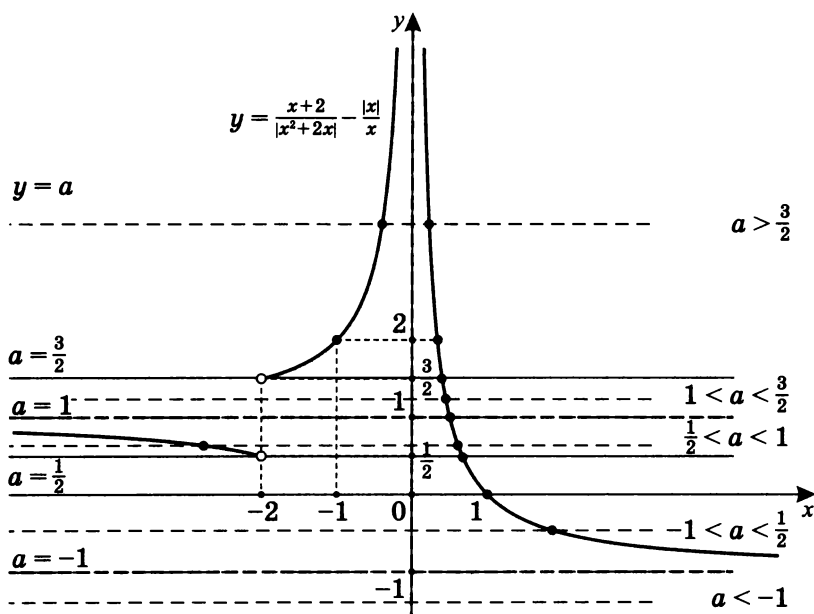


Ответ: уравнение $a - x^2 = \frac{|x^2 - 2x|}{x - 2}$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a \in (-\infty; -0,5)$ — корней нет.
2. При $a = -0,5$ — два корня.
3. При $a \in (-0,5; 0)$ — четыре корня.
4. При $a = 0$ — три корня.
5. При $a \in (0; 2)$ — два корня.
6. При $a \in [2; 6]$ — один корень.
7. При $a \in (6; \infty)$ — два корня.

6. $\frac{|x|}{x} + a = \frac{x+2}{|x^2+2x|}$.

Пусть $y = \frac{x+2}{|x^2+2x|} - \frac{|x|}{x}$.

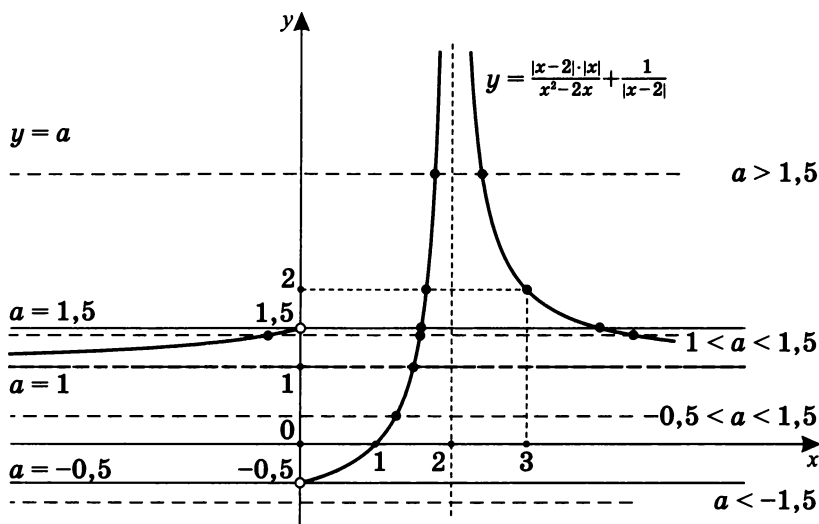


Ответ: уравнение $\frac{|x|}{x} + a = \frac{x+2}{|x^2+2x|}$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a \in (-\infty; -1]$ — корней нет.
2. При $a \in (-1; \frac{1}{2}]$ — один корень.
3. При $a \in (\frac{1}{2}; 1)$ — два корня.
4. При $a \in [1; \frac{3}{2}]$ — один корень.
5. При $a \in (\frac{3}{2}; \infty)$ — два корня.

$$7. a - \frac{1}{|x-2|} = \frac{|x-2| \cdot |x|}{x^2-2x}.$$

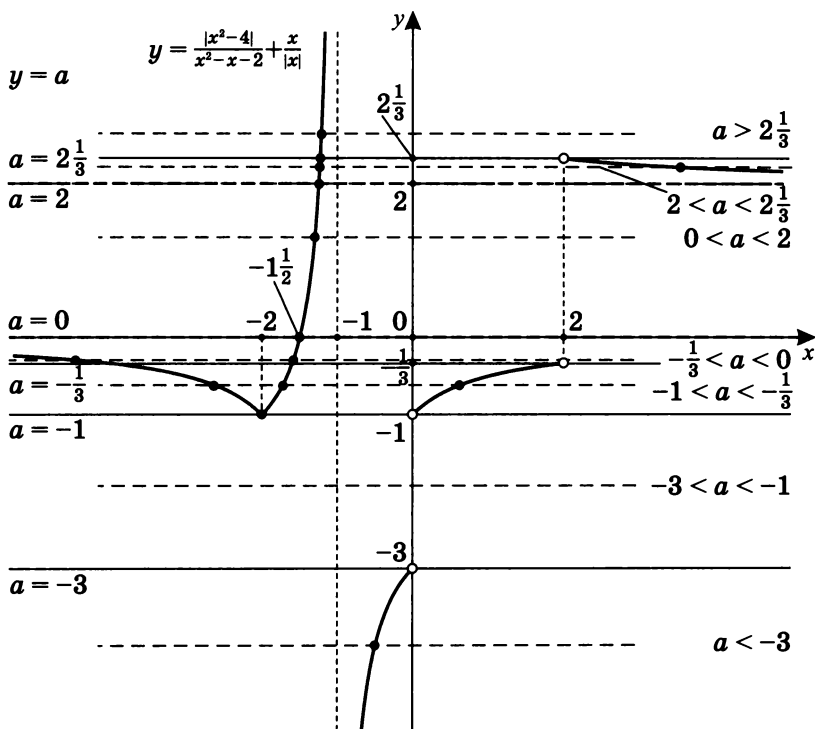
$$\text{Пусть } y = \frac{|x-2| \cdot |x|}{x^2-2x} + \frac{1}{|x-2|}.$$



Ответ: уравнение $a - \frac{1}{|x-2|} = \frac{|x-2| \cdot |x|}{x^2-2x}$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a \in (-\infty; -0,5]$ — корней нет.
2. При $a \in (-0,5; 1]$ — один корень.
3. При $a \in (1; 1,5)$ — три корня.
4. При $a \in [1,5; \infty)$ — два корня.

8. $a - \frac{x}{|x|} = \frac{|x^2-4|}{x^2-x-2}$. Пусть $y = \frac{|x^2-4|}{x^2-x-2} + \frac{x}{|x|}$.



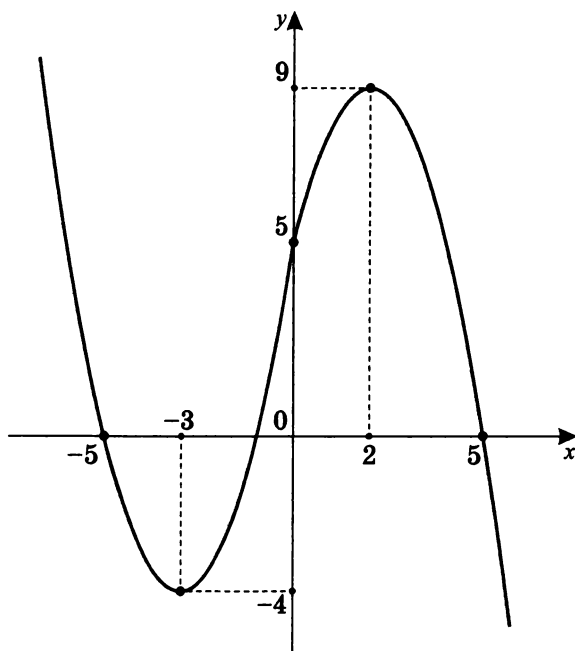
Ответ: уравнение $a - \frac{x}{|x|} = \frac{|x^2-4|}{x^2-x-2}$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a \in (-\infty; -3)$ — один корень.
2. При $a \in [-3; -1)$ — корней нет.
3. При $a = -1$ — один корень.
4. При $a \in (-1; -\frac{1}{3})$ — три корня.
5. При $a \in [-\frac{1}{3}; 0)$ — два корня.
6. При $a \in [0; 2]$ — один корень.
7. При $a \in (2; 2\frac{1}{3})$ — два корня.
8. При $a \in [2\frac{1}{3}; \infty)$ — один корень.

Ответы на самостоятельную работу 9

1. $a \geq 0$; $a \leq -2$.

2. График функции $y = (5 - |x|)(x + 1)$:



1. При $a > 9$ существует единственный корень.
 2. При $a = 9$ существуют два корня.
 3. При $a \in (-4; 9)$ существуют три корня.
 4. При $a = -4$ существуют два корня.
 5. При $a < -4$ существует единственный корень.
- 3.
1. При $a > 9$ корней нет.
 2. При $a = 9$ существует единственный корень.
 3. При $-8 < a < 9$ существуют два корня.
 4. При $a = -8$ существуют три корня.
 5. При $-72 < a < -8$ существуют четыре корня.
 6. При $a = -72$ существуют три корня.

7. При $-90 < a < -72$ существуют два корня.
8. При $a = -90$ существует единственный корень.
9. При $a < -90$ корней нет.

Значит

а) нечетное число корней при $a \in \{-90; -72; -56; 9\}$;

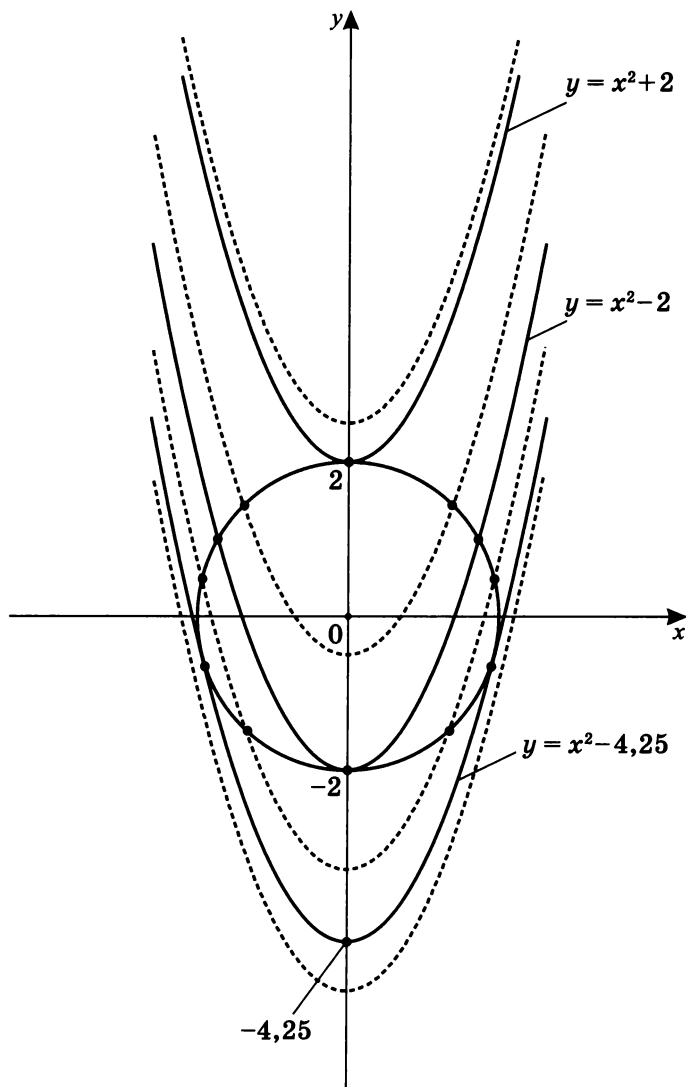
б) четное число корней

при $a \in (-90; -72) \cup (-72; -56) \cup (-56; 9)$.

4. 1. При $a > \frac{20}{21}$ существует единственный корень.
2. При $a = \frac{20}{21}$ существуют два корня.
3. При $0 < a < \frac{20}{21}$ существуют три корня.
4. При $a = 0$ существуют два корня.
5. 1. При $a < -2$ существует единственный корень.
2. При $-2 \leq a < 0$ существуют два корня.
3. При $a = 0$ корней нет.
4. При $0 < a < 1,2$ существует единственный корень.
5. При $a = 1,2$ существуют два корня.
6. При $1,2 < a < 1,25$ существуют три корня.
7. При $a = 1,25$ существуют два корня.
8. При $a > 1,25$ существует единственный корень.
6. При $a \in \left\{ \frac{1-\sqrt{2}}{2}; 0; 1; \frac{1+\sqrt{2}}{2} \right\}$.

Ответы на самостоятельную работу 10

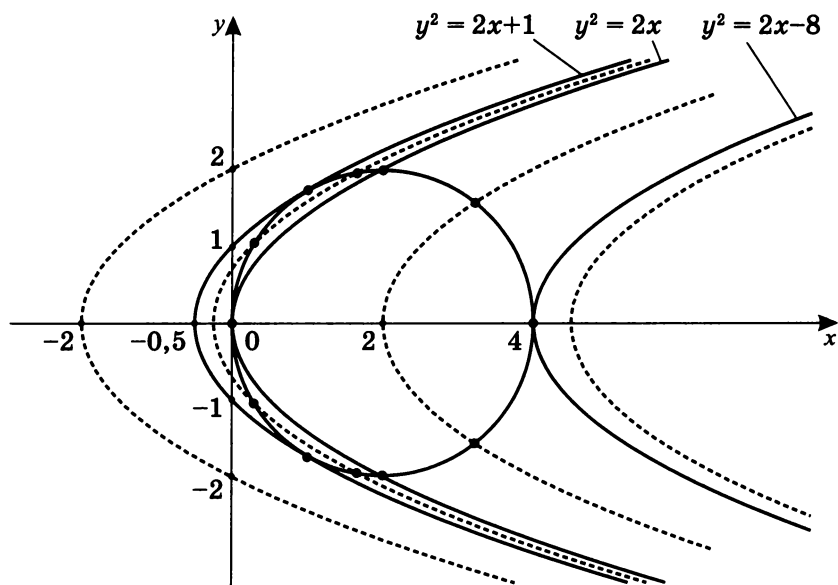
1. Сколько решений имеет система уравнений в зависимости от значения параметра b : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x^2 + b \end{cases}$?



Ответ: система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x^2 + b \end{cases}$ в зависимости от значения параметра b имеет:

1. При $b \in (-\infty; -4,25)$ — решений нет.
2. При $b = -4,25$ — два решения.
3. При $b \in (-4,25; -2)$ — четыре решения.
4. При $b = -2$ — три решения.
5. При $b \in (-2; 2)$ — два решения.
6. При $b = 2$ — одно решение.
7. При $b \in (2; \infty)$ — решений нет.

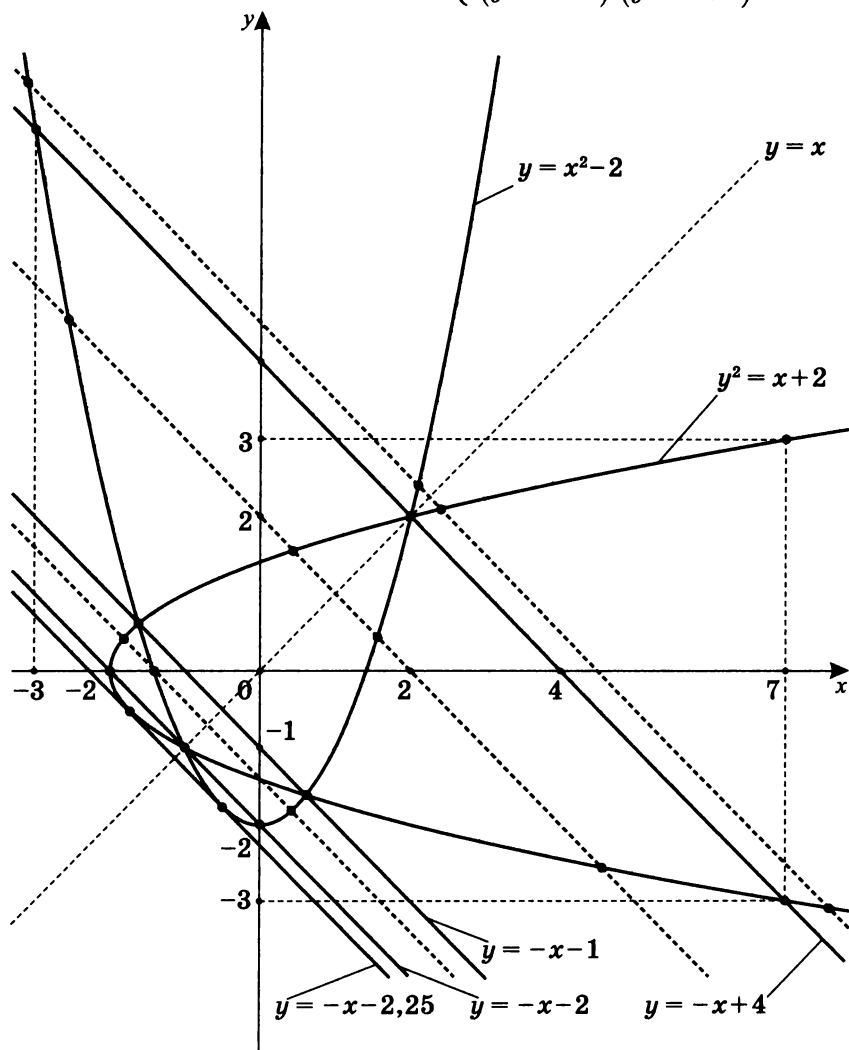
2. Сколько решений имеет система уравнений в зависимости от значения параметра m : $\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 4 \\ y^2 = 2x + m \end{cases}$?



Ответ: система уравнений $\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 4 \\ y^2 = 2x + m \end{cases}$ в зависимости от значения параметра m имеет:

1. При $m \in (-\infty; -8)$ — решений нет.
2. При $m = -8$ — одно решение.
3. При $m \in (-8; 0)$ — два решения.
4. При $m = 0$ — три решения.
5. При $m \in (0; 1)$ — четыре решения.
6. При $m = 1$ — два решения.
7. При $m \in (1; \infty)$ — решений нет.

3. Сколько решений имеет система уравнений в зависимости от значения параметра a : $\begin{cases} x + y = a \\ (y^2 - x - 2)(y - x^2 + 2) = 0 \end{cases}$?



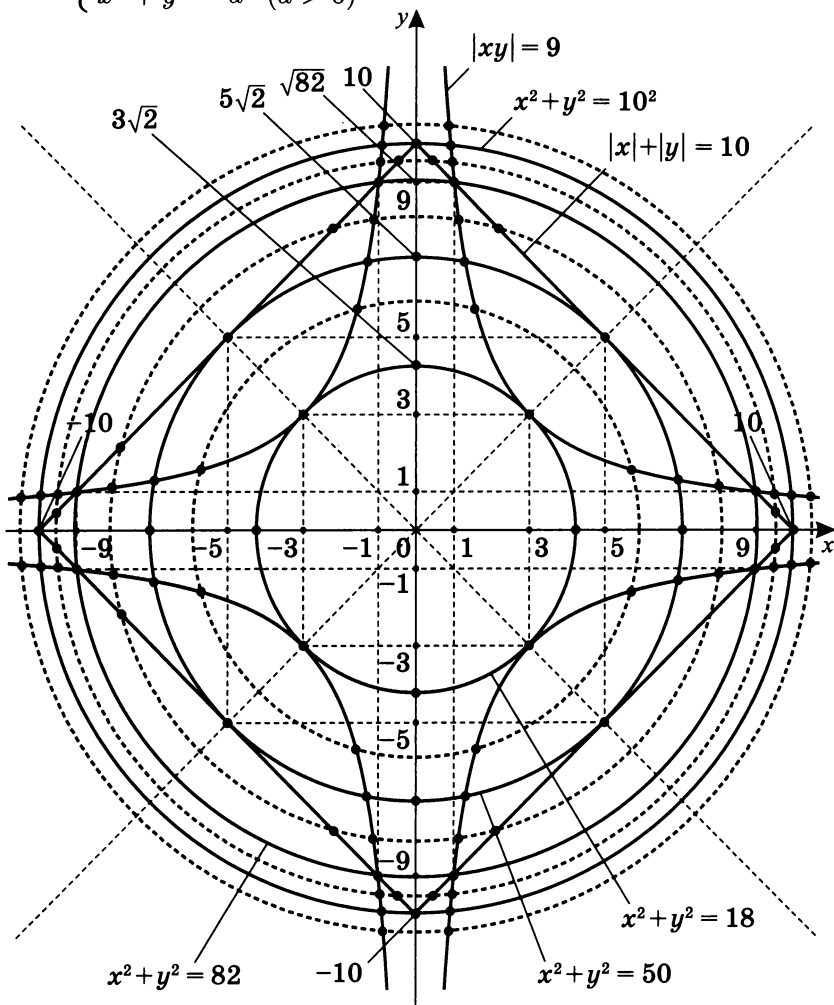
Ответ: система уравнений $\begin{cases} x + y = a \\ (y^2 - x - 2)(y - x^2 + 2) = 0 \end{cases}$

в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a \in (-\infty; -2,25)$ — решений нет.
2. При $a = -2,25$ — два решения.
3. При $a \in (-2,25; -2)$ — четыре решения.
4. При $a = -2$ — три решения.
5. При $a \in (-2; -1)$ — четыре решения.
6. При $a = -1$ — два решения.
7. При $a \in (-1; 4)$ — четыре решения.
8. При $a = 4$ — три решения.
9. При $a \in (4; \infty)$ — четыре решения.

4. Сколько решений имеет система уравнений в зависимости от положительного значения параметра a :

$$\begin{cases} (|x| + |y| - 10)(9 - |xy|) = 0 \\ x^2 + y^2 = a^2 \quad (a > 0) \end{cases} ?$$

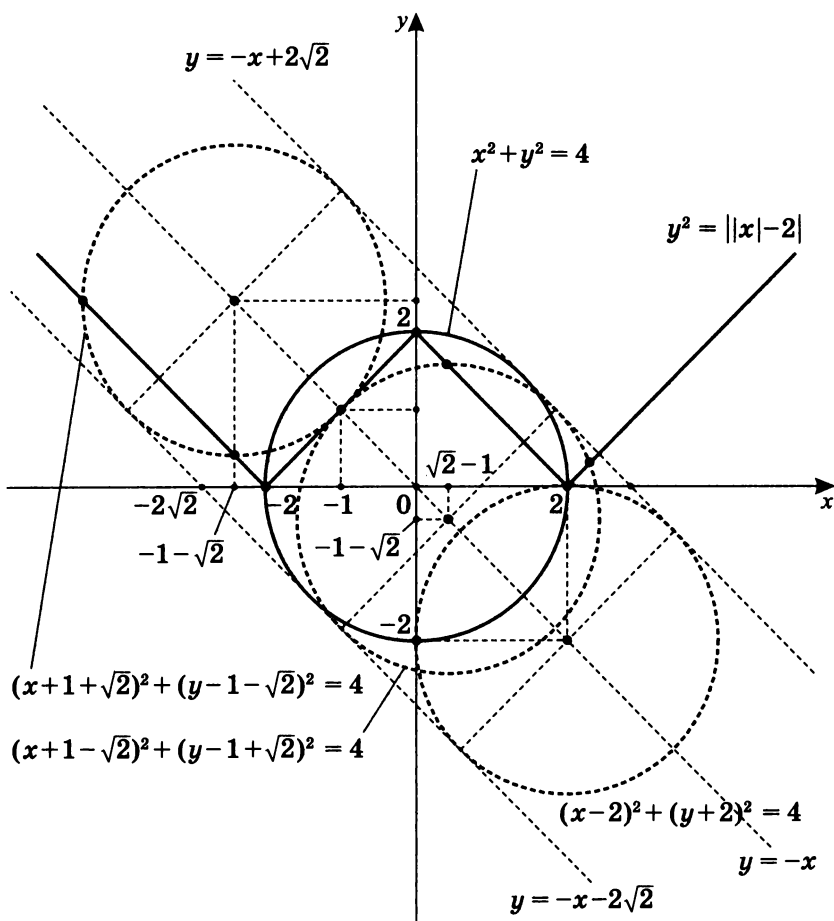


Ответ: система уравнений $\begin{cases} (|x| + |y| - 10)(9 - |x|) = 0 \\ x^2 + y^2 = a^2 \quad (a > 0) \end{cases}$

в зависимости от положительного значения параметра a имеет:

1. При $a \in (0; 3\sqrt{2})$ — решений нет.
2. При $a = 3\sqrt{2}$ — четыре решения.
3. При $a \in (3\sqrt{2}; 5\sqrt{2})$ — восемь решений.
4. При $a = 5\sqrt{2}$ — двенадцать решений.
5. При $a \in (5\sqrt{2}; \sqrt{82})$ — шестнадцать решений.
6. При $a = \sqrt{82}$ — восемь решений.
7. При $a \in (\sqrt{82}; 10)$ — шестнадцать решений.
8. При $a = 10$ — двенадцать решений.
9. При $a \in (10; \infty)$ — восемь решений.

5. Сколько решений имеет система уравнений в зависимости от значения параметра a : $\begin{cases} (x-a)^2 + (y+a)^2 = 4 \\ |x-2| = y \end{cases}$?



Ответ: система уравнений $\begin{cases} (x-a)^2 + (y+a)^2 = 4 \\ |x-2| = y \end{cases}$ в за-

висимости от значения параметра a имеет:

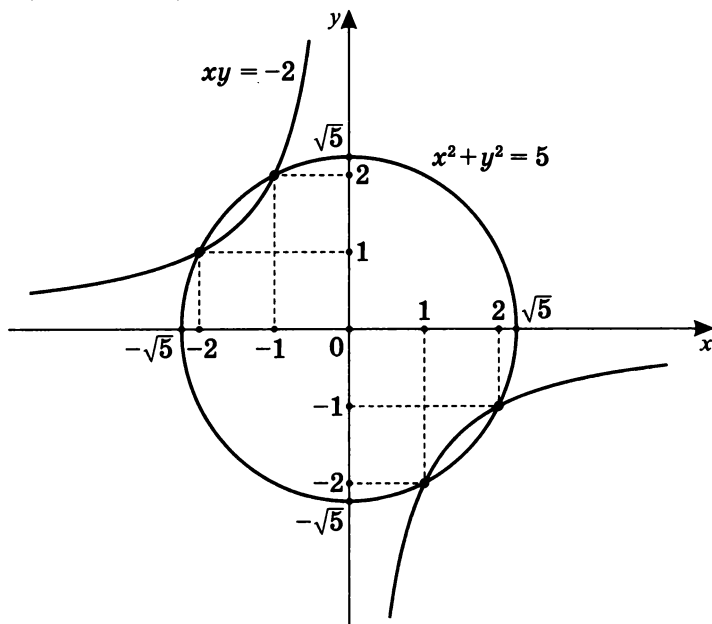
1. При $a \in (-\infty; -1 - \sqrt{2})$ — два решения.
2. При $a = -1 - \sqrt{2}$ — три решения.

3. При $a \in (-1 - \sqrt{2}; -2)$ — четыре решения.
4. При $a = -2$ — три решения.
5. При $a \in (-2; 0)$ — два решения.
6. При $a = 0$ — три решения.
7. При $a \in (0; \sqrt{2} - 1)$ — четыре решения.
8. При $a = \sqrt{2} - 1$ — три решения.
9. При $a \in (\sqrt{2} - 1; 2)$ — два решения.
10. При $a = 2$ — одно решение.
11. При $a \in (2; \infty)$ — решений нет.

Решение итоговой самостоятельной работы

I. 1. Графически решите уравнение с параметрами:

$$(x^2 + y^2 - 5) \cdot (xy + 2) = a.$$



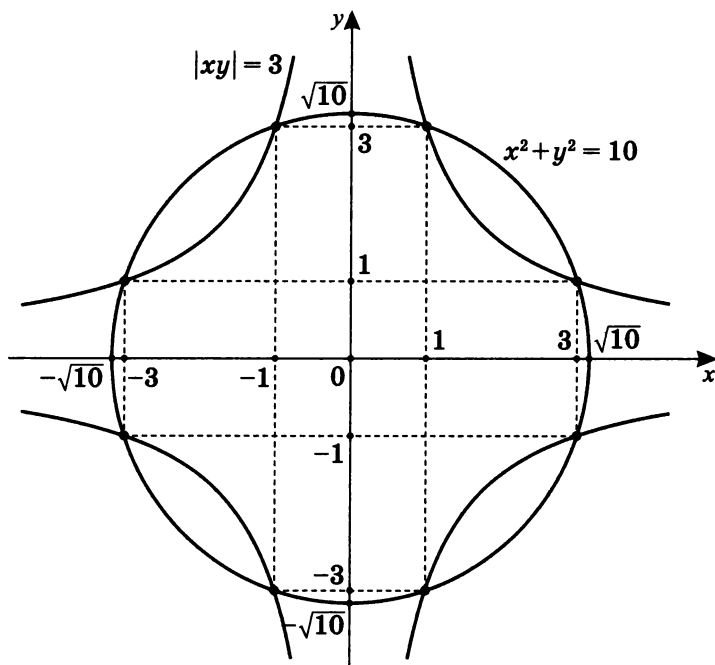
Ответ: уравнение $(x^2 + y^2 - 5) \cdot (xy + 2) = a$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a \in (-\infty; -\sqrt{5})$ — один корень.
2. При $a = -\sqrt{5}$ — два корня.
3. При $a \in (-\sqrt{5}; -2)$ — три корня.
4. При $a = -2$ — два корня.
5. При $a \in (-2; -1)$ — три корня.
6. При $a = -1$ — два корня.
7. При $a \in (-1; 0)$ — три корня.
8. При $a \in (0; 1)$ — три корня.
9. При $a = 1$ — два корня.
10. При $a \in (1; 2)$ — три корня.
11. При $a = 2$ — два корня.

12. При $a \in (2; \sqrt{5})$ — три корня.
 13. При $a = \sqrt{5}$ — два корня.
 14. При $a \in (\sqrt{5}; \infty)$ — один корень.

2. Графически решите уравнение с параметрами:

$$(x^2 + y^2 - 10) \cdot (|xy| - 3) = a.$$



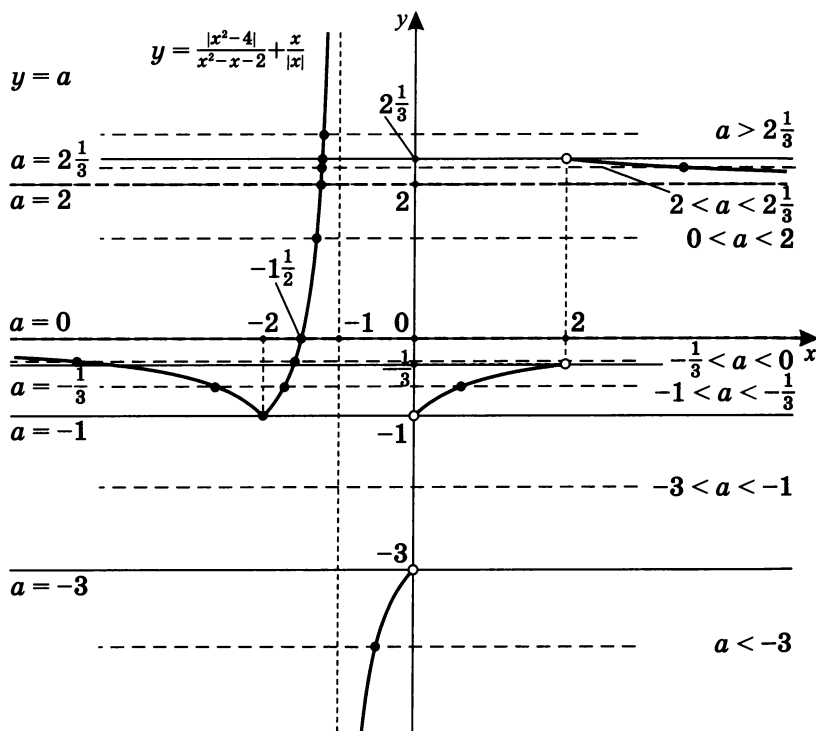
Ответ: уравнение $(x^2 + y^2 - 10) \cdot (|xy| - 3) = a$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a \in (-\infty; -\sqrt{10})$ — два корня.
2. При $a = -\sqrt{10}$ — три корня.
3. При $a \in (-\sqrt{10}; -3)$ — четыре корня.
4. При $a = -3$ — два корня.
5. При $a \in (-3; -1)$ — четыре корня.
6. При $a = -1$ — два корня.
7. При $a \in (-1; 0)$ — четыре корня.

8. При $a \in (0; 1)$ — четыре корня.
 9. При $a = 1$ — два корня.
 10. При $a \in (1; 3)$ — четыре корня.
 11. При $a = 3$ — два корня.
 12. При $a \in (3; \sqrt{10})$ — четыре корня.
 13. При $a = \sqrt{10}$ — три корня.
 14. При $a \in (\sqrt{10}; \infty)$ — два корня.
- II. 1. При $a \in (8 - 5\sqrt{2}; 4 - \sqrt{2}) \cup (4 + \sqrt{2}; 8 + 5\sqrt{2})$.
2. 1. При $a > 2$ корней нет.
 2. При $a = 2$ существуют два корня.
 3. При $1 < a < 2$ существуют четыре корня.
 4. При $a = 1$ существуют шесть корней.
 5. При $\frac{2}{5}\sqrt{5} < a < 1$ существуют восемь корней.
 6. При $a = \frac{2}{5}\sqrt{5}$ существуют четыре корня.
 7. При $a < \frac{2}{5}\sqrt{5}$ корней нет.
3. 1. При $a \in (3; 11)$ решений нет.
2. При $\begin{cases} a = 3 \\ a = 11 \end{cases}$ существует единственное решение.
 3. При $\begin{cases} a < 3 \\ a > 11 \end{cases}$ существуют два решения.
4. 1. При $a \in (-\infty; 3)$ решений нет.
2. При $a = 3$ существуют два решения.
 3. При $a > 3$ существуют четыре решения.
5. 1. При $a \in \left\{0; \pm \frac{\sqrt{2}}{4}\right\}$ существует единственное решение.
2. При $a \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ существуют два решения.
 3. При $a \in \left(-\infty; -\frac{2}{4}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{4}; \infty\right)$ решений нет.

III. 1. Сколько корней имеет уравнение в зависимости от значения параметра a : $a - \frac{x}{|x|} = \frac{|x^2-4|}{x^2-x-2}$?

Пусть $y = \frac{|x^2-4|}{x^2-x-2} + \frac{x}{|x|}$.



Ответ: уравнение $a - \frac{x}{|x|} = \frac{|x^2-4|}{x^2-x-2}$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a \in (-\infty; -3)$ — один корень.
2. При $a \in [-3; -1)$ — корней нет.
3. При $a = -1$ — один корень.
4. При $a \in (-1; -\frac{1}{3})$ — три корня.

5. При $a \in \left[-\frac{1}{3}; 0\right)$ — два корня.
6. При $a \in [0; 2]$ — один корень.
7. При $a \in \left(2; 2\frac{1}{3}\right)$ — два корня.
8. При $a \in \left[2\frac{1}{3}; \infty\right)$ — один корень.

2. Сколько корней имеет уравнение $a|x - 2| = \frac{5}{x+3}$ в зависимости от *положительного* значения параметра a : а) на $(-\infty; \infty)$; б) на $[-1; \infty)$?

Первый способ

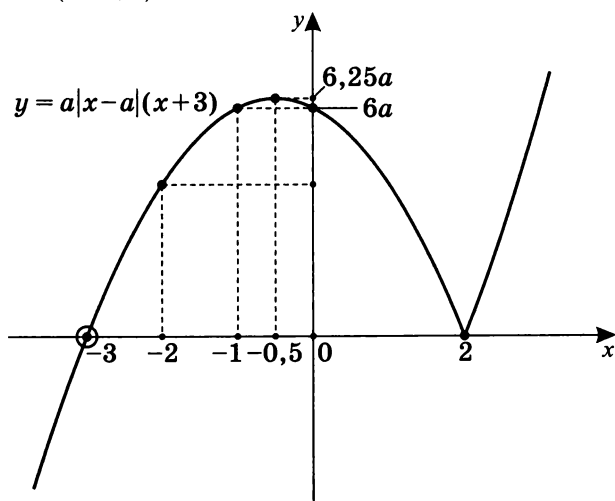
- а) Так как $x + 3 \neq 0$, то уравнение равносильно $a|x - 2|(x + 3) = 5$.

Пусть $f(x) = a|x - 2|(x + 3)$.

Так как $|x - 2| = \begin{cases} x - 2, & x \geq 2 \\ 2 - x, & x < 2 \end{cases}$, то

$$f(x) = \begin{cases} a(x^2 + x - 6), & x \geq 2 \\ -a(x^2 + x - 6), & x < 2 \end{cases}$$

Отметим, что $f(x) = -a((x + 0,5)^2 - 6,25)$ на $(-\infty; 2)$.



При пересечении графика уравнения $y = f(x)$ и прямой $y = 5$ получим:

1. Если $6,25a < 5$, т.е. $0 < a < 0,8$ — один корень.
2. Если $a = 0,8$ — два корня.
3. Если $a > 0,8$ — три корня.

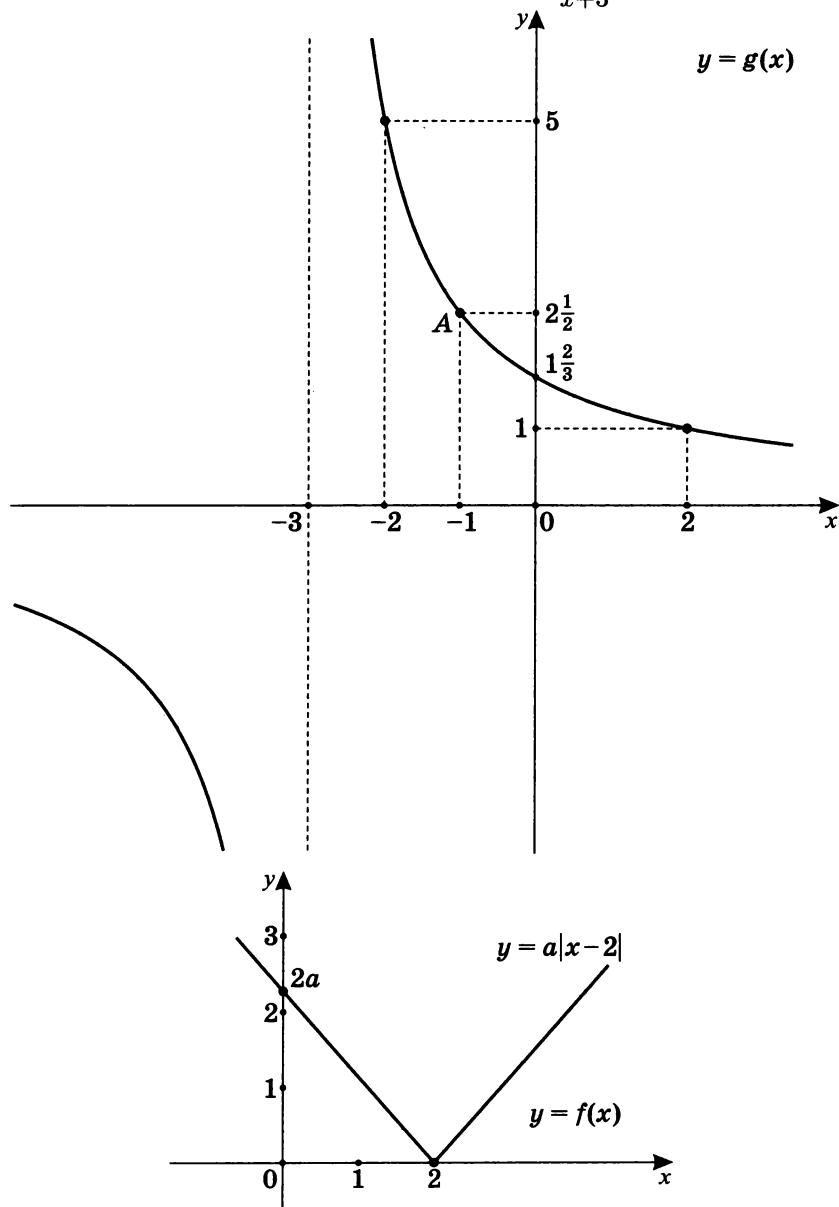
- б) Возможна и иная, более сложная постановка вопроса: сколько корней имеет уравнение $a|x - 2| = \frac{5}{x+3}$ в зависимости от положительного значения параметра a на $[-1; \infty)$?

Тогда ответ будет таким:

1. При $a \in \left(0; \frac{4}{5}\right)$ — один корень.
2. При $a = \frac{4}{5}$ — два корня.
3. При $a \in \left(\frac{4}{5}; \frac{5}{6}\right]$ — три корня.
4. При $a \in \left(\frac{5}{6}; \infty\right)$ — два корня.

Второй способ

Пусть $f(x) = a|x - 2|$, $g(x) = \frac{5}{x+3}$.



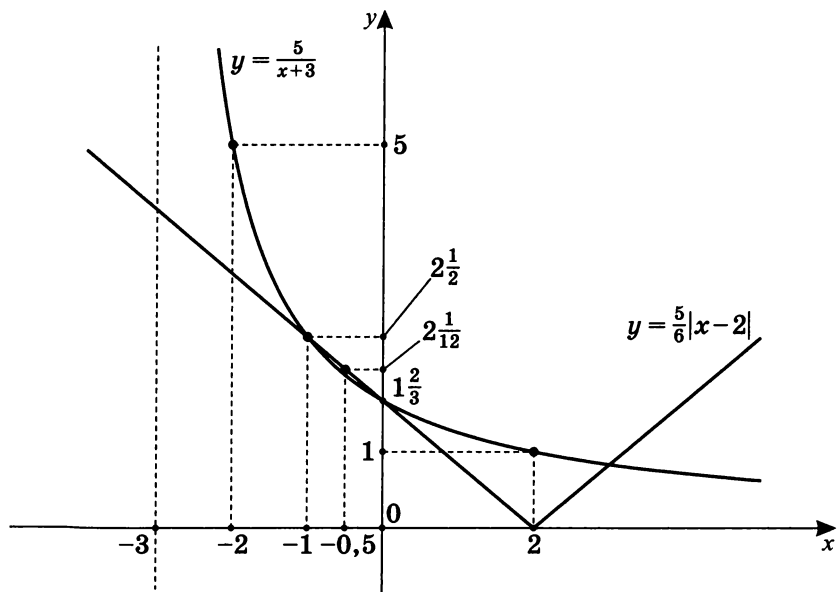
Прежде чем мы рассмотрим оба графика на одном чертеже, напишем уравнение прямой, проходящей через точки $(-1; 2\frac{1}{2})$ и $(0; 1\frac{2}{3})$.

$$\begin{cases} 2\frac{1}{2} = -k + b \\ 1\frac{2}{3} = k \cdot 0 + b \end{cases}; \quad \begin{cases} k = -\frac{5}{6} \\ b = 1\frac{2}{3} \end{cases},$$

значит $y = -\frac{5}{6}x + \frac{5}{3}$, или $y = -\frac{5}{6}(x - 2)$.

Таким образом, $y = -\frac{5}{6}(x - 2)$ — левая ветвь графика $y = \frac{5}{6}|x - 2|$.

Рассмотрим на одном чертеже графики $y = \frac{5}{x+3}$ и $y = \frac{5}{6}|x - 2|$.



Так как $x < 2$, то выясним, при каком значении параметра a прямая $y = a(2 - x)$ касается гиперболы $y = \frac{5}{x+3}$, т. е. решим уравнение $\frac{5}{x+3} = a(2 - x)$ и выясним, при каком a имеется только одно решение.

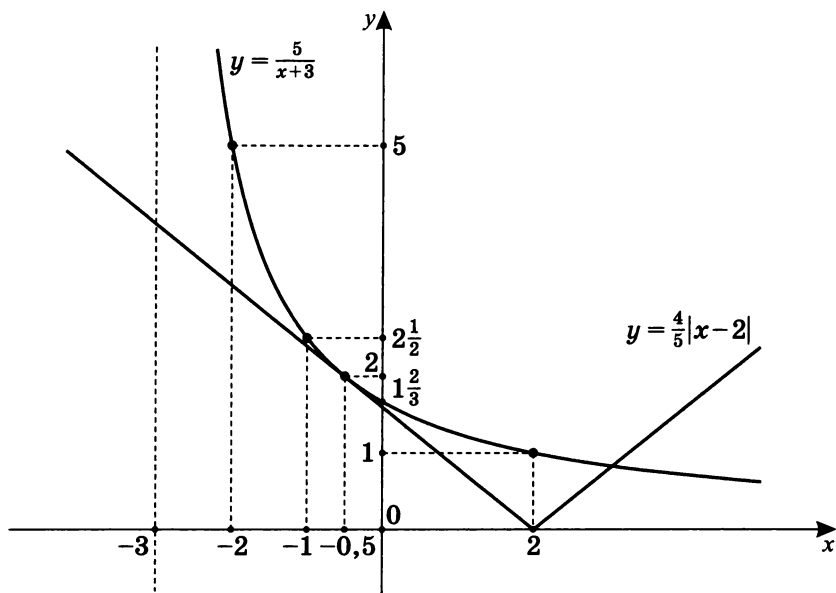
$$y = a(-x^2 - x + 6); \quad ax^2 + ax - 6a + 5 = 0;$$

$$D = a^2 + 24a^2 - 20a = 0;$$

$$25a^2 - 20a = 0; \quad \begin{cases} a = 0 \ (a > 0) \\ a = \frac{4}{5} \end{cases}.$$

Очевидно, что $x_0 = -\frac{b}{2a}$, т. е. $x = \frac{-a}{2a} = -\frac{1}{2}$,

$$\text{и } g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{-\frac{1}{2}+3} = 2.$$



В первичной постановке задачи ответ исходя из графиков будет таким:

1. При $a \in \left(0; \frac{4}{5}\right)$ — один корень.
2. При $a = \frac{4}{5}$ — два корня.
3. При $a \in \left(\frac{4}{5}; \infty\right)$ — три корня.

Учитывая более сложную постановку задачи и исходя из чертежей, можно записать ответ следующим образом.

Ответ: уравнение $a|x-2| = \frac{5}{x+3}$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a \in \left(0; \frac{4}{5}\right)$ — один корень.
2. При $a = \frac{4}{5}$ — два корня.
3. При $a \in \left(\frac{4}{5}; \frac{5}{6}\right]$ — три корня.
4. При $a \in \left(\frac{5}{6}; \infty\right)$ — два корня.

3. При каких значениях параметра b уравнение

$|x - b^2 + 4b - 2| + |x - b^2 + 2b + 3| = 2b - 5$ имеет хотя бы один корень на отрезке $[5; 23]$?

Обратим внимание на тот факт, что разность подмодульных значений равна правой части,

$$\text{т. е. } (x - b^2 + 4b - 2) - (x - b^2 + 2b + 3) = 2b - 5.$$

Тогда, полагая, что

$$x - b^2 + 4b - 2 = m, \quad \text{а} \quad x - b^2 + 2b + 3 = n,$$

получим другую запись исходного уравнения:

$$|m| + |n| = m - n.$$

$$\text{Так как } |m| + |n| = \begin{cases} m + n, & m \geq 0, n \geq 0 \\ -m + n, & m \leq 0, n \geq 0 \\ m - n, & m \geq 0, n \leq 0 \\ -m - n, & m \leq 0, n \leq 0 \end{cases},$$

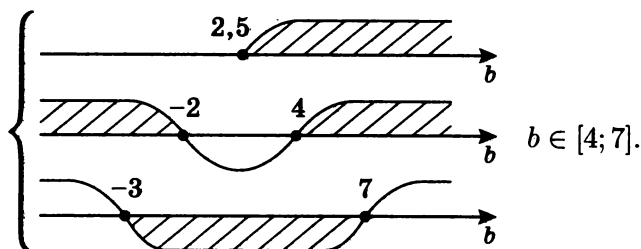
$$\text{то } |m| + |n| = m - n \text{ только при } \begin{cases} m \geq 0 \\ n \leq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Значит, } \begin{cases} x \geq b^2 - 4b + 2 \\ x \leq b^2 - 2b - 3 \end{cases},$$

$$\text{т. е. } b^2 - 4b + 2 \leq x \leq b^2 - 2b - 3.$$

Тогда получаем:

$$\begin{cases} b^2 - 4b + 2 \leq b^2 - 2b - 3 \\ b^2 - 2b - 3 \geq 5 \\ b^2 - 4b + 2 \leq 23 \end{cases} ; \quad \begin{cases} b \geq 2,5 \\ b^2 - 2b - 8 \geq 0 \\ b^2 - 4b - 21 \leq 0 \end{cases}$$



Примечание. Если было бы требование о том, чтобы все корни уравнения принадлежали отрезку $[5; 23]$, то должно было бы выполняться условие

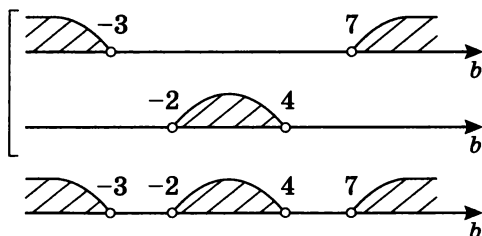
$$5 \leq b^2 - 4b + 2 \leq x \leq b^2 - 2b - 3 \leq 23,$$

$$\text{т. е. } \begin{cases} b^2 - 4b + 2 \leq b^2 - 2b - 3 \\ b^2 - 2b - 3 \leq 23 \\ b^2 - 4b + 2 \geq 5 \end{cases}$$

Но требование иное: необходимо найти значение параметра, при котором имеется хотя бы один корень, принадлежащий отрезку $[5; 23]$.

В этом случае проще вначале выяснить вопрос, при каких b корень уравнения не принадлежит отрезку $[5; 23]$:

$$\begin{cases} b^2 - 2b - 3 < 5 \\ b^2 - 4b + 2 > 23 \end{cases} ; \quad \begin{cases} (b - 4)(b + 2) < 0 \\ (b - 7)(b + 3) > 0 \end{cases}$$



Значит, при $b \in [-3; -2] \cup [4; 7]$ возможный корень есть.

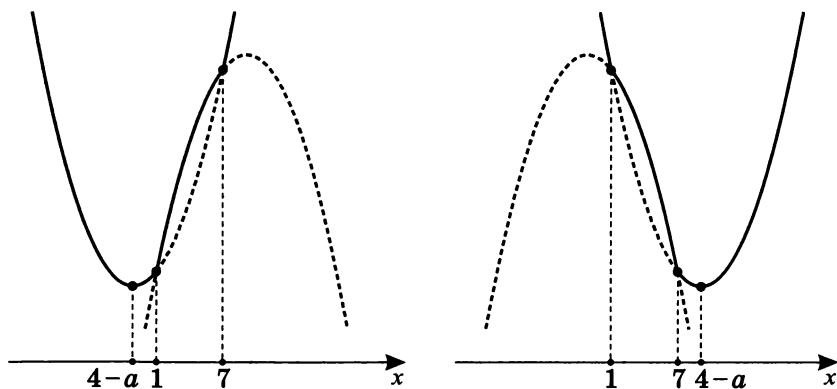
Учитывая, что $b^2 - 4b + 2 \leq b^2 - 2b - 3$, получим, что при $b \in [4; 7]$ существует хотя бы один корень на $[5; 23]$.

4. При каких значениях параметра a наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 7|$ больше 1?

$$t(x) = |x^2 - 8x + 7| = \begin{cases} x^2 - 8x + 7, & x \leq 1, x \geq 7 \\ -(x^2 - 8x + 7), & 1 \leq x \leq 7 \end{cases}.$$

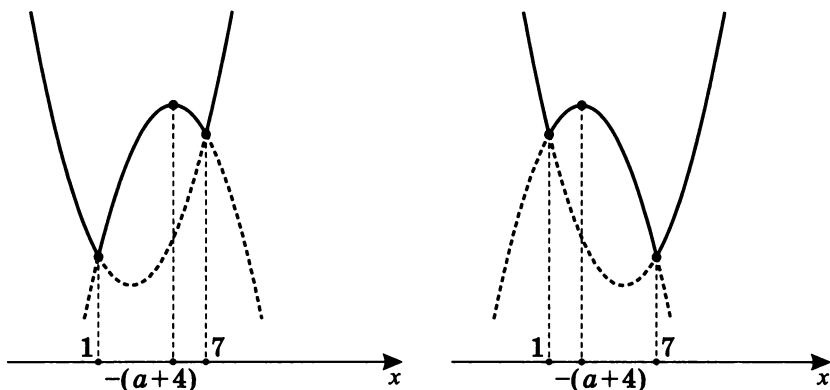
- а) Если $x^2 - 8x + 7 \geq 0$, т.е. $x \leq 1$ или $x \geq 7$,
то $f(x) = 2ax + x^2 - 8x + 7$;
 $f(x) = x^2 + 2x(a - 4) + 7$,
где $x_0 = 4 - a$ — абсцисса вершины параболы.

Возможный вид графика:



- б) Если $x^2 - 8x + 7 \leq 0$, т.е. $1 \leq x \leq 7$,
то $f(x) = -x^2 + 2(a + 4)x - 7$,
где $x_0 = -4 - a$ — абсцисса вершины параболы.

Возможный вид графика:



Из графиков очевидно следует, что наименьшее значение функция может принимать только в точках с абсциссами $x = 1$, $x = 7$ или $x = 4 - a$. Тогда

$$\begin{cases} f(1) > 1 \\ f(7) > 1 \\ f(4 - a) > 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2a > 1 \\ 14a > 1 \\ 2a(4 - a) + |(4 - a)^2 - 8(4 - a) + 7| > 1 \end{cases};$$

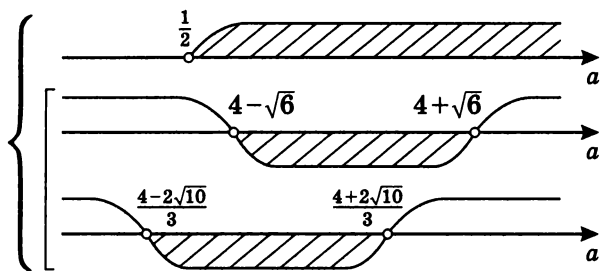
$$\begin{cases} a > \frac{1}{2} \\ 2a^2 - 8a + 1 < |a^2 - 9| \end{cases}.$$

Известно второе свойство модульных неравенств:

$$|\alpha| > \beta \iff \begin{cases} \alpha > \beta \\ \alpha < -\beta \end{cases}.$$

Используя его, получим:

$$\begin{cases} a > \frac{1}{2} \\ \begin{cases} a^2 - 9 > 2a^2 - 8a + 1 \\ a^2 - 9 < -2a^2 + 8a - 1 \end{cases} \end{cases}; \quad \begin{cases} a > \frac{1}{2} \\ \begin{cases} a^2 - 8a + 10 < 0 \\ 3a^2 - 8a - 8 < 0 \end{cases} \end{cases}$$



Значит, при $a \in \left(\frac{1}{2}; 4 + \sqrt{6}\right)$ наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 7|$ больше 1.

5*. При каких значениях x неравенство

$(a+2)x^3 - (1+2a)x^2 - 6x + a^2 + 4a - 5 > 0$ справедливо для $a \in [-2; 1]$?

Так как корни данного неравенства есть делители $a^2 + 4a - 5 = (a-1)(a+5)$, то проверим корень $x = a - 1$. Действительно,

$$\begin{aligned} f(a-1) &= \\ &= (a+2)(a-1)^3 - (1+2a)(a-1)^2 - 6(a-1) + (a-1)(a+5) = \\ &= (a-1)\left((a+2)(a-1)^2 - (1+2a)(a-1) - 6 + a + 5\right) = \\ &= (a-1)\left((a+2)(a-1)^2 - (1+2a)(a-1) + a - 1\right), \\ \text{т. е. } f(x) &= \left(x - (a-1)\right)\left((a+2)x^2 - (1+2a)x + a - 1\right). \end{aligned}$$

Очевидно, что из предыдущего разложения следует, что $x = a - 1$ — корень двойной кратности.

Для $(a+2)x^2 - (1+2a)x + a - 1 = 0$

$$D = (1+2a)^2 - 4(a+2)(a-1) = 9,$$

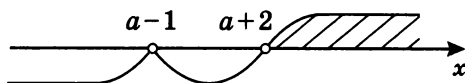
$$\text{т. е. } \begin{cases} x = \frac{1+2a+3}{2} = a+2 \\ x = \frac{1+2a-3}{2} = a-1 \end{cases}.$$

Тогда неравенство

$$(a+2)x^3 - (1+2a)x^2 - 6x + a^2 + 4a - 5 > 0$$

имеет вид: $(x - (a-1))^2 (x - (a+2)) > 0$

($a+2 > a-1$, так как $2 > -1$).



Значит, $x \in (0; 3)$, так как $-2 \leq a \leq 1$.

6*. Решите уравнение $(x-1)\log_3 x = \frac{x+1}{2}$.

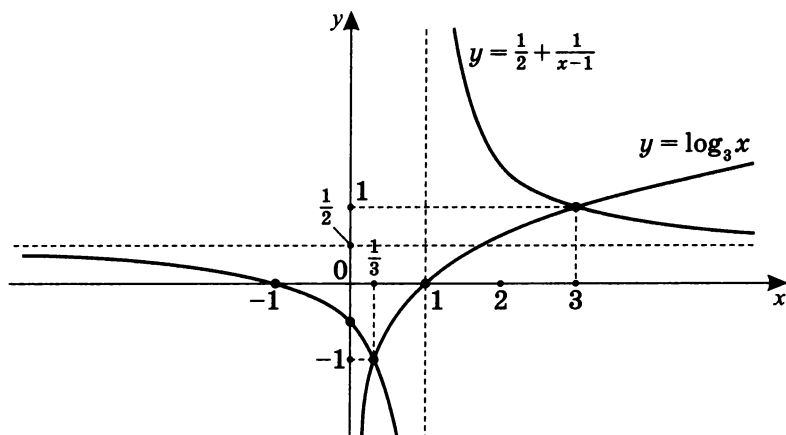
а) Пусть $x = 1$, тогда $0 = 1$ — ложь.

б) Пусть $x \neq 1$, тогда $\log_3 x = \frac{x+1}{2(x-1)}$.

Попробуем решить это уравнение графически, так как для трансцендентных уравнений общих методов решения нет.

Построим график $t(x) = \frac{x+1}{2(x-1)}$.

$$\frac{x+1}{2(x-1)} = \frac{x-1+2}{2(x-1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{x-1}.$$



Из графиков следует, что есть две общие точки, т.е. два решения.

Так как $y = \log_3 x$, то проверим целые значения логарифма.

Пусть $x = 3$, тогда $\log_3 3 = 1$.

$t(3) = \frac{3+1}{2 \cdot (3-1)} = 1$, значит, $x = 3$ — корень исходного уравнения.

Пусть $x = \frac{1}{3}$, тогда $\log_3 \frac{1}{3} = -1$.

$t\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{3}+1}{2 \cdot \left(\frac{1}{3}-1\right)} = -1$, значит, $x = \frac{1}{3}$ — также корень исходного уравнения.

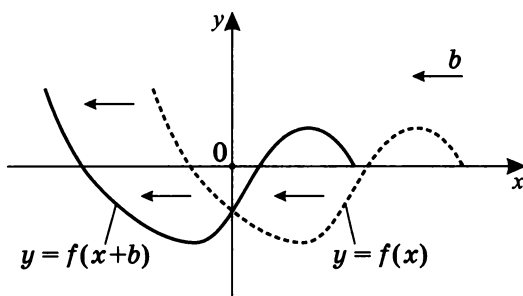
Ответ: $\left\{\frac{1}{3}; 3\right\}$.

Основные виды преобразований графиков

Очевидно, что при преобразовании вида $y = f(x + b)$ графика функции $y = f(x)$ область изменения остается прежней, а конечная область определения сдвигается на $|b|$ вправо при $b < 0$ и влево при $b > 0$. Если область определения — $(-\infty; \infty)$, то изменений нет.

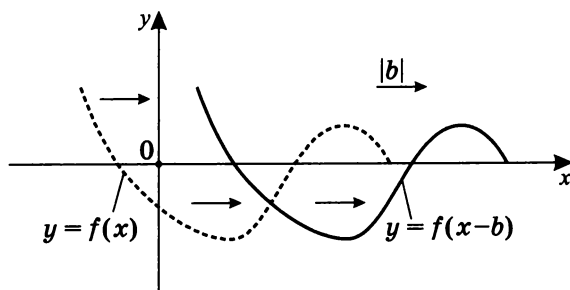
1. $y = f(x + b)$
($b > 0$)

График получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox на $|b|$ единиц *влево*.



2. $y = f(x + b)$
($b < 0$)

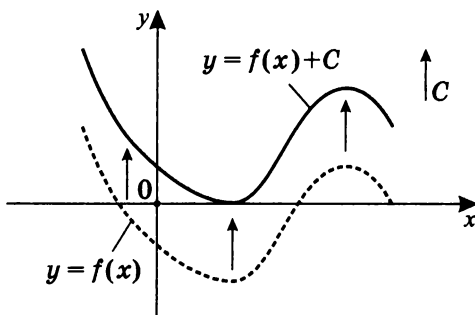
График получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox на $|b|$ единиц *вправо*.



Очевидно, что при преобразовании вида $y = f(x) + C$ графика функции $y = f(x)$ область определения остается прежней, а конечная область изменений сдвигается по сравнению с $y = f(x)$ на $|C|$ согласно знаку. Если область изменений — $(-\infty; \infty)$, то она сохраняется.

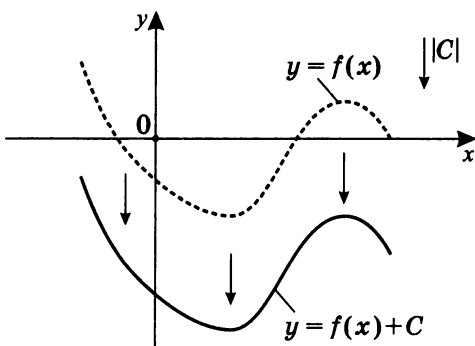
3. $y = f(x) + C$
($C > 0$)

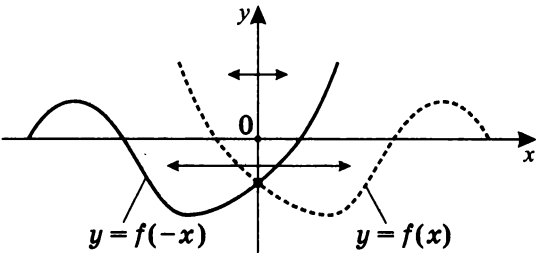
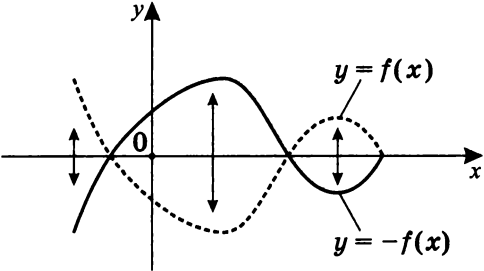
График получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy на $|C|$ единиц вверх.



4. $y = f(x) + C$
($C < 0$)

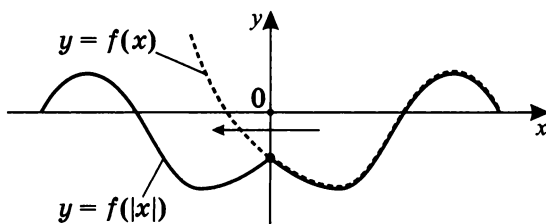
График получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy на $|C|$ единиц вниз.



5. $y = f(-x)$	<p>График получается симметричным отражением относительно оси Oy.</p>  <p>Точка пересечения графика $y = f(x)$ с осью Oy остается неизменной.</p>
6. $y = -f(x)$	<p>График получается симметричным отражением относительно оси Ox.</p>  <p>Точки пересечения графика $f(x)$ с осью Ox остаются неизменными.</p>

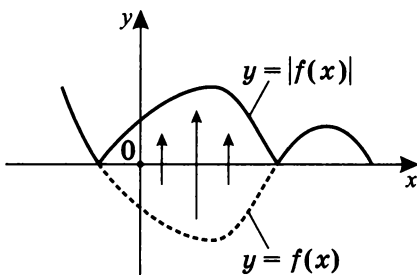
7. $y = f(|x|)$

Вся часть графика функции $y = f(x)$, лежащая левее оси Oy , удаляется, а вся часть, лежащая правее оси Oy и на ней, остается без изменений, а кроме того, симметрично отражается относительно оси Oy в левую полуплоскость.



8. $y = |f(x)|$

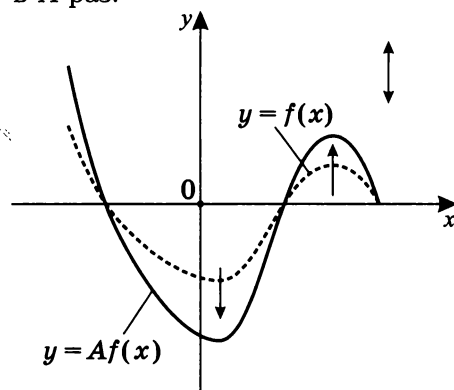
Вся часть графика функции $y = f(x)$, лежащая выше оси Ox и на оси, остается без изменения, а лежащая ниже оси Ox — симметрично отражается относительно этой оси вверх.



Итоговый график располагается в верхней полуплоскости.

9. $y = Af(x)$
($A > 1$)

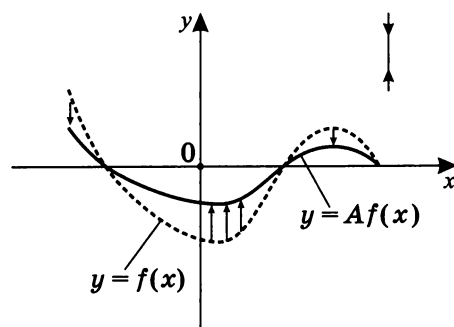
График получается растяжением графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy в A раз.



$D(f(x)) = D(Af(x))$. Точки пересечения графика с осью Ox остаются неизменными.

10. $y = Af(x)$
($0 < A < 1$)

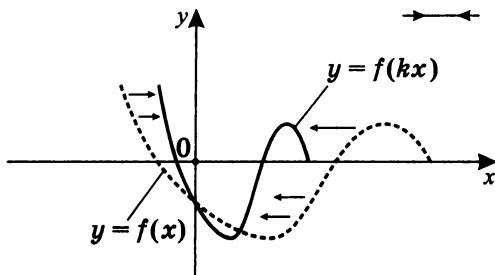
График получается сжатием графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy в $\frac{1}{A}$ раз.



$D(f(x)) = D(Af(x))$. Точки пересечения графика с осью Ox остаются неизменными.

11. $y = f(kx)$
($k > 1$)

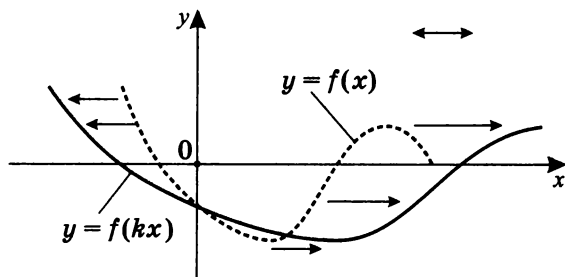
График получается сжатием графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox в k раз.



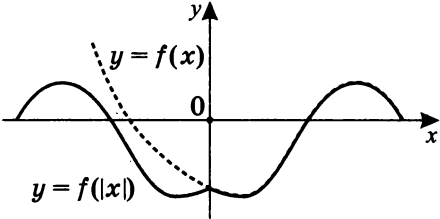
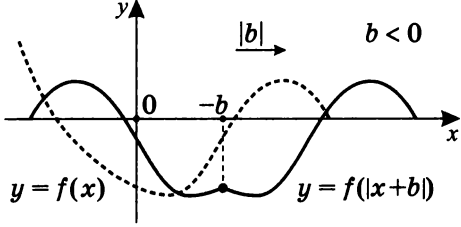
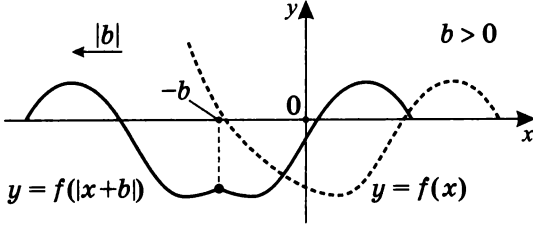
$E(f(x)) = E(f(kx))$. Точки пересечения графика с осью Oy остаются неизменными.

12. $y = f(kx)$
($0 < k < 1$)

График получается растяжением графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox в $\frac{1}{k}$ раз.

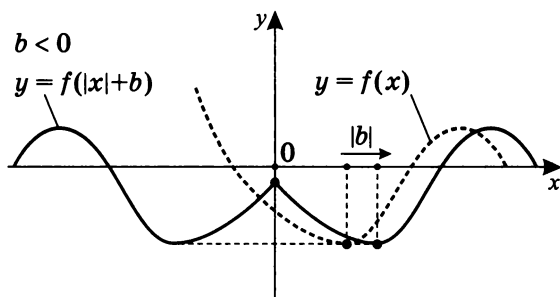


$E(f(x)) = E(f(kx))$. Точки пересечения графика с осью Oy остаются неизменными.

$y = f(x + b)$	<p>Для построения данного графика сначала построим график $y = f(x)$:</p> 
<p>13. $y = f(x + b)$ ($b < 0$)</p>	<p>График $y = f(x)$ сдвинем вправо на b, если $b < 0$</p> 
<p>14. $y = f(x + b)$ ($b > 0$)</p>	<p>График $y = f(x)$ сдвинем влево на b, если $b > 0$</p> 

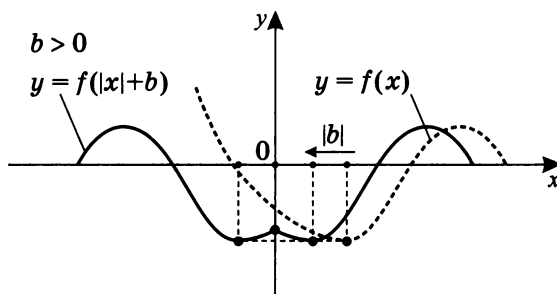
15. $y = f(|x|+b)$
($b < 0$)

Сдвиг графика $y = f(x)$ вправо на $|b|$ и отражение полученного графика, находящегося в правой полуплоскости ($x \geq 0$), в левую полуплоскость. Затем склейка обеих частей графика.



16. $y = f(|x|+b)$
($b > 0$)

Сдвиг графика $y = f(x)$ влево на $|b|$ и отражение полученного графика, находящегося в левой полуплоскости ($x < 0$), в правую полуплоскость. Затем склейка обеих частей графика.



Содержание

Программы элективных курсов для учащихся 10-11 классов.....	5
Квадратичная функция	7
Построение графиков квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) методом сечения	7
Упражнения 1	24
Ответы на упражнения 1	25
Упражнения 2	27
Ответы на упражнения 2	28
Практикум 1	31
Решение практикума 1	32
Тренировочная работа 1.....	51
Решение тренировочной работы 1.....	53
Метод преобразований	73
Построение графика функции $y = f(x + b)$	73
Графики основных элементарных функций.....	77
Практикум 2	80
Решение практикума 2	81
Построение графика функции $y = f(x) + C$	91
Практикум 3	94
Решение практикума 3	95
Преобразование графиков с использованием различных видов симметрии	104
Практикум 4	113
Решение практикума 4	114
Построение графика функции $y = Af(x)$ ($A > 0$).....	120
Практикум 5 (Примеры преобразований графиков вида $y = Af(x)$)	122
Построение графика функции $y = f(kx)$ ($k > 0$)	125
Практикум 6 (Примеры преобразований графиков вида $y = f(kx)$)	127
Преобразование графиков вида $y = f(x + b)$, $y = f(x + b)$	132
Практикум 7 (Использование комбинированных преобразований при построении графиков функций).....	139
Решение практикума 7	140
Самостоятельная работа 1	146
Самостоятельная работа 2	147
Самостоятельная работа 3	147
Самостоятельная работа 4	148

Самостоятельная работа 5	149
Практикум 8	150
Решение практикума 8	151
Самостоятельная работа 6	154
Домашняя тренировочная работа	156
Решение домашней тренировочной работы.	157
Тренировочная работа 2.	171
Решение тренировочной работы 2. Графики	172
Ответы на тренировочную работу 2. Параметры	182
Графическое решение уравнений и систем	185
Практикум 9	185
Решение практикума 9	186
Тренировочная работа 3.	198
Решение тренировочной работы 3	199
Самостоятельная работа 7	218
Графическое решение уравнений и систем с параметром.	220
Практикум 10	220
Решение практикума 10	221
Тренировочная работа 4.	233
Решение тренировочной работы 4	237
Самостоятельная работа 8	250
Практикум 11	251
Решение практикума 11	252
Домашняя творческая работа-исследование	275
Самостоятельная работа 9	275
Практикум 12	276
Решение практикума 12	277
Решение домашней творческой работы-исследования	290
Самостоятельная работа 10	306
Итоговая самостоятельная работа	307
Ответы	309
Ответы на самостоятельную работу 1	309
Ответы на самостоятельную работу 2	313
Ответы на самостоятельную работу 3	317
Ответы на самостоятельную работу 4	320
Ответы на самостоятельную работу 5	322
Ответы на самостоятельную работу 6	326
Решение самостоятельной работы 7	332
Ответы на самостоятельную работу 8	346
Ответы на самостоятельную работу 9	354
Ответы на самостоятельную работу 10	356
Решение итоговой самостоятельной работы	365
Основные виды преобразований графиков	381

Учебное издание

Шахмейстер Александр Хаймович

**ПОСТРОЕНИЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
ГРАФИКОВ. ПАРАМЕТРЫ.**

ЧАСТЬ 2. НЕЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ И УРАВНЕНИЯ

**ЧАСТЬ 3. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ
УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ**

Научный редактор серии *А. В. Семенов*

Художник *Ю. Н. Куликов*

Компьютерная Верстка *С. С. Афонин*

Корректоры *Е. Г. Никитина, С. С. Афонин, О. А. Войтишек*

По вопросам приобретения просьба обращаться:

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПЕТРОГЛИФ»

Тел.: (812) 943-8076; E-mail: spb@petroglyph.ru

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВИКТОРИЯ ПЛЮС»

В Санкт-Петербурге: (812) 292-3660, 292-3661

В Москве (филиал): (499) 488-3005

E-mail: victory@mailbox.alkor.ru; www.victory.sp.ru

ИЗДАТЕЛЬСТВО МЦНМО

119002, Москва, Б. Власьевский пер., 11.

Тел.: (495) 745-8031; факс: (499) 795-1015.

E-mail: biblio@mccme.ru; www.mccme.ru.

Налоговая льгота — ОКП 005-93-95-3005

Подписано к печати 12.08.2015 г. Формат 60х90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объем 24,5 печ. л. Тираж 1500 экз. Заказ № 576.

Отпечатано в «Академиздатцентр «Наука» РАН»,
ОП Производственно-издательски» комбинат «ВИНИТИ» – «Наука»,
140014, Московская обл., г. Люберцы, Октябрьский пр-т, д. 403.
Тел./факс: (495) 554-21-86, (495) 554-25-97, (495) 974-69-76.

Перед вами серия книг практически по всем разделам школьного курса математики.

По существу это энциклопедия различных методов решения задач, которые чаще всего встречаются непосредственно в школьном курсе.

Это прекрасные самоучители, которые позволят ученикам и абитуриентам без репетитора подготовиться к экзаменам.

Естественная логика построения материала «от простого к сложному» позволит учителю использовать эти книги для дифференцированной работы с учениками различного уровня подготовки.

Желательно, чтобы работа с материалами этой серии книг начиналась уже с 7, 8 класса и была постоянной и планомерной, тогда она даст наибольший эффект.

Б. Г. Зив.

Серия «МАТЕМАТИКА · ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ»

1. Дроби.
2. Корни.
3. Уравнения.
4. Дробно-рациональные неравенства.
5. Системы уравнений.
6. Иррациональные уравнения и неравенства.
7. Множества. Функции. Последовательности. Прогрессии.
8. Логарифмы.
9. Тригонометрия.
10. Построение графиков функций элементарными методами.
11. Построение и преобразования графиков. Параметры. (в 3-х книгах)
12. Уравнения и неравенства с параметрами.
13. Задачи с параметрами на экзаменах.
14. Введение в математический анализ.
15. Комплексные числа.
16. Комбинаторика. Статистика. Вероятность.
17. Геометрические задачи на экзаменах. Часть 1. Планиметрия.
18. Геометрические задачи на экзаменах. Часть 2. Стереометрия. Часть 3. Векторы.

ISBN 978-5-4439-0348-4



ЧАСТЬ 2. НЕЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ И УРАВНЕНИЯ
ЧАСТЬ 3. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ
И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ

ПОСТРОЕНИЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
ГРАФИКОВ. ПАРАМЕТРЫ

А. Х. Шахмейстер